arXiv:2601.17913v1 [math.CO] 25 Jan 2026

穿过三维两两相交凸集的直线*

Natan Rubin†

2026年1月27日

摘要

1913年的Helly定理指出，若一个由 $n \geq d+1$ 凸集构成的 $\mathcal{K}$ 族位于 $\mathbb{R}^d$ 中，则当且仅当其任意 $d+1$ 个 $\mathcal{K}$元素都满足该性质时，整个族都可由一个点穿刺。2002年，Alon、Kalai、Matoušek和Meshulam排除了在 $d \geq 3$ 维空间中存在类似判据的可能性，该判据用于判断是否存在直线穿过多个凸集：对于任意 $k \geq 3$，他们构造了任意大的凸集族 $\mathcal{K}$，使得其中任意 k 个 $\mathcal{K}$ 元素都能被一条直线穿过，但不存在一条直线能穿过其中任意 $k+4$个集合。

设 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}^3$中由 n 两两相交凸集构成的族。我们证明，存在一条直线穿过 $\mathcal{K}$中的 $\Theta(n)$个元素。这解决了Mart´ınez、Rold´an-Pensado和Rubin提出的一个问题中研究最广泛的变体（*Discrete Comput. Geom. 2020*），该问题曾由B´ar´any和Kalai重点介绍（*Bull. Amer. Math. Soc. 2021*）。我们的结果补充了目前已知的少数几种充分且非平凡的条件，这些条件可确保存在直线横截线穿过大型凸集族。

我们的论证基于一个关于 $\mathbb{R}^2$ 中两两相交凸集族的、具有独立意义的 Ramsey型结果，以及 $\mathbb{R}^3$ 中直线排列的结构。

*本文的初步版本发表于第37届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集（SODA），会议于2026年1月11日至14日在加拿大温哥华举行。

†电子邮箱：rubinnat.ac@gmail.com。以色列贝尔谢巴内盖夫本-古里安大学。获以色列科学基金会第2891/21号和第3010/25号拨款资助。

1 引言

对于任意整数 $n \geq 1$，我们用 $[n]$ 表示集合 $\{1, \ldots, n\}$。对于任意集合 A 和任意整数 j，我们用 $\binom{A}{j}$ 表示 A 的所有大小为 j 的子集构成的集族。

设 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}^d$中的一个有限凸集族。若几何对象（例如点、直线或 k-平坦—— $\mathbb{R}^d$中的 k维仿射子空间）的集族 X 中的每个集合都与 X中的某个对象相交，则称 X 是 $\mathcal{K}$的截线，并称$\mathcal{K}$ 可以被 X点穿刺或穿过。

1.1 Helly定理及其相关定理

Helly [19], 提出了一个关于离散几何、计算几何和凸优化的基本定理，该定理发表于1913年：有限凸集族 $\mathcal{K}$ 的交集非空（即 $\mathcal{K}$ 可以被单个点穿刺），当且仅当其每个大小为$d+1$的子集 $\mathcal{K}' \in \binom{\mathcal{K}}{d+1}$ 都可以被一个点穿刺。过去60年来，几何截线理论一直关注以下问题（全面综述参见 [7, 11, 16, 27]）：

1. 已知有相当大比例的 $(d+1)$ 元组 $\mathcal{K}' \in \binom{\mathcal{K}}{d+1}$ 的交集非空，能否用数量为常数个的点点穿刺 $\mathcal{K}$，或者至少点穿刺其中固定比例的成员？2. 对于由 k维平坦 与凸集组成的交叉族，能否建立类似的“Helly 型”结论，适用于 $1 \leq k \leq d-1$?

分数赫尔利定理、(p, q)维定理和彩色赫尔利定理。第一类中最基本的结果由 Katchalski 和 Liu 于 1979 年证明。

定理 1.1 （分数赫尔利定理 [21]）。对于任意 $d \geq 1$ 和 $\alpha > 0$，存在一个数$\beta = \beta(\alpha, d) > 0$，具有如下性质：对于 $\mathbb{R}^d$ 中的任意凸集有限族 $\mathcal{K}$，若其 $\alpha\binom{|\mathcal{K}|}{d+1}$ 个 $(d+1)$-子集 $\mathcal{K}' \in \binom{\mathcal{F}}{d+1}$ 的交集非空，则存在一个点，点穿刺 $\mathcal{K}$ 中至少 $\beta|\mathcal{K}|$ 个集合。

定理 1.1 是 Alon 和 Kleitman 于 1992 年证明所谓 Hadwiger-Debrunner (p, q)猜想 [18] 时所使用的关键工具之一 [6]。

定理 1.2 （(p, q) 定理 [6]）。对于任意 $d \geq 1$ 和 $p \geq q \geq d+1$，存在一个数$t = t(p, q, d)$，具有以下性质：设 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}^d$中的凸集有限族，并且任意 p-族 $\mathcal{K}' \in \binom{\mathcal{K}}{p}$ 都包含一个由 q 个元素组成的子集 $\mathcal{K}''$，其交集 $\bigcap \mathcal{K}''$非空。那么， $\mathcal{K}$ 可由 t 个点截线。

如果一个由“k种颜色”标记的凸集族 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \uplus \ldots \uplus \mathcal{K}_k$ 具有彩色 ***Helly*** 性质，我们称其具有该性质：对于每个“彩色”选择 $K_i \in \mathcal{K}_i$（$1 \leq i \leq k$），其交集 $\bigcap_{i=1}^k K_i \neq \emptyset$非空。

定理 1.3 (Lov´asz 的彩色 Helly 定理 1982 [8])。设 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \uplus \ldots \uplus \mathcal{K}_{d+1}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个$(d+1)$彩色凸集族。于是，彩色 ***Helly*** 性质意味着存在一个颜色类$\mathcal{K}_i$，其交集 $\bigcap \mathcal{K}_i \neq \emptyset$非空。

凸集族的超平面截线。第二个问题早在 $k = 1$ 就已被否定地解决。例如，Santal´o [26] 和 Danzer [14] 指出，对于任意$n \geq 3$，都存在 $\mathbb{R}^2$ 中的 n 凸集族 $\mathcal{K}$，使得其中任意 $n-1$ 个集合都可以被单条直线截线穿过，而对于 $\mathcal{K}$则不存在这样的截线。尽管如此，Alon 和 Kalai [4]仍建立了以下“(p, q) 型”结果。

定理 1.4 （（p，q)-超平面定理 [4]）。对于任意 $d \geq 1$ 和 $p \geq q \geq d+1$，存在一个数 $t = t$（p，q，d），具有如下性质：设 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有限凸集族，其中任意子集 $\mathcal{K}' \in \binom{\mathcal{K}}{p}$ 都包含 q 个可被单个超平面穿过的元素。那么整个族 $\mathcal{K}$ 都可以被 t 个超平面截线截穿。

Alon-Kalai 论证的核心是定理 1.1 的以下超平面类比。

定理 1.5 (超平面的分数 Helly 定理 [4])。对于任意 $d \geq 1$ 和 $\alpha > 0$，存在一个数 $\beta = \beta(\alpha, d) > 0$，使得满足以下性质：对于每个有限族 $\mathcal{K}$ 的凸集，若其中至少有 $\alpha\binom{|\mathcal{K}|}{d+1}$ 个$(d+1)$-子集 $\mathcal{K}' \in \binom{\mathcal{K}}{d+1}$ 可被某个超平面穿过，则存在一个超平面穿过 $\mathcal{K}$中的至少 $\beta|\mathcal{K}|$ 个集合。

1.2 穿过两两相交凸集的直线（ $\mathbb{R}^3$）

2002年，Alon、Kalai、Matou˘sek 和 Meshulam [5] 证明，对于中间维数 $k \in \{1, \ldots, d-2\}$ 的 $d \geq 3$，不存在定理 1.4 和定理 1.5 的类似结论：对于任意整数 $d \geq 3, m \geq 3$ 和 $n_0 \geq m+4$，存在一个至少包含 n_0 个凸集的族，使得其中任意 m 个集合都可被一条直线穿过，但没有 $m+4$ 个集合能被同一条直线穿过；这一现象很大程度上可归因于截线 k-平坦空间复杂的拓扑结构。

由于在维数 $d \geq 3$ 中，针对直线横截线的“标准”Helly型定理并不适用，因此 Martínez、Roldán-Pensado 和 Rubin 于 2018 年提出了以下猜想 [23]（另见 [11, 猜想 8.2]），以寻求定理 1.3 的更强变体。

猜想 1.6。存在一个绝对常数 $c > 0$，具有如下性质：对于 $\mathbb{R}^3$ 中任意有限的凸集双色族 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \uplus \mathcal{K}_2$，若其中任意两个元素 $K_1 \in \mathcal{K}_1$ 和 $K_2 \in \mathcal{K}_2$ 的交集 $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ 非空，则存在一个颜色类 $i \in \{1, 2\}$，使得其中至少 $c|\mathcal{K}_i|$ 个元素可以被单条直线穿过。

随后几年，人们将大量注意力集中在猜想 1.6 的以下变体上；Bárány 和 Kalai 于 2021年 强调了这一变体 [11, 猜想 8.1]。

猜想 1.7。存在一个绝对常数 $c > 0$，使得以下性质成立：对于 $\mathbb{R}^3$ 中任意一个由 n 个凸集组成的族 $\mathcal{K}$，若任意两个集合 K_1、$K_2 \in \mathcal{K}$ 的交集 $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$非空，则存在一条直线穿过其中 cn 个集合 $K \in \mathcal{K}$。

B´ar´any 和 Kalai [11] 还给出了一个由 5 个两两相交的凸集组成、但不存在公共直线横截线的构造。这意味着猜想 1.7 中的常数 c 无法提高到超过 4/5（即使 n很大时也是如此）。

迄今为止，这些猜想仅对“足够圆”的凸集族（例如圆柱体）[9]，或对位于平行平面 [10]内的平坦集合，得到了证明。

为了体会处理猜想 1.7 和 1.6 的难度，我们来考虑一种放宽的分数情形，其中只有 $\epsilon|K_1||\mathcal{K}_2|$ 对 $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$相交，对某个 $0 < \epsilon \leq 1$成立。具体而言，若 $\mathcal{K}_1$ 由 $\mathbb{R}^3$中的一般位置直线组成，且 $\mathcal{K}_2$ 中的每个元素都被 $\mathcal{K}_1$中的 $\epsilon|\mathcal{K}_1|$条直线穿过，那么一条由 $f(\epsilon)$ 条直线构成的截线穿过 $\mathcal{K}_2$，便会得到一个用于 $\mathbb{R}^3$ 中直线截线的所谓小规模弱 ϵ-网[2, 5]（另见第 6 节）；这一结果已于 2022年 被 Cheong、Goaoc 和 Holmsen 反证 [13]。

1.3 我们的结果

我们证明了猜想 1.7。

定理 1.8。 存在一个绝对常数 $c > 0$，使其具有如下性质。对于 $\mathbb{R}^3$中的任意一个由n 个凸集组成的族 $\mathcal{K}$，若任意两个集合 K_1、$K_2 \in \mathcal{K}$ 都有非空交集$K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$，则存在一条直线穿过其中 cn 个集合 $K \in \mathcal{K}$。

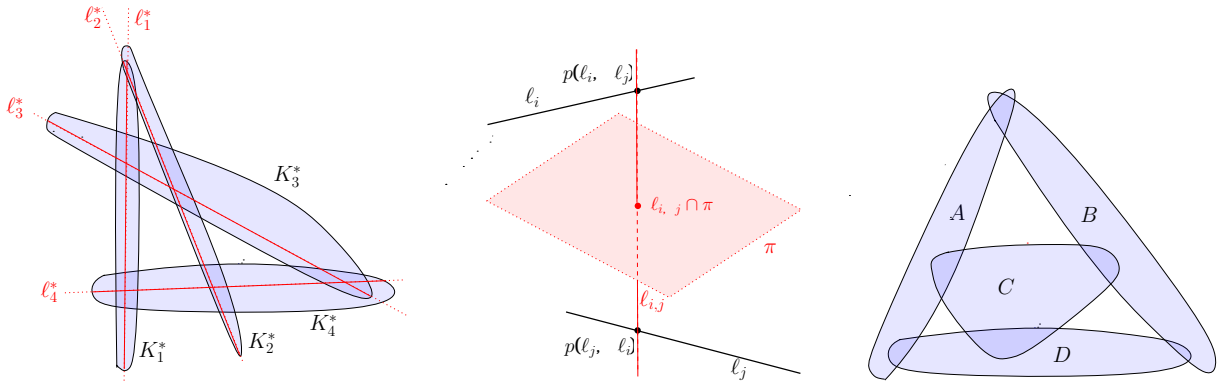

图1：左： $\mathbb{R}^2$中的一个投影的严格两两相交族 $\mathcal{K}^* = \{K_1^*, \ldots, K_4^*\}$，以及由4条直线 ℓ_1^*、……、ℓ_4^*实现的该族。中：直线 ℓ_i和 ℓ_j被平面 π分离——经过ℓ_i和 ℓ_j的竖直线$\ell_{i,\ j}$在 $p\ (\ell_i,\ \ell_j)$ 和 $p\ (\ell_j,\ \ell_i)$ 之间穿过 π。由于 $p\ (\ell_i,\ \ell_j)\ \in K_i$和 $p\ (\ell_j,\ \ell_i)\ \in K_j$，交集$\ell_{i,\ j} \cap \pi$必定位于 $K_i \cup K_j$中。右：图示的严格二相交族 $\{A, B, C, D\}$在 $\mathbb{R}^2$中，无法由任意4条直线实现，具体而言，是无法以如上所述的强意义实现。

下面给出一个不那么形式化的论证概要。考虑对$\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_n\}$作垂直投影。如果投影族 $\mathcal{K}^* = \{K_1^*, \ldots, K_n^*\}$在 $\mathbb{R}^2$中包含 $\Theta(n^3)$ 个满足 $K_i^* \cap K_j^* \cap K_k^* \neq \emptyset$的三元组$K_i^*$，$K_j^*$，$K_k^*$那么定理 1.1便可直接推出所需的、与 Θ个 $\mathcal{K}$的元素相交的竖直直线。因此，值得重点研究这样一些族 $\mathcal{K}$：它们的垂直投影 $\mathcal{K}^*$ 是严格 *2*-相交族 ——其中任意两个成员相交，但任意三个成员都没有公共交集。

为简单起见，我们假设严格 2-相交族 $\mathcal{K}^*$ 是“类直线”的，并且可以由 $\mathbb{R}^2$中的 n 条直线组成的集合 $\{\ell_1^*, \ldots, \ell_n^*\}$ 实现，且满足以下强条件：对于任意$1 \leq i < j \leq n$，交集 $\ell_i^* \cap \ell_j^*$都位于 $K_i^* \cap K_j^*$中；见图1（左）。随后将这些直线 ℓ_i^*提升回$\mathbb{R}^3$，便得到一个直线集 $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$，具有如下性质：对于任意 $1 \leq i < j \leq n$，经过 ℓ_i且位于 $\ell_i^* \cap \ell_j^*$上方的竖直线$\ell_{i,\ j}$会在相应区间 $K_i \cap \ell_i$和 $K_j \cap \ell_j$内分别与 K_i和 K_j相交。

