arXiv:2601.17969v1 [math.OC] 25 Jan 2026

线性有序域上的二次规划：可判定性与最优解的取得

Dmytro O. Plutenko

2026年1月25日

摘要 二次规划的经典存在定理和求解方法，传统上依赖实数的解析性质，特别是紧致性和完备性。在一般线性有序域（如有理数域或非阿基米德结构）中，这些工具并不适用，因此标准的解析证明不足以应对这些一般代数情形。本文建立了一个统一的代数框架，用于判定一般线性有序域上线性约束下的不定二次规划。我们证明了广义 Eaves 定理，表明若二次函数（包括凸、非凸或退化的线性情形）在多面体上下有界，则它在该域内可取得最小值，而无须依赖拓扑完备性。我们以维数代数归纳法和多面体分解取代经典解析论证。在此基础上，我们提出了一种 Blum–Shub–Smale 计算模型下的精确确定性算法，仅使用域运算即可判定有界性并计算全局极小点。我们证明，通过对正交象限约束面进行递归搜索，可以在有限时间内求解该问题。最后，我们指出，线性约束二次规划代表了多项式优化问题中最大的一类，在这一类问题中，最优解在原域内具有结构性保证，从而划定了有序结构上精确优化的代数边界。

关键词 二次规划、线性有序域、最优解的存在性、广义 Eaves 定理、布鲁姆–舒布–斯梅尔模型

数学主题分类（2000） 90C20 · 90C26 · 12J15 · 68Q05

1 引言

数学规划的起源与控制论的萌芽及计算理论的早期发展密不可分 [7]。从历史上看，线性规划（LP）和二次规划（QP）的基本存在定理，都是在实数域的分析框架内建立的 [12] 。这一时期的奠基性成果包括 Frank–Wolfe定理 $\mathbb{R}$、Blum和Oettli给出的直接存在性证明 [10], 以及 Eaves 的里程碑式 [3], 成果

Dmytro O. Plutenko 乌克兰国家科学院物理研究所 Prospekt Nauky 46，基辅，03028，乌克兰
电子邮箱：dmytro.plutenko@gmail.com

定理 [9] 证明了任何在多面体上下有界的二次函数都能取到最小值。这些经典证明高度依赖欧几里得空间的拓扑性质——具体而言，依赖闭有界集合的紧致性以及魏尔斯特拉斯极值定理。

然而，数学规划问题的表述——由一个线性不等式方程组和一个多项式目标函数定义——并不必然要求实数具有戴德金完备性或阿基米德性质。问题实例可以定义在任意线性有序域（LOF）上，例如有理数域 $\mathbb{Q}$ 或超现实数域 [6]。在这一更广泛的代数背景下，经典的分析证明不再成立：由于域的不完备性，$\mathbb{Q}^n$ 中的有界闭集不一定是紧集。因此，目标函数的下确界可能落在域的“空隙”中，使得无法在原有结构内取得最小值。

从 $\mathbb{R}$ 到更一般的域的逻辑过渡，部分由 Tarski–Seidenberg 转移原理 [17]加以解决。该原理保证，$\mathbb{R}$ 的一阶性质在所有实闭域中都得以保留，从而为量词消去算法 [2]奠定了理论基础。在优化问题中，量词消去可用于自动判定存在性并计算最优值。然而，实闭域并未涵盖线性有序域的全部范围。具体而言，域 $\mathbb{Q}$ 不具有介值性质，且并非所有非负元素都有根，因此不属于 Tarski–Seidenberg 原理的适用范围。

线性规划的数学研究已经达到了基础理论成熟的阶段：其核心定理不仅已推广至线性有序域，而且还通过形式化计算机验证得到了全面验证。各种证明助理中的严谨处理证明了这一完整性状态，确认线性理论与有序结构的抽象公理框架完全兼容 [1,18]。与此形成鲜明对比的是，二次规划尚未经历类似的系统化推广。尽管线性情形被视为已经解决的前沿问题，但在现有文献中，将二次规划结果推广至线性有序域这一基本可能性仍鲜有探索。本研究致力于弥合这一差距，重点不只在于计算过程，还在于证明将二次规划推广到线性有序域在数学上是可行的，从而将公理化优化的边界拓展到线性规划领域之外 [8]。

我们的贡献。 本文的贡献集中于两个主要目标。首先，我们通过为一般线性有序域建立广义 Eaves 定理，在经典分析与有序代数之间搭建理论桥梁。通过采用归纳方案，我们证明了最优解的存在性并非实数所特有的“拓扑偶然性”，而是多面体集合上的二次型所具有的内在性质。

其次，我们在布鲁姆–舒布–斯梅尔 [5] 框架内引入一种构造性递归算法，用作判定二次规划实例三种基本状态的判定过程。从分析工具转向精确代数过程，使我们能够完整刻画该问题，而无需依赖戴德金完备性。

最后，需要指出的是，在 LOF 框架内探究高次多项式优化问题是否存在最小值以及能否取到该最小值，通常徒劳无功。与线性和二次情形不同，后两者即使在缺乏完备性的情况下，也能从结构上保证最小值可取；而高阶多项式的驻定条件通常会导出非线性方程，其解可能不属于原域。因此，二次规划是这样一类多项式优化问题的最大范围：在底层域内，其精确解在结构上能够得到保证；这实际上划定了有序结构上精确优化的代数边界。

2 预备知识

本节的主要目标是为我们的分析奠定所需的几何与代数基础。我们采用最一般的优化框架，避免作出任何假设

例如实分析中固有的拓扑完备性假设（如极限或上确界的存在性）。相反，我们严格依赖域的代数公理和全序公理。

为确保表述清晰，并与既有文献保持一致，我们采用多面体几何中的标准术语（例如参见 Schrijver [16]）。不过，我们特别指出，尽管经典文献通常在实数（$\mathbb{R}$）或有理数（$\mathbb{Q}$）的背景下阐述这些概念，但本文所引用的结构性结果——具体涉及隐式等式、仿射包和维数约化——完全依赖有限次代数运算（例如高斯消元）。因此，这些标准定义和性质对任意线性有序域均完全有效。

2.1 线性有序域

在全文中，令 $\mathbb{F}$ 表示一个线性有序域。根据定义，$\mathbb{F}$ 是一个域$(\mathbb{F}, +, \cdot)$，配备一个二元关系 $\leq$，该关系满足全序公理（自反性、反对称性、传递性和完全性），并通过加法和乘法公理 [14]与域运算相容。我们强调，不假设 $\mathbb{F}$ 是实闭域（即多项式方程在 $\mathbb{F}$ 中可能没有根），也不假设其具有阿基米德性。因此，我们的结果适用于满足这些代数公理的任意结构，包括有理数 $\mathbb{Q}$、超实数域 $\mathbb{R}^*$ [15]或超现实数域 [6]。

