arXiv:2601.18000v1 [cs.LO] 25 Jan 2026

# 高阶正则语言的笛卡尔闭纤维化

Paul-André Melliès
mellies@irif.fr 法国国家科学研究中心、巴黎西岱大学、法国国家信息与自动化研究院，法国

Vincent Moreau
vincent.moreau@taltech.ee
塔林理工大学，爱沙尼亚

## 摘要

我们将介绍如何以两种不同的方式，按照 Salvati 的定义构造高阶正则语言的笛卡尔闭纤维化。第一种构造中，我们运用纤维化技术，从与有限基态集相关联的各种 $\lambda$-项正则语言范畴推导出笛卡尔闭纤维化。第二种构造中，我们借助近期提出的概形有限 $\lambda$-演算这一概念，采用 Hermida 提出的一种精妙思路，通过从 Stone 空间范畴上的开闭子集纤维化进行基变换，定义笛卡尔闭纤维化。最后，我们按照 Melliès 和 Zeilberger 的思路，利用一种 Isbell型伴随，将 Brzozowski 导数的概念推广到高阶正则语言，以此展示笛卡尔闭纤维化的表达能力。

**计算机学科分类体系概念**

• **请勿使用此代码 → 为您的论文生成正确的术语**；为您的论文生成正确的术语；为您的论文生成正确的术语；为您的论文生成正确的术语。

## 关键词

正则语言、高阶正则语言、Brzozowski 导数、笛卡尔闭纤维化、profinite $\lambda$-演算。

**ACM参考文献格式：**

Paul-André Melliès 和 VincentMoreau。2018年。高阶正则语言的笛卡尔闭纤维化。《*ACM*学报》37，4，文章111（2018年8月），13页。https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX

## 1 引言

有限词上的正则语言类在两种基本构造下封闭：沿同态取逆像，以及 Brzozowski 导数。一方面，给定两个有限字母表 $\Sigma$ 和 $\Gamma$ 以及一个同态 $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$，逆像

$$h^{-1}(L) = \{\, w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L \,\}$$

正则语言 $L$ 也是正则的。另一方面，Brzozowski 导数

$$\begin{aligned} a\backslash L &:= \{w \in \Sigma^* \mid aw \in L\} \\ L/a &:= \{w \in \Sigma^* \mid wa \in L\} \end{aligned}$$

事实上，Brzozowski 构造的适用范围要广得多，因为语言

$$\begin{aligned} L'\backslash L &:= \{w \in \Sigma^* \mid \forall w' \in \Sigma^*,\, w' \in L' \Rightarrow w'w \in L\} \\ L/L' &:= \{w \in \Sigma^* \mid \forall w' \in \Sigma^*,\, w' \in L' \Rightarrow ww' \in L\} \end{aligned}$$

当 $L$ 和 $L'$ 是正则语言时，它们也是正则的。注意，导数 $a\backslash L$ 和 $L/a$ 可通过将 $L'\backslash L$ 和 $L'/L$ 代入正则的单例语言 $L' = \{a\}$得到。

与此同时，有限词上的正则语言类在连接、Kleene 星号以及沿同态取正像的运算下封闭。这意味着，给定两个有限字母表 $\Sigma$和 $\Gamma$ 以及一个同态 $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$，正像

$$h(L) = \{\, h(w) \in \Gamma^* \mid w \in L \,\}$$

一个正则语言 $L$ 的正像也是正则的。正则语言在沿同态取正像的运算下封闭这一性质十分显著，文献中已将其视为与单子二阶逻辑公式 [Bojańczyk 等人 2023]相对应的根本原因。

**词元组的正规语言。** 一个有趣的观察是，在一种扩展且带有推测性的语言理论中，正像与逆像的保持性质无法同时成立；在这种理论中，人们考虑的不只是正则语言

$$L \subseteq \Sigma^*$$

有限词，但也包括正则语言

$$L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$$

单词对。事实上，对角函数

$$\Delta : \mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}$$

在这种情况下会将总正则语言 $L = $ 自然数上的自然数 $\cong \{a\}^*$ 映射为语言

$$\Delta(\mathrm{Nat}) \quad = \quad \{(n,n) \mid n \in \mathrm{Nat}\}.$$

沿着函数取 $\Delta$(自然数) 的逆像

$$w \mapsto (|w|_a, |w|_b) \quad : \quad \{a,b\}^* \to \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}$$

它将每个单词 $w$关联到字母 $a$ 和 $b$的数量 $|w|_a$和 $|w|_b$，所得语言为

$$L \;=\; \{\, w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b \,\}$$

它不是正则的。因此，语言 $\Delta$(自然数) 描述 自然数$\times$自然数 中对角线的语言将不是正则的，因此在扩展的 and 中，直接像保持性质将不成立

作者联系信息：Paul-André Melliès，mellies@irif.fr，法国国家科学研究中心，巴黎西岱大学，法国国家科学研究院，法国；Vincent Moreau，vincent.moreau@taltech.ee，塔林理工大学，爱沙尼亚。

允许为个人或课堂用途免费制作本作品全部或部分内容的数字副本或纸质副本，前提是不得为营利或商业利益制作或分发副本，且副本须附有此声明及首页上的完整引文。对于本作品中由作者以外的其他人拥有版权的部分，必须尊重其版权。允许在注明出处的情况下摘录。若要以其他方式复制、再版、发布到服务器或分发至列表，则须事先获得具体许可和/或支付费用。请向 permissions@acm.org 申请许可。© 2018 版权所有归所有者/作者所有。出版权已授权给 ACM。
ACM 1557-735X/2018/8-ART111
https://doi.org/XXXXXXX.XXXXXXX

我们所设想的针对有限字词组的推测性语言理论。

**简单类型的正则语言 $\lambda$-项**。十五年前，Salvati [Salvati 2009] 对有限词的传统正则语言概念进行了保守扩展，提出了简单类型 $\lambda$-项的高阶正则语言概念。假设给定一个由以下文法生成的简单类型 $A$

$$A, B \quad ::= \quad A \times B \mid A \Rightarrow B \mid 1 \mid o$$

，其中包含单位类型 1 和唯一的基类型 $o$。类型为 的高阶语言 $L$定义为 $A$ 的一个子集 $L \subseteq \Lambda_{\beta\eta}(A)$，其中元素是类型为 $\lambda$的闭 $A$-项，并视 $\beta\eta$-等价而定。类型为 $A$ 的正则语言概念依赖于标准解释