关键观察是，必然存在一个平面 π，位于 $\mathbb{R}^3$ 中，它将 Θ 个 (n^2) 对$\{\ell_i, \ell_j\} \in \binom{\mathcal{L}}{2}$分开，具体来说： π穿过ℓ_i，且位于点 $p\ (\ell_i,\ \ell_j)$ 与$p\ (\ell_j,\ \ell_i)$ 之间；$_j$和$_j \cap \ell_i$分别为$= \ell_i$、$= \ell_i$，而$_j \cap \ell_j$（分别属于 K_i和 K_j）。见图1（中）。对于这些对 ℓ_i、ℓ_j中的每一对，集合 K_i、K_j中至少有一个必须在v_i、$_j = \ell_i$、$_j \cap \pi$附近穿过 π。准确地说，令 $\mathcal{L}'$表示直线族 $\{\ell'_1, \ldots, \ell'_k\}$，其中每个元素 ℓ'_k都是将 ℓ_k^*竖直提升至 π后得到的，并考虑由$\mathcal{L}'_i$、$_j$：$= \mathcal{L}' \setminus \{\ell_i, \ell_j\}$对 π所作的细分。那么， $K_i \cup K_j$被 π 截得的截面只能位于包含v_i、$_j$ 的单元中（否则，同一条竖直线会穿过$\mathcal{K}$ 中的某三个成员）。将这一观察应用于 Θ (n^2) 对被 π按上述意义分开的直线 ℓ_i、ℓ_j。利用每个截面 $K_i \cap \pi$的凸性，可以导出 Θ的一个子集 $\mathcal{L}_{rich}$，其中包含n条“丰富”直线 $\ell_i \in \mathcal{L}$，其对应的集合 K_i 都被穿过

被 Θ（n）条直线ℓ'_j 穿过（且每次都在顶点$v_{i,\ j} = \ell'_i \cap \ell'_j$附近）。随后，标准抽样论证可得一条由 O（1）条直线 ℓ'_j 组成的截线，它穿过具有 $\ell_i \in \mathcal{L}_{rich}$的此类集合 K_i 中的全部集合。

遗憾的是，上述论证并不适用于 $\mathbb{R}^3$ 中一般的两两相交凸集族，因为 $\mathbb{R}^2$ 中严格 2-相交凸集族的排列（从拓扑角度而言）恰好比直线排列丰富得多。事实上，存在仅由 4 个集合组成的族，无法以任何 4 条直线实现，即使不考虑上述强意义下的实现方式也不行；见图1（右）。[1] 相反，我们证明了以下拉姆齐型性质：对于任意 n，$\mathbb{R}^2$ 中任何足够大的严格 2-相交凸集族都必须包含一个大小为 n 的可实现（即“类直线”）子族。（此外，我们实现中 n 的直线构成一条单调凸链——或者是 n帽，或者是 n杯 [22, 第 3] 节。）所需的平面 π 将通过对某个族$\mathcal{K} = \{K_{i,j}\}_{1\le i<j\le n}$应用 Alon 和 Kalai 的定理 1.5 得到；该平面包含一条直线，它与 $\mathcal{K}$中的n个元素相交Θ，其中每个集合 $K_{i,\ j}$ 都包含连接$a \in K_i$ 与 $b \in K_j$的所有竖直线段 ab 。

1.4 论文结构

本文其余部分安排如下。第2节介绍基本记号，并在此记号下表述定理 1.8 的证明，同时阐述关于 $\mathbb{R}^2$ 中严格 2-相交凸集族以及 $\mathbb{R}^3$ 中直线排列的关键事实。

第3节证明定理 1.8。

第4节证明：对于任意整数 $n > 0$，$\mathbb{R}^2$ 中任意充分大的严格 2-相交凸集族都包含一个大小为 n 的子族，该子族可由 n 条直线实现，这些直线构成帽或帽。

第5节证明，$\mathbb{R}^3$ 中任何具有某种单调结构的 n 条直线都必须包含 $\Theta(n^2)$ 对被单个平面分离。[2]

第 6 节讨论将我们的结果推广到更高维度的可能性。

2 预备知识

对于任意点 $p \in \mathbb{R}^d$，我们分别用 p^* 和 $\hat{}p$ 表示到 $\mathbb{R}^{d-1}$ 的垂直投影以及经过 p 的竖直线 $\{q \in \mathbb{R}^d \mid q^* = p^*\}$。相应地，对于任意集合 $A \subseteq \mathbb{R}^d$，我们记 $\hat{}A^* := \{p^* \mid p \in A\}$ 和 $A^* := \{p \mid p^* \in A^*\} = \bigcup_{p\in A} \hat{}p$。

除非另有说明，对于 $\mathbb{R}^2$ 中的任意非竖直直线 ℓ，我们用 ℓ^+（分别用 ℓ^-）表示该直线 ℓ 上方（分别下方）的开半平面；对于由 $\mathbb{R}^3$ 中平面确定的开半空间，也采用相同约定。

拉姆齐定理。

定理 2.1 ([17, 24])。对于任意整数 $0 < k \le m$ 和 $c > 0$，存在一个整数 $R = R_k(m, c) \ge m$，具有以下性质：

任意的 c-着色 $\chi : \binom{[R]}{k} \to [c]$ 对完全 k-一致超图 $\left([R], \binom{[R]}{k}\right)$的边进行着色，都会产生一个 m-子集 $A \in \binom{[R]}{m}$，使得所有边 $e \in \binom{A}{k}$ 在 χ下都被赋予相同的颜色。

[1]关于凸集的严格 2-相交族，更全面的论述可参见 ´Agoston 等人 [1] 近期的研究，见 $\mathbb{R}^2$。[2]虽然这对我们证明定理 1.8 并非必不可少，但该结论很容易推广到 all $\mathbb{R}^3$中的 n 直线族；参见第 6 节。

平面中的点与直线的帽和杯 $\mathbb{R}^2$。 我们称平面 $\mathbb{R}^2$ 中处于一般位置的点序列 p_1，……， p_n 构成一个 n-帽 （或 n-杯），如果这些点 p_i 的 x坐标构成一个递增序列，并且对所有的 $1 \le i < j < k \le n$ ，点 p_j 都位于线段p_ip_k的上方（或下方）；见图2。



图2： 左：序列 p_1，……， p_6 个 $n = 6$ 点构成一个 6-帽。右：一个由点构成的 6-杯 s.

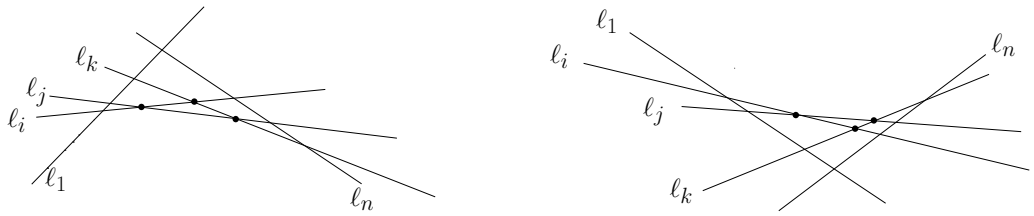

图3：由直线构成的一个 n-帽和一个 n-杯（分别位于左侧和右侧）。

我们称 $\mathbb{R}^2$中的一个有序非竖直直线序列 $n \ge 3$ 为 n-帽（分别地， n-杯），如果其中任意三条直线不经过同一点，它们各自的斜率构成一个递减（分别地，递增）序列；此外，对于所有 $1 \le i < j < k \le n$，交点 $\ell_i \cap \ell_k$ 都位于 ℓ_j上方（分别地，下方）。见图3。

2.1 用帽和杯实现平面凸集序列

如果 $\mathbb{R}^d$ 中的凸集有限族 $\mathcal{K}$ 满足其中任意两个集合都有非空交集，但任意三个不同的 $\mathcal{K}$ 集合都没有公共交集，我们就称其为严格二相交。

如果每当 $1 \le i < j \le n$ 时， $s_i = K_i \cap \ell_i$ 与 $s_j = K_j \cap \ell_j$ 这两条线段就相交，那么称平面 $\mathbb{R}^2$ 中由 K_1、……、K_n 个严格二相交凸集组成的序列可由 $\mathbb{R}^2$ 中由 ℓ_1、……、ℓ_n 条直线组成的序列实现。参见图4。

在第4节中，我们将证明以下对 Erd˝os-Szekeres 定理 [17] 的加强版本。

定理 2.2。 对于任意正整数 n ，存在一个数 $N_1 = N_1(n) \ge n$ ，具有以下性质。

平面 $\mathbb{R}^2$ 中任意严格 2-相交族 $\mathcal{K}$ 的 $N_1 \ge 3$ 个紧凸集，都包含一个由 K_1、……、K_n 个 n 个不同元素组成的序列，该序列可由一个 n-直线序列 ℓ_1、……、ℓ_n 实现，且该序列要么是一个 n-帽，要么是一个 n-杯。

2.2 实现 用单调直线序列实现 $\mathbb{R}^3$ 中的凸集序列

定义。 我们称 $\mathbb{R}^3$ 中的凸集族 $\mathcal{K}$ 是严格 2-重叠 的，如果其投影族 $\mathcal{K}^* := \{K^* \mid K \in \mathcal{K}\}$ 是严格二相交的。

$n \ge 3$ 个两两相交的凸集序列在 $\mathbb{R}^3$ 中可由一组 $\ell_1, \ldots, \ell_n$非竖直且两两不平行的直线 n 实现，当投影线段 $s_i^* = (K_i \cap \ell_i)^*$

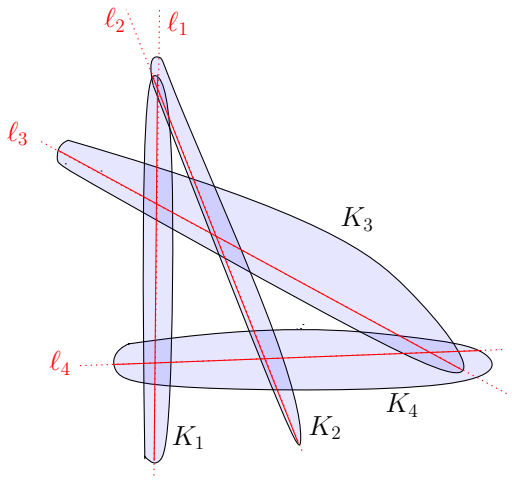

图4：所示序列 $K_1, \ldots, K_4$ 由 4 条直线 $\ell_1, \ldots, \ell_4$实现。

且 $s_j^* = (K_j \cap \ell_j)^*$ 在 $1 \le i < j \le n$时相交。换言之，经过任意一对 ℓ_i 和 ℓ_j 的竖直线$\ell_{i,j}$ 必须穿过 $K_i \cap \ell_i$ 和 $K_j \cap \ell_j$。

对于 $\mathbb{R}^3$ 中任意一对非平行的非竖直直线 ℓ_1, ℓ_2，我们用 $p(\ell_1, \ell_2)$（分别用 $p(\ell_2, \ell_1)$）表示 ℓ_1（分别为 ℓ_2）与经过 ℓ_1 和 ℓ_2 的唯一竖直线的交点；并用 $\pi(\ell_1, \ell_2)$（分别用 $\pi(\ell_2, \ell_1)$）表示经过 ℓ_1（分别为 ℓ_2）且平行于 ℓ_2（分别平行于 ℓ_1）的平面。见图5（左）。

我们称 ℓ_1 位于 ℓ_2 下方（分别为 上方），并记作 $\ell_1 \prec \ell_2$（分别为 $\ell_1 \succ \ell_2$），如果 $p(\ell_1, \ell_2)$ 位于 $p(\ell_2, \ell_1)$ 下方（分别为上方）。此外，如果满足以下任一条件：$\ell_1 \prec \ell_2$（分别为 $\ell_1 \succ \ell_2$），或者 $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset$（此时 $\pi(\ell_1, \ell_2) = \pi(\ell_2, \ell_1)$ 成立），我们记作 $\ell_1 \preceq \ell_2$（分别为 $\ell_1 \succeq \ell_2$）。

如果满足以下两个条件（见图5（右）），我们就称 $n \ge 3$ 中的非竖直直线 ℓ_1，ℓ_2，…，ℓ_n 构成的序列是单调的：

1. 序列 ℓ_1^*，…，ℓ_n^* 要么是 n-帽，要么是 n-杯。
2. 要么 $\ell_1 \preceq \ell_2 \preceq \ldots \preceq \ell_n$，要么 $\ell_1 \succeq \ell_2 \succ \ldots \succeq \ell_n$。

定理 2.3. 对于任意整数 $n \ge 3$，都存在一个有限数 $N_2 = N_2(n)$，使其满足以下性质。

N_2 中的任意严格二重重叠凸集族 $\mathcal{K}$ 都包含一个序列 $K_1, \ldots, K_n$，其中的 n 个集合可由 $\mathbb{R}^3$中的单调序列 $\ell_1, \ldots, \ell_n$ 条 n 直线实现。

证明. 令 $m = R_2(n, 2)$和 $N_2 = N_1(m)$，其中数量 $N_1(\cdot)$由定理 2.2定义。设$\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}^3$中由 N_2 个集合构成的严格二重重叠族。将定理 2.2应用于投影的严格两两相交族 $\mathcal{K}^* = \{K^* \mid K \in \mathcal{K}\}$，可得到一个 m-序列 $F_1^*, \ldots, F_m^*$；该序列由 $\mathbb{R}^2$中的直线 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 构成的 m-帽或 m-杯实现。对于每个 $1 \le i \le m$，我们考虑区间$K_i^* \cap \lambda_i = a_i b_i$，在 $\mathbb{R}^3$ 中分别经过端点 a_i 和 b_i作竖直直线$\hat{}a_i$ 和$\hat{}\, b_i$，然后将 λ_i“提升”回 $\mathbb{R}^3$ 中的一条直线 μ_i，使其经过任意一对点 $a_i' \in \hat{}a_i \cap F_i$ 和$b_i' \in \hat{}b_i \cap F_i$。（对于所有 $1 \le i \le m$，都有 $a_i \neq b_i$；否则 $\bigcap_{i=1}^m F_i^*$将与 $m \ge 3$成立。）

考虑完全图 $\left([m], \binom{[m]}{2}\right)$ 中边的二染色，其中对于 $i < j$，指标 $\{i, j\}$ 的一对若满足 $\mu_i \succeq \mu_j$，则染成红色，否则染成蓝色。于是，根据定理 2.1 以及 m 的选取，必定存在一个“单色的”子序列 $i_1 < \ldots < i_n$

