arXiv:2601.17861v1 [math.DG] 25 Jan 2026

涡环流形作为余伴随轨道

Ioana Ciuclea[1], Cornelia Vizman[2]

摘要

我们研究保面积平面微分同胚群的一类余伴随轨道，它们由涡旋环构成，即平面中的闭曲线，并装饰有允许存在零点的 1-形式（涡量密度）。

关键词： 余伴随轨道，涡旋环，哈密顿群

1 引言

理想流体的欧拉方程，$\dot{\mathrm{v}} + \nabla_{\mathrm{v}}\mathrm{v} = -\nabla p$，其中 $\operatorname{div}\mathrm{v} = 0$，$\mathrm{v}$ 表示流体速度，p 表示压力，是保体积微分同胚群 $[1, 4]$ 上的测地线方程。特别地，涡量 $\operatorname{curl}\mathrm{v}$ 被限制在该群的一个余伴随轨道上。本文聚焦于二维情形中支集为一维的奇异涡量。更确切地说，我们研究平面保面积微分同胚群的一类余伴随轨道，它们由涡旋环构成，且涡量密度允许有零点。这里，保面积微分同胚群被认作 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$，即 $\mathbb{R}^2$的紧支撑哈密顿微分同胚群。其李代数可视为 $\mathbb{R}^2$ 上紧支撑光滑函数组成的空间，而其对偶则是分布空间。

涡旋环是涡片的二维版本（见 [2, 6]）。涡旋环是由以下元素构成的配对：$(C,\ \beta_C)$，其中C 表示一条闭平面曲线，β_C 表示体积形式（其涡量密度）：

$$\langle (C, \beta_C), h\rangle = \int_C h\beta_C, \quad h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2).$$

我们用 $\mathcal{O}_{\mathrm{w}}^a$ 表示具有相同围成面积 a 和相同总涡量 $\mathrm{w} = \int_C \beta_C$ 的涡旋环集合。这些数据构成了余伴随 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 作用于涡旋环上的一组完备不变量。这些余伴随轨道在 [5]中有所描述（另见 [3]）。

本文将涡旋环的研究扩展至涡量密度具有有限个非退化零点的情形。这类涡旋环是由以下元素构成的配对：$(C,\ \beta_C)$，其中 C是一条定向闭平面曲线，β_C 是 C 上的一个 1-形式，且具有有限个非退化零点（即莫尔斯形式）。选取一个零点作为“起点”，便可将它们视为一个 k 元组 $(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_k)$，并引入沿环的 k 部分涡量 $\mathrm{w}_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \beta_C$，将其视为一个 k 元组 $\bar{\mathrm{w}} = (\mathrm{w}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathrm{w}_k)$。我们用 $\mathcal{O}_{\bar{\mathrm{w}}}^a$ 表示具有相同围成面积 a 和相同 $\bar{\mathrm{w}}$ 的涡旋环集合，因为这些数据构成了余伴随 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 作用于涡旋环上的一组完备不变量。

令 $(S^1,\ \beta)$ 为涡旋环 $(C,\ \beta_C)$ 的一个模型。它与典范面积形式 ω一起，在围成固定面积的嵌入流形上定义了一个闭2-形式

[1]蒂米什瓦拉西部大学，300223-蒂米什瓦拉，罗马尼亚。 ioana.ciuclea@e-uvt.ro[2]蒂米什瓦拉西部大学，300223-蒂米什瓦拉，罗马尼亚。 cornelia.vizman@e-uvt.ro

$\mathrm{Emb}_a(S^1,\ \mathbb{R}^2)$,

$$\Omega_f(u_f, v_f) = \int_{S^1} \omega(u_f, v_f)\beta,$$

当 β 为体积形式时，该形式不再是辛形式。在这种情况下，余伴随轨道 $\mathcal{O}^a_{\mathsf{w}}$可识别为商流形 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)/\mathrm{Rot}(S^1)$，它可通过 Marsden-Weinstein 理想流体对偶对 [13]中的辛约化获得。

在本文中，我们证明，当 β 为 Morse 1-形式时，Ω 是辛的（命题 3.2）。当部分涡量不具有旋转对称性时，余伴随轨道 $\mathcal{O}^a_{\mathsf{w}}$ 可识别为 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)$，且 Ω 是其 Kirillov-Kostant-Souriau（KKS）辛形式（备注 4.6）。当存在 $\ell\mathsf{w}$ 的一个（最小）阶为 $-$ 的旋转对称性时，余伴随轨道 $\mathcal{O}^a_{\mathsf{w}}$ 可识别为商流形 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}$ （推论 4.5），其中 $\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 表示阶为 k/ℓ 的（离散）循环群，而 KKS 辛形式由 Ω 下降得到。