2.2 多面体与隐式等式

一个多面体 $P \subseteq \mathbb{F}^n$ 定义为有限个闭半空间的交。从代数角度看，这对应于一个由 m 线性不等式组成的方程组：

$$P = \{x \in \mathbb{F}^n : Ax \leq b\},$$

其中 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 且 $b \in \mathbb{F}^m$。根据半空间的几何定义，我们假设矩阵 A 的每一行 a_i 都是非零向量，这是多面体几何中的标准约定（例如，参见 Schrijver [16, 第 7.2] 节）。

根据 Schrijver [16, 第 8.1], 节所述的结构分解，我们根据这些不等式在 P上的表现对其进行分类。

该方程组可能包含一些不等式，它们对于 P中的每个点都以等式形式成立。这些不等式称为隐式等式。令 $I^=$ 表示这类行的索引集合，并令 $A^=x \leq b^=$表示相应的子方程组。方程组 $A^=x = b^=$的解集定义了 P的仿射包，记为 $\mathrm{aff}(P)$。

其余由 $I^+ = \{1, \ldots, m\} \setminus I^=$ 索引的不等式构成了记作 $A^+x \leq b^+$ 的子方程组。根据定义，对于该子方程组中的每个不等式 $a_i^T x \leq b_i$，至少存在一个点 $x \in P$ 使得 $a_i^T x < b_i$。

若移除不等式 $a_k^T x \leq b_k$ 不会改变点集 P，则称其相对于该方程组是冗余的。

多面体的维数 $\dim(P)$定义为其仿射包的维数。由于仿射包由隐式等式方程组 $A^=x = b^=$ 唯一确定——该方程组完全由方程组 $Ax \leq b$ 中的线性相关关系产生——因此，在任意线性有序域 $\mathbb{F}$ 的代数框架中，维数的概念都是定义明确且一致的。

2.3 满维性与内点

为了便于分析面上的二次函数，有必要区分具有内部的多面体与被压扁至低维子空间中的多面体。

定义 2.1（满维性）若多面体 $P \subseteq \mathbb{F}^n$ 是满维的，则维数$(P) = n$。这等价于隐式等式方程组为空且 P 不是空集。

从代数角度看，满维性对应于存在一个严格内点。若$x_0 \in P$ 严格满足所有定义不等式，我们就称其为内点：

$$Ax_0 < b.$$

反之，如果 P 不是满维的，就不存在这样的点。

命题 2.1（维数约化）任何维数为 $k < n$ 的非空多面体 P 都仿射同构于一个满维多面体 $P' \subseteq \mathbb{F}^k$。

证明 这可由在 $\mathbb{F}$上执行标准高斯消元过程得到。利用隐式等式将 $n - k$个变量表示为 k 个自由变量的函数后，我们便可仅通过域运算将 P 投影到 $\mathbb{F}^k$。□

2.4 面与形式面

我们采用 Schrijver 的经典著作中给出的面定义 [16]。具体而言，根据此定义，如果一个多面体由一个不含冗余约束的不等式方程组描述，那么每个线性约束（隐式等式除外）都恰好对应一个面。在这种情况下，该面就是多面体与相应等式所定义的超平面的交集。

相较之下，我们引入形式面这一概念，它是相对于多面体的特定代数描述定义的，而非相对于其内在几何性质定义的。

De定义 2.2（形式面） $P = \{x \in \mathbb{F}^n : \ Ax \leq b\}$。对于每个行索引 i，该 t

$$F_i = P \cap \{x \in \mathbb{F}^n : a_i^T x = b_i\}$$

定义为对应于第 i 个不等式的形式面。

因此，几何面是唯一的，而形式面取决于表示方式：如果第 i个不等式是冗余的，相应的形式面可能为空，或是维数较低的面（也可能是空集）。

3 二次函数的解耦对角分解

本节将介绍二次函数的解耦对角分解。值得注意的是，尽管后续各节的优化结果依赖于 $\mathbb{F}$ 的序，但这里推导出的代数分解只需要域运算。因此，无论该域是否线性有序，只要其特征不等于 2，此引理均成立；Lang [13]，已证明了这一点。

引理 3.1（解耦对角分解）

设 $f : \ \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ 是由下式定义的二次函数：

$$f(x) = x^T Q x + c^T x + \gamma,$$

其中 $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 为对称矩阵， $c \in \mathbb{F}^n$，且 $\gamma \in \mathbb{F}$。

存在一个非奇异矩阵 $S \in \mathbb{F}^{n\times n}$、一个对角矩阵 $\Lambda \in \mathbb{F}^{n\times n}$、向量 v，$u \in \mathbb{F}^n$以及一个标量 $\gamma' \in \mathbb{F}$，使得：

$$f(x) = (x-v)^T S^T \Lambda S(x-v) + u^T S(x-v) + \gamma', \tag{3.1}$$

满足解耦条件：

$$\Lambda u = \mathbf{0}.$$

这意味着 u 的支撑集与 Λ 的支撑集不相交（即 $u_i \neq 0$ 仅当 $\Lambda_{ii} = 0$ ）。我们将式（3.1）称为 f 的解耦对角形式。

证明 首先，我们应用标准对角化结果（例如，[13]）。存在一个非奇异矩阵 S，使得 $Q = S^T \Lambda S$，其中 $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\Lambda_{11},\ \Lambda_{22}\ldots,\ \Lambda_{nn})$。代入 $y = Sx$ 后，函数变为 $f(y) = y^T \Lambda y + \tilde{c}^T y + \gamma$，其中 $\tilde{c} = (S^{-1})^T c$。

我们逐分量定义平移向量 $v' \in \mathbb{F}^n$ 和线性项 $u \in \mathbb{F}^n$。对于满足 $\Lambda_{ii} \neq 0$ 的指标 i，我们通过配方消去线性项。对于满足 $\Lambda_{ii} = 0$ 的指标，则保留线性项：

$$\begin{cases} v'_i = -\frac{\tilde{c}_i}{2\Lambda_{ii}}, \quad u_i = 0 & \text{if } \Lambda_{ii} \neq 0, \\ v'_i = 0, \quad u_i = \tilde{c}_i & \text{if } \Lambda_{ii} = 0. \end{cases}$$

标量 γ' 也会进行相应调整：

$$\gamma' = \gamma - \frac{1}{4} \sum_{i:\Lambda_{ii}\neq 0} \Lambda_{ii}^{-1} \tilde{c}_i^2.$$