$$[\![A]\!]_Q \quad \in \quad \mathbf{FinSet}$$

将简单类型 $A$ 解释到有限集的笛卡尔闭范畴 **FinSet** 中，其中基类型 $o$ 被解释为一个有限集 $Q$。对于给定的有限集 $Q$，高阶语言 $L \subseteq \Lambda_{\beta\eta}(A)$ 称为$Q$-正则，如果存在一个有限子集

$$F \quad \subseteq \quad [\![A]\!]_Q$$

使得

$$L \quad = \quad \{ M \in \Lambda_{\beta\eta}(A) \mid [\![M]\!]_Q \in F \}.$$

在这里，类比传统自动机理论，可以将有限集 $Q$ 视为基态的集合，并将 $F$ 视为类型为 $A$的接受高阶状态的子集。

注意，对于每个有限集 $Q$，将 $A$ 标准地解释为有限集 $[\![A]\!]_Q$，会把 $\Lambda_{\beta\eta}(A)$划分为有限个不相交分量，其中每个分量都是由具有相同解释的闭合 $\lambda$-项 $M \in \Lambda_{\beta\eta}(A)$构成的非空子集：

$$[\![M]\!]_Q \in [\![A]\!]_Q.$$

因此，类型为 $A$ 的高阶语言 $L$ 当且仅当它是若干个此类不相交分量的有限并时，才是 $Q$-正则的。此时，若存在一个有限集 $Q$，使得 $L$ 是 $Q$-正则的，则称类型为 $A$ 的高阶语言 $L \subseteq \Lambda_{\beta\eta}(A)$是正则的，参见 [Salvati2009]。

**有限词的丘奇编码**。如上所述，Salvati 提出的正则高阶语言定义，是对有限词正则语言通常概念的保守扩展。每个有限字母表

$$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

可以看作简单类型 $\lambda$演算的一个上下文：

$$a_1 : o \Rightarrow o, \ \ldots \ , a_n : o \Rightarrow o$$

其中每个字母 $a_i \in \Sigma$ 都声明为一个从基类型 $o \Rightarrow o$ 到自身的类型为 $o$ 的函数。丘奇编码的思想是将每个有限单词

$$w \quad = \quad a_{\sigma 1} \ldots a_{\sigma k}$$

其中 $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ 是一个从位置映射到字母索引的函数，即 $\lambda$-项

$$[w] \quad = \quad a_{\sigma k} \circ \cdots \circ a_{\sigma 1}$$

通过复合上下文中声明为函数的变量 $a_{\sigma i}$ 而获得。这样便在该上下文或带类型的字母表中得到一个类型为 $o \Rightarrow o$ 的 $\lambda$-项：

$$a_1 : o \Rightarrow o, \ \ldots \ , a_n : o \Rightarrow o \ \vdash \ [w] \ : \ o \Rightarrow o$$

一系列 $k$ $\lambda$项 $f_1, \ldots, f_k$的复合本身在 $\lambda$演算中定义为如下 $\lambda$项：

$$f_1 \circ \cdots \circ f_k \quad ::= \quad \lambda x. f_1(f_2(\ldots f_k(x) \ldots))$$

特别要注意的是，空单词被编码为恒等函数，在 $\lambda$演算中记作 $\lambda x.x$：

$$a_1 : o \Rightarrow o, \ \ldots \ , a_n : o \Rightarrow o \ \vdash \ \lambda x.x \ : \ o \Rightarrow o$$

这样，每个有限单词 $w \in \Sigma^*$ 都可以看作 $\lambda$项

$$\vdash \ \lambda a_1. \ldots . \lambda a_n. [w] \ : \ \mathrm{Words}_\Sigma$$

通过对 $\lambda$项进行柯里化得到 $[w]$，其中 $\mathrm{Words}_\Sigma$ 定义为简单类型

$$\mathrm{Words}_\Sigma \ := \ \underbrace{(o \Rightarrow o)}_{\text{type of } a_1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{(o \Rightarrow o)}_{\text{type of } a_n} \Rightarrow \underbrace{(o \Rightarrow o)}_{\text{type of } [w]}$$

将有限词丘奇编码为简单类型化 $\lambda$-项是一一对应的，也就是说，一个有限词 $w \in \Sigma^*$ 等同于一个闭的 $\lambda$-项，其类型为$\mathrm{Words}_\Sigma$，模去 $\beta\eta$-转换：

$$\Sigma^* \quad \cong \quad \Lambda_{\beta\eta}(\mathrm{Words}_\Sigma).$$

所谓保守扩展，是指类型为$\mathrm{Words}_\Sigma$ 的正则高阶语言，与传统意义上字母表 $\Sigma$ 上有限词的正则语言相一致；后者是将字母表 $\Sigma$ 上的有限词丘奇编码为简单类型化 $\lambda$-项，且其类型为 $\mathrm{Words}_\Sigma$后得到的。事实上，这一基本而重要的观察促成了 Salvati 在原论文中对正则高阶语言的定义 [Salvati 2009]。

**积类型与箭头类型、逆像以及高阶语言上的 Brzozowski 导数**。本文的主要目标是证明，正则高阶语言类在两种基本构造下封闭：积类型与箭头类型（定理 A），以及沿着一个 $\lambda$-项取逆像（定理 B）。

我们描述这些构造。假设给定两个正则语言

$$L_A \subseteq \Lambda_{\beta\eta}(A) \qquad L_B \subseteq \Lambda_{\beta\eta}(B)$$

积类型和箭头类型构造

$$L_A \times L_B \ \subseteq \ \Lambda_{\beta\eta}(A \times B) \qquad L_A \Rightarrow L_B \ \subseteq \ \Lambda_{\beta\eta}(A \Rightarrow B)$$

定义如下：

$$L_A \times L_B \ = \ \{ (M, N) \in \Lambda_{\beta\eta}(A \times B) \mid M \in L_A, N \in L_B \}$$
$$L_A \Rightarrow L_B \ = \ \{ M \in \Lambda_{\beta\eta}(A \Rightarrow B) \mid \forall P, P \in L_A \Rightarrow MP \in L_B \}$$

我们在本文中证明

**定理 A**。
当 $L_A$ 和 $L_B$ 是正则的时，高阶语言 $L_A \times L_B$ 和 $L_A \Rightarrow L_B$ 也是正则的。

假设给定一个闭合的 $\lambda$-项

$$\vdash \quad M \ : \ A \Rightarrow B$$

以及一个类型为 $B$ 的高阶语言 $L$。其逆像

$$M^{-1}(L) \ \subseteq \ \Lambda_{\beta\eta}(A)$$

是定义为类型为 $A$ 的高阶语言

$$M^{-1}(L) \ = \ \left\{ P \in \Lambda_{\beta\eta}(A) \ \mid \ MP \in L \right\}$$