本文所考虑的涡旋环类似于 [3] 中的带基点涡环。这些是结合了点涡旋和涡旋环特征的奇异涡量。更准确地说，它们是三元组（C，β_C，（x_1，……，x_k）），其中 C 是一条闭平面曲线，β_C 是处处非零的涡量密度，而（x_1，……，x_k）是附着在该涡旋环上的点涡旋：

$$\langle (C, \beta_C, (x_1, \ldots, x_k)), h)\rangle = \int_C h\beta_C + \sum_{i=1}^{k} \Gamma_i h(x_i), \quad h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$$

其中，Γ_i 表示点 x_i的涡量。点涡旋沿该涡旋环引入部分涡量，即 $\mathsf{w}_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \beta_C$。我们将具有相同围成面积 a 和相同部分涡量的带基点涡环集合记为 $\mathcal{O}^a_{\mathsf{w}}$。带基点涡环的模型是一个三元组 $\big(S^1,\ \beta,\ (t_1,\ \ldots\ldots,\ t_k)\big)$，其中（$t_1$，……，$t_k$）表示圆上对应于涡旋环上点涡旋的点。闭2-形式

$$\Omega^\Gamma = \Omega + \sum_{i=1}^{k} \Gamma_i \,\mathrm{ev}_{t_i}^*\,\omega$$

其中，$\mathrm{ev}_{t_i} : \mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ 是在圆上的点 t_i 处的求值映射，是 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)$ 上的辛形式。如果涡量（Γ_i）和（w_i）没有联合旋转对称性，则余伴随轨道可识别为 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)$，而 Ω^Γ 是其 KKS 辛形式。如果涡量（Γ_i）和（w_i）具有步长为 ℓ 的联合旋转对称性，则余伴随轨道$\mathcal{O}^a_{\mathsf{w}}$ 可识别为商空间 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}$，其 KKS 辛形式由 Ω^Γ下降得到。

因此，我们指出，由围合固定面积且具有部分涡量的涡旋环组成的流形 $\mathcal{O}^a_{\mathsf{w}}$，可通过与商流形 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 的识别，实现为 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 的两个不同余伴随轨道。如果部分涡量源于附着在涡旋环上的点涡旋，则 KKS 辛形式由 Ω^Γ下降得到。如果部分涡量源于涡量密度具有孤立零点，则 KKS 辛形式由 Ω 下降得到。换言之，商流形 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 参数化了 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 的两个不同余伴随轨道，这两个轨道由不同类型的涡旋环组成，并具有两种不同的 KKS 辛形式。

2 涡旋环流形

我们考虑这一对 $(S^1,\ \beta)$，其中 S^1 表示定向单位圆，而 $\beta \in \Omega^1(S^1)$ 是一个具有非退化零点的 1-形式（即莫尔斯形式）。我们用 $Z(\beta)$ 表示它的零点集。作为

紧空间上的 Morse 引理的推论， β 的零点是孤立且有限的。根据 Poincar´e-Hopf 引理，我们推得 β 的零点个数必须为偶数。将 S^1 与商空间 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$等同后，我们便得到零点的自然排序：可将它们视为一个 k-元组 $\bar{t} = (t_1, \ldots\ldots, t_k)$，其中 $0 \le t_1 \le \cdots \le t_k < 2\pi$。我们作如下记号：

$$\mathsf{w} := \int_{S^1} \beta, \quad \mathsf{w}_i := \int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta,$$

按约定 $t_{k+1} = t_1$。w_i 构成一个 k 元组，记作 $\bar{\mathsf{w}} := (\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_k)$，它继承自 t 的排序。我们注意到，由于零点的非退化性，w_i 的符号交替出现。

我们基于这一模型考虑涡旋环，即由一条定向闭平面曲线 C（没有自交点）及其上的 Morse 涡量密度 $\beta_C \in \Omega^1(C)$（即具有非退化零点的 1-形式）构成的配对 (C, β_C)。我们用 $Z(\beta_C)$ 表示其零点集。选取一个“起点” $x_1 \in Z(\beta_C)$，便可将 β_C 的零点表示为一个 k 元组 $\bar{x} := (x_1, \ldots, x_k)$，并按曲线的定向排序。我们用 $\mathsf{w} := \int_C \beta_C$ 表示总涡量，用 $\mathsf{w}_i := \int_{x_i}^{x_{i+1}} \beta_C$ 表示由零点诱导的部分涡量，约定 $x_{k+1} = x_1$。