用 y坐标表示的函数形式为：

$$f(y) = (y-v')^T \Lambda (y-v') + u^T y + \gamma'.$$

注意，根据构造，$u^T v' = 0$，因此 $u^T y = u^T (y - v')$。最后，令 $v = S^{-1} v'$，即可将表达式改写为关于 x的形式，从而得到公式（3.1）。□

推论 3.1（单方向线性项）存在一种变换矩阵 S，使得在引理 *3.1* 中，线性项向量 u至多有一个非零分量。

证明 若 $u = \mathbf{0}$，则该条件显然成立。若 $u \neq \mathbf{0}$，条件 $\Lambda u = \mathbf{0}$ 意味着 u 属于二次型的核。令 $K = \ker(\Lambda)$。我们可以在子空间 K 上施加额外的线性变换 Λ （该变换保持对角矩阵不变），使 K 的第一个基向量与 u对齐。在这个新基下，u 恰好只有一个非零项。□

注 *3.1*（算法方面）我们强调两项与算法实现相关的性质：

– **构造性：**引理3.1的证明完全具有构造性。矩阵 S 和 Λ 均可通过有限次域运算得到，这与经典的拉格朗日对角化算法 [11, 第 X 章]一致。在 Blum–Shub–Smale 模型中，此类过程关于维数呈多项式复杂度 n [4]。

– **平移的不唯一性：**在证明中，平移向量 v' 中对应于 Λ 的核的分量可以任意选取。因此，所得向量 $v = S^{-1} v'$ 仅在 Q的值域上被唯一确定。在我们的构造中，我们将 v' 的核分量设为零，以获得具有最小支撑集的解；但仿射空间$v + \ker(Q)$ 中的任何向量都是该二次型的有效中心。

4 极小值的存在性

最优解的存在性是优化理论的基石。对于实数域上的二次规划（$\mathbb{R}$），这一性质已得到充分确立。Frank 和 Wolfe [10]证明了，下有界的凸二次函数在多面体上能够达到其最小值。Eaves [9] 将这一结果推广到不定二次型，证明了若不定二次规划有界，则存在最优解。

然而，Eaves 的证明依赖于 $\mathbb{R}$ 的拓扑性质——具体而言，是有界闭集的紧致性（海涅–博雷尔定理）以及目标函数的连续性（魏尔斯特拉斯定理）。然而，这些性质在一般的线性有序域中并不成立。

现在，我们给出一个代数证明，将 Eaves 的结果推广到任意线性有序域，并用维数归纳法取代拓扑紧致性。

定理 4.1（广义 Eaves 定理）

设 $\mathbb{F}$ 是一个线性有序域。设 $f\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ 是一个二次函数，$P \subseteq \mathbb{F}^n$ 是一个非空多面体。若 f 在 P 上下有界，则 f 在 P 上取得其最小值。

证明 我们对空间的维数 n进行归纳法证明。

基本情形（$n = 1$）： 多面体 $P \subseteq \mathbb{F}^1$ 是直线的连通子集：一个点、一个闭区间、一条射线或整条直线。该函数是一个一元二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$。

– 如果 $a > 0$（严格凸），全局最小值位于 $x^* = -b/(2a)$。如果 $x^* \in P$，则最小值可以取到。如果 $x^* \notin P$，函数在 P上是单调的，并在距离 x^*最近的端点处取得最小值。– 如果 $a < 0$（凹）或 $a = 0,\ b \neq 0$（线性），最小值必定在端点处。如果 P在下降方向上没有端点，则 f会向下无界，这与假设矛盾。因此，最小值在边界点（顶点）处取得。– $a = 0,\ b = 0$（平凡情形），最小值在任意点处均可取得。

归纳假设： 假设该定理对维数为 $n-1$（及以下）的空间中的所有二次函数和多面体均成立。

归纳步骤： 考虑一个多面体 $P \subseteq \mathbb{F}^n$ 和一个有界二次函数 f。

情形 1：化归为满维情形。 若 P不是满维的（维数$(P) < n$），则 P完全包含于一个维数为 $k < n$的真仿射子空间 H 中。将 H 与 $\mathbb{F}^k$等同后，我们可以将限制在 P上的 f视为 $\mathbb{F}^k$中的一个问题。由于 $k \leq n-1$，归纳假设适用，且最小值可以取到。

情形 2：满维情形。 假设 维数$(P) = n$。我们通过坐标变换 $y = S(x - v)$应用解耦对角分解（引理 3.1）和推论 3.1。由于该变换是仿射同构，因此保留多面体的组合结构和维数。为简洁起见，我们将新坐标下的多面体 y 简称为P。目标函数变为：

$$f(y) = y^T \Lambda y + u^T y + \gamma',$$

其中 Λ 为对角矩阵，$\Lambda u = \mathbf{0}$，且 u 至多有一个非零分量。

首先，考虑边界 ∂P。它由有限个面 $\{F_j\}$的并组成，其中每个面都是维数为 $n-1$的多面体。由于 f下有界，因此它在每个面上都有界。根据归纳假设，f 在每个 F_j上都能取得最小值。令 $a \in \partial P$ 为在边界上取得全局最小值的点：

$$f(a) = \min_{y \in \partial P} f(y).$$

现在我们研究是否存在一个内点 $y \in \text{int}(P) = P/\partial P$，使得 $f(y) < f(a)$。我们区分三种子情形：

子情形 2.1：凸形式（$\Lambda \succeq 0$ 且 $u = \mathbf{0}$）。该函数为 $f\ (y) = y^T \Lambda y + \gamma'$。这是一个凸函数，其全局无约束最小值位于原点 $\mathbf{0}$。

子情形 2.1.1： 若 $\mathbf{0} \in P$，则全局最小值在$\mathbf{0}$处取得。

子情形 2.1.2： 若 $\mathbf{0} \notin P$，任取一个内点 $y \in P$。连接 y与原点 $\mathbf{0}$的线段必与边界 ∂P在某点 z 相交。由二次型$y^T \Lambda y$的凸性可知，沿着从$\mathbf{0}$出发的射线，函数单调不减。由于 z 位于$\mathbf{0}$ 与 y之间的线段上，因此有 $f(z) \leq f(y)$。但 $z \in \partial P$，所以 $f(a) \leq f(z)$。因此，对于所有内点，均有 $f(a) \leq f(y)$ 。最小值在 a 处取得。

子情形 2.2：线性下降（$u \neq \mathbf{0}$）。根据推论 3.1，不妨设线性项与第 k 个坐标方向一致，即 $u_k \neq 0$ （这意味着 $\Lambda_{kk} = 0$）。令 $e_k \in \mathbb{F}^n$ 表示第 k 个标准基向量（其第 k 个位置为1 ，其余位置为0 ）。目标函数关于坐标 y_k呈线性关系。