我们在本文中证明了

> **定理 B**。
> 当 $L$ 是正则语言时，高阶语言 $M^{-1}(L)$也是正则的。

综合起来，定理 A 和 B 有许多重要的推论。首先，类型为 $A$ 的两个语言 $L$ 和 $L'$ 的交集 $L \cap L'$ 等于逆像

$$L \cap L' = \Delta_A^{-1}(L \times L')$$

沿着 $\lambda$-项 $\Delta_A$取正则语言 $L \times L'$ 的逆像

$$\vdash \quad \Delta_A \ : \ A \Rightarrow (A \times A)$$

由此可知，当语言 $L$和 $L'$ 是类型为 $A$的正则语言时， $L \cap L'$ 也是正则的。此外，类型为 $A$的正则语言集合 $\mathrm{Reg}(A)$ 在补运算下封闭，因为出于显而易见的原因，类型为 $A$ 的 $Q$-正则语言集合 $\mathrm{Reg}_Q(A)$ 在补运算下封闭。集合 $\mathrm{Reg}(A)$ 还包含空集以及全集 $\Lambda_{\beta\eta}(A)$。这为一个微妙且广为人知的事实提供了概念性证明：$\mathrm{Reg}(A)$ 构成一个布尔代数。

定理 A 和 B 还提供了足够的结构，使 Brzozowski 导数能够以如下方式扩展到高阶语言。假设给定一个闭合的 $\lambda$-项 $M$，其类型为

$$\vdash \quad M \ : \ A \times B \ \Rightarrow \ C$$

以及一个类型为 $C$的正则语言 $L_C$。我们将在 §7 中证明，类型为 $B$的高阶语言

$$L_C / L_A \ = \ \left\{ N_B : B \mid \forall N_A \in L_A, \text{ we have } M\,(N_A, N_B) \in L_C \right\}$$

当类型为 $A$ 的语言 $L_A$ 是正则语言时也是正则的；对称地，类型为 $A$的高阶语言

$$L_B \backslash L_C \ = \ \left\{ N_A : A \mid \forall N_B \in L_B, \text{ we have } M\,(N_A, N_B) \in L_C \right\}$$

当语言 $L_B$ 的类型为 $B$ 且为正则语言时，它也是正则语言。将此构造应用于类型 $A, B, C = \text{丘奇}_\Sigma$ 以及 $\lambda$-项 $M = concat$ （定义如下）时，我们便得到有限词语言上通常的 Brzozowski 导数：

$$\vdash \quad concat \ : \ \mathrm{Words}_\Sigma \times \mathrm{Words}_\Sigma \to \mathrm{Words}_\Sigma$$

它将一对单词 $(u, \ v) \ \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ 的丘奇编码映射为它们连接结果 $u \cdot v \in \Sigma^*$ 的丘奇编码，详情参见 §7。

**正则语言的笛卡尔闭纤维化**。 定理 A 和 B 描述了 $\lambda$-项的正则语言的基本闭包性质；这些定理的灵感来自这样一种观点：高阶语言 $L$ 的类型 $A$ 应被理解为底层简单类型 $A$的细化类型 $L \sqsubset A$，因此应在 [Melliès和Zeilberger 2015]所发展的纤维化和类型论形式体系中加以研究。

为此，我们考虑由一个对象 **Lam**自由生成的笛卡尔闭范畴 $\mathfrak{O}$，其对象是基类型为 $A\mathfrak{o}$ 的简单类型，其态射是简单类型化的 $\lambda$-项，视为模 $\beta\eta$-转换相等。随后，我们定义范畴 **Reg**，其对象是由一个简单类型 $A$和一个 $L$ 类型为 $A$ 的正则语言 $L$ 所组成的对 $A$。一个态射

$$M \quad : \quad (A, L_A) \longrightarrow (B, L_B)$$

是一个 $\lambda$-项 $M$，其类型为 $A \Rightarrow B$，满足

$$\forall P \in \Lambda_{\beta\eta}(A), \quad P \in L_A \ \Rightarrow \ MP \in L_B.$$

注意，此性质也可以等价地表述为 $L_A \subseteq M^{-1}(L_B)$。通过观察构造 **定理 A.** 可以重新表述（并加强）： $L_A \times L_B$ 和 $L_A \Rightarrow L_B$为范畴 **Reg** 赋予笛卡尔闭范畴结构，并且该结构由函子严格保持

$$p \quad : \quad \mathbf{Reg} \longrightarrow \mathbf{Lam}$$

该函子将每个对象（$A$， $L$）映射到其底层类型 $A$。通过观察函子 $p$ 是一个 Grothendieck 纤维化，可以对**定理 B**。 的表述进行改写（并加以强化）。

由此可知，**定理 A 和 B**。 不仅可以由**定理 C**。 推出，同时也得到了后者的改进；该定理是本文的主要关注点和贡献：

> **定理 C**。 [本文中的定理 4.7 和 6.2] 函子 $p$： **Reg** $\to$ **Lam** 是一个笛卡尔闭纤维化。

定理 C。 在本文中通过两种不同的方式得以证明。

**第一种证明：纤维化方法**。 我们对该定理的第一种证明见于第 3 节和第 4 节。首先，对于每个有限集 $Q \in \mathbf{FinSet}$，我们构造一个笛卡尔闭双纤维化

$$p_Q \quad : \quad \mathbf{Reg}_Q \longrightarrow \mathbf{Lam}$$

从范畴 $\mathbf{Reg}_Q$ 的 $Q$正则语言到范畴 **Lam**，见命题 3.3。随后，我们运用双纤维化的反射态射概念（定义 4.4）以及 Frobenius 互反原理（见定理 4.6），来证明我们的主要定理（定理 4.7）。

**第二个证明：逆有限方法**。我们在第 §5 和 §6 节给出了该定理的第二个证明。其概念上的简洁性体现了采用逆有限 $\lambda$-微积分的益处；这一方法最近由 [Gool 等人 2023] 引入。证明从构造一个双纤维化开始

$$\mathbf{Clopen} \longrightarrow \mathbf{Stone}$$

从范畴**Clopen**开始，其对象是形如$(X, \ U)$的对象，其中包含一个 Stone 空间 $X$和一个开闭子集 $U \subseteq X$。逆有限 $\lambda$-微积分定义了一个函子

$$\widehat{\Lambda} \quad : \quad \mathbf{Lam} \longrightarrow \mathbf{Stone}$$

它为每个简单类型 $A$ 关联其由有限指数 $\lambda$项构成的 Stone 空间 $\widehat{\Lambda}(A)$，可将其视为 $\Lambda_{\beta\eta}(A)$的紧化。正则语言的笛卡尔闭纤维化 $p$： **Reg** $\to$ **Lam**