设 $f \in \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2)$ 为一个嵌入， $\beta \in \Omega^1(S^1)$ 为一个莫尔斯形式，其具有 $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_k)$，以及 $\bar{\mathsf{w}} = (\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_k)$。微分同胚 $f\colon S^1 \to f(S^1)$ 在其像上诱导出一个莫尔斯形式，其零点数与 β 相同，且 w_i 的集合也相同。映射 $t_i \mapsto f(t_i)$ 诱导出 $f_*\beta$ 的零点的顺序，进而诱导出 w_i 的顺序。

注 2.1 设 $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ 为满足条件的最小自然数 s

$$w_i = w_{i+\ell}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

按照约定，我们考虑 $w_{i+k} = w_i$。我们指出， ℓ 必须是 k 的因数。由于数值 w_i 的符号交替变化，我们指出， ℓ 也必须是偶数。如果存在这样的 $\ell < k$，我们就说 $\bar{w}$ 具有步长为 ℓ 的旋转对称性。

定义 2.2 若存在如备注 2.1中所述的 $\ell \in \{1, \ldots, k\}$，则称 β具有步长为 ℓ 的旋转对称性。

令 $\mathrm{Diff}(S^1, \beta) = \{\gamma \in \mathrm{Diff}(S^1) : \gamma^*\beta = \beta\}$ 表示 $\mathrm{Diff}(S^1)$ 中 $\beta \in \Omega^1(S^1)$ 的稳定子。下文的引理 2.4 表明，它同构于循环群 $\mathbb{Z}_{k/\ell}$。

备注 *2.3* 若 $\gamma \in \mathrm{Diff}(S^1, \beta)$，则 $\gamma(Z(\beta)) = Z(\beta)$，其中 $Z(\beta)$ 表示 β的零点集。此外， γ 不能改变零点的顺序，因此存在 j ，使得对所有 $i = 1, \ldots, k$，都有 $\gamma(t_i) = t_{i+j}$，且 j在模 k意义下唯一确定。将范围限制在两个相邻零点之间，可得到一个保持 β 且满足 $w_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta = \int_{t_{i+j}}^{t_{i+j+1}} \beta = w_{i+j}$（对所有 i）的微分同胚 $\gamma\colon [t_i, t_{i+1}] \to [t_{i+j}, t_{i+j+1}]$ 。因此， j必为 ℓ的倍数。

引理 2.4 群同态

$$g : \mathrm{Diff}(S^1, \beta) \to \mathbb{Z}_k, \quad g(\gamma) = j \mod k, \tag{1}$$

其中 j 是一个自然数，使得 $\gamma(t_i) = t_{i+j}$（如备注 2.3 中所述）是单射。其像是由元素 $\ell \mod k$ 生成的 $\mathbb{Z}_k$ 的子群，并且同构于阶为 k/ℓ 的循环群，即 $\mathbb{Z}_{k/\ell}$。

证明。令 $\gamma \in \mathrm{Ker}(g)$，即对所有 $i = 1, \ldots, k$，都有 $\gamma(t_i) = t_i$。在两个相邻零点之间的区间上，形式 β 是一个体积形式，因此我们有 $\gamma: [t_i, t_{i+1}] \to [\gamma(t_i)\ \gamma(t_{i+1})]$是一个保体积微分同胚。我们计算 $\int_{t_i}^{t} \beta = \int_{t_i}^{t} \gamma^* \beta = \int_{\gamma\ t_i}^{\gamma(t)} ()\ ^{\beta} = \int_{t_i}^{\gamma(t)} \beta$，这表明对所有 $t \in (t_i, t_{i+1})$，都有 $\gamma(t) = t$。因此，γ 是 S^1 上的恒等映射，且 g 是单射。

我们知道 j 是 ℓ的倍数，因此只需找到 $\gamma \in \mathrm{Diff}(S^1,\ \beta)$，使得 $g(\gamma) = \ell$模 k。根据 $^{-}\mathrm{w} = (\mathrm{w}_1, \ldots\ldots, \mathrm{w}_k)$ 具有步长为 ℓ 的旋转对称性，我们得到 $\mathrm{w}_i = \mathrm{w}_{i+\ell}$，这意味着存在一个保持 β 的微分同胚 $\gamma: [t_j, t_{i+1}] \to [t_{i+\ell}, t_{i+\ell+1}]$。这些总共定义了 $\gamma \in \mathrm{Diff}(S^1,\ \beta)$。