考虑任意一个内点 $y^0 \in \text{int}(P)$。我们将严格下降方向定义为 $d = -\text{sign}(u_k)e_k$。考虑从 y^0 沿此方向出发的射线：

$$R = \{y \in \mathbb{F}^n : y = y^0 + td,\ t \geq 0\}.$$

对于这条射线上的任意一点，函数值为 $f(y^0 + td) = f(y^0) - |u_k|t$。由于 $|u_k| > 0$，函数值随着 t 的增大而严格减小。因为 f 在 P 上下有界，射线 R 不可能无限期地完全包含在 P 内。因此，存在一个标量 $t^* > 0$ ，使得点 $z = y^0 + t^* d$ 位于边界 ∂P 上。由于 $t^* > 0$，我们有 $f(z) < f(y^0)$。由 $z \in \partial P$ 可知， $f(a) \leq f(z)$。因此，对于任意内点 y^0， $f(a) < f(y^0)$，这说明最小值在 a 处取得。

子情形 2.3：凹方向（$u = \mathbf{0}$ 且 $\exists k$： $\Lambda_{kk} < 0$）。目标函数沿方向 e_k 严格凹。对于任意内点 y^0，沿方向e_k 或 $-e_k$ 的射线中，至少有一条是严格下降的。与情形 2.2 类似，沿此方向前进最终必然会在点 z 处遇到边界 ∂P（否则， f 在 P 上将下无界），使得 $f(z) < f(y^0)$。由此可得 $f(a) \leq f(z) < f(y^0)$，这证实最小值在边界上取得。

情形 2 的结论： 对子情形 2.1、2.2 和 2.3 的分析是完备的。我们已证明，在所有情况下，最小化问题要么由一个内点（具体而言，在子情形 2.1 中，当无约束中心 v属于 P时）求解，要么转化为边界 ∂P上的最小化问题。由于边界是有限个维数为 $n-1$的多面体的并集，归纳假设保证边界上能取得最小值。因此，在所有情况下，全局最小值都存在于 P上。证明完毕。□

定理 4.1 的证明具有构造性，因此能够精确刻画最优解的位置。我们在以下推论中总结这些结构性质，它为我们的精确算法奠定了理论基础。

推论 4.1（最小值的位置）设 $f(x) = x^T Q x + c^T x + \gamma$是定义在满维多面体 P上的二次函数。采用解耦对角分解（引理 *3.1*）的记号，关于全局最小值的存在性及其位置，有如下结论：

1. 若 Q 为正定（$\Lambda \succ 0$）且 $v \in P$，则全局最小值存在、唯一，并在点 v处取得。*2.* 若 Q 为正定（$\Lambda \succ 0$）且 $v \notin P$，则全局最小值存在、唯一，并在边界 ∂P上取得。*3.* 若 Q 为半正定（$\Lambda \succeq 0$）、$u = \mathbf{0}$且 $v \in P$，则全局最小值存在，且 v是一个全局极小点（可能不唯一）。*4.* 若 Q 为半正定（$\Lambda \succeq 0$）、 $u = \mathbf{0}$且 $v \notin P$，则全局最小值存在，并在边界 ∂P上取得。

5. 若 $u \neq \mathbf{0}$，则 f 在 P上要么下无界，要么全局最小值存在并在边界 ∂P上取得。*6.* 若 $u = \mathbf{0}$ 且 Λ 至少有一个负对角元素，则 f 在 P上要么下无界，要么全局最小值存在并在边界 ∂P上取得。

证明 情形 1–4 讨论的是在整个空间上以下述量为下界的凸函数 γ' $\mathbb{F}^n$。因此，在 P 上的有界性是自动成立的。位置判断逻辑直接遵循定理 4.1 的子情形 2.1。具体而言，严格凸性（情形 1–2）意味着沿射线有严格不等式 $f(z) < f(y)$，从而保证唯一性。

情形 5 和 6 分别对应定理 4.1的子情形 2.2 和 2.3。在这些情形下，若函数下有界，定理4.1 的证明表明，对于任意内点，都存在一个下降方向通向边界。因此，任何内点都不可能是全局最小值。□

5 有界性的算法可判定性

5.1 算法求解与 BSS 模型

我们在 Blum–Shub–Smale 计算模型[5]的框架内对该过程进行形式化。在此模型中，域 $\mathbb{F}$ 上的算术运算和比较运算被视为单位成本的基本指令。这种抽象特别适用于线性有序域上的优化，因为它使我们能够依据域运算的次数分析算法复杂度，而不受系数位长的影响。

我们的算法是确定性的，由有限序列的域运算以及基于 $\mathbb{F}$的序关系进行的分支构成。关键在于，递归结构确保对于固定维数 n，运算总数保持有限，因此满足在任意有序结构上运行的 BSS 机器的终止条件。

广义 Eaves 定理（定理4.1）确立了一个关于解存在性的基本结果。该定理意味着，对于线性有序域 $\mathbb{F}$上的任意二次规划问题，以下三种互斥情形中恰有一种成立：

1. 可行集 P 为空（不可行）。2. 二次函数 f 在 P 上下有界（无界）。3. 二次函数 f 在 P 上达到全局最小值（最优）。

为了使这一理论分类具有构造性，我们提出一个递归过程，用于明确确定优化状态，并在极小点存在时返回该点。为了在布鲁姆–舒布–斯梅尔框架内形式化这一过程，我们区分抽象的几何对象及其作为数据结构的代数编码。

我们将问题实例定义为域 (P,f) 上的一对数据结构 $\mathbb{F}$。在整个算法 1中，我们用无衬线字体表示数据结构（约束系统和目标参数），而斜体表示相应的数学对象：

– P $=(A,b)$ 表示多面体 $P = \{x \in \mathbb{F}^n : Ax \leq b\}$，其中 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, b \in \mathbb{F}^m$。– f $=(Q,c,\gamma)$ 表示函数 $f(x) = x^T Qx + c^T x + \gamma$，其中 $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}, c \in \mathbb{F}^n, \gamma \in \mathbb{F}$。– P^h 表示限制在由 $h \in \{-1,1\}^n$ 定义的正交象限中的子多面体 P^h。– 作为例外，P′ 表示与形式面 $F_k^h = P^h \cap \{y$ 关联的问题实例：$a_k^T y = b_k\}$（或其在 $\mathbb{F}^{n-1}$ 上的投影）。– 在以下描述中，P 和 f 被视为可进行坐标变换和降维的动态对象。