随后通过基变换还原，该基变换由范畴拉回定义：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Reg} & \longrightarrow & \mathbf{Clopen} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbf{Lam} & \xrightarrow{\widehat{\Lambda}} & \mathbf{Stone} \end{array}$$

证明 $p$： $\mathbf{Reg} \to \mathbf{Lam}$ 定义了一个笛卡尔闭纤维化（定理 6.2），其依据的论证改编自 Hermida 的博士论文。

**有限字词组的正则语言，以及开映射的概念。** 正则高阶语言这一概念有诸多优点，其中之一是它为有限词

$$w \in \Sigma^*$$

扩展为有限字词组的正则语言

$$(w_1, \ldots, w_n) \in \Sigma_1^* \times \cdots \times \Sigma_n^*$$

通常，正则语言

$$L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$$

有限字母表 $\Sigma$ 上有限词对的集合被定义为一种正则高阶语言

$$L \subseteq \Lambda_{\beta\eta}(\mathrm{Words}_\Sigma \times \mathrm{Words}_\Sigma)$$

类型 $\mathrm{Words}_\Sigma \times \mathrm{Words}_\Sigma$。正如我们在引言中较早讨论的那样，这表明正则高阶语言不由直接像保持，这是出于与正则性和通过有限手段（例如有限自动机）实现的可识别性的本质相关的深层结构原因。事实上，考虑丘奇编码

$$\mathrm{Nat} = (o \Rightarrow o) \Rightarrow (o \Rightarrow o)$$

自然数集合的丘奇编码。存在一个 $\lambda$-项

$$\mathit{counter} \quad : \quad \mathrm{Words}_{\{a,b\}} \longrightarrow \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}$$

，它将每个有限词 $w$ 在字母表 $\{a, b\}$ 上的字母数量对 $(|w|_a, |w|_b)$ 与字母数 $a$ 和 $b$ 在该单词 $w$ 中出现的次数相关联。这里，自然数 定义为自然数集合的丘奇编码：

$$\mathrm{Nat} = (o \Rightarrow o) \Rightarrow (o \Rightarrow o)$$

由此可知：

**事实**。高阶语言

$$L = \{ (n, n) \mid n \in \mathrm{Nat} \} \subseteq \Lambda_{\beta\eta}(\mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat})$$

不是正则的。

这表明，沿对角线 $L$ 对全语言 $\Lambda_{\beta\eta}$(自然数)的正像 $\lambda$-项

$$\Delta : \mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}$$

不是正则高阶语言。

正则高阶语言不一定在正像下保持不变这一事实，Salvati 已经通过一个复杂的反例注意到了，该反例针对的是为高阶正则语言设计单子二阶逻辑的可能性，参见 [Salvati 2009]。

一个初等但富有洞见的观察是：当且仅当 $M$ 具有如下性质时，一个简单类型的 $\lambda$-项 $\vdash M : A \Rightarrow B$ 在拓扑意义下是开映射 的：任意类型为 $A$ 的正则语言 $L$，其正像 $M(L)$ 都是类型为 $B$ 的正则语言；参见第 8 节，其中讨论了开映射并给出了一些初步观察。

**论文概要。** 在§2回顾笛卡尔闭纤维化和双纤维化的概念之后，我们在§3和§4给出正则语言笛卡尔闭纤维化的第一个构造。接着，我们在§5讨论 Stone 空间范畴上的开闭谓词纤维化。在§6给出正则语言笛卡尔闭纤维化的第二个构造。然后在§7讨论 Brzozowski 导数向高阶语言的扩展。我们还在§8对开映射作若干初步观察，最后在§9总结全文。

**相关工作。** Salvati 将可识别性的概念扩展到 $\lambda$-项语言的情形，见 [Salvati 2009]。Moreau 和˜Nguyên 最近证明，所有非偏序、局部有限且良基点的笛卡尔闭范畴都能识别相同的 $\lambda$-项语言。正则语言类与将 Hillebrand 和 Kanellakis 的方法推广至高阶后得到的高阶语言类相同。Hillebrand 和 Kanellakis 1996],并将其与隐式自动机研究计划联系起来，该计划始于˜ ˜ ˜[ Nguyên 和 Pradic 2020], 参见 Nguyên 的博士论文 [ Nguyên 2021]。这表明高阶正则语言类具有稳健性，也使我们能够在范畴FinSet 中使用可识别性，而不失一般性。

Riba 运用来自博弈语义和线性逻辑的工具，对 Rabin 树定理背后的结构进行了纤维化分析。Rabin 树定理指出，在无限树上由非确定性自动机定义的语言在补集运算下封闭 [ Riba 2020a,b]。这项研究处于逻辑与指称语义的交汇处，与 Pradic 和 Riba 的一系列论文密切相关；他们以 Church 综合为核心，基于直觉主义逻辑、线性逻辑和 Dialectica 翻译，为单子二阶逻辑构建了 Curry–Howard 观点 [Pradic and Riba 2018, 2019a,b]。

本文采用的若干技术最初由 Hermida [Hermida 1993] 和 Jacobs [Jacobs 1999] 在其逻辑关系研究方法中提出。尽管本文聚焦于笛卡尔闭范畴，Hasegawa 关于线性逻辑粘合的工作具有更广泛的适用性，可用于幺半闭范畴，并为本文提供了重要灵感来源 [Hasegawa 1999a,b], ；此外，程序语言理论中也运用了此类技术，例如 Katsumata 关于效应的研究 [Katsumata 2013]。

任何函子都表示一种精化类型系统，这一想法源自 Melliès和Zeilberger 的工作；他们展示了纤维化结构与幺半群闭结构如何相互作用，尤其是如何重新得到分离逻辑中的多种构造 [Melliès and Zeilberger 2015]。后来，这些想法又在 Isbell 对偶的背景下得到发展。Isbell 对偶是范畴论中的一种构造，类似于某种双重对偶化 [Di Liberti2020], ，它建立了与证明论中的极性、延续理论以及 Melliès和Zeilberger [ Melliès and Zeilberger 2018]中的 Day 张量积之间的联系。