命题 2.5 设 (S^1, β) 表示由上述莫尔斯形式 β 所构成的定向圆。我们用 $\mathcal{O}_{\bar{w}}$ 表示与 β具有相同 ^{-}w 的涡旋环集合。若 β 具有步长为 ℓ 的旋转对称性，则循环群 $\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 通过同构 (1) 作用于 $\mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2)$，且映射

$$\psi : \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell} \to \mathcal{O}_{\bar{w}}, \quad \psi([f]) = (f(S^1), f_*\beta) \tag{2}$$

是一个双射。

证明。设 $f_1,\ f_2 \in \mathrm{Emb}(S^1,\ \mathbb{R}^2)$，满足 $\psi(f_1) = \psi(f_2)$。这意味着 $f_2 = f_1 \circ \gamma$，其中 γ 是一个保持 β 这一 1-形式的 S^1 微分同胚，也就是说 $\gamma \in \mathrm{Diff}(S^1,\ \beta)$。根据引理 2.4，该各向同性群同构于 $\mathbb{Z}_{k/\ell}$，因此将其除去可确保 ψ的单射性。

为证明满射性，设（C，β_C）是 $\mathcal{O}_{\bar{\mathrm{w}}}$ 中的一个元素，并设（x_1，...，x_k）是与 $^{-}\mathrm{w}$ 的顺序相对应的零点的顺序。对于每个 $\mathrm{w}_i > 0$，我们构造微分同胚 $b_i: [t_i, t_{i+1}] \to [0, \mathrm{w}_i]$，$b_i$（$t$）$= \int_{t_i}^{t} \beta$，以及 $a_i: [x_i, x_{i+1}] \to [0, \mathrm{w}_i]$，$a_i$（$x$）$= \int_{x_i}^{x} \beta_C$。利用这些映射，我们构造一个微分同胚 $f_i: [t_i, t_{i+1}] \to [x_i, x_{i+1}]$，$f_i$（$t$）$=$（$a_i^{-1} \circ b_i$）（$t$）。注意到 $db_i = \beta\big|_{[t_i, t_{i+1}]}$ 和 $da_i = \beta_C\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$，这导致（$f_i$）$_*\beta\big|_{[t_i, t_{i+1}]} = \beta_C\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$。对于 $\mathrm{w}_i < 0$ 的构造是类似的，只是 b_i 和 a_i 的陪域为 [w_i，0]。微分同胚 f_i、$i = 1$、...、k 粘合在一起，定义了一个嵌入 f：$S^1 \to \mathbb{R}^2$，其中 f（S^1）$= C$，且 $f_*\beta = \beta_C$。对（x_1，...，x_k）采用不同的顺序，会得到 f 的等价类中的不同元素。于是得到 ψ（$[f]$）$=$（f（S^1）$\ f_*\beta$）。

推论 2.6 如果 β 没有旋转对称性，我们有 $\ell = k$，并且其中的识别式变为 (2)

$$\psi : \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2) \to \mathcal{O}_{\bar{w}}, \quad \psi(f) = (f(S^1), f_*\beta).$$

注 2.7（装饰非线性格拉斯曼流形框架 [9]） 在 $\mathbb{R}^2$中，类型为 S^1 的非线性格拉斯曼流形，记作$\mathrm{Gr}_{S^1}(\mathbb{R}^2)$，是由所有与 S^1微分同胚的$\mathbb{R}^2$ 的子流形构成的空间。它是微分同胚群(S^1) 主丛的底空间

$$\pi : \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2) \to \mathrm{Gr}_{S^1}(\mathbb{R}^2), \quad \pi(f) = f(S^1). \tag{3}$$

涡旋环空间可视为一个装饰格拉斯曼流形，它被定义为与(3)关联的一个伴随丛，即

$$\mathrm{Gr}_{S^1}^{deco}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2) \times_{\mathrm{Diff}(S^1)} \Omega^1(S^1).$$

我们将 $\mathrm{Diff}(S^1) \cdot \beta$ 记为 $\beta \in \mathrm{Diff}(S^1)$ 在 $\mathrm{Diff}(S^1)$作用下的轨道。涡旋环空间 $\mathcal{O}_{\bar{w}}$ 可视为类型为 (S^1, β)的装饰格拉斯曼流形，它被定义为式 (3)的伴随丛，即

$$\mathrm{Gr}_{(S^1,\beta)}^{deco}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Emb}(S^1, \mathbb{R}^2) \times_{\mathrm{Diff}(S^1)} \mathrm{Diff}(S^1) \cdot \beta.$$