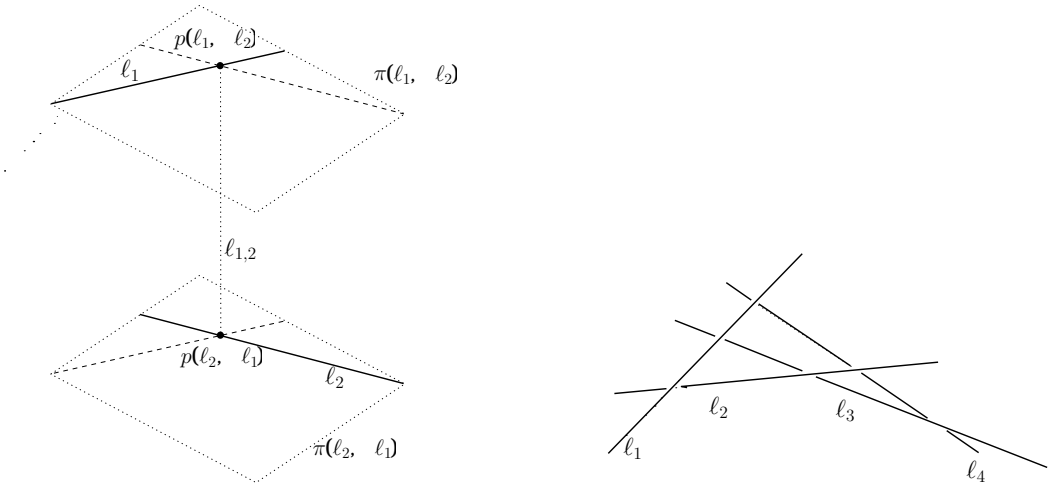

图5：左：直线 ℓ_1 和 ℓ_2 满足 $\ell_1 \succ \ell_2$。图中描绘了平行平面 $\pi(\ell_1,\ell_2) \supset \ell_1$ 和$\pi(\ell_2,\ell_1) \supset \ell_2$、经过 ℓ_1 和 ℓ_2 的唯一竖直线$\ell_{1,2}$，以及点 $p(\ell_1,\ell_2) = \ell_1$、$_2 \cap \ell_1$ 和 $p(\ell_2,\ell_1) \in \ell_1$、$_2 \cap \pi(\ell_2,\ell_1)$。右： $\mathbb{R}^3$ 中的4条直线序列是单调的，因为有 $\ell_1 \succ \ell_2 \succ \ell_3 \succ \ell_4$，且投影 ℓ_1^*、$\ldots$、ℓ_4^* 构成一个4-帽。

指标的 n，由此得到一个集合序列 $K_1 = F_{i_1}, \ldots, K_n = F_{i_n}$，它在 $\mathbb{R}^3$ 中由单调子序列 $\ell_1 = \mu_{i_1}, \ldots, \ell_n = \mu_{i_n}$ 实现。 □

2.3 在 $\mathbb{R}^3$中由平面分离直线族和凸集

分离直线于 $\mathbb{R}^3$。若闭垂直线段 $s(\ell_1,\ell_2) := p(\ell_1,\ell_2)p(\ell_2,\ell_1)$ 与非竖直平面 H 相交，则称异面非竖直直线对 ℓ_1 和 ℓ_2 被该平面分离。

以下性质在第5节中得到了证明。

定理 2.4。对于 $\mathbb{R}^3$中的任意单调序列 $\ell_1, \ldots, \ell_n$，由直线组成，必定存在一个平面，将对 ℓ_i, ℓ_j中的 $\Theta(n^2)$ 分离开来，其中 $1 \le i < j \le n$。

凸集族于 $\mathbb{R}^3$。对于 $\mathbb{R}^3$中的任意一对凸集 A 和 B，记

$$A \backsim B := \mathtt{conv}\left(\left(A \cap \hat{B}\right) \cup \left(B \cap \hat{A}\right)\right).$$

注意， $A \backsim B$ 可以描述为所有连接点对 $a \in A$ 和 $b \in B$的闭垂直线段 ab 的并集的凸包。

定义。若平面 H 与集合$A \backsim B$相交，则称 $\mathbb{R}^3$ 中的凸集 A, B 被该平面分离。注意，对于异面不平行直线对，这两种分离概念是一致的。

引理 2.5. 设 A 和 B 是 $\mathbb{R}^3$中的一对非空凸集， H 是一个平面。当且仅当 H 与[3] 相交于至少一条满足 $a \in A$和 $b \in B$的闭垂直线段 ab 时， A 和B 被 H 分离。

证明。显然，如果平面 H 与一条满足 $a \in A$ 和 $b \in B$ 的线段 ab相交，那么它显然也与 $A \backsim B$ 相交（后者包含所有 这类线段）。反过来，假设存在矛盾： H 与 $A \backsim B$ 相交，但它与任何满足 $a \in A$ 和的线段 ab 都不相交

[3]若 H 是竖直的，这也包括包含的情形。

$\hat{}\hat{}\hat{}b \in B$。特别地， H既不与集合 $A \cap B$ 相交，也不与集合 $B \cap A$ 相交（因为每个点 $a \in A \cap B$都是至少一条满足 $b \in B$的垂直线段 ab 的端点，反之亦然）。由于 H 与$A \backsim B$相交，集合 $A \cap \hat{} B$ 和 $B \cap \hat{} A$ 必定位于 $\mathbb{R}^3 \setminus H$的不同半空间中。因此， H 是非竖直的，并与每一条 满足 $a \in A$ 和 $b \in B$的垂直线段 ab 相交。 □

注意，如果凸集序列 K_1、.....、K_n 由直线序列 ℓ_1、.....、ℓ_n实现，那么对于 $1 \le i \ne j \le n$，任何将一对直线 ℓ_i、ℓ_j分隔开的平面 H，也必然会将相应的集合 K_i 和 K_j 分隔开（因为 H 穿过 p（ℓ_i、ℓ_j）与 $\in K_i \cap \ell_i$ 和p（ℓ_j、ℓ_i） $\in K_j \cap \ell_j$之间的闭垂直线段）。然而，反之则未必成立。

定义。 对于 $\mathbb{R}^3$中的任意有限族 $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_n\}$ 凸集，我们用 $\mathcal{K}^{\backsim}$ 表示族 $\{K_i \backsim K_j \mid 1 \le i < j \le q\}$。

3 定理 1.8 的证明

不妨设所讨论的族 $\mathcal{K}$ 由紧凸集组成。否则，可将每个集合 K_i 替换为凸多面体 $K_i' = \mathrm{conv}$（$\{x_{i,j} \mid j \in [n] \setminus \{i\}\}$），其中 $x_{i,\,j}$表示 $K_i \cap K_j$中的任意点。事实上，“收缩后的”族 $\mathcal{K}' = \{K_1', \dots, K_n'\}$仍然是两两相交的，并且任何与 $\mathcal{K}'$ 中固定比例的集合相交的直线截线，也必须穿过 $\mathcal{K}$中相同比例的集合。

定理 3.1. 对于任意整数 $q \ge 3$，都存在一个常数 $p \ge q$，使得以下性质成立。设 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个两两相交的凸集族。那么对于每个子族 $\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{K}}{p}$，以下条件至少有一个成立：

1. 存在三个集合 A、B、$C \in \mathcal{A}$，一条竖直线可以穿过它们（即 $A^* \cap B^* \cap C^* \ne \emptyset$）；或者

2. 存在一个序列 $K_1, \dots, K_q$，由 $\mathcal{A}$ 中 q 个互不相同的元素组成，该序列可以由一列单调序列 $\ell_1, \dots, \ell_q$ 的 q 条直线实现；此外，至少 $c\binom{q}{2}$ 对 K_i、K_j（其中$1 \le i < j \le q$）可以被单个平面 π 分离；这里 c 是一个与 q 无关的常数。

证明。 令 $p = N_2(q)$，其中 $N_2(\cdot)$ 是定理 2.3 中定义的量。令 $\mathcal{A}$ 为 p个 $\mathcal{K}$的子集。假设没有 $\mathcal{A}$ 中的 3 个元素能同时被一条竖直线穿过，因此， $\mathcal{A}$ 是严格 2-重叠的。根据定理 2.3（以及 p 和 q 的选取，它们满足该定理中的关系）， $\mathcal{A}$ 必定包含一个由 q 个互不相同的元素组成的序列 K_1，.....， K_q，该序列可由一个由 q 条直线组成的单调序列 ℓ_1，.....，ℓ_q实现。根据定理 2.4，必定存在一个平面π，将至少 cq^2 对 ℓ_i，ℓ_j （对于 $1 \le i < j \le q$）分隔开，因此也将相应的凸集对 K_i，K_j 中的 cq^2 对分隔开。 □

我们论证的核心是以下性质，其证明推迟到本节末尾。

引理 3.2。 对于任意 $c_0 > 0$，只要整数 $q > 0$ 足够大，以下性质便成立。设 $\mathcal{Q} = \{K_1, \dots, K_q\}$ 是由 q 个两两相交的凸集构成的严格 2-重叠族，且位于 $\mathbb{R}^3$ 中。假设序列 $K_1, \dots, K_q$ 可由直线序列 $\ell_1, \dots, \ell_q$ 实现。设 π 是一个平面，至少分隔 $c_0\binom{q}{2}$ 对 $\{K_i, K_j\} \in \binom{\mathcal{Q}}{2}$。[4] 那么，存在一条直线 $\ell \subset \pi$，穿过 $\mathcal{Q}$ 中至少 3 个元素。

[4]请注意， π 无需将相应的直线对 ℓ_i 和 ℓ_j 分隔开。

定义。设 $d \geq 1$ 为一个整数。沿用 Alon 和 Kalai [4], 的记号，我们称 $\mathbb{R}^d$ 中由 d 个凸集组成的族 $\mathcal{F}$ 是良好的，如果满足以下条件之一： $d = 1$，或者 $\mathcal{F}$ 不能被一个 $(d-2)$ 维平坦穿过。[5] 此外，如果一个由 $\mathbb{R}^d$ 中 $d+1$ 个凸集组成的族，其所有大小为 d 的子集都是良好的，则称该族良好 。

如果超平面 π 与凸集 K 在 $\mathbb{R}^d$ 中相切，意指 $K \cap \pi \neq \emptyset$，且 K 位于 π所确定的某个闭半空间内。如果超平面 π 是定向的，则两个开半空间预先标记为 π^- 和 π^+。Cappell等人 [12, 定理3] 证明了以下性质。

引理 3.3。任意一个由 $d \geq 1$ 中的紧凸集组成的良好族 $\mathcal{F}$，恰好支持 2^{d+1} 个不同的定向超平面，它们与 $\mathcal{F}$中的每个集合都相切。

事实上，Cappell 等人 [12, 定理 3]证明了以下更强的结论：对于任意划分$\mathcal{F} = \mathcal{F}^- \uplus \mathcal{F}^+$，存在两个定向公共相切超平面 π_1和 π_2，使得 $\bigcup \mathcal{F}^-$（分别为 $\bigcup \mathcal{F}^+$）包含于 π_1^-和 π_2^-的闭包中（分别包含于 π_1^+和 π_2^+的闭包中）。利用引理 3.3，Alon 和 Kalai [4, 引理 4.3] 推导出了关于由 $d+1$凸集构成的良好族的以下性质。

引理 3.4. 任意可由一个超平面穿过的 $\mathcal{F}$ 个 $d+1$ 凸集的良好族，都包含一个大小为 d 的子集 $\mathcal{F}'$，使得其 2^{d+1} 个定向公共相切超平面中至少有一个穿过 $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$ 的剩余元素。

定义。对于任意 $0 \leq k \leq d$，令 $\varphi_{d,k} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ 表示将 $\mathbb{R}^d$ 投影到由前 k 个坐标轴张成的 $\mathbb{R}^k$ 副本上的标准投影。（也就是说，对于所有 $x \in \mathbb{R}^d$，都有 $x^* = \varphi_{d,d-1}(x)$。）

如果存在一个由 $1 \leq i \leq d$ 个元素组成的子集 $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$，使得满足以下条件，我们就称超平面 π 是由一个紧凸集族 $\mathcal{A}$ 确定的：

1. $\mathcal{B}' = \{\varphi_{d,i}(K) \mid K \in \mathcal{B}\}$ 是 $\mathbb{R}^i$ 中的一个良好族，并且
2. $\pi = \varphi_{d\,i}^{-1}(\pi')$，其中 π' 是 $\mathbb{R}^i$ 内与 $\mathcal{B}'$ 相切的公共超平面。

注意，任意一族 $\mathcal{A}$ 凸集都会通过其各种子集 $\mathcal{B}$生成一个至多包含 $\sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} \cdot 2^i \leq 3^d$个超平面的集族 $\mathcal{H}(\mathcal{A})$，这些超平面由 $\mathcal{A}$ 确定。Alon 和 Kalai [4, 证明命题 4.1]时，实际上已经隐含地证明了定理 1.5 的以下更强变体。为完整起见，其证明详见附录A。

引理 3.5。对于任意 $0 < \alpha \leq 1$以及任意整数 $d \geq 1$，存在一个常数 $\beta'_d(\alpha)$，使其具有以下性质。设 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一族 $n \geq d+1$ 凸集，其中包含 $\alpha\binom{n}{d+1}$个子集 $\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{K}}{d+1}$，且每个子集都被一个超平面穿过。那么存在一个超平面穿过 $\beta'_d(\alpha)|\mathcal{K}|$个 $\mathcal{K}$ 元素，且该超平面由一个子集 $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{K}}{d}$确定。

为证明定理 1.8，我们固定一个大小适当的整数常数 $q \geq 3$，其具体取值将在下文确定，并根据定理 3.1 选择 $p \geq q$ 。不妨设 $|\mathcal{K}| \geq p$；否则，定理对任何穿过 $\mathcal{K}$ 中某个元素的直线都成立。若存在至少 $\frac{1}{2}\binom{n}{p}$ p 个大小为 $\mathcal{A} \in \binom{\mathcal{K}}{p}$ 的子集，使得每个子集都包含至少一个满足 $A^* \cap B^* \cap C^* \neq \emptyset$ 的三元组 $\{A, B, C\}$，则整个族 $\mathcal{K}$ 必须包含至少 $\binom{n}{p}/\binom{n}{p-3} = \Omega(n^3)$ 个具有此性质的三元组 $\{A, B, C\}$；因此，将分数 Helly 定理（定理 1.1）应用于族 $\mathcal{K}^* = \{K^* \mid K^* \in \mathcal{K}\}$，可得到一条穿过 $\mathcal{K}$ 中 $\Omega(n)$ 个元素的竖直线。