算法 MinQP_线性有序域旨在返回一个三元组$(Status,\ Value,\ Point)$，以完整刻画该实例：

– 状态=不可行：若 $P = \emptyset$，则返回此状态。在这种情况下，$Value = \infty$ 和 $Point =$ 均为 null。– 状态 =无界：若 f 在 P上不下有界，则返回此状态。在这种情况下，$Value = -\infty$和 $Point =$ 均为 null。– 状态 = $Value = f\ x^*$ $Point =$ 最优：若全局最小值存在，则返回此状态。在这种情况下，() 且，其中为全局极小点。 x^* $x^* \in P$

算法 1 精确递归算法：MinQP _LOF

要求： P $= (A,\ b)$ 和 f $= (Q,\ c,\ \gamma)$ 定义在 $\mathbb{F}$
确保： 三元组（状态，值，点）

步骤 0：预处理（零行消除）
1: **对于** i 行，若在 A 中满足 $a_i = \mathbf{0}$，则
2: **若** $b_i < 0$，**则**
3: **返回**(“不可行” ∞,null)
4: **else**
5: 从 P 中移除约束 i

步骤 1：基本情形（维数 $n = 1$）
6: **若** $n = 1$，**则**
7: 求解单变量问题并**返回**(状态，值，点)

步骤 2： f**的对角化**
8: (P，f) ← 应用坐标变换 $y = S(x - v)$ ▷ 根据引理3.1

步骤 3：全局最优性检查
9: **如果** $A \succeq 0$ **且** $u = \mathbf{0}$ **且** $\mathbf{0} \le b$ **则** ▷ 检查无约束极小值点
10: **返回** ("最优" γ'，v)

步骤 4：在正交象限和形式面上进行分支
11: $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ ▷ 初始化极小值候选点集合
12: **对于** 由 $h \in \{-1, 1\}^n$ **定义的每个正交象限，执行** $\begin{bmatrix} \mathrm{diag}(h) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
13: P^h ▷ 限制在正交象限内的子多面体 P^h

14: **对于** P^h 中索引为 k 的每个不等式**执行**
15: 计算 $M \in \mathbb{F}^{n \times (n-1)}$ 和 $p \in \mathbb{F}^n$，使得 $y = Mz + p$ 参数化超平面 $a_k^T y = b_k$
16: (P′，f′) ← 将 $y = Mz + p$ 代入 f 和 P^h 的其余约束中 ▷投影形式面 $F_k^h = P^h \cap \{y\colon\ a_k^T y = b_k\}$ 到 $\mathbb{F}^{n-1}$
17: $(stat, val, z^*)$ ← MinQP _线性有序域(P′，f′) ▷ 在 F_k^h 上求解子问题
18: **如果** $stat =$ “无界”**则返回**(“无界” $-\infty$，null)
19: **如果** $stat =$ “最优”**则** $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{(val,\ Mz^* + p)\}$

步骤 5：最终选择20: **如果** $\mathcal{S} = \emptyset$ **则返回**(“不可行” ∞，null) 21: 找到具有最小值的 $(val^*,\ y^*) \in \mathcal{S}$ val^* ▷选取全局最小值
22: **返回**(“最优” $val^*,\ S^{-1}y^* + v$)

定理 5.1（正确性与终止性）设 $\mathbb{F}$ 是一个线性有序域。对于定义在(P，f) 上的任意输入 $\mathbb{F}$，算法*1* 都将在有限步内终止，并返回：

1. 当且仅当 $P = \emptyset$ 时，不可行。2. 当且仅当函数 f 在 P 上下有界时，无界。3. 当且仅当全局最小值存在时，最优且存在一个点 $x^* \in P$；在这种情况下，对所有 $x \in P$，$f(x^*) \le f(x)$。

注 *5.1*（数据结构与几何对象）区分输入数据结构P $= (A,\ b)$和它所表示的几何多面体 $a_i = \mathbf{0}$十分重要：输入数据结构可能包含带有 P 的平凡约束。虽然第2.2 节中对多面体的定义要求标准系统只含非零行，但该算法旨在接受任意P 作为有效输入。

具体而言，为确保一致性，我们将任何包含冲突行（$a_i = \mathbf{0}$ 和 $b_i < 0$）的输入实例映射为空多面体 $P = \emptyset$。如果不存在此类冲突行，那么移除所有平凡满足的行（$a_i = \mathbf{0}$ 和 $b_i \geq 0$）后，所得方程组 $(A',\ b')$ 中矩阵 A'的行将全部为非零行。该约化形式与第2.2 节中给出的多面体定义完全一致。步骤 0 架起了这两种表示之间的桥梁，确保后续所有几何分析都基于正确约化后的标准系统进行。

5.2 支撑引理

算法 1中递归逻辑的正确性依赖于多面体的若干几何性质。具体而言，我们必须说明，为什么只需考察低维面（将问题实例按正交象限划分后），就能可靠地确定其优化状态。本节将给出验证这一归约所需的引理。

引理 5.1 设 $P \subseteq \mathbb{F}^n$ 为一个多面体，$s \in \mathbb{F}^n$ 为一个非零向量。对于 $\alpha \in \mathbb{F}$，定义截面 $P_{\langle s,\ \alpha\rangle} = P \cap \{x :\ s^T x = \alpha\}$。函数 $f :\ \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ 在 P上下有界，当且仅当存在一个一致常数 $\epsilon \in \mathbb{F}$，使得对于所有满足 $P_{\langle s,\ \alpha\rangle} \neq \emptyset$的 α，不等式 $f\ (x)\ \geq \epsilon$ 对所有 $x \in P_{\langle s,\ \alpha\rangle}$成立。

证明 **必要性 ($\Longrightarrow$):** 假设 f在 P上下有界，即存在 $\nu \in \mathbb{F}$ 使得 $f(x) \geq \nu$对所有 $x \in P$都成立。我们只需选择 $\epsilon = \nu$。由于任何非空截面 $P_{\langle s,\alpha\rangle}$ 都是 P的子集，因此不等式 $f(x) \geq \epsilon$对截面中的所有点都成立。

充分性 ($\Longleftarrow$): 我们用反证法。假设该条件成立（存在一个统一的 ϵ，使得 $f(x) \geq \epsilon$在每个非空截面上都成立），但 f在 P上并非下有界。根据无界性的定义，存在一个点 $y \in P$，使得 $f(y) < \epsilon$。设 $\alpha = s^T y$。根据构造，$y \in P_{\langle s,\alpha\rangle}$。然而，根据假设，不等式 $f(z) \geq \epsilon$必须对所有 $z \in P_{\langle s,\alpha\rangle}$成立。具体而言，$f(y) \geq \epsilon$。由此得到矛盾：$f(y) < \epsilon$且 $f(y) \geq \epsilon$。因此，我们的假设不成立，f在 P上下有界。□