此外，映射 $\mathrm{Emb}(S^1,\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Gr}^{deco}_{(S^1,\beta)}(\mathbb{R}^2)$是一个结构群为 $\mathrm{Diff}(S^1,\beta)$ 的主丛。

3 嵌入流形的辛结构

设 $\mu \in \Omega^1(S^1)$ 是圆上的体积形式， ω 是平面上的典范辛形式。 ω 与 μ 的帽配对定义为

$$\widehat{\omega\cdot\mu} = \fint_{S^1} \mathrm{ev}^*\omega \wedge \mathrm{pr}^*\mu,$$

其中， $\mathrm{ev}: S^1\times\mathrm{Emb}(S^1,\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ 表示求值映射， $\mathrm{pr}: S^1\times\mathrm{Emb}(S^1,\mathbb{R}^2) \to S^1$ 表示到第一因子的投影。$\mathrm{Emb}(S^1,\mathbb{R}^2)$ 上的二形式 $\widehat{\omega\cdot\mu}$ 是辛的 [14]。

设 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)$ 表示围成固定面积的嵌入所构成的流形。切空间 $T_f\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2) = \{u_f: S^1\to\mathbb{R}^2 \mid \int_{S^1} f^* i_{u_f}\omega = 0\}$ 可识别为

$$T_f \,\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2) \cong C_0^\infty(S^1)\times C^\infty(S^1) \tag{4}$$

其中 $C_0^\infty(S^1) = \{\rho\in C^\infty(S^1) \mid \int_{S^1}\rho dt = 0\}$。这里我们使用欧几里得度量，将向量分解为切向分量和法向分量，其中 $\mathbb{R}^2$。

引理 3.1 设 $\beta\in C^\infty(S^1)$ 是一个具有非退化零点的光滑函数。由 $\langle\,,\,\rangle: C_0^\infty(S^1)\times C^\infty(S^1) \to \mathbb{R}$ 定义的配对

$$\langle\rho,\lambda\rangle = \int_{S^1}\rho(t)\lambda(t)\beta(t)dt \tag{5}$$

是非退化的。

证明。 设 $\rho\in C_0^\infty(S^1)$，使得

$$\langle\rho,\lambda\rangle = 0, \quad \forall\lambda\in C^\infty(S^1). \tag{6}$$

我们用 $Z(\beta)$ 表示 β 的零点集。反设存在 $t\in S^1\setminus Z(\beta)$，使得 $\rho(t)\neq 0$。那么存在 t 的一个邻域，记为 $U\subset S^1$，使得 $\rho(t)\neq 0, \forall t\in U$。不失一般性，可设 ρ 和 β 在 U 上为正。令 $\lambda\in C^\infty(S^1)$ 为一个支集包含于 U、且在 U 上为正的鼓包函数。于是

$$\langle\rho,\lambda\rangle = \int_{S^1}\rho(t)\lambda(t)\beta(t)dt > 0$$

这与 (6) 矛盾，因此 ρ 在 $S^1\setminus Z(\beta)$ 上消失。由于 ρ 是连续函数，这意味着 $\rho = 0$。

此外，设 $\lambda\in C^\infty(S^1)$，使得

$$\langle\rho,\lambda\rangle = 0, \quad \forall\rho\in C_0^\infty(S^1). \tag{7}$$

取任意两点 t'， $t''\in S^1$ ，并令 $\rho\in C_0^\infty(S^1)$ 为一个“双凸起函数”零积分函数，其支集包含于 t' 和 t'' 的小邻域之并中。通过缩小 ρ 的支集，我们可以使 $\int_{S^1}\rho(t)\lambda(t)\beta(t)dt$ 任意接近 $\lambda(t')\beta(t') - \lambda(t'')\beta(t'')$。利用 (7)，可得 $\lambda(t)\beta(t)$ 在 S^1 上为常数。由于 $\beta(t) = 0$，对某个 $t\in S^1$，我们推得这个

常数必为 0。但 $\beta(t) \neq 0$ 对于 $t \in S^1 \setminus Z(\beta)$ 成立，因此 $\lambda(t) = 0, \forall t \in S^1 \setminus Z(\beta)$。由于$\lambda$ 是连续函数，我们得到 $\lambda = 0$。 ■

设 $\beta \in \Omega^1(S^1)$ 是一个具有非退化零点的 1-形式。按照 [14]，中的步骤，我们定义 2-形式 $\Omega \in \Omega^2(\mathrm{Emb}_a(S^1, \mathbb{R}^2))$，其定义如下：

$$\Omega_f(u_f, v_f) = (\widehat{\omega \cdot \beta})_f(u_f, v_f) = \int_{S^1} \omega(u_f, v_f)\beta. \tag{8}$$