[5]按照 Cappell *et al.* [12] 的记号，这样的族称为 *separated*。

因此，由于 $\mathcal{K}$ 两两相交，以下不妨设至少有 $\frac{1}{2}\binom{n}{p}$ 个大小为 p 的子集 $\mathcal{A}\in\binom{K}{p}$ 是严格 2-重叠的。对于每个这样的 p 子集 $\mathcal{A}\in\binom{\mathcal{K}}{p}$，定理 3.1 给出 q 个彼此不同的 $\mathcal{A}$ 中元素组成的子集 $\mathcal{Q}=\{K_1,\dots,K_q\}$；该子集可由 q 条直线的集合 $\mathcal{L}=\{\ell_1,\dots,\ell_q\}$ 实现，并且存在一个平面，将 $K_{i,\ j}=K_i\backsim K_j$ 中至少 $c\binom{q}{2}$ 个集合与 $\mathcal{Q}^{\backsim}$ 分隔开来。对 $\mathcal{A}\in\binom{\mathcal{K}}{p}$ 的至少 $\frac{1}{2}\binom{n}{p}$ 种可选取法重复这一论证，可得到一个集族$\Gamma(\mathcal{K},\ q)\subseteq\binom{\mathcal{K}}{q}$，其中包含 $=$ 个 $2\binom{n}{p-q}$ 为 $\Omega(n^q)$ 的族 $\mathcal{Q}$，且具有上述性质；其中隐含比例常数取决于 p 和 q。

对于每个 q族 $\mathcal{Q}\in\Gamma(\mathcal{K},q)$，将引理 3.5 应用于诱导族 $\mathcal{Q}^{\backsim}$，可得到一个由 3 个凸集组成的集族$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}=\{K_{i_1,i_2},K_{i_3,i_4},K_{i_5,i_6}\}$，它确定一个横截平面 $\pi_{\mathcal{Q}}$，该平面至少横截 $\mathcal{Q}^{\backsim}$ 中的 $\beta_3(c)\binom{q}{2}$ 个元素。因此，根据鸽巢原理，必定存在一个子族 $\mathcal{Q}_0\in\binom{\mathcal{K}}{6}$、一个子集 $\mathcal{D}_0\in\binom{\mathcal{Q}_0^{\backsim}}{3}$ 和一个平面 $\pi_0\in\mathcal{H}(\mathcal{D}_0)$，使得对于形式为 $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}_0\cup\mathcal{S}$ 的 $\Omega(n^{q-6})$ 个不同选择 $\mathcal{Q}\in\Gamma(\mathcal{K},q)$，$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}=\mathcal{D}_0$ 和 $\pi_{\mathcal{Q}}=\pi_0$ 均成立，其中 $\mathcal{S}\in\binom{\mathcal{K}\setminus\mathcal{Q}_0}{q-6}$。只要常数 q 取得足够大，就可直接得到一个集族 $\Lambda_0(\mathcal{K},q-6)$，其中包含 $\Theta(n^{q-6})$ 个子集 $\mathcal{S}\in\binom{\mathcal{K}\setminus\mathcal{Q}_0}{q-6}$，并且每个子集都满足引理 3.2 关于平面 π_0 的条件（尽管相应的常数 $c_0<\beta_3(c)$ 会较小，因为 π_0 至少横截 $\mathcal{S}^{\backsim}$ 中的 $\beta_3(c)\binom{q}{2}-6q$ 个元素）。因此，只要 q 取得足够大，这些族 $\mathcal{S}\in\Lambda_0(\mathcal{K},q-6)$ 中的每一个都必须包含一个由 3 个元素组成的子集 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{S}$，且其中的元素可被 π_0 内的一条直线横截。由于任意这样的三元组 $\mathcal{T}\in\binom{\mathcal{K}}{3}$ 至多可由 $\mathcal{S}\in\Lambda_0(\mathcal{K},q-6)$ 的 $O(n^{q-9})$ 种不同选择产生，族 $\mathcal{K}$ 必须包含 $\Theta(n^3)$ 个此类三元组 $\mathcal{T}$。现在，对二维族 $\{K\cap\pi_0\mid K\in\mathcal{K}\}$ 应用定理 1.5，即可推出定理 1.8。□

引理 3.2 的证明。对于每一对 $\{K_i,K_j\}$（其中 $1\le i<j\le q$），我们指定一个点 $y_{i,j}\in K_i\cap K_j$。令 Π 表示所有被 π 分离的对 $\{K_i,K_j\}\in\binom{\mathcal{Q}}{2}$ 构成的子集。根据引理 2.5，对于每一对 $\{K_i,K_j\}\in\Pi$，可以固定一条闭垂直线段 $a_{i,j}b_{i,j}$，满足 $a_{i,j}\in K_i$ 和 $b_{i,j}\in K_j$，且它与 π 相交于某个点 $x_{i,j}$。注意，线段 $y_{i,j}a_{i,j}\subset K_i$ 和 $y_{i,j}b_{i,j}\subset K_j$ 的垂直投影完全位于 $K_i^*\cap K_j^*$ 内，它们构成一条路径 $\gamma_{i,j}$，在单个点 $w_{i,j}\in K_i\cup K_j$ 处穿过 π（因此 $w_{i,j}^*\in K_i^*\cap K_j^*$）。

我们的论证核心是 $\mathcal{L}'=\{\ell_1',\dots,\ell_q'\}$ 中的二维直线族 π，它由直线 $\ell_i\in\mathcal{L}$ 在平面 π上的相应垂直投影 ℓ_i' 组成。[7]对于每一对 $\{\ell_i',\ell_j'\}\in\binom{\mathcal{L}'}{2}$，其中 $1\le i<j\le q$，我们用 $v_{i,\ j}$ 表示交点 $\ell_i'\cap\ell_j'$，其垂直投影 $\ell_i^*\cap\ell_j^*$ 也属于 $K_i^*\cap K_j^*$。

稍微滥用一下记号，对于任意 $1\le i<j\le q$，我们将点 $w_{i,\ j}$ 称作$w_{i,\ j}$ 或$w_{j,\ i}$；对点 $v_{i,\ j}$也采用相同的对称记号。

对于每个 $1\le i\le q$，我们记

$$W:=\{w_{i,j}\mid\{K_i,K_j\}\in\Pi\},$$

$$W_i:=W\cap K_i,$$

and

$$V_i=\{v_{i,j}\mid\{K_i,K_j\}\in\Pi,w_{i,j}\in W_i\}.$$

[6]注意，我们从未假设 $a_{i,\ j}$和 $b_{i,\ j}$分别位于 $\ell_i\cap K_i$和 $\ell_j\cap K_j$上，也未假设 ℓ_i和 ℓ_j被 π分离。

[7] $\mathcal{K}$ $\ell_1\ \dots\ \ell_q$ 2 $\mathcal{L}'$ $\mathcal{L}^*=$注意，$\{\ell_1^*,\dots,\ell_q^*\}$
由于可由 ,,实现，且它严格地 -重叠，因此集合 ,中的任意三个直线都不会交于同一点，且其中任意两条直线都不平行。

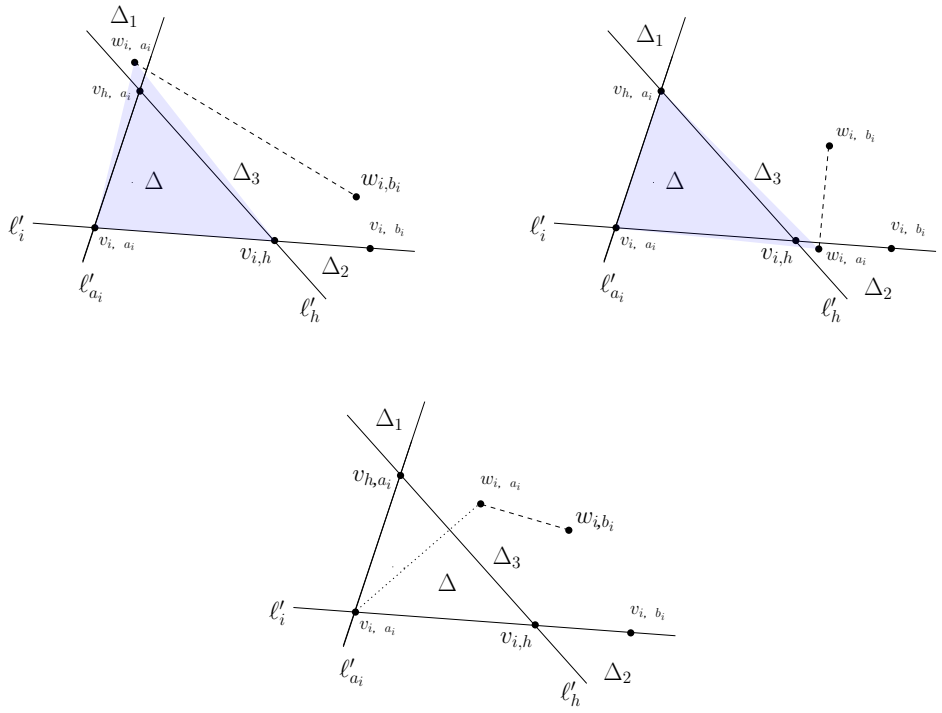

图6：引理 3.2 的证明——平面 π 内的视图。每条直线 ℓ'_i 都是 ℓ_i 到 π 的垂直投影。如果线段 $v_{i,\ a_i}w_{i,\ a_i}$ 与 ℓ'_h 相交，则我们可以证明 $K_i^* \cap K_{a_i}^* \cap K_h^* \neq \emptyset$，这与选择 $\mathcal{Q}$ 作为 $\mathbb{R}^3$ 中严格二重重叠族的做法相矛盾。图中根据 $w_{i,\ a_i}$ 在 $(\ell'_h)^+$ 内的位置，展示了三种可能的情形。

在每条直线 $\ell'_i \in \mathcal{L}'$ 上，我们考虑 $I_i = v_i$开区间$a_i v_{i,\ b_i}$，它位于 V_i 的两个极端点之间，并注意到至少存在总计

$$\sum_{i=1}^{q} (|V_i| - 2) = \sum_{i=1}^{q} (|W_i| - 2) = |\Pi| - 2q \geq c_0 \binom{q}{2} - 2q$$

对 $(I_i,\ \ell'_h)$ 中的每一对，区间 I_i 都被直线 $\ell'_h \in \mathcal{L}'$ 穿过，每次交于点 $v_{i,\ h}$（其中 $i \in [q]$ 且 $h \notin \{a_i, b_i\}$）。因此，选择 $q > 10/c_0$ 可得到一条直线 $\ell'_h \in \mathcal{L}'$，它至少穿过 $(c_0\binom{q}{2} - 2q)/q \geq 3$ 个不同的区间 I_i，分别交于相应的顶点 $v_{i,\ h} \in V_i$，从而 $i \in [q] \setminus \{h\}$ 且 $h \notin \{a_i, b_i\}$。只需证明，对于这些区间 I_i 中的每一个，直线 $\ell'_h \subset \pi$ 也必定穿过相应的线段 $w_{i,\ a_i}w_{i,\ b_i} \subset K_i \cap \pi$。

为此，固定一个指标 $i \in [q] \setminus \{h\}$，使得 $v_{i,\ h} \in I_i \cap V_i$ 且 $v_{i,\ h} \notin \{v_{i,a_i}, v_{i,b_i}\}$，并反设 ℓ'_h 不与线段 $w_{i,\ a_i}w_{i,\ b_i} \subset K_i \cap \pi$ 相交。于是，至少有一条线段 $v_{i,\ a_i}w_{i,\ a_i}$ 或 $v_{i,\ b_i}w_{i,\ b_i}$ 必须与直线 ℓ'_h 相交；不妨设前者如此，见图6。我们将证明 $K_i^* \cap K_{a_i}^* \cap K_h^* \neq \emptyset$，这与先前关于族 $\mathcal{Q}$ 是严格 2-重叠的假设相矛盾。

事实上，考虑由三条直线 ℓ'_i、ℓ'_{a_i} 和 ℓ'_h 构成的排列，并将它们定向，使得 $\Delta = (\ell'_i)^- \cap (\ell'_{a_i})^- \cap (\ell'_h)^-$ 构成唯一的有界单元——一个三角形。由于 $v_{i,\ a_i}$ 位于 $(\ell'_h)^-$ 中，点 $w_{i,\ a_i}$ 必须位于另一个半平面 ℓ_h^+ 中。因此，它必定位于以下某个单元的闭包中：$\Delta_1 := (\ell'_{a_i})^+ \cap (\ell'_h)^+ \cap (\ell'_i)^-$、$\Delta_2 := (\ell'_{a_i})^- \cap (\ell'_h)^+ \cap (\ell'_i)^+$，或 $\Delta_3 := (\ell'_{a_i})^- \cap (\ell'_h)^+ \cap (\ell'_i)^-$；见图6。然而，如果 $w_{i,\ a_i}$ 位于 Δ_1 的闭包中，那么点 $v_{a_i,\ h}$ 就位于三角形 $\tau = \text{conv}(\Delta \cup \{w_{i,a_i}\}) = \text{conv}\,(v_{i,a_i}v_{i,h} \cup \{w_{i,a_i}\})$ 中，其垂直投影 τ^* 位于 K_i^* 中，因为二者

$w_{i,\,a_i}$ 和 $v_{i,\,a_i}v_{i,\,h} \subset a_ib_i \subset \ell_i'$ 投影到 K_i^*。因此，我们有 $v_{a_i,\,h}^* \in K_i^* \cap K_{a_i}^* \cap K_{h}^*$。若 $w_{i,\,a_i}$ 位于 Δ_2 的闭包中，也可用对称的论证——我们说明点 $v_{i,\,h}$ 落在三角形 conv($\Delta \cup \{w_{i,a_i}\}$) 中，其投影位于 $K_{a_i}^*$ 中，因此 $v_{i,\,h}^* \in K_{a_i}^* \cap K_i^* \cap K_{h}^*$。最后，若 $w_{i,\,a_i}$ 位于 Δ_2 中，那么交集 $v_{i,\,a_i}w_{i,\,a_i} \cap v_{i,\,h}v_{a_i,\,h}$ 再次投影到 $K_i^* \cap K_{a_i}^* \cap K_h^*$ 中的一个点。□

4 定理 2.2 的证明

如第3节开头所述，不失一般性地可以假设这里讨论的严格 2-相交族 $\mathcal{K}$ 由紧凸集构成（否则，可将每个集合替换为一个凸多边形）。

我们首先确立 $\mathbb{R}^2$中三个或四个严格二相交凸集的排列的基本性质。

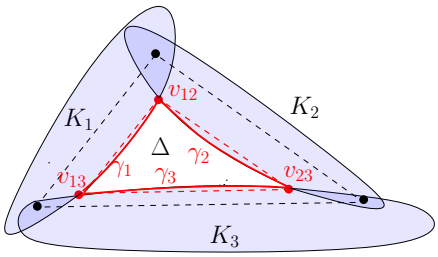

图 7：引理 4.1。严格二相交族 $\mathcal{K}$ ={K_1, K_2, K_3} 的补集 $\mathbb{R}^2 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3)$恰好包含一个有界区域，该区域由弧 $\gamma_i \subset \partial K_i$围成。