在 Pippenger [Pippenger 1997] 和 Almeida[Almeida 1995], 的工作推动下，围绕有限剩余词展开的自动机理论拓扑方法，经过二十五多年的发展，已积累了成熟的概念与技术体系；参见 Pin 的综述 [Pin 2009], , 其中也指出这一方法可应用于符号动力系统等其他主题 [Almeida et al. 2020]。Gehrke、Grigorieff 和 Pin 的一项力作是证明：有限剩余词上的连接所赋予的幺半群结构，与正则语言布尔代数上的剩余算子对偶；后者由 Brzozowski 导数计算 [Gehrke et al. 2008, 2010]。受这项工作以及 Salvati 关于 $\lambda$-项语言的研究启发，Gool、Melliès 和 Moreau 引入了有限剩余λ演算，以组合方式将有限剩余词的概念推广到高阶情形 [Gool et al. 2023]。Moreau 的博士论文进一步研究了有限剩余 $\lambda$-演算 [ Moreau 2025], ; 它是本文第 6 节的关键工具。

## 2 笛卡尔闭纤维化与双纤维化的预备知识

纤维化的概念由 [Grothendieck 1971] 引入。关于 [Jacobs 1999] 对笛卡尔和余笛卡尔提升的定义。

定义 *2.1*。令 $p:\ \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ 为一个函子。

态射 $f:\ X \to Y$ 属于 $\mathbf{B}$ 具有拉回，如果对于每个 $V$ 属于 $\mathbf{E}$ 的对象，满足 $p(V) = Y$，都存在一个笛卡尔提升 **拉回** $f(V) \to V$，它将 $f$ 提升到 $\mathbf{E}$。我们称 $p$ 为纤维化，如果 $\mathbf{B}$ 中的所有态射都具有拉回。

一个态射 $f:\ X \to Y$ 在 $\mathbf{B}$ 上有 推前，如果对于每个对象 $U$ 属于 $\mathbf{E}$ 且满足 $p(U) = X$，都存在一个余笛卡尔提升 $U \to \mathbf{pull}f(U)$，它对应于 $f$ 并映到 $\mathbf{E}$。我们称 $p$ 为伴纤维化，如果 $\mathbf{B}$ 中的所有态射都有推前。

双纤维化是一个函子，它既是一个纤维化，也是一个伴纤维化。

当一个函子的定义域和陪域范畴都是笛卡尔闭时，该函子称为笛卡尔闭，且它严格保持笛卡尔积的内部同态；如果定义域和陪域范畴还都是闭范畴，并且该函子严格保持内部同态，那么它称为笛卡尔闭。

对于函子 $p:\ \mathbf{E} \to \mathbf{B}$，我们遵循 [Melliès和Zeilberger 2015] 的理念，并用 $U \sqsubset X$ 表示 $p(U) = X$；我们用 $\mathbf{E}(X)$ 表示 $X$ 的纤维。我们记作

$$U \xrightarrow[f]{} V$$

对于态射集合 $u:\ U \to V$ 使得 $p(u) = f$，并大量使用自然双射，我们将其写成可逆规则，即用两条水平线表示。例如，推前 和拉回 可表示为可逆规则

$$\frac{\mathbf{push}_f\,(U) \xrightarrow[g]{} V}{U \xrightarrow[f;g]{} V} \qquad \text{and} \qquad \frac{U \xrightarrow[f]{} \mathbf{pull}_g\,(V)}{U \xrightarrow[f;g]{} V}$$

定义 *2.2.* 我们将SubSet记作范畴

- 其对象是由集合 $X$ 和子集 $S \subseteq X$ 组成的对 $(X,\ S)$，
- 其态射 $(X,\ S) \to (Y,\ T)$ 是集合论函数 $f:\ X \to Y$，且对所有 $x \in X$，

$$\text{if } x \in S\,, \quad \text{then } f(x) \in T\,.$$

我们用 $p$ 表示函子 SubSet $\to$ Set，它将任意一对 $(X, S)$ 映到集合 $X$。

该函子 SubSet $\to$ Set是一个笛卡尔闭双纤维化，其推前 由正像给出

$$S \dashrightarrow \{f(s) : s \in S\}$$

$$X \xrightarrow{\ f\ } Y$$

其拉回由逆像给出

$$\{x \in X \mid f(x) \in T\} \dashrightarrow T$$

$$X \xrightarrow{\ f\ } Y$$

并且使得 $(X, S)$ 与 $(Y, T)$ 在 SubSet 中的内部同态为

$$(X \Rightarrow Y\,,\ \{f : X \to Y \mid \text{for all } s \in S, \text{we have } f(s) \in T\})$$

定义 *2.3*。函子 $p:\mathbf{E} \to \mathbf{B}$ 沿函子 $F:\mathbf{C} \to \mathbf{B}$ 的 $F^*(p):\ F^*(\mathbf{E}) \to \mathbf{C}$ 基变换是如下定义的范畴拉回函子

$$\begin{array}{ccc} F^*(\mathbf{E}) & \xrightarrow{p^*(F)} & \mathbf{E} \\ {\scriptstyle F^*(p)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbf{C} & \xrightarrow[F]{} & \mathbf{B} \end{array}$$

若 $p$ 是一个 纤维化/伴纤维化/双纤维化，那么 $F^*(p)$ 也如此。

从指标化视角来看，沿 进行的基变换 $F$ 相当于通过 $F$进行前复合。由此获得的相关纤维化类型系统，通过基变换 得到如下可逆对应关系

$$\frac{(C,U) \xrightarrow[f]{} (D,V) \qquad \text{in } F^*(p)}{U \xrightarrow[F(f)]{} V \qquad \text{in } p}$$

现在陈述以下定理，它是 Hermida 的博士论文中的推论 3.8.10 和命题 1.4.7，以及 Hasegawa 1999a 的工作中的命题 3.2 的推论 [Hermida 1993] 和 Hasegawa [Hasegawa 1999a]。我们在此使用类型精化系统的记法给出证明。

定理 2.4。对于任意 笛卡尔闭纤维化 $p:\ \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ 以及笛卡尔函子 $F:\ \mathbf{C} \to \mathbf{B}$，范畴 $F^*(\mathbf{E})$ 即拉回

$$\begin{array}{ccc} F^*(\mathbf{E}) & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ {\scriptstyle F^*(p)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{B} \end{array}$$

是笛卡尔闭范畴，其指数对象计算为

$$(C,U) \Rightarrow (D,V) \quad := \quad \Big(C \Rightarrow D\,,\ \mathbf{pull}_{\mathrm{ap}}\,(U \Rightarrow V)\Big)$$

其中典范态射

$$\mathrm{ap} \quad : \quad F(C \Rightarrow D) \longrightarrow F(C) \Rightarrow F(D)$$

是将求值态射的像经 $F$柯里化后得到的。此外，函子 $F^*(p)\colon F^*(\mathbf{E}) \to \mathbf{C}$ 是笛卡尔闭。

证明。拉回 $F^*(\mathbf{E})$ 是笛卡尔范畴，且 $F^*(p)\colon F^*(\mathbf{E}) \to \mathbf{C}$ 是笛卡尔函子，这一事实源于 C、B 和 E 都是笛卡尔范畴，并且 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ 和 $p\colon \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ 都是笛卡尔函子。