命题 3.2 Ω 在(8) 中定义的形式是辛的且恰当。

证明。 ω 和 β 都是闭的，因此 Ω 也是闭形式。外微分对帽配对 [14] 满足导子法则。结合这一事实以及 $\omega = d\nu$ 和 $d\beta = 0$，可得

$$\Omega = \widehat{d\nu \cdot \beta} = d(\widehat{\nu \cdot \beta})$$

其中 $\widehat{\nu \cdot \beta}$ 是 $\mathrm{Emb}_a(S^1, \mathbb{R}^2)$ 上的一个 1-形式。

利用识别 (4)，我们将 Ω 改写为

$$\Omega((\rho_1, \lambda_1), (\rho_2, \lambda_2)) = \int_{S^1} \rho_1\lambda_2\beta - \rho_2\lambda_1\beta = \int_{S^1} \omega((\rho_1, \lambda_1), (\rho_2, \lambda_2))\beta$$

其中 (ρ_1, λ_1)，$(\rho_2, \lambda_2) \in C_0^\infty(S^1) \times C^\infty(S^1)$，并注意到

$$\Omega((\rho_1, \lambda_1), (\rho_2, \lambda_2)) = \langle \rho_1, \lambda_2 \rangle - \langle \rho_2, \lambda_1 \rangle$$

其中 $\langle , \rangle$ 是非退化配对（5）。

■

4 R2 的哈密顿群的余伴随轨道

平面上的欧拉方程，$\dot{\mathbf{v}} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = -\nabla p$，$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$，其中 $\mathbf{v}$ 是流体速度，p 是压力，构成了配备右不变 L^2 度量 [1] 的保面积微分同胚李群上的测地线方程。速度 $\mathbf{v}$ 是该群李代数的一个元素，而涡量 $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ 则局限于对偶李代数中的一个余伴随轨道。这类轨道已在 [12, 10] 中分类。除了光滑（正则）涡量之外，人们也研究了非光滑（奇异）涡量，因为它们同样局限于余伴随轨道中（见 [11]）。本节描述由涡旋环构成的余伴随轨道，即具有一维支集的奇异涡量。为此，我们将使用以下数学常识命题（证明见 [7]）：

命题 4.1 设 (M,Ω) 是一个辛流形，G 是一个李群，其李代数记为 $\mathfrak{g}$。假设 G 在 (M,Ω) 上的作用是传递的，且具有单射的等变动量映射 $J: M \to \mathfrak{g}^*$。那么 J 与 G的一个余伴随轨道一一对应。此外，它将余伴随轨道上的基里洛夫–科斯坦特–苏里奥辛形式 ω_{KKS} 拉回为辛形式 Ω，即 $J^*\omega_{KKS} = \Omega$。

令 $\omega = dx \wedge dy$ 表示 $\mathbb{R}^2$上的典范面积形式。这是一个辛形式，同时也是恰当的，因为存在$\nu = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$使得 $\omega = d\nu$。 我们用 G 表示紧支撑保面积微分同胚群。其李代数（记为 $\mathfrak{g}$）由紧支撑无散向量场构成。在这种情况下，群G 与平面上的紧支撑哈密顿微分同胚群 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 相同。

因此， $\mathfrak{g}$ 是平面上的紧支撑哈密顿向量场的李代数。这个李代数可以识别为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，其对偶记为 $\mathfrak{g}^*$，是分布空间。

回顾命题 3.2，$\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)$ 是一个辛流形，其辛形式由（8）给出。在辛流形 $(\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2),\Omega)$ 上的自然 G 作用由 $\varphi\cdot f=\varphi\circ f$ 给出，并且是传递的（例如参见 [8]）。

哈密顿量 $h\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 和 1-形式 $\beta\in\Omega^1(S^1)$ 通过帽配对 $\widehat{h\cdot\beta}$ 在 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)$ 上诱导出一个光滑函数： $f\mapsto\int_{S^1}f^*h\beta$。利用 [14], 中的帽演算，我们计算其微分：

$$d(\widehat{h\cdot\beta})=\widehat{(dh)\cdot\beta}+\widehat{h\cdot d\beta}=\iota_{\widehat{X_h}}\widehat{\omega\cdot\beta}=\iota_{\hat{X}_h}\Omega,$$