引理 4.1 ([1, 20])。设 K_1、K_2、K_3 是 $\mathbb{R}^2$中的一个由紧凸集构成的严格二重相交有序三元组。那么，以下陈述成立（见图 7）。

i. 补集 $\mathbb{R}^2 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3)$ 可以表示为并集 $\Delta \cup \Delta_\infty$，它由一个无界区域 Δ_∞ 和一个有界且单连通空洞 $\Delta = \Delta(K_1, K_2, K_3)$ 组成，其边界由 3 条弧 $\gamma_1 \subseteq \partial K_1$、$\gamma_2 \subseteq \partial K_2$、$\gamma_3 \subseteq \partial K_3$ 构成。*ii.* 对于满足 $1 \le i < j \le 3$ 的 x_i、$_j \in K_i \cap K_j$ 的每一种选择，定向三元组 x_1、2、x_2、3、x_1、3 具有相同的定向（即顺时针或逆时针），并且 conv(x_1、2、x_2、3、x_1、3) 包含 Δ。*iii.* conv(Δ) 的闭包是一个三角形 $\triangle v_{12}v_{23}v_{13}$，其中 v_{ij} 表示 γ_i 和 γ_j 的公共端点。此外，对于每个 $1 \le i \le 3$，线段 $v_{ij}v_{ik}$ 的内部（带有 $\{j,k\} = [3]\setminus\{i\}$）包含于 $K_i \setminus (K_j \cup K_k)$ 中。

因此，若紧凸集的严格二相交三元组 (K_1, K_2, K_3) 位于 $\mathbb{R}^2$，且任意三个点 $x_{1,2} \in K_1 \cap K_2$,$x_{2,3} \in K_2 \cap K_3$, $x_{1,3} \in K_1 \cap K_3$ 沿三角形 conv(x_1,2,x_2,3,x_3,1) 的边界按顺时针（分别为逆时针）顺序排列，我们就称该三元组具有顺时针（分别为逆时针）定向，并记作 $\circlearrowright(K_1, K_2, K_3)$（分别记作 $\circlearrowleft(K_1, K_2, K_3)$）。

引理 4.2。设 $K_1, \ldots, K_4$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中由 4 个紧凸集组成的严格二相交序列，其中任意两个集合都不相互相切，并且假设对于 $1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 4$，所有有序三元组 $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}$ 都具有相同的定向。设 $[4] = \{a, b\} \uplus \{c, d\}$ 是一个划分，使得

$\Delta_c = \Delta(K_a, K_b, K_c)$ 和 $\Delta_d = \Delta(K_a, K_b, K_d)$ 与 $\partial(K_a \cup K_b)$ 的同一个顶点 v 相邻，并且在其任意小的邻域内重叠。对于 $i \in \{c, d\}$，令 γ_i 表示 $\partial\Delta_i$ 中包含于 ∂K_i 的弧，其端点为 $v_{ai} \in \partial(K_a \cap K_i)$ 和 $v_{bi} \in \partial(K_b \cap K_i)$。此外，假设弧 γ_c 或 γ_d 至少有一条包含 $K_d \cap K_c$ 中的一个点。那么我们有 $v_{ac}v_{bc} \cap v_{ad}v_{bd} \neq \emptyset$。

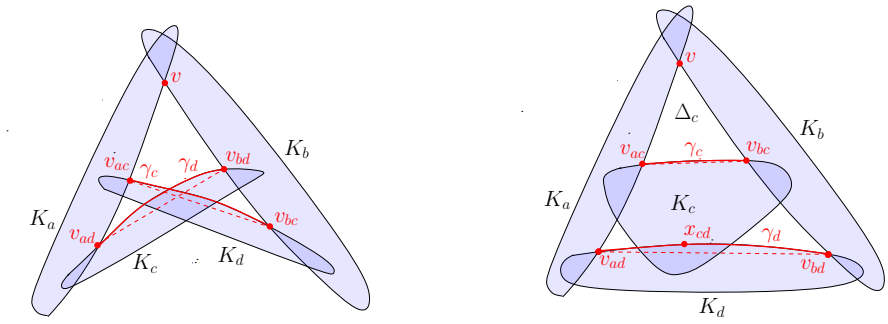

图 8：引理 4.2。左：$\Delta_c = \Delta(K_a, K_b, K_c)$ 和 $\Delta_d = \Delta(K_a, K_b, K_d)$ 都与 $\partial(K_a \cup K_b)$ 的同一个顶点 v 相邻，并在其附近重叠。此外，弧 γ_c，γ_d 中至少有一条包含 $K_c \cap K_d$ 的一个点。因此我们有 $v_{ac}v_{bc} \cap v_{ad}v_{bd} \neq \emptyset$。右：引理的证明。如果 $v_{ac}v_{bc} \cap v_{ad}v_{bd} = \emptyset$，那么 K_1、……、K_4 中必有两个子序列的定向相反。

证明。反设结论不成立，即 $v_{ac}v_{bc} \cap v_{ad}v_{bd} = \emptyset$。参见图 8。由于开区域 Δ_c 和 Δ_d 都与同一个顶点 $v \in \partial(K_a \cap K_b)$ 相邻，且在其附近重叠，因此有序三元组 v，v_{bc}，v_{ac} 和 v，v_{bd}，v_{ad} 具有相同的定向，设为顺时针。由于 $v_{ac}v_{bc} \cap v_{ad}v_{bd} = \emptyset$（根据引理 3.2 (iii)，这些线段的内部不能与 $K_a \cup K_b$ 相交），不妨设 v，v_{ac} 和 v_{ad}（分别为 v，v_{bc} 和 v_{bd}）沿着 ∂K_a（分别为 ∂K_b）按顺时针（分别为逆时针）出现。因此，γ_d 必须包含一个点 $x_{cd} \in K_c \cap K_d$。忽略圆周对称和镜像对称，只需考虑三种基本情形：

1. 如果 $a = 1$、$b = 2$、$c = 3$ 和 $d = 4$，那么引理 3.2 表明，三元组（K_1、K_3、K_4）和（K_2、K_3、K_4）的定向相反，这一点可通过考察定向点三元组（v_{13}、x_{34}、v_{14}）和（v_{23}、x_{34}、v_{24}）看出。2. 如果 $a = 1$、$b = 3$、$c = 2$ 和 $d = 4$，那么三元组（K_1、K_2、K_3）和（K_1、K_2、K_4）的定向也相反（有序点三元组（v、v_{12}、v_{23}）和（v_{12}、x_{24}、v_{14}）可证明这一点）。3. 如果 $a = 1$、$b = 3$、$c = 4$ 和 $d = 2$，那么与前一种情形类似，三元组（K_1、K_3、K_4）和（K_1、K_2、K_4）的定向相反。

□

我们称 $\mathbb{R}^2$ 中由凸集组成的严格二重相交有序三元组 A, B, C 为 *3*-帽（分别为 *3*-杯），若任意三个点 $a \in A \cap B$、$b \in A \cap C$ 和 $c \in B \cap C$ 都构成一个 3-帽（分别为 3-杯）a, b, c。[8]

令 $n_1 = c_1 \cdot \max\{n, R_3(n+1, 2)\}$，并令 $N_1 = R_3(n_1, 8)$，其中 $R_k(m, c)$ 表示定理 2.1 中的拉姆齐数，而 c_1 是一个适当大的常数，其具体取值将在下文中进一步确定。为

[8]特别地，这意味着 $A \cap B, A \cap C, B \cap C$ 中任意两个不同的交点都不能被一条竖直线穿过。

证明定理 2.2，固定一个由 $\mathbb{R}^2$ 中的紧凸集组成的严格 2-相交族 $\mathcal{K}$。考虑 $\mathcal{K}$ 中这些集合的任意排序 $K_1, \ldots, K_{N_1}$。

设 $\mathcal{T} = \{K_i, K_j, K_k\} \in \binom{\mathcal{K}}{3}$，对于 $i < j < k$。由于不存在一条直线能够穿过交点 $K_i \cap K_j$、$K_i \cap K_j$ 和 $K_j \cap K_k$ 中的任意三个交点（否则，一维 Helly 变体将给出 $\bigcap \mathcal{T} \neq \emptyset$），因此，任何这样的三元组 $\mathcal{T}$ 必然恰好属于以下类别之一：

（i） $\mathcal{T}$ 的某个排列构成一个 3-帽。（ii） $\mathcal{T}$ 的某个排列构成一个 3-杯。（iii）集合 $K_i \cap K_j$、$K_i \cap K_j$ 和 $K_j \cap K_k$ 中的两个集合，即 $K_i \cap K_k$ 和 $K_i \cap K_j$，被一条位于 $K_j \cap K_k$ 左侧的竖直线穿过。（iv）集合 $K_i \cap K_j$、$K_i \cap K_j$ 和 $K_j \cap K_k$ 中的两个集合，即 $K_i \cap K_k$ 和 $K_i \cap K_j$，被一条位于 $K_j \cap K_k$ 右侧的竖直线穿过。

结合由引理 3.2 得出的两种可能定向 $\circlearrowleft(K_i, K_j, K_k)$ 和 $\circlearrowleft(K_i, K_j, K_k)$，可对 $\binom{\mathcal{K}}{3}$ 中的所有三元组进行 8-着色（见图 9）。由于 $N_1 \geq R_3(n_1, 8)$，定理 2.1 给出一个含有 n_1 个元素的子集 $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$，使得所有三元组 $\mathcal{T} \in \binom{\mathcal{K}_1}{3}$ 的颜色都相同。忽略对称性后，可能出现以下两种情形：

1. 对于 $i < j < k$，所有三元组 $\mathcal{T} = \{K_i, K_j, K_k\} \in \binom{\mathcal{K}_1}{3}$ 都属于类型 (i)，且具有相同的定向 $\circlearrowleft(K_i, K_j, K_k)$。2. 对于 $i < j < k$，所有三元组 $\mathcal{T} = \{K_i, K_j, K_k\} \in \binom{\mathcal{K}_1}{3}$ 都属于类型 (iii)，且具有相同的定向 $\circlearrowleft(K_i, K_j, K_k)$。

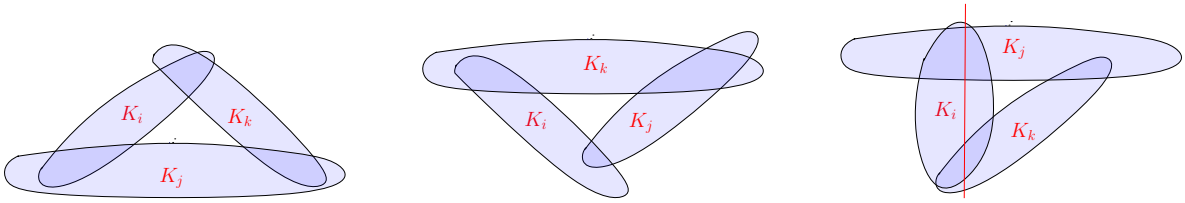

图 9：定理 2.2 的证明——展示了 $\{K_i, K_j, K_k\}$ 与 $i < j < k$ 的三元组的三种“颜色”。左：三元组 $\{K_i, K_j, K_k\}$ 属于类型 (i)，其定向为 $\circlearrowleft(K_i, K_j, K_k)$。中：三元组 $\{K_i, K_j, K_k\}$ 属于类型 (ii)，其定向为 $\circlearrowleft(K_i, K_j, K_k)$。右：三元组 $\{K_i, K_j, K_k\}$ 属于类型 (iii)，其定向为 $\circlearrowleft(K_i, K_j, K_k)$。

情况 1。根据鸽巢原理，必然存在 $A = K_i$，$B = K_k$，它们参与了 $\mathcal{K}_1$ 中某些形如 (A, K_j, B) 的 $m \geq 3\binom{n_1}{3}/\binom{n_1}{2} = \Theta(n_1)$ 3-帽。适当选择常数 $c_1 > 0$ 将保证 $m \geq n$。

我们固定 A 和 B，并考虑族 $\mathcal{F}$，该族由所有这样的 m 选择构成：K_j .

对于每个元素 $K_j \in \mathcal{F}$，我们用 γ_j 表示子弧 $(\partial K_j) \cap (\partial\Delta(A, K_j, B))$。随后，我们用 a_j 和 b_j 表示 γ_j 的端点，它们分别位于 A和 B上，并用 ℓ_j 表示经过 a_j 和 b_j的直线。引理 3.2 (ii) 表明，所有区域 $\Delta(A, K_j, B)$ 都与 $\partial(A \cup B)$ 的同一个顶点 v 相邻，并且在 v附近重叠。（这是因为向下射线经过 v 并离开 $A \cap B$时，会同时穿过 γ_j 和 $a_j b_j$。）

我们按照各自直线 ℓ_j 的斜率降序重新排列集合 $K_j \in \mathcal{F}$，得到序列 $F_1, \ldots\ldots, F_m$。为记号上的方便，我们也用 γ_j 表示

$\partial\Delta(A,\ F_j,\ B)$ 中由 F_j“支撑”的弧，其端点 a_j 和 b_j 分别位于 ∂A 和 ∂B 上，因此仍用 ℓ_j 表示经过 a_j 和 b_j 的直线。见图10（左）。

断言 4.3。令 $1 \le j \ne j' \le m$。则线段 $a_jb_j \subset \ell_j \cap F_j$ 和 $a_{j'}b_{j'} \subset \ell_{j'} \cap F_{j'}$ 相交。

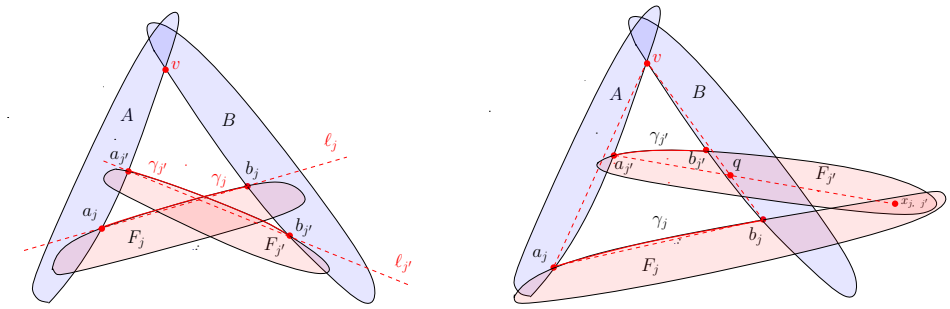

图10：定理 2.2 的证明——情况 1。左：断言 4.3——对于任意 $j < j'$，线段 $a_jb_j \subset \ell_j \cap F_j$ 和$a_{j'}b_{j'} \subset \ell_{j'} \cap F_{j'}$ 相交。右：断言 4.3 的证明。若 $a_jb_j \cap a_{j'}b_{j'} = \emptyset$，且存在一个点 $x_{j,\ j'} \in F_j \cap F_{j'}$使得 $a_{j'}x_{j,\ j'}$ 与 vb_j相交。因此，B，$F_{j'}$ 和 F_j 构成一个禁用的杯。