设 $(C,U)$、$(D,V)$ 和 $(E,W)$ 是 $F^*(\mathbf{E})$ 中的三个对象，且 $f\colon E \times C \to D$ 是 C 中的一个态射。采用类型精化系统的记号，我们证明 $F^*(\mathbf{E})$ 是笛卡尔闭范畴，且 $F^*(p)$ 是笛卡尔闭函子，其中内部同态如陈述中所示：

$$\frac{(E,W) \xrightarrow[\lambda f]{} (C \Rightarrow D, \mathbf{pull}_{\mathrm{ap}}\,(U \Rightarrow V)) \qquad \text{in } F^*(p)}{\dfrac{W \xrightarrow[F(\lambda f)]{} \mathbf{pull}_{\mathrm{ap}}\,(U \Rightarrow V) \qquad \text{in } p}{\dfrac{W \xrightarrow[\mathrm{ap} \circ F(\lambda f)]{} U \Rightarrow V \qquad \text{in } p}{\dfrac{W \times U \xrightarrow[F(f)]{} V \qquad \text{in } p}{W \times U \xrightarrow[f]{} V \qquad \text{in } F^*(p)}}}}$$

其中，在倒数第二步中，我们用到了这样一个事实：

$$\begin{aligned} \mathrm{ap} \circ F(\lambda f) &= \lambda F(\mathrm{ev}) \circ F(\lambda f) \\ &= \lambda\,(F(\mathrm{ev}) \circ (F(\lambda f) \times \mathrm{Id})) \\ &= \lambda\,(F(\mathrm{ev} \circ (\lambda f \times \mathrm{Id}))) \\ &= \lambda F(f) \end{aligned}$$

这证明了 $F^*(\mathbf{E})$是一个笛卡尔闭范畴，且 $F^*(p)$是一个笛卡尔闭函子。□

## 3 $Q$-正则语言的笛卡尔闭双纤维化

我们在引言中回顾过，**Lam** 表示由一个对象自由生成的自由笛卡尔闭范畴$\mathfrak{o}$。其对象是以基类型$\mathfrak{o}$为基础的简单类型，其态射是模去-项的简单类型转换的简单类型-项。

定义 *3.1*。我们将**SubLam** $\to$ **Lam** 记作通过基变换得到的纤维化

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SubLam} & \longrightarrow & \mathbf{SubSet} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbf{Lam} & \xrightarrow[\Lambda_{\beta\eta}]{} & \mathbf{Set} \end{array}$$

更具体地说，范畴**SubLam** 的对象是这些有序对

$$(A, L) \quad \text{where } L \subseteq \Lambda_{\beta\eta}(A)$$

并且，从（$A$, $L$）到（$B$, $K$）的态射是满足以下条件的 $\lambda$-项 $M$：$A \Rightarrow B$对于任意 $\lambda$-项 $N \in L$，我们都有（$M\,N$）$\in K$。

根据定理 2.4，范畴 **SubLam** 是 笛卡尔闭 的，并且函子 **SubLam** $\to$ **Lam** 是一个 笛卡尔闭双纤维化。请注意，这一双纤维化 在给定类型 $A$ 上的对象，恰好是类型为 $L$ 的 $A$高阶语言，此阶段不作正则性的假设。

现在，给定一个对象 $Q$，它位于一个笛卡尔闭范畴S 中，例如S $=$ **FinSet**，我们构造一个双纤维化$\mathbf{Reg}_Q \to \mathbf{Lam}$，它由对象 $Q$在范畴S中识别高阶语言。我们记作

$$[\![-]\!]_Q \quad : \quad \mathbf{Lam} \longrightarrow \mathbf{S}$$

表示唯一的函子（在同构意义下），它保持笛卡尔闭结构，并由方程 $[\![\mathfrak{o}]\!]_Q = Q$ 确定，即使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Lam} & & \\ {\scriptstyle \mathfrak{o}}\uparrow & \searrow^{[\![-]\!]_Q} & \\ 1 & \xrightarrow[Q]{} & \mathbf{C} \end{array}$$

对于任意类型 $A$，我们记作

$$\Lambda_Q(A) \;=\; \Lambda_{\beta\eta}(A)/{\sim_Q}$$

表示 $\Lambda_{\beta\eta}(A)$ 关于由语义解释所诱导的等价关系 $\sim_Q$取商，定义如下：

$$M \sim_Q N \quad \Longleftrightarrow \quad [\![M]\!]_Q = [\![N]\!]_Q.$$

现在，我们可以引入双纤维化，其对象是由给定对象所识别的高阶语言 $Q$，该对象位于一个笛卡尔闭范畴S 中，例如 S $=$ **FinSet**。

定义 *3.2*。设S 是任意一个笛卡尔闭范畴，并且 $Q$ 是S中的一个对象。我们记$\mathbf{Reg}_Q \to \mathbf{Lam}$ 为通过范畴的拉回（亦即双纤维化基变换）所得到的结构：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Reg}_Q & \longrightarrow & \mathbf{SubSet} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbf{Lam} & \xrightarrow[\Lambda_Q]{} & \mathbf{Set} \end{array}$$

范畴**Reg**$_Q$ 的对象是这些对

$$(A, R) \quad \text{where } R \subseteq \Lambda_Q(A)$$

它们对应于语言 $L \subseteq \Lambda_{\beta\eta}(A)$，这些语言是 $\sim_Q$-饱和的，也就是说，对于所有 $M$， $N \in \Lambda_{\beta\eta}(A)$，

$$\text{if } M \in L \text{ and } [\![M]\!]_Q = [\![N]\!]_Q\,, \quad \text{then } N \in L$$

根据定理 2.4，对于 S 中的每个对象 $Q$，

命题 3.3。 函子 $\mathbf{Reg}_Q \to \mathbf{Lam}$ 定义了一个 笛卡尔闭双纤维化 的 $Q$- 正则语言。

我们认为，展示如何将成员资格测试编码为纤维化中的拉回很有启发性，$\mathbf{Reg}_Q \to \mathbf{Lam}$。由于类型1有唯一的闭合 $\lambda$-项，其纤维是布尔代数偏序集

$$\mathbf{Reg}_Q(1) \quad \cong \quad 2 \;:=\; \{0 < 1\}$$

由空语言和全语言组成。对于任意 $\sim_Q$-饱和语言 $L \subseteq \Lambda_Q(A)$，以及一个类型为 $A$ 的 $\lambda$-项 $M$，将其视为一个态射