$\hat{}$ 其中，向量场 $X_h(f)=X_h\circ f$ 是 $X_h\in\mathfrak{g}$ 的无穷小生成元。因此， G 在 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)$ 上的作用是哈密顿的，其等变动量映射为

$$J:\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)\to\mathfrak{g}^*,\quad\langle J(f),X_h\rangle=\int_{S^1}(h\circ f)\beta. \tag{9}$$

我们将看到该动量映射的单射性如何依赖于β的旋转对称性。

下述关于有限维流形的引理对Fr´echet流形同样成立：

引理4.2 设(E,Ω) 为辛*Fr´echet*流形。设 G 为无限维李群， H 为离散李群，二者均作用于 E 且两个作用可交换。假设辛形式Ω 是*H*不变的，且*G*作用是哈密顿的，其动量映射为 J。则商空间 E/H 是辛流形，其辛形式由Ω 下降得到，且 G 在 E/H 上的作用是哈密顿的，其动量映射由 J下降得到。

离散群 $\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 通过引理 2.4中所述的同构 $\mathbb{Z}_{k/\ell}\cong$ 微分同胚群(S^1,β)作用于$\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)$。该作用诱导微分同胚$\hat{}\gamma(f)=f\circ\gamma$，其中 $f\in\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)$且 $\gamma\in$ 微分同胚群(S^1,β)。利用 [14], 中的帽演算，我们得到

$$\hat{\gamma}^*\widehat{\omega\cdot\beta}=\widehat{\omega\cdot\gamma^*\beta}=\widehat{\omega\cdot\beta},$$

因此，辛形式 Ω 在该作用下保持不变。我们注意到 $\mathrm{Diff}(S^1)$ 和 G 的作用彼此交换，因此，根据引理4.2，辛形式 Ω 下降为商空间 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\ \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 上的辛形式 $\bar{}\Omega$。此外， G 在 $\mathrm{Emb}_a(S^1,\ \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 上的作用是哈密顿作用，其等变动量映射由 J 下降而来，具体为

$$\bar{J}:\mathrm{Emb}_a(S^1,\mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}\to\mathfrak{g}^*,\quad\langle\bar{J}([f]),X_h\rangle=\int_{S^1}(h\circ f)\beta. \tag{10}$$

引理 4.3 动量映射 (10) 是单射。

证明。
设 $f_1,\ f_2\in\mathrm{Emb}_a(S^1,\ \mathbb{R}^2)$ 满足 $\bar{J}([f_1])=\bar{J}([f_2])$，这意味着 $J(f_1)=J(f_2)$。因此，

$$\int_{S^1}(h\circ f_1)\beta=\int_{S^1}(h\circ f_2)\beta,\quad\forall h\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{11}$$

反设 $C_1=f_1(S^1)$ 与 $C_2=f_2(S^1)$ 不重合。存在一点 $x\in C_1\setminus C_2$，这意味着存在一个完整的邻域 x，它包含于 C_1，但

不包含于 C_2。缩小这个邻域后，我们得到一个子集 $U \subset C_1 \setminus C_2$，使得对于所有 $t_i \in Z(\beta)$，都有 $f_1(t_i) \notin U$，其中 $i = 1, \dots, k$。设 $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 是一个支集包含于 U 的非负函数。于是得到 $\int_{S^1}(h \circ f_1)\beta \neq 0$ 和 $\int_{S^1}(h \circ f_2)\beta = 0$，这与（11）矛盾。因此假设不成立，所以这些嵌入的像相同，即存在 $\gamma \in \mathrm{Diff}(S^1)$（假设其为保向的），使得 $f_2 = f_1 \circ \gamma$。方程（11）变为

$$\int_{S^1}(h \circ f_1)(\beta - \gamma_*\beta) = 0, \quad \forall h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{12}$$

反设 $\beta - \gamma_*\beta \neq 0$。那么存在 $V \subset S^1$ 的一个子集，使得 $\beta - \gamma_*\beta$ 恒定取同一符号。令 $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 为一个函数，使得 $h \circ f_1$ 的支集包含于 V 中。这将导致 $\int_{S^1}(h \circ f_1)(\beta - \gamma_*\beta) \neq 0$，与（12）矛盾。第二个假设不成立，因此 $\beta = \gamma_*\beta$，即 γ 是各向同性子群 $\mathrm{Diff}(S^1, \beta)$ 中的一个元素。根据引理 2.4，该子群同构于 $\mathbb{Z}_{k/\ell}$。除去这个循环群可确保J的单射性。