断言 4.3 的证明。反设 $a_jb_j \cap a_{j'}b_{j'} = \emptyset$，因此根据引理 4.2，弧 γ_j、$\gamma_{j'}$ 中没有任何一条能够包含 $F_j \cap F_{j'}$上的点。固定一个交点 $x_{j,\ j'} \in F_j \cap F_{j'}$。不妨设 $\gamma_{j'}$ 和 $a_{j'}b_{j'}$ 都位于帽三角形 $\triangle a_jvb_j$内，并且在 γ_j上方，而 $x_{j,\ j'}$ 位于 $\triangle a_jvb_j$之外。此外，线段 $a_{j'}x_{j,\ j'}$ 和$b_{j'}x_{j,\ j'}$ 都不能与底边 a_jb_j 相交（否则，该线段也会在 $F_j \cap F_{j'}$上的某一点处与弧γ_j 相交）。由此可知，要么 $a_{j'}x_{j,\ j'}$ 与 vb_j 相交，要么 $b_{j'}x_{j,\ j'}$ 与 va_j相交。不妨设前一种情况成立，并注意到：(i) 交点 $q = vb_j \cap b_{j'}x_{j,\ j'}$ 属于 $F_{j'} \cap F_k$；(ii) 点 b_j 必须位于线段 $qx_{j,\ j'}$ 下方（根据 F_j的凸性）。因此，三点 $q \in F_{j'} \cap B$、$b_j \in F_j \cap B$和$x_{j,\ j'} \in F_j \cap F_{j'}$ 构成一个 3-杯。然而，此时有序三元组（B、$F_{j'}$、F_j）也必须构成一个 3-杯；见图10（右）。完全对称的论证表明，如果 $b_{j'}x_{j,\ j'}$ 与va_j相交，则 F_j、$F_{j'}$、A构成一个 3-杯。任一杯都与 $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}_1$的“单色的”选择相矛盾。

□

现在令 $1 \le j < h < l \le m$。那么，三个点 $\ell_j \cap \ell_h \in F_j \cap F_h$、$\ell_j \cap \ell_l \in F_j \cap F_l$ 和 $\ell_h \cap \ell_l \in F_h \cap F_l$ 必须构成一个 3-帽，而不是 3-杯（否则，$\{F_j, F_h, F_l\}$ 的任何排列都无法得到一个 3-帽）。因此，序列 $F_1, \dots, F_m$ 由直线序列 $\ell_1, \dots, \ell_m$实现，而后者是一个 m-帽。

情况 2。由于所有 $\binom{n_1}{3}$ 三元组 $\{K_i, K_j, K_k\} \subset \mathcal{K}_1$ 都属于类型 (iii)，因此必定存在一个集合 $A = K_i$，它参与了 $\Omega(n_1^2)$ 个有序三元组 (A, K_j, K_k)，并具有以下性质：交集 $K_i \cap K_j$和 $K_i \cap K_k$ 被一条竖直线 ℓ穿过，而 $K_j \cap K_k$位于 ℓ的右侧。将所有交集 $K_j \cap A$竖直投影到线上，$K_j \in \mathcal{K}_1 \setminus \{A\}$，并对所得区间应用一维分数 Helly 定理（这样，任意一对相交的区间都对应于一对集合 $A \cap K_j$和 $A \cap K_k$，它们能同时被一条竖直线穿过），我们得到一条竖直线 ℓ，它穿过 $\Omega(n_1)$ 个交集 $A \cap K_j$，其中$\mathcal{K}_1 \setminus \{A\}$。再次，适当地选取 c_1，即可得到 $m \ge R_3(n+1,2)$。我们用 $\mathcal{F}$表示由相应的 m 个凸集 K_j组成的族。对于每个 $K_j \in \mathcal{F}$，我们固定一个任意点

在 $K_j \cap A \cap \ell$中，并按照相应点 $a_1 \in F_1 \cap A \cap \ell, \ldots, a_m \in F_m \cap A \cap \ell$的升序，将 $\mathcal{F}$的元素重新标记为 $F_1, \ldots, F_m$。[9]

注意，对于所有 $1 \le j < k \le m$，交集 $F_j \cap F_k$ 完全位于 ℓ的右侧（因为 $\{A, F_j, F_k\}$ 属于类型 (iii)，此外，如果该三元组是严格 2-相交的，ℓ 就不能与 $F_j \cap F_k$ 相交）。现在我们来构造 $[m]$中三元组 $j < h < k$ 的次级着色。为此，我们将引理 3.2 应用于三元组 $a_j a_k$，F_j 和 F_k；其"孔区域"$\Delta_{j,\,k} = \Delta\,(a_j a_k,\ F_j,\ F_k)$ 与 $F_j \cup F_k$的某个边界顶点 v_{jk} 相邻。

注意，在 $\partial\Delta_{j,k}$中，F_h 恰好与弧 $\gamma_j \subset \partial F_j$ 和 $\gamma_k \subset \partial F_k$ 之一相交；这两条弧都与$v_{j,k}$ 相邻。见图 11。事实上，由于 $F_h \cap F_j$ 和 $F_h \cap F_k$ 都位于 ℓ的右侧，且点 a_h 位于 $F_h \cap \ell$中，集合 F_h 必定与 $\gamma_j \cup \gamma_k$ 相交（否则，它将永远无法"离开"$\Delta_{j,k}$，从而无法在 ℓ的右侧与 F_j 和 F_k 相交）。然而，F_h 不可能同时与 γ_j 和 γ_k相交。事实上，否则区域 $\Delta(F_j, F_h, F_k)$ 也会与 $v_{j,k}$相邻，并在 $v_{j,k}$附近与 $\Delta_{j,k}$ 重叠。根据引理 4.2，弧 $(\partial K_h) \cap (\partial\Delta(F_j, F_h, F_k))$ 的端点届时将跨过一条与 $a_j a_k$相交的线段。因此，区域 $F_h \cap F_j$ 或 $F_h \cap F_k$ 之一将包含一个位于 ℓ左侧（或其上）的点。

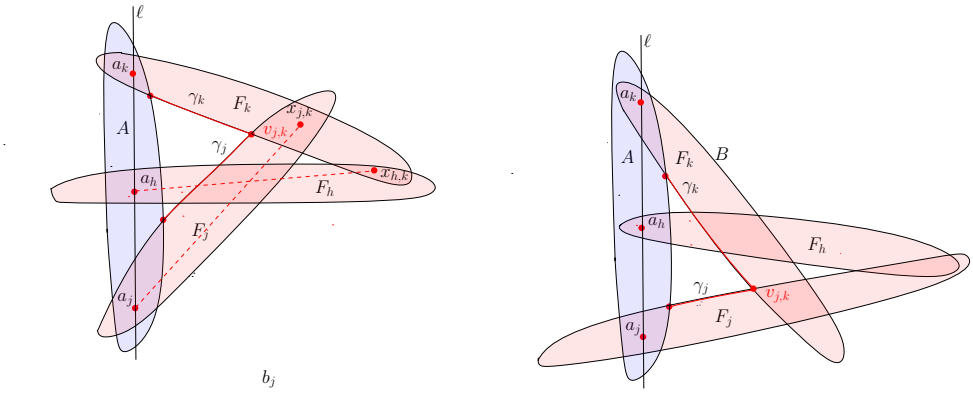

图 11：定理 2.2 的证明——情况 2：根据 F_h 所穿过的弧 γ_j、γ_k，我们将三元组 $\{F_j, F_h, F_k\}$ 着为红色（左）或蓝色（右）。

因此，如果 F_h 与 γ_j 相交（分别地，γ_k），我们就将三元组 $\{F_j, F_h, F_k\}$ 着为红色（分别地，蓝色）。由于 $m \ge R_3(n+1,\ 2)$，再次应用定理 2.1 可得到一个大小为 $(n+1)$ 的子集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$，使得所有三元组 $\{F_j, F_h, F_k\} \subset \mathcal{G}$ 都具有相同的颜色，设为红色。我们按照其代表元 $a_i \in G_i \cap \ell$ 的垂直升序，将 $\mathcal{G}$ 的元素重新标记为 G_1、……、G_{n+1}。

断言 4.4。设 $1 \le j < h < k \le n+1$。那么对于任意选择的 $x_{h,\,k} \in G_j \cap G_h$ 和 $x_{j,\,k} \in G_j \cap G_k$，都有 $a_h x_{h,\,k} \cap a_j x_{j,\,k} \ne \emptyset$。

断言 4.4 的证明。注意，线段 $a_h x_{h,k}$ 恰好与边 $a_k x_{j,k} \subset G_k$, $a_j x_{j,k} \subset G_j$ 中的一条相交，其中 $\triangle a_k x_{j,k} a_j$。然而，由于三元组 $\{F_j, F_h, F_k\}$ 是红色的，有向线段 $a_h x_{j,k}$ 沿着弧 γ_j 离开区域 $\Delta(\overline{a_j a_k}, F_j, F_k)$（见引理 4.1），随后依次穿过 G_j 和 G_k（因为它无法穿过 $G_j \cap G_k$）。断言得证，因为 $a_h x_{j,k}$ 无法从 $\Delta(a_j a_k, F_j, F_k)$ 内部进入 G_j（即无法经过 γ_j），所以它与 G_k 的第一次交集必定位于 $\triangle a_k x_{j,k} a_j$ 之外（即在交集 $a_h x_{j,h} \cap a_j x_{j,k}$ 之后）。 □

对于每个 $1 \le j \le n$，我们固定一个点 $b_j \in G_{n+1} \cap G_j$，并用 ℓ_j 表示经过 $a_j b_j$ 的直线。对所有三元组 G_j，G_h，G_{n+1}（其中 $1 \le j \le h \le n$）应用断言 4.4，可得任意两条

[9]由于 $\mathcal{K}_1$ 是严格二相交的，这些区间 $F_j \cap A \cap \ell$ 中任意两个都不会重叠。

线段 $a_jb_j \subset K_j \cap \ell_j$ 和 $a_hb_h \subset K_h \cap \ell_h$ 都相交。因此，序列 G_1，……，G_m 可由直线序列 ℓ_1，……，ℓ_n 实现。最后，对每个三元组 G_j，G_h，G_k（其中$1 \le j \le h \le k \le n$）应用断言 4.4，并选取 $x_{j,\ k} = \ell_j \cap \ell_k$ 和 $x_{h,\ k} = \ell_h \cap \ell_k$，可得相应的直线$\ell_j$，$\ell_h$，$\ell_k$ 确实构成一个 3-帽。 □

5 定理 2.4 的证明

我们的论证核心是以下性质。

引理 5.1. 存在一个正整数 $J \ge 5$，具有如下性质。设 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_J$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 J 条直线构成的单调序列，且满足 $\ell_1 \succ \ell_2 \succ \ldots \succ \ell_J$。那么，存在 *4* 个互不相同的指标 $i, j, k, l \in [J]$，使得 ℓ_i 和 ℓ_j 被平面 $\pi(\ell_k, \ell_l)$ 分离。

引理 5.1 的证明。令 $J = R_3(5, 4)$，其中 $R_k(m, c)$ 表示定理 2.1 中的拉姆齐数，并固定一个由 J 条直线组成的单调序列 $\ell_1 \succ \ell_2 \succ \ldots \succ \ell_J$。将坐标系绕轴旋转后，不失一般性，可以假定这些直线 ℓ_i 中没有一条平行于 x 轴，因此可以将它们定向为沿 x 轴的正方向。不失一般性，假定投影序列 $\ell_1^*, \ldots, \ell_J^*$ 构成一个 J帽。对于任意 $1 \le i < j \le J$，令 $V_{i,j}$ 表示楔形区域 $(\ell_i^*)^- \cap (\ell_j^*)^-$ 上方的垂直棱柱，并令 $Z_{i,j}$ 表示 $V_{i,j}$ 中位于 $\pi(\ell_i, \ell_j)$ 与 $\pi(\ell_j, \ell_i)$ 之间的开区域（见图 12）。令 $\Delta_{i,j}^+$（分别为 $\Delta_{i,j}^-$）表示$Z_{i,j}$的顶面（分别为底面），该面位于平面 $\pi(\ell_i, \ell_j)$（分别为 $\pi(\ell_j, \ell_i)$）内。

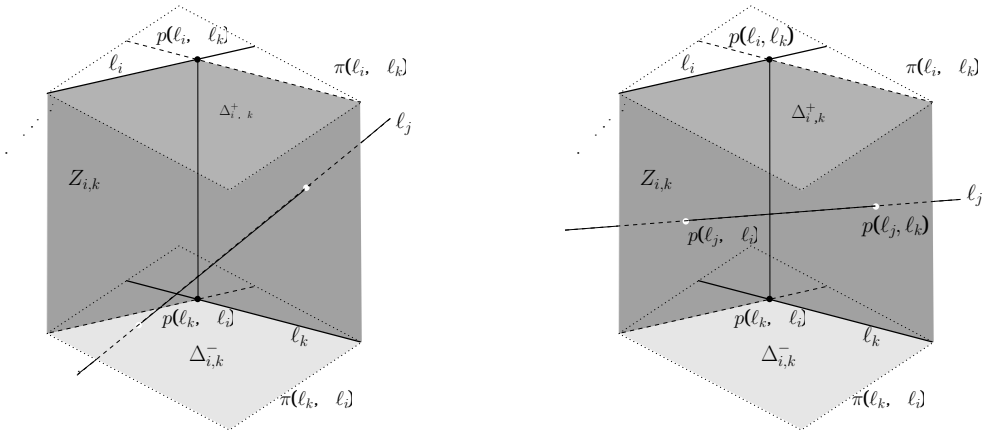

图 12：命题 5.2。图中所示为棱柱 $Z_{i,\ k}$，它位于 $(\ell_i^*)^- \cap (\ell_k^*)^-$ 的上方，并被夹在平面 $\pi(\ell_i, \ell_k)$ 和 $\pi(\ell_k, \ell_i)$ 之间。左：在情况 1 中，直线 ℓ_j 通过其“底面” $\Delta_{i,\ k}^-$，

k k k = 进入 $Z_{i,\ k}$ 。右：在情况 3 和 4 中，直线 ℓ_j 不穿过面 $\Delta_{i,\ k}^-$，，$\Delta_{i,\ k}^+$，因此，(，) (，) 成立。