$M \in \mathbf{Lam}(1<\text{style id='8'}, A)$，拉回

$$\mathbf{pull}_M\,(L) \dashrightarrow L$$

$$1 \xrightarrow{\ M\ } A$$

在 $2 = \mathbf{Reg}_{\mathcal{Q}}(1)$ 中产生布尔值，表示 $\lambda$-项 $M$ 是否属于由 $L$ 定义的语言。

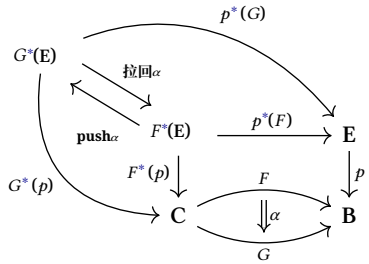
## 4 主要定理：正则语言的笛卡尔闭纤维化

在定理 4.1 中，我们提出了一种新的构造，用以关联同一纤维化的不同 基变换 ，并在定理 4.6 中给出获得派生 纤维化 之间的笛卡尔闭函子的充分条件。

定理 4.1。 设 $p : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ 是一个 双纤维化， $F$、$G : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ 是两个函子，并且 $\alpha : F \Rightarrow G$ 是它们之间的自然变换。存在两个函子

$$\mathbf{pull}_\alpha \quad : \quad G^*(\mathbf{E}) \longrightarrow F^*(\mathbf{E})$$
$$\mathbf{push}_\alpha \quad : \quad F^*(\mathbf{E}) \longrightarrow G^*(\mathbf{E})$$

它们是伴随函子，并且与双纤维化到C通过以下方式获得的基变换相交换：




证明 ．我们定义函子 $\mathbf{pull}_\alpha$ 和 $\mathbf{push}_\alpha$ a s

$$\mathbf{pull}_\alpha\,(C, V) := (C, \mathbf{pull}_{\alpha_C}\,(V))$$
$$\mathbf{push}_\alpha\,(C, U) := (C, \mathbf{push}_{\alpha_C}\,(U))$$

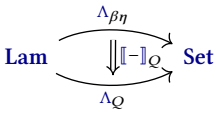
其中（$C$， $U$）是 $F^*(\mathbf{E})$ 的一个对象，而（$C$， $V$）是 $G^*(\mathbf{E})$ 的一个对象。使用类型精化系统中的记号，我们得到：对于任意态射 $f$: $C \to D$ of $\mathbf{C}$,

$$\frac{(C,U) \xrightarrow[f]{} (D, \mathbf{pull}_{\alpha_D}\,V) \qquad \text{in } F^*(p)}{\dfrac{U \xrightarrow[F(f)]{} \mathbf{pull}_{\alpha_D}\,V \qquad \text{in } p}{\dfrac{U \xrightarrow[F(f);\alpha_D]{} V \qquad \text{in } p}{\dfrac{U \xrightarrow[\alpha_C;G(f)]{} V \qquad \text{in } p}{\mathbf{push}_{\alpha_C}\,U \xrightarrow[G(f)]{} V \qquad \text{in } p}}}}$$

$$\mathbf{push}_\alpha\,(C,U) \xrightarrow[f]{} (D,V) \qquad \text{in } G^*(p)$$

这就确立了我们有一个伴随 $\mathbf{push}_\alpha \dashv \mathbf{pull}_\alpha$。 □

现在，假设给定一个 $\mathcal{Q}$ 对象，它属于一个笛卡尔闭范畴 $\mathbf{S}$。对象 $\mathcal{Q}$ 诱导出一个自然变换




定义为一族函数

$$[\![A]\!]_{\mathcal{Q}} \quad : \quad \Lambda_{\beta\eta}(A) \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{Q}}(A)$$

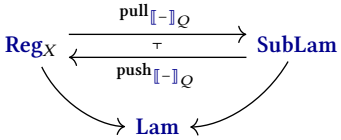
它将每个 $\lambda$-项 $M \in \Lambda_{\beta\eta}(A)$ 映射到商集 $\Lambda_{\mathcal{Q}}(A) = \Lambda_{\beta\eta}(A)/\sim_{\mathcal{Q}}$ 中模 $\sim_{\mathcal{Q}}$ 的等价类。根据定理 4.1，该自然变换导出如下伴随：

$$\mathbf{pull}_{[\![-]\!]_{\mathcal{Q}}}\,(A, R) \quad = \quad (A, \{M \in \Lambda_{\beta\eta}(A) \mid [\![M]\!]_{\mathcal{Q}} \in R\})$$

它对应于由一组识别器生成的 $\lambda$-项语言，而

$$\mathbf{push}_{[\![-]\!]_{\mathcal{Q}}}\,(A, L) \quad = \quad (A, \{[\![M]\!]_{\mathcal{Q}} : M \in L\})$$

它对应于其语言包含 $L$ 的最小 $\mathcal{Q}$-识别器集合。这两个函子构成伴随

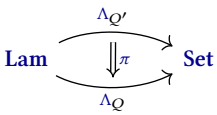



现在我们回顾一下 $\lambda$-演算的集合论解释之间存在自然变换这一结果，该结果通过逻辑关系论证得出，见 [Moreau 2025, Proposition 5.5.2]。

定义 *4.2*。 设 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ 为两个满足 $|\mathcal{Q}'| \geq |\mathcal{Q}|$ 的有限集。对于任意类型 $A$ 和 $\lambda$-项 $M, N \in \Lambda_{\beta\eta}(A)$,

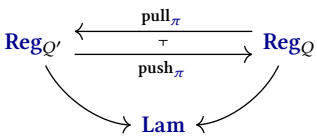
$$\text{if } [\![M]\!]_{\mathcal{Q}'} = [\![N]\!]_{\mathcal{Q}'}, \quad \text{then } [\![M]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![N]\!]_{\mathcal{Q}}$$

这定义了一个自然变换



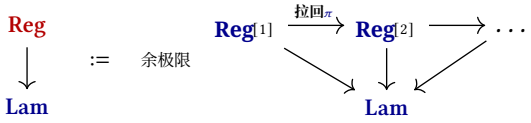

其分量都是满射。

根据定理 4.1，定义 4.2 中的自然变换 $\pi$ 诱导出一个伴随




使得$\mathbf{pull}_\pi$将 $\mathcal{Q}$-可识别语言包含在 $\mathcal{Q}'$-可识别语言中，而$\mathbf{push}_\pi$执行 $\mathcal{Q}$-饱和。通过取由所有包含映射$\mathbf{pull}_\pi$构成的链的余极限，我们由此恢复所有高阶正则语言。