算法的有限终止1 由其递归结构得到保证；定理 5.1 的证明中给出了该性质的严格证明。终止时，算法返回三种可能的优化状态之一。本节首先分析 不可行 状态，并建立以下引理，以证明算法能够正确识别可行域为空的情形。

引理 5.2（不可行性检测的正确性）算法 *1* 返回 不可行 当且仅当由输入 P 表示的P多面体为空。

证明 我们对问题的维数 n 进行归纳证明该陈述。

1. 基本情形（$n = 1$）： 算法在步骤 1 中求解单变量问题。可行性通过直接检查区间约束来确定（步骤 0 和步骤 1）。根据对单变量情形的检验，输出是正确的。

2. 归纳假设： 假设算法对于维数 $n - 1$能够正确运行。**3. 归纳步骤（维数 n）：** 证明依赖于有序域上多面体的两个基本性质：

1. 正交象限分解：P 非空，当且仅当它与至少一个正交象限的交集非空。这是因为所有 2^n 闭正交象限的并集覆盖了 $\mathbb{F}^n$。
2. 边界性质：由 m 个闭半空间定义的非空多面体 $P \subseteq \mathbb{F}^n$，要么与整个空间重合（$m = 0$），要么至少有一个非空形式面 $F_k = P \cap \{y :\ a_k^T y = b_k\}$。

$$P \neq \emptyset \iff (m = 0) \vee (\exists k \in [m] : F_k \neq \emptyset).$$

必要性（$\Longrightarrow$）：如果算法返回不可行，则意味着发生了以下情况之一：

1. 步骤 0 识别出一个平凡矛盾，即 $a_i = \mathbf{0}$ 且 $b_i < 0$。根据备注 5.1，这直接意味着 $P = \emptyset$。2. 步骤 0 未能识别出平凡矛盾，但算法继续执行后续步骤，过程如下：– 步骤 3 确认，y- 基中的原点不是可行极小点（$\mathbf{0} \notin P$ 或者不满足最优性条件）。– 步骤 4 中，对每个正交象限的每个形式面 F_k^h 进行的所有递归调用均返回了 不可行。关键的是，没有任何递归调用返回 无界，否则算法会立即以无界状态退出。– 因此，在步骤 4 结束时，候选点集合 $\mathcal{S}$ 仍为空。– 在步骤 5 中，条件 $\mathcal{S} = \emptyset$ 得到满足，算法返回 不可行。

根据归纳假设，所有递归调用均返回不可行，这意味着所有形式面 F_k^h 都是空集。根据边界性质和正交象限分解，所有面均为空意味着 $P = \emptyset$。

充分性 ($\Longleftarrow$): 反之，若 $P = \emptyset$，则各面上的所有子问题也都定义在空集上。根据归纳假设，它们返回不可行，从而得到 $\mathcal{S} = \emptyset$ 以及正确的输出。□

引理 5.3（正交象限上的有界性传递）设 $f(y) = y^T \Lambda y + u^T y + \gamma$ 是一个解耦对角形式的二次函数（其中 Λ 是对角的，$\Lambda u = \mathbf{0}$，且 u 至多有一个非零分量）。设 $P \subseteq \mathbb{F}^n$ 是限制在某个正交象限内的多面体（即由方程组 $Ay \leq b$ 定义，其中包含形如 $y_i \leq 0$、$i \in [n]$的约束）。若维数 $n \geq 2$，则 f 在 P上下有界，当且仅当 f 在 P的每个形式面上都下有界。

证明**N** **必要性 ($\Longrightarrow$):** 显然：若 f 在 P上有界，则它在 P的任意子集上都有界。

充分性（$\Longleftarrow$）：</style} $\Lambda \succeq 0$ 和 $u = \mathbf{0}$ 的情形是平凡的，因为函数本身有界。类似地，如果 P为空集或是低维多面体（此时整个集合与其形式面重合），则该命题根据定义成立。因此，我们重点考虑 P是满维的，且 Λ 至少有一个负分量，或者 $\Lambda \succeq 0$ 与 $u \neq \mathbf{0}$满足相应条件的情形。

我们借助引理5.1，该引理指出：若存在一个向量 $s \in \mathbb{F}^n$，使得对所有 α，f 在每个截面$P_{\langle s,\ \alpha\rangle} = P \cap \{y : s^T y = \alpha\}$ 上都以下界某个值为界，则 f 在 P 上有界。令 ϵ_1 为 f 在 P 的所有形式面上的下界。

我们的目标是找到一个向量 s，使函数在每个截面上都有界。为确保每个非空截面$P_{\langle s,\ \alpha\rangle}$ 都是有界多面体（多胞体），我们将搜索范围限制为各分量严格为负的向量s（对所有 $i = 1, \ldots, n$，均有 $s_i < 0$）。鉴于 P包含于负正交象限（$y_i \leq 0$），选择 s 意味着 $y_i \in [s_i^{-1}\alpha, 0]$，因此，若要使该截面非空，$\alpha$ 必须非负。

为了分析截面上的 f，我们进行变量消去。令 $y_{\{j\}}$ 表示移除第 j 个分量后的向量 y，令 $\Lambda_{\{jj\}}$ 表示移除第 j 行和第 j 列后的矩阵 Λ。由 $s^T y = \alpha$ 可得 $y_j = s_j^{-1}(\alpha - s_{\{j\}}^T y_{\{j\}})$。将其代入 f，得到：

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y_{\{j\}}) = {} & y_{\{j\}}^T \left[\Lambda_{\{jj\}} + \Lambda_{jj} s_j^{-2} s_{\{j\}} s_{\{j\}}^T\right] y_{\{j\}} \\ & + \left[u_{\{j\}}^T - 2\alpha s_j^{-2} \Lambda_{jj} s_{\{j\}}^T - u_j s_j^{-1} s_{\{j\}}^T\right] y_{\{j\}} \\ & + \left[\alpha^2 s_j^{-2} \Lambda_{jj} + \alpha u_j s_j^{-1} + \gamma\right].\end{aligned}$$

根据以下情形，我们选取索引 j 和向量 s：

情形 1： Λ 至少有一个负对角元素。令 j 为满足 $\Lambda_{jj} < 0$的索引。通过选择 s_j 使其绝对值足够小，矩阵 $[\Lambda_{\{jj\}} + \Lambda_{jj} s_j^{-2} s_{\{j\}} s_{\{j\}}^T]$ 沿 $s_{\{j\}}$呈凹。根据推论 4.1，$\tilde{f}$ 在有界多胞体 $P_{\langle s,\ \alpha\rangle}$ 上的最小值在其边界上取得。由于截面的边界位于 P的形式面上，因此不等式 $f(x) \geq \epsilon_1$ 对截面中的所有 x 都成立。