命题 5.2。 在前述假设下，任意三条直线 (ℓ_i, ℓ_j, ℓ_k)，满足 $1 \le i < j < k \le J$，至少属于以下类别之一：

1. ℓ_j 在点 $p(\ell_j, \ell_i) \in \Delta_{i,k}^-$，处进入 $Z_{i,\ k}$ 。也就是说，点 $p(\ell_j, \ell_i)$ 位于 $\pi(\ell_k, \ell_i)$的下方。

2. ℓ_j 在点 $p(\ell_j, \ell_k) \in \Delta_{i,k}^+$处离开 $Z_{i,k}$ 。也就是说，点 $p(\ell_j, \ell_k)$ 位于 $\pi(\ell_i, \ell_k)$ 上方。*3.* ℓ_j 既不穿过面 $\Delta_{i,k}^-$，也不穿过面 $\Delta_{i,k}^+$，因此 $\ell_j \cap Z_{i,k} = p(\ell_j, \ell_i)p(\ell_j, \ell_k)$。此外，$\ell_j$ 依次经过 $\pi(\ell_i, \ell_k)$、$Z_{i,k}$ 和 $\pi(\ell_k, \ell_i)$。

4. ℓ_j 既不穿过面 $\Delta_i^-{}_{,k}$，也不穿过面 $\Delta_{i\,k,}^+$。此外，ℓ_j 依次经过 $\pi(\ell_k,\ell_i)Z_{i,k}$ 和$\pi(\ell_i,\ell_k)$。

命题 *5.2* 的证明。显然，直线 ℓ_j 必须与 $Z_{i,\ k}$ 相交；否则，它就会完全位于 $Z_{i,\ k}$的上方或下方。由于点 $\ell_i^*\cap\ell_j^*$ 和 $\ell_j^*\cap\ell_k^*$ 都位于 $Z_{i,\ k}^*=(\ell_i^*)^-\cap(\ell_k^*)^-$的边界上，前一种情况与假设 $\ell_i\succ\ell_j$ 矛盾，而后一种情况与假设 $\ell_j\succ\ell_k$ 矛盾。

如果 ℓ_j 与面 $\Delta_{i\ ,\ k}^+$ 或 $\Delta_{i\,k,}^-$ 中的任何一个相交，那么我们就会遇到情形 1 或 2。如果不是这样，那么根据有向直线 ℓ_j 与平面 $\pi(\ell_i,\ \ell_k)$相交时，是从 $\pi^+(\ell_i,\ \ell_k)$到 $\pi^-(\ell_i,\ \ell_k)$还是反向相交，我们就会遇到情形 3 或 4。 □

根据定理 2.1 选择 J，必定存在 5 条直线 $\ell_{i_1}\succ\ell_{i_2}\succ\ell_{i_3}\succ\ell_{i_4}\succ\ell_{i_5}$，使得其中任意三条都属于命题 5.2 中的同一情形。不失一般性，设 $i_1=1$，……，$i_5=5$（见图 13）。

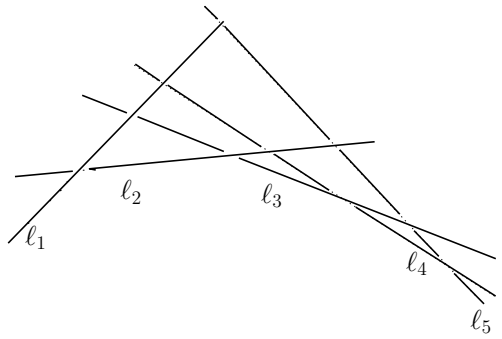

图 13：从上方观察 $\ell_1\succ\ell_2\succ\ell_3\succ\ell_4\succ\ell_5$ 的 5 条直线。

情况 1。对于 $1\le i_1<i_2<i_3\le 5$，所有三元组 $(\ell_{i_1},\ell_{i_2},\ell_{i_3})$ 都属于类型 1。特别地，直线 ℓ_3 通过底面 $\Delta_{2,4}^-$ 进入 $Z_{2,4}$。注意：(i) 点 $\ell_1^*\cap\ell_3^*$ 位于楔形区域 $W_{2,4}:=(\ell_2^*)^+\cap(\ell_4^*)^-$ 中；(ii) ℓ_1 穿过棱柱 $W_{2,4}^\star=\{x\in\mathbb{R}^3\mid x^*\in W\}$ 时经过平面 $\pi(\ell_4,\ell_2)$ 上方（因为 ℓ_1 经过直线 ℓ_2 和 ℓ_4 上方）；(iii) 区间 $\ell_3\cap W_{2,4}^\star$ 位于 $\pi(\ell_4,\ell_2)$ 下方（因为三元组 ℓ_2,ℓ_3,ℓ_4 属于类型 1，所以 ℓ_3 在 $W_{2,4}^\star$ 之后穿过 $Z_{2,4}$，并从下方经由其底面 $\Delta_{2,4}^-\subset\pi(\ell_4,\ell_2)$ 进入 $Z_{2,4}$）。因此，直线 ℓ_3 被平面 $\pi(\ell_4,\ell_2)$ 与 ℓ_1 分离。

情况 2。如果对于 $1\le i_1<i_2<i_3\le 5$，所有三元组 $(\ell_{i_1},\ \ell_{i_2},\ \ell_{i_3})$ 都属于类型 2，那么特别地，直线 ℓ_3 会经由其顶面 $\Delta_{2\ ,\ 4}^+$离开 $Z_{2,\ 4}$。因此，以与情况 1 完全对称的方式推理可得，ℓ_3 与 ℓ_5被 $\pi(\ell_2,\ \ell_4)$ 分离。

情况 3。对于 $1\le i_1<i_2<i_3\le 5$，所有三元组 $(\ell_{i_1},\ell_{i_2},\ell_{i_3})$ 都属于类型 3。对于任意 $1\le i\ne j\le 5$，记 $\ell_{i,j}$ 为经过点 $\ell_i^*\cap\ell_j^*$ 的竖直线。注意，经过 ℓ_3 的三个平面 $\pi(\ell_3,\ell_2)$、$\pi(\ell_3,\ell_4)$ 和 $\pi(\ell_3,\ell_5)$，被 $\ell_{2,4}$ 和 $\ell_{2,5}$ 以相同的顺序穿过，因为 $\ell_{2,4}^*$ 和 $\ell_{2,5}^*$ 都位于 ℓ_3^* 上方。关键观察是，每条直线 $\ell\in\{\ell_{2,4},\ell_{2,5}\}$ 都在与其和其余平面 $\pi(\ell_3,\ell_4)$ 及 $\pi(\ell_3,\ell_5)$ 的交点 $\ell\cap\pi(\ell_3,\ell_4)$ 和 $\ell\cap\pi(\ell_3,\ell_5)$ 上方，穿过 $\pi(\ell_3,\ell_2)$（因此也穿过 $\pi(\ell_2,\ell_3)$）。

为此，我们先证明 $\ell_{2,4}$ 和 $\ell_{2,5}$ 都按向下顺序穿过平面 $\pi(\ell_3,\ell_2)$ 和 $\pi(\ell_3,\ell_4)$。令 $a=p(\ell_3,\ell_2)$ 和 $b=p(\ell_3,\ell_4)$ 分别表示 ℓ_3进入和离开 $Z_{2,4}$ 时经过的点（依据命题 5.2），并注意到 $a^*\in\ell_2^*$ 和 $b^*\in\ell_4^*$。

将 ℓ_2 的一个副本 ℓ_2' 向下平移，直至其在点 a 处碰到 ℓ_3；再将直线 ℓ_4' 对称地向上平移（起初与 ℓ_4 重合），直至其在点 b 处碰到 ℓ_3。记作 $\pi_{24}' := \pi(\ell_2', \ell_4)$ 和 $\pi_{42}' := \pi(\ell_4', \ell_2)$。

由于（ℓ_2、ℓ_3、ℓ_4）属于类型 3，且 ℓ_3 依次与平面 π（ℓ_2、ℓ_4）和 π（ℓ_4、ℓ_2）相交，投影交点（$\pi_{2,4}'$、ℓ_3）* 和（$\pi_{4,2}'$、ℓ_3）* 分别在楔形区域（ℓ_2^*）$^+ \cap$（ℓ_4^*）$^-$ 和（ℓ_2^*）$^- \cap$（ℓ_4^*）$^+$ 内移动。因此，平面 π_{24}' 和 π_{42}' 在由 π（ℓ_2、ℓ_4）和 π（ℓ_4、ℓ_2）界定的平板区域内相向移动，但始终不会重合。由此，在平移结束时，我们仍有 $\ell_2' \succ \ell_4'$。此外，利用 (i) $\ell_2' \subset \pi$（ℓ_3、ℓ_2）和 $\ell_4' \subset \pi$（ℓ_3、ℓ_4），以及 (ii) 直线 ℓ_2（分别为 ℓ_4）位于 ℓ_2'（分别为 ℓ_4'）上方（分别为下方），可得 $\ell_{2,4}$ 必须依照向下顺序与 ℓ_2、$\ell_2' \subset \pi$（ℓ_3、ℓ_2）、$\ell_4' \subset \pi$（ℓ_3、ℓ_4）和 ℓ_4 相交。最后，由于 $\ell_{2,4}^*$ 和 $\ell_{2,5}^*$ 位于 ℓ_3^* 同一侧（即上方），直线 $\ell_{2,5}$ 必须依照向下顺序与 ℓ_2、π（ℓ_3、ℓ_2）和 π（ℓ_3、ℓ_4）相交。

对同类型 3 的三元组 (ℓ_2, ℓ_3, ℓ_5) 重复前面的论证可知，每条竖直线 $\ell_{2,5}$ 和 $\ell_{2,4}$ 都必须按此向下顺序穿过 ℓ_2, $\pi(\ell_3, \ell_2)$ 和 $\pi(\ell_3, \ell_5)$，且点 $\ell_{2,5} \cap \ell_5$ 位于 $\ell_{2,5} \cap \pi(\ell_3, \ell_5)$ 下方。此外，回想一下，直线 $\ell_{2,4}$ 和 $\ell_{2,5}$ 必须按相同的（目前尚未知晓的）顺序穿过 $\pi(\ell_3, \ell_4)$ 和 $\pi(\ell_3, \ell_5)$。

如果点 $\ell_{2,4} \cap \pi(\ell_3, \ell_5)$ 位于 $\ell_{2,4} \cap \pi(\ell_3, \ell_4)$ 上方，那么 $\ell_{2,4}$ 必须按此向下顺序与 $\ell_2, \pi(\ell_3, \ell_5)$ $\pi(\ell_3, \ell_4)$ 和 ℓ_4 相交；因此，ℓ_2 和 ℓ_4 被平面 $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 分离。否则，$\ell_{2,5} \cap \pi(\ell_3, \ell_4)$ 必定位于 $\ell_{2,5} \cap \pi(\ell_3, \ell_5)$ 上方，因此 $\ell_{2,5}$ 按此向下顺序穿过 $\ell_2, \pi(\ell_3, \ell_4)$ $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 和 ℓ_5；由此，直线 ℓ_2 和 ℓ_5 被平面 $\pi(\ell_3, \ell_4)$ 分离。

情况4。所有三元组 $(\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \ell_{i_3})$（$1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 5$）均属于类型4，因此 ℓ_2 被平面 $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 与 ℓ_4 分离。

为此，我们先考虑三元组 (ℓ_3, ℓ_4, ℓ_5)。由于 ℓ_4 在 $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 之前与 $\pi(\ell_5, \ell_3)$ 相交，因此在 $(\ell_3^*)^-$ 上，平面 $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 位于 $\pi(\ell_3, \ell_4)$ 的下方（相应地，在 $(\ell_3^*)^+$ 上位于其上方）。由于 ℓ_4 完全位于 $\pi(\ell_3, \ell_4)$ 的下方，因此点 $p(\ell_4, \ell_2) = \ell_4 \cap \ell_{2,4}$（其投影 $\ell_{2,4}^*$ 位于 ℓ_3^* 上方）必定位于平面 $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 的下方。

只需证明点 $p(\ell_2, \ell_3) = \ell_2 \cap \ell_{2,3}$ 和 $p(\ell_2, \ell_5) = \ell_2 \cap \ell_{2,5}$ 都位于平面 $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 上方。事实上，由于 $p(\ell_2, \ell_4) \in p(\ell_2, \ell_3)p(\ell_2, \ell_5)$，可知点 $p(\ell_2, \ell_4) = \ell_{2,4} \cap \ell_2$ 也位于 $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 上方，因此平面 $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 确实穿过区间 $s(\ell_2, \ell_4)$，该区间位于 $p(\ell_2, \ell_4) = \ell_{2,4} \cap \ell_2$ 和 $p(\ell_4, \ell_2) = \ell_{2,4} \cap \ell_4$ 之间。

对于 $p(\ell_2, \ell_3)$，结论显然成立，因为直线 $\ell_{2,3}$ 与 $\ell_3 \subset \pi(\ell_3, \ell_5)$ 的交点位于点 $p(\ell_2, \ell_3) = \ell_2 \cap \ell_{2,3}$ 下方。

为了证明 $p(\ell_2, \ell_5)$ 位于 $\pi(\ell_3, \ell_5)$ 下方，回想一下，线段 $\ell_3 \cap Z_{2,5} = p(\ell_3, \ell_2)p(\ell_3, \ell_5)$ 位于 $\pi(\ell_2, \ell_5)$ 下方（因为 (ℓ_2, ℓ_3, ℓ_5) 属于类型4）。因此，将 ℓ_5 向上平移，直到它在点 $p(\ell_3, \ell_5)$ 处碰到 ℓ_3，得到一条直线 $\ell_5' \subset \pi(\ell_3, \ell_5)$，它与 $\ell_{2,5}$ 的交点位于点 $p(\ell_2, \ell_5) = \ell_2 \cap \ell_{2,5}$ 下方（因为 ℓ_5' 和 $p(\ell_3, \ell_2)p(\ell_3, \ell_5) \subset \ell_3$ 都被限制在 $\pi(\ell_2, \ell_5)$ 与 $\pi(\ell_5, \ell_2)$ 之间的平板区域内）。□

定理 2.4 的证明。不失一般性，可假设 $n \ge J$（其中 J 表示引理 5.1 中的常数），且 $\ell_1 \succeq \ell_2 \succeq \ldots \succeq \ell_n$，并且 ℓ_1、……、ℓ_n 是一个 n-帽。此外，不失一般性，假设任意两条直线 ℓ_i 和 ℓ_j 都不相交。[10]