■

每个涡　旋环 $(C, \beta_C) \in \mathcal{O}_{\bar{\mathsf{w}}}$ 对应于对偶中的一个唯一非光滑元素　　：

$$\langle (C, \beta_C), h \rangle = \int_C h\beta_C, \quad h \in \mathfrak{g} \cong C_c^\infty(\mathbb{R}^2).$$

G 的自然作用

$$\varphi \cdot (C, \beta_C) = (\varphi(C), \varphi_*\beta_C), \tag{13}$$

保持曲线所围成的面积以及所有部分涡量 w_i 不变。我们将由围成固定面积 $a := \int_C \nu$ 的涡旋环组成的 $\mathcal{O}_{\bar{\mathsf{w}}}$ 的子集记为 $\mathcal{O}^a_{\bar{\mathsf{w}}}$。利用命题 2.5，我们得到一个对应

$$\bar{\psi} : \mathrm{Emb}_a(S^1, \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell} \to \mathcal{O}^a_{\bar{\mathsf{w}}}, \quad \bar{\psi}([f]) = (f(S^1), f_*\beta). \tag{14}$$

双射 (14) 将 G 在 $\mathrm{Emb}_a(S^1, \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 上的作用与自然作用 (13) 交织起来。

定理 4.4 本节定义的商空间 $(\mathrm{Emb}_a(S^1, \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}, \bar{\Omega})$ 可以实现为 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 的一个余伴随轨道。更确切地说，式 *(10)* 中的动量映射 $\bar{J}$ 是到某个余伴随轨道上的一一映射，并且 *KKS* 辛形式满足 $J^*\omega_{KKS} = \Omega$。

证明。 证明由命题 4.1 以及 [8] 的传递性结果和引理 4.3 得出。

■

推论 4.5 涡旋环的流形 $\mathcal{O}^a_{\bar{w}}$ 通过 (14) 与 $\mathrm{Emb}_a(S^1, \mathbb{R}^2)/\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 相对应，它是一一映射到 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 的一个余伴随轨道。

注 4.6 如果 β 没有旋转对称性，则群 $\mathbb{Z}_{k/\ell}$ 是平凡的。由此可知，涡旋环流形 $\mathcal{O}^a_{\bar{w}}$ 可通过式 (9)中的动量映射 J，与 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 的一个余伴随轨道一一对应；该流形为辛流形 $(\mathrm{Emb}_a(S^1, \mathbb{R}^2), \Omega)$。

资助： I.C. 在撰写本文期间获得了西蒂米什瓦拉大学 START资助。

致谢： I.C在撰写本文期间获得了蒂米什瓦拉西部大学的START资助。

参考文献

[1] Arnold, V. [1966], 关于无限维李群的微分几何及其在理想流体水动力学中的应用, 《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》16, 319–361.[2] Batchelor, G.K. [2012], 《流体动力学导论》, 剑桥大学出版社.[3] Ciuclea, I. and Vizman C. [2023], 理想二维流体中的带基点涡环, 《物理学杂志A：数学与理论》56 245201[4] Ebin, D. and J. Marsden [1970], 微分同胚群与不可压缩流体的运动, 《数学年刊》92(2), 102–163.[5] Gay-Balmaz, F. and C. Vizman [2020], 理想三维流体中的涡片、余伴随轨道与特征标, arXiv:1909.12485.[6] Goldin, G.A., Menikoff, R., Sharp, D.H. [1987], 微分同胚群与量子化涡丝, 《物理评论快报》58, 2162–2164.[7] Haller, S. and C. Vizman [2020], 作为余伴随轨道的非线性旗流形, 《全球分析与几何年刊》58, 385–413.[8] Haller, S. and C. Vizman [2024], 作为余伴随轨道的加权非线性旗流形, 《加拿大数学杂志》76(5): 1664-1694.[9]Haller, S. and C. Vizman, 非线性格拉斯曼流形：朴素、装饰、增广, 预印本 arXiv:2503.15363.[10] Izosimov, A. and B. Khesin and M. Mousavi [2016], 曲面辛微分同胚的余伴随轨道与理想流体动力学, 《傅里叶研究所年刊》6, 2385-2433.[11] Khesin, B. [2012], 涡膜上的辛结构与动力学, 《莫斯科数学杂志》12, 413–434.[12] Kirilov, I. [2023], 曲面辛微分同胚群的余伴随轨道分类, 《国际数学研究通知》7, 6219–6251.[13] Marsden, J. E. and A. Weinstein [1983], 不可压缩流体的余伴随轨道、涡旋与Clebsch变量, 《物理学D辑》7, 305–323.[14] Vizman, C. [2011], 函数流形上的诱导微分形式, 《数学档案》47, 201–215.