情形 2： $\Lambda \succeq 0$，Λ 至少包含两个为零的对角元素，且 $u \neq \mathbf{0}$。由于 u 恰好只有一个非零分量，因此我们可以选取索引 j，使得 $\Lambda_{jj} = 0$ 且 $u_j = 0$。消去后，截面上的约化函数 f 保留了一个线性项 $u_k y_k$，其中某个索引 $k \neq j$ 满足 $\Lambda_{kk} = 0$且 $u_k \neq 0$。在这个方向上，函数是纯线性的。根据推论 4.1 （第 5 部分），由于该函数包含一个二次系数为零的线性分量，因此有界多胞体 $P_{\langle s,\ \alpha\rangle}$ 上的最小值必定在边界上取得。因此，对于截面中的所有 x，不等式 $f(x) \geq \epsilon_1$ 均成立。

情形 3： $\Lambda \succeq 0$，仅有一个对角元素 $\Lambda_{jj} = 0$，且 $u \neq \mathbf{0}$。在这种情况下，必有 $u_j \neq 0$。截面上的函数变为：

$$\tilde{f} = y_{\{j\}}^T \Lambda_{\{jj\}} y_{\{j\}} - u_j s_j^{-1} s_{\{j\}}^T y_{\{j\}} + \left[\alpha u_j s_j^{-1} + \gamma\right].$$

子情形 3.1： 若 $u_j s_j^{-1} < 0$，根据推论 4.1 （第 2 部分），线性项会将极小点推至截面的边界。因此，对截面内所有 x，不等式 $f(x) \geq \epsilon_1$ 均成立。

子情形 3.2： 若 $u_j s_j^{-1} \geq 0$，则对任意 $\alpha \geq 0$，项 $\alpha u_j s_j^{-1} + \gamma$ 下有界。由于 $\Lambda_{\{jj\}} \succ 0$ （唯一的零点已移除），二次部分下有界。因此，在每个这样的截面上，函数 f 以下界 γ 为界。□

在正交象限限制的多面体上证明有界性，可得出关于最优解位置的如下结果。在引理5.3的条件下，全局最小值的搜索范围可限制在 P的边界上。

推论 5.1（正交象限上的最小值位置） 设 f 和 P $(n \geq 2)$ 如引理5.3中所定义。若 P 非空，且 f 在 P 上有下界，则 f 在P 上的全局最小值至少在其一个面 F_k上取得：

$$\min_{y \in P} f(y) = \min_k \left(\min_{y \in F_k} f(y) \right).$$

证明根据推论 4.1，保证集合 $\{0\} \cup \partial P$包含一个全局极小点 y^*。由于正交象限约束，原点不是 P的内点。因此，y^* 必定至少位于一个面上。□

5.3 定理5.1的证明

现在我们可以证明所提方法整体正确。以下证明综合了正交象限约束多面体的几何性质，以及算法递归调用的归纳结构。

证明算法必定终止，因为在每次递归调用（步骤 4）中，问题的维数 n 都会严格减少 1。由于 n 是有限的，并且每一层的分支正交象限数（2^n）和形式面数（$m+n$）也都是有限的，因此该过程会生成一棵有限的递归树。

根据定理 4.1，对于 $\mathbb{F}$ 上的任意实例，以下三种状态中必有且仅有一种适用： 不可行、无界或最优。鉴于引理 5.2已证明不可行检测的正确性，接下来只需通过对 n归纳法证明以下两个正向推论。

基本情形 $n = 1$**:** (Step 1)通过在可行区间上直接代数求解一元二次问题来处理，该方法能够正确判定状态并确定极小点。

无界**输出的正确性:** 假设该假设对 $n-1$ 成立。算法仅在步骤 4 中返回 无界，此时对形式面 F_k^h 的一次递归调用返回 无界。根据归纳假设， f 在子集 $F_k^h \subseteq P$ 上确实下无界。由于 f 在 P 的一个子集上无界，因此它在 P 上必然无界。

最优**输出的正确性:** 假设该假设对 $n-1$成立。算法在以下两种情况下返回 最优：步骤 3 中（无约束驻点可行时），或步骤 5 中。步骤 5 仅在 $P \neq \emptyset$ 且未发现无界的形式面时才会返回该状态。对于每个正交象限 h，所有形式面均有界意味着 P^h （引理 5.3）。关键的是，推论 5.1 （正交象限上的最小值位置）保证，受正交象限约束的多面体的全局最小值必定在其至少一个面上取得。由于算法穷尽所有形式面，将其最优点收集并比较后存入集合 $\mathcal{S}$，因此步骤 5 中选取最小值，能够正确确定 f 在 P 上的精确全局最小值。

证明至此完成：根据定理 *4.1* 的保证，二次规划在 $\mathbb{F}$ 上的所有可能状态构成一个划分，恰由三种状态组成： 不可行、无界和最优。由于上述结果表明，若算法返回某一特定状态，则问题实例必然具有相应性质，因此这些状态互斥也意味着其逆命题成立。具体而言，对于任意问题实例，算法 1都能识别其唯一真实的优化状态；若状态为最优，还会以全局极小点 x^* 的形式给出证书。证明完毕。 □

备注 *5.2*（复杂度说明）算法 1 的递归结构与定理 4.1 的归纳证明相呼应。由于递归深度有上界 n ，且分支数量有限，因此算法必然终止。然而，每一步都要对正交象限和面进行分支，这导致其最坏情况下的时间复杂度关于维数 n呈超指数增长。这一表现与不定二次规划问题的 NP 困难性质相符，也反映了在不进行数值近似的情况下执行精确结构分解所需的代价。

6 结果与讨论

定理 4.1 通过将 Eaves 定理推广到 [9] 任意线性有序域的框架下，对经典存在性理论作出了全面推广。该结果表明，对于有界二次函数，最小值的取得是问题线性二次结构所固有的代数特征。这一发现阐明，最优解的存在并不依赖于经典分析证明的核心条件——连续性或紧致性。 $\mathbb{R}$

具体而言，该定理的一个推论是，可以将任意二次规划问题完备地划分为三种互斥的状态：不可行 （多面体 P 为空集）、无界 （函数 f 在 P上无界）或最优 （存在全局极小点）。该定理将可能的结果限定为这三种情形，确保当可行集非空且函数下有界时，必定存在一个属于原域 $\mathbb{F}$的最优解。

定理 4.1 证明的构造性为最优解的位置提供了精确刻画，并构成我们精确算法的理论基础。这一机制植根于第 3 节引入的解耦对角分解。正如推论4.1所确立的，对角矩阵 Λ 和线性向量 u 的系数是问题可能状态及极小点位置的结构性标记。例如，如果分解显示某个自由变量对应非零线性项 $u_k \neq 0$ ，或者 Λ 包含至少一个负对角元素，则可判定该问题为无界 ，或其最小值必然位于边界上。