我们将引理 5.1 应用于每个直线子序列 $\sigma = (\ell_{h_1}, \ell_{h_2}, \ldots\ldots, \ell_{h_J})$，其中 $1 \le h_1 < h_2 < \ldots < h_J \le n$，并在直线 ℓ_{h_i} 和 ℓ_{h_j} 被 $\pi(\ell_{h_k}, \ell_{h_l})$ 分离时，用有序四元组 (i, j, k, l) 为 σ 标记；其中 $i, j, k, l \in [J]$ 两两不同。根据鸽巢原理，必定存在这样的标签 (i, j, k, l)，至少被

[10]否则，共面性可以通过无穷小扰动来消除，从而得到 $\ell_1 \succ \ell_2 \succ \ldots \succ \ell_n$，并按照标准的极限论证进行，这一论证例如见于 [25, 定理 2.2]。

$$\frac{\binom{n}{J}}{4!\binom{J}{4}} = \Omega\left(n^J\right)$$

J-序列 $\sigma = (\ell_{h_1}, \ell_{h_2}, \ldots\ldots, \ell_{h_J})$。不失一般性，假设 $(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4)$。再次应用鸽巢原理，可得一个 $(J-2)$-元组 $\sigma' = (\ell_{h_3}, \ell_{h_4}, \ldots\ldots, \ell_{h_J})$，它是 $\Omega(n^2)$ 个互不相同的 J-序列 $\sigma = (\ell_{h_1}, \ell_{h_2}, \ell_{h_3}, \ell_{h_4}, \ldots\ldots, \ell_{h_J})$ 的后缀，这些序列共享同一标签，从而产生 $\Omega(n^2)$ 对互不相同的对 (ℓ_{h_1}, ℓ_{h_2})，它们均被同一个平面 $\pi(\ell_{h_3}, \ell_{h_4})$ 分离。□

6 讨论

在 $\mathbb{R}^3$ 中分离任意直线族。尽管这对第3节中的论证并无影响，但可以去掉定理 2.4 中关于 $\ell_1, \ldots, \ell_n$ 构成单调序列的假设。

定理 6.1。设 $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中由 $n \geq 3$ 条直线组成的族。那么存在一个平面，将 $\Theta(n^2)$ 中的这些对 ℓ_i, ℓ_j 分开，其中 $1 \leq i < j \leq n$。

证明。与前面一样，不失一般性地可以假设 $\mathcal{L}$ 中任意两条直线不相交，投影族 $\mathcal{L}^* = \{\ell_1^*, \ldots, \ell_n^*\}$ 中任意三条直线不经过同一点，其中任意两条不平行，并且直线 ℓ_i^* 均不平行于 y轴。

令 $t = R_3(R_2(J,2),2)$，其中 $R_k(m,c)$ 表示定理 2.1 中的拉姆齐数，而J 表示引理 5.1 中的常数。关键观察是，任意一个大小为 t 的子集 $\mathcal{M} = \{\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_t}\} \in \binom{\mathcal{L}}{t}$（其中 $i_1 < \ldots < i_t$）都必须包含一个大小为 J 的单调子序列。事实上，投影序列 $\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_t}$ 必须包含一个大小为 $t = R_2(J,2)$ 的 t 帽或 t 杯 $\ell_{j_1}^*, \ldots, \ell_{j_t}^*$，而且这条链必须包含一个大小为 J 的单调子序列。（这个估计在第 3] 节中可以改进 [22,。）

将此代入引理 5.1 可知，每个子集 $\{\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_t}\} \in \binom{\mathcal{L}}{t}$ 都必须包含一个有序四元组 $(\ell_{i_a}, \ell_{i_b}, \ell_{i_c}, \ell_{i_d})$，使得 ℓ_{i_a} 和 ℓ_{i_b} 被 $\pi(\ell_{i_c}, \ell_{i_d})$分离。现在，只需重复定理 2.4 证明中的鸽巢原理论证，不过将 J换成 t，即可得出该定理。

□

未解决问题。最后，我们列出一些密切相关且迄今尚未解决的问题，以此结束本文。

1. 证明 Mart´ınez、Rold´an-Pensado 和 Rubin 的“双色”猜想 1.6，仍是一项重大的未解决问题。

   通过我们的方法证明猜想 1.6 的主要障碍在于，定理 6.1 无法进行二部扩展。例如，考虑两个直线族 $\mathcal{L}_1 = \{\ell_i := \{(i, t, it) \mid t \in \mathbb{R}\}\}_{i=1}^n$ 和 $\mathcal{L}_2 = \{\ell_i' := \{(t, i, it) \mid t \in \mathbb{R}\}\}_{i=1}^n$，它们分别取自同一个双曲抛物面的不同直纹。由于 (i) 任意两条直线 $\ell_i \in \mathcal{L}_1$，$\ell_j' \in \mathcal{L}_2$ 都相交，但 (ii) 这些交点 $\ell_i \cap \ell_j'$ 中任意四个都不共面，因此对 $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$作足够小的扰动，就能得到一个一般位置族 $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$，其中任意三个双色对 $(\ell_i, \ell_j') \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ 都无法同时被同一个平面分离。

2. 证明在定理 1.8 的假设下，整个族 $\mathcal{K}$ 可以由 $\Theta(1)$ 条直线穿过，似乎是一个更为具体的目标。

   猜想 6.2. 设 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个由两两相交的凸集组成的有限族。那么 $\mathcal{K}$ 存在一个由 O条直线 (1) 构成的截线。

已知将“分数”截线结果（参照定理 1.8）用于得到固定大小横截集的一般方法 [5]，依赖于所谓的弱 ϵ网的存在。针对当前问题，这就需要以下假设性命题：对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个有限数 $N(\epsilon)$，具有如下性质：对于任意有限族 $\mathcal{L}$的直线，这些直线位于 $\mathbb{R}^3$ 中，所有被以下直线穿过的凸集构成的族 $\epsilon|\mathcal{L}|$ 中的元素 $\mathcal{L}$，都存在一个仅由 $N(\epsilon)$ 条直线构成的截线（这些直线不必属于 $\mathcal{L}$）。

由于 Cheong、Goaoc 和 Holmsen [13], 已经证明这种“直线 ϵ-网”并非普遍存在，因此，要证明猜想 6.2，可能需要采用更精细（也可能更具临时针对性）的方法。

3. 正如 B ́ar ́any 和 Kalai [11], 所指出的，刚刚解决的猜想 1.7“是同类问题中第一个、也是迄今为止最有趣的未解情形。具体而言，对于哪些数值 k, r, d，以下命题成立：给定维数为 $\mathbb{R}^d$ 的凸集族 $\mathcal{C}$，其中每个 k-元组都有交集，那么存在一个与 $\mathcal{C}$ 中正比例的集合相交的 r-平坦？当然，这个正比例应仅取决于 k、r 和 d。”

由此看来，深入理解维数为 $d \geq 3$ 的凸集族的排列将大有裨益：这些族是严格 d-相交的（也就是说，其中任意 d 个集合都有非空交集，但没有 $d+1$ 个集合具有这种性质）。

致谢

作者感谢 SODA 的审稿人提出了许多深思熟虑的意见，这些意见有助于改进本文的表述。

参考文献

[1] P. ́Agoston, G. Dam ́asdi, B. Keszegh, 和 D. P ́alv ̈olgyi, 《凸集的定向》, *Electr. J.Comb.*31 (4), 2024.[2] N. Alon, I. B ́ar ́any, Z. F ̈uredi 和 D. J. Kleitman, 《凸包的点选取与弱 ϵ-网》, *Comb. Prob. Comput.*1 (1992), 189–200.[3] N. Alon, J. Pach, R. Pinchasi, R. Radoiˇ ci ́c 和 M. Sharir, 《半代数集的交叉模式》, *J. Combin. Theory Ser. A*111 (2005), 310–326. [4] N. Alon 和 G. Kalai, 《界定刺穿数》, *Discrete Comput. Geom.*13 (3) (1995), 245–256.[5] N. Alon, G. Kalai, J. Matouˇsek 和 R. Meshulam, 《几何中产生的超图的横截数》, *Adv. Appl. Math.*29 (1) (2002), 79–101.[6] N. Alon 和 D. J. Kleitman, 《刺穿凸集与 Hadwiger-Debrunner (p, q)问题》, *Adv. Math.*96 (1) (1992), 103–112.[7] N. Amenta, J. A. De Loera 和 P. Sober ́on, 《Helly定理：新变体与应用》, *Contemporary Mathematics* 685 (2017), 55–95.[8] I. B ́ar ́any, 《Carath ́eodory定理的一种推广》, *Discrete Math.* 40 (2-3) (1982), 141–152。

[9] I. B´ar´any, 《两两相交的凸集与圆柱体》 $\mathbb{R}^3$，布达佩斯大学科学年刊数学分册64 (2021), 33–44.[10] I. B´ar´any, T. Dillon, D. P´alv¨olgyi 和 D. Varga, 《穿刺相交凸集》，线性代数及其应用710 (2025), 405–417.[11] I. B´ar´any 和 G. Kalai, 《Helly型问题》，Bull. Amer. Math. Soc. 59 (4) (2022), 471–502.[12] S. E. Cappell, J. E. Goodman, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir 和 R. Wenger, 《公切线与公共截线》，Adv. Math. 106 (2) (1994), 198–215.[13] O. Cheong, X. Goaoc 和 A. F. Holmsen, 《几何截线的一些新结果》，Discrete Comput. Geom. 72 (2024), 674–703..[14] L. Danzer, 《组合几何中的一个问题》，Archiv der Mathematik 8 (5) (1957), 347–351.[15] L. Danzer, B. Gr¨unbaum 和 V. Klee, 《Helly定理及其相关定理》，《纯数学研讨会论文集：凸性》，美国数学会，1963.[16] J. Eckhoff, 《凸几何手册》，第8章：Helly、Radon和Carath´eodory型定理，第389–448页，Elsevier，1990.[17] P. Erd˝os 和 G. Szekeres, 《几何中的组合问题》，Compositio Mathematica 2 (1935), 463–470..[18] H. Hadwiger 和 H. Debrunner, 《关于Helly定理的一个变体》，Arch. Math. 8 (1957), 309–313..[19] E. Helly, 《关于具有公共点的凸体集合》，《德国数学家联合会年报》32 (1923), 175–176.[20] A. S. Jobson, A. E. K´ezdy, J. Lehel, T. J. Pervenecki 和 G. T´oth, 《Petruska关于平面凸集的问题》，Discrete Math. 343 (9) (2020), 1–13.[21] M. Katchalski 和 A. Liu, 《$\mathbb{R}^n$中的一个几何问题》，Proceedings of the American Math- ematical Society 75 (2) (1979), 284–288.[22] J. Matou˘sek, 《离散几何讲义》，施普林格出版社，纽约，2002.[23] L. Mart´ınez, E. Rold´an-Pensado 和 N. Rubin, 《彩色Helly假设的进一步推论》，Discrete Comput. Geom. 63 (2020), 848–866.[24] F. P. Ramsey, 《数理逻辑中的一个问题》，Proc. London Math. Soc. 30, 264–286.[25] N. Rubin, 《高维点选取与平分超平面的改进界》，载于2024年ACM-SIAM离散算法年会论文集（SODA），第4464–4501页。https://arxiv.org/abs/2403.00412，2024.[26] L. Santal´o, 《一个关于边互相平行的平行六面体集合的定理》，国立利托拉尔大学数学研究所出版物 II (1940), 第4期，49–60.[27] R. Wenger 和 A. Holmsen, 《离散与计算几何手册》，第3版，第5章：Helly型定理与几何截线，第91–124页，Chapman and Hall/CRC，2017。

引理 3.5 的证明

我们对维数 d 使用归纳法，并区分两种情形，第二种情形仅在 $d \geq 2$ 时可能出现。令 $\Lambda(\mathcal{K},\ d+1)$ 表示所有可被某个超平面穿过的、大小为 $(d+1)$ 的族 $\mathcal{K}' \in \binom{\mathcal{K}}{d+1}$ 的集族。

若成员族 $\mathcal{K}' \in \Lambda(\mathcal{K},\ d+1) \subseteq \binom{\mathcal{K}}{d+1}$ 中至少有 $\alpha\binom{n}{d+1}/2$ 是好的，则我们对每个子集 $\mathcal{K}'$ 应用引理 3.3，为每个好的族 $\mathcal{K}' \in \Lambda(\mathcal{K},\ d+1)$ 指定一个仅含 d 个元素的定义子集$\mathcal{B}_{\mathcal{K}'}$，使得它们的 2^d 条公切线中至少有一条穿过 $\mathcal{K}'$ 的剩余元素。此外，根据鸽巢原理，存在这样的集合 $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{K}}{d}$，它包含于 $\binom{n}{d+1}/\left(2\binom{n}{d}\right)$ 个族 $\mathcal{K}' \in \Lambda(\mathcal{K},\ d+1)$ 中，且满足 $\mathcal{B}_{\mathcal{K}'} = \mathcal{B}$；并且存在一个超平面 $\pi \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$，穿过 $\mathcal{K} \setminus \mathcal{B}$ 中 $\Omega(n)$ 个元素$\binom{n}{d+1}/\left(2 \cdot 3^d \cdot \binom{n}{d}\right) =$。

如果至少有 $\alpha\binom{n}{d+1}/2$ 个 $(d+1)$-族 $\mathcal{K}' \in \Lambda(\mathcal{K}, d+1)$ 是坏的，那么对每个这样的族应用引理 3.3，便可得到总计至少 $\alpha\binom{n}{d+1}/(2n) = \Omega(\alpha n^d)$ 个子集 $\mathcal{G} \in \binom{n}{d}$，每个都被一个 $(d-2)$-平坦所穿过。我们将 $\mathcal{K}$ 中的集合投影到 x_d-正交的 $\mathbb{R}^{d-1}$ 副本上，并注意到所得的族 $\mathcal{K}^*$ 包含至少具有 $\alpha' n^d$ d 大小的子集，每个子集都被 $\mathbb{R}^{d-1}$ 内的一个 $(d-2)$- 平面所穿过；这里 $0 < \alpha' \leq 1$ 是一个合适的常数，仅依赖于 α 和 d。因此，归纳假设给出 $\mathbb{R}^{d-1}$ 内的一个 $(d-2)$-平面 μ，它由某个子集 $\mathcal{B}^* \in \binom{\mathcal{K}^*}{d-1}$（其中 $\mathcal{B} \in \binom{\mathcal{K}}{d-1}$）确定，并穿过 $\mathcal{K}^*$ 中的 $\beta'_{d-1}(\alpha')n$ 个元素。因此，在 $\mathbb{R}^d$ 中，“抬升”后的超平面$\pi = \varphi_d^{-1}$,$_{d-1}(\mu)$ 穿过原族 $\mathcal{K}$ 中 $\Omega(|\mathcal{K}|)$ 个元素，并且它由任何一个包含 $\mathcal{B}$ 的 d 大小的集合 $\mathcal{C} \in \binom{\mathcal{K}}{d}$ 确定。 □