从算法角度来看，我们已经证明，这种分类在 Blum–Shub–Smale 计算模型下是可判定的。所开发的算法 MinQP_LOF 能在有限步内确定问题的状态；若问题属于最优情形，则可计算出全局极小点的精确坐标。尽管由于多面体搜索的递归性质以及正交象限分解的必要性，该算法的计算复杂度本质上较高，但可以保证它在任意线性有序域上终止并给出正确结果。

这些发现涵盖了最一般形式的二次规划，包括线性规划的退化情形。虽然在线性规划中，已知在线性有序域上最小值可以取到，但我们的工作对不定二次情形作出了必要且严谨的推广。

考察更高次多项式或其他代数结构时，这种代数方法的局限便显而易见。对于三次或更高次多项式优化，结构性存在定理通常不成立。考虑区间 $[0,3]\cap\mathbb{Q}$ 上的三次函数 $f(x)=x^3-6x$；其最小值位于 $x=\sqrt{2}$，而 $x=\sqrt{2}$ 不属于 $\mathbb{Q}$，因此尽管该函数有界，最小值却无法取到。同样，从域转向线性有序环也会破坏最值的可达性。在环 $R=\mathbb{Z}[1/3]=\{a/3^k:\ a\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}\}$ 中，该环由整数以及分母为 3 的幂的分数构成；函数 $f(x)=(2x-1)^2$ 有下界，但其下确界 0 无法取到，因为 $1/2\notin R$。这些观察表明，域的代数结构是确保解能够取到的关键基础；相比之下，环等较简单的有序结构或高次模型，即使对于适定问题，也可能缺少必要的性质。

7 结论

本文确立了一般线性有序域上二次规划的可判定性以及最优解的可达性。通过证明 Eaves 定理的广义版本，我们证明了最小值的存在性是二次型固有的代数性质，与拓扑完备性无关。我们提出了精确递归算法 MinQP_LOF，在 Blum–Shub–Smale 模型下提供了一种构造性解法。这些发现有效地界定了精确可解性的边界，并证实二次规划是这样一类多项式优化问题：在整个线性有序域范围内，其解的可达性均有结构性保证。

致谢

作者谨向 Mykhail V. Vasnetsov 教授致以谢意，感谢他对本工作的关注、鼓励，以及促成这些研究成果的交流。

声明

经费支持：本研究得到乌克兰国家科学院物理研究所的资助。**利益冲突：**作者声明不存在利益冲突。**数据可用性：**本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

1. Allamigeon, X., Katz, R.D.：基于单纯形法对凸多面体进行形式化。自动推理杂志 63(2)，323–345（2019）。DOI 10.1007/s10817-018-9477-1。URL https://doi. org/10 1 2 1007 10817 018 9477 . /s - - - . Basu, S., Pollack, R., Roy, M.F.：实代数几何算法，数学中的算法与计算，第10卷，第2版。施普林格，柏林、海德堡（2006）。DOI 10.1007/3-540-33099-2。URL https://doi.org/10 2 3 1007 3 540 33099 . / - - - . Blum, E., Oettli, W.：二次规划存在定理的直接证明。运筹学 20 169347 4 1 165 167 1972 ( )，– ( )。URL http://www.jstor.org/stable/ 。 Blum, L., Cucker, F., Shub, M., Smale, S.：复杂性与实数计算。施普林格出版社，纽约（1998 6 5 10 1007 978 1 4612 0701 6 10 1007 978 1 4612 0701 ）。DOI . / - - - - 。URL https://doi.org/ 。 / - - - - 。 Blum, L., Shub, M., Smale, S.：关于实数上的计算与复杂性理论：NP-完备性、递归函数与通用机。美国数学会通报 21(1)，1–46（1989）。DOI 10.1090/S0273-0979-1989-15750-9。URL https://www.ams.org/journals/bull/1989-21-01/S0273-0979-1989-15750-9/S0273-0979-1989-15750-9.pdf 6. Conway, J.H.：数与博弈，第2版。A K Peters/CRC Press，纳蒂克，马萨诸塞州（2001）。DOI 10 3622062 7 2307 3622062 10 2307 . / . URL https://doi.org/ . / . Dantzig, G.B.：线性规划及其扩展。普林斯顿大学出版社，普林斯顿（1963）。DOI 10 9781400884179 8 1515 9781400884179 10 1515 . / . URL https://doi.org/ . / . Dvorak, M., Kolmogorov, V.：线性优化中的对偶理论及其扩展——经形式化验证（2025 08119 9 2409）。URL https://arxiv.org/abs/ . . Eaves, B.C.：关于二次规划。管理科学 17(11)，698–711（1971）。DOI 10.1287/ mnsc.17 698 10 11 698 10 1287 17 11 。URL https://doi.org/ . /mnsc. . . . Frank, M., Wolfe, P.：一种二次规划算法。海军研究后勤季刊 3 3800030109 11 1 2 95 110 1956 10 1002 3800030109 10 1002 1959 (-)，– ( )。DOI . /nav. . URL https://doi.org/ . /nav. . Gantmacher, F.R.：矩阵理论。Chelsea Publishing Company，纽约（）。12. Goldman, A.J., Tucker, A.W.：线性规划理论。载于：H.W. Kuhn, A.W. Tucker（编）《线性不等式及相关系统》，第53–98页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿（1957）。DOI 10 005 13 1515 9781400881987 005 10 1515 9781400881987 . / - . URL https://doi.org/ . / - . Lang, S.：代数，数学研究生教材，第211卷，修订版第三版。施普林格出版社，纽约（2002 0 14 10 1007 978 1 4613 0041 0 10 1007 978 1 4613 0041 1093）。DOI . / - - - - 。URL https://doi.org/ . / - - - - 。 Prestel, A.：形式实域讲义，数学讲义，第.卷。施普林格出版社，柏林（1984 0101548 15 10 1007 0101548 10 1007 1996）。DOI . /BFb 。URL https://doi.org/ . /BFb 。 Robinson, A.：非标准分析。普林斯顿大学出版社（）。URL http://www.jstor.org/ stable/j.ctt1 6 16 3cx vb 。 Schrijver, A.：线性与整数规划理论。John Wiley & Sons，奇切斯特（1986）。17. Tarski, A.：初等代数与几何的判定方法。加利福尼亚大学出版社，伯克利和洛杉矶（1951）。兰德公司最初出版，后为加利福尼亚大学出版社修订。18. Thiemann, R.：线性规划的对偶性。形式化证明档案（2022）。URL https://isa-afp. org/entries/LP_Duality.html。形式化证明开发