定义 *4.3*。我们考虑纤维化 定义为余极限




在 Lam 上的纤维化范畴中**Lam**。

我们现在想知道，由定理 4.1 得到的右伴随函子何时

$$\mathbf{pull}_\alpha \quad : \quad G^*(E) \longrightarrow F^*(E)$$

在保持笛卡尔积的同时，也保持内部同态，从而成为笛卡尔闭函子。为给出这一点的充分条件，我们引入以下概念。

定义 *4.4.* 设 $p : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ 是一个双纤维化。态射 $f : X \to Y$ 属于 $\mathbf{B}$，称其为反射的，如果伴随

$$\mathbf{E}_X \underset{\mathbf{push}_f}{\overset{\mathbf{pull}_f}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\top}}}} \mathbf{E}_Y$$

是反射的，也就是说，由以下推导得到的余单位

$$\frac{}{\mathbf{pull}_f U \xrightarrow[\mathrm{Id}_X]{} \mathbf{pull}_f U}$$

$$\frac{\mathbf{pull}_f U \xrightarrow[f]{} U}{\mathbf{push}_f \mathbf{pull}_f U \xrightarrow[\mathrm{Id}_Y]{} U}$$

对每个 $U \in \mathbf{E}_Y$ 都是一个同构。

例 *4.5.* 子集 双纤维化 中的 反射态射**SubSet** $\to$ **Set** 是满足以下条件的集合论函数 $f$： $X \to Y$使得

$$\wp(Y) \xrightarrow{f^{-1}} \wp(X) \xrightarrow{f} \wp(Y)$$

是恒等态射，即 $f$是一个满射。

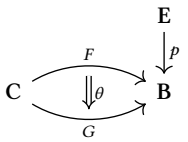
前一个例子的范畴化版本由以下内容给出： 双纤维化 **PSh** $\to$ **Cat** [Melliès and Zeilberger 2018, §3.1], 它为没有满足 Beck-Chevalley 条件的预层超教条 [Lawvere 1970]提供了一种纤维化视角。在这个 双纤维化中， 拉回 通过前复合计算，而推前 通过左 Kan 延拓计算。对于任意范畴 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$，满足以下条件的函子 $F$： $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ 使得

$$\mathbf{PSh}(\mathbf{Y}) \xrightarrow{(-)\circ F} \mathbf{PSh}(\mathbf{X}) \xrightarrow{\mathrm{Lan}_F} \mathbf{PSh}(\mathbf{Y})$$

自然同构于 $\mathbf{PSh}(\mathbf{Y})$上的恒等函子，即 这种 双纤维化中的反射态射称为松弛满态射 [Adámek 等人 2001]。

我们在定义 4.4 中引入了反射态射这一概念，因为它允许我们给出一个充分条件，使定理 4.1 得到的右伴随函子保持内部同态。以下定理阐述了这一结果，其证明用到了 Frobenius 互反原理。

定理 4.6。对于任意一个笛卡尔闭双纤维化 $p$、两个笛卡尔函子 $F$和 $G$，以及一个自然变换 $\theta$： $F \Rightarrow G$，即如下形状的图表




如果自然变换的所有分量 $\theta$ 都是双纤维化 $p$中的反射态射，那么函子

$$\mathbf{pull}_\theta \quad : \quad G^*(\mathbf{E}) \longrightarrow F^*(\mathbf{E})$$

是一个笛卡尔闭函子。

证明。根据反射态射的定义，对于任意对象$(D,\ V)$属于范畴 $G^*(\mathbf{E})$，我们有

$$\mathbf{push}_\alpha \mathbf{pull}_\alpha (D, V) \quad = \quad (D, \mathbf{push}_{\alpha_D} \mathbf{pull}_{\alpha_D} V) \quad \cong \quad (D, V)$$

其中该态射是此伴随的余单位。因此，我们得到伴随

$$G^*(\mathbf{E}) \underset{\mathbf{push}_\alpha}{\overset{\mathbf{pull}_\alpha}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\top}}}} F^*(\mathbf{E})$$

是反射的。由于函子$\mathbf{push}_\alpha$保持笛卡尔积，Frobenius 互反律 [Johnstone 2002, A4.3.1] 推出$\mathbf{pull}_\alpha$是一个笛卡尔闭函子。□

根据定理 4.6，所有右伴随函子

$$\mathbf{pull}_\pi \quad : \quad \mathbf{Reg}_Q \longrightarrow \mathbf{Reg}_{Q'} \qquad \text{for all } |Q'| \geq |Q|$$

是笛卡尔闭的，因此它们的滤余极限是一个笛卡尔闭范畴。事实上，内部同态 $S \Rightarrow T$是在余极限范畴中通过取一个足够大的 $Q'$ 得到的，从而两个对象 $S$和$T$ 都属于同一个笛卡尔闭范畴 $\mathbf{Reg}_{Q'}$，并可在其中计算内部同态。

定理 4.7（定理 C）。函子 $p$： **Reg** $\to$ **Lam** 是一个笛卡尔闭纤维化。

## 5 Stone 空间上的开闭谓词分类纤维化

到目前为止，我们的方法仅通过对纤维化 **SubSet** $\to$ **Set**进行基变换来构造多个纤维化。这个纤维化具有一个泛性质：它对纤维为完备原子布尔代数、且其重指标函子相应地满足条件的纤维化进行分类。然而，我们感兴趣的对象，即在定义 4.3 中作为余极限构造的纤维化 **Reg** $\to$ **Lam**，无法通过从 **SubSet** $\to$ **Set**进行基变换得到，因为它的纤维是原子的布尔代数，但一般而言并不完备。

因此，我们展示另一种构造，它通过受 Stone 对偶启发的、更具拓扑风格的构造来取代纤维化 **SubSet** $\to$ **Set** 。

定义 *5.1*。 我们将 **Clopen** 记作范畴

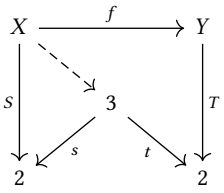
- 其对象是成对的 $(X, S)$Stone 空间 $X$以及一个 *Clopen* 子集 $S \subseteq X$，即由该空间所带拓扑定义的、既开又闭的点集 $X$

- 其态射 $(X,S) \to (Y,T)$ 是连续函数 $f\colon X \to Y$ 使得对任意 $x \in X$，

$$\text{if } x \in S, \quad \text{then } f(x) \in T$$

函子 $(X, S) \mapsto X$ 是一个 纤维化 Clopen $\to$ Stone。

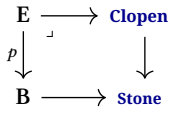
这种纤维化也可以用多种方式构造。其中一种是对 Stone 对偶核心处的开闭函子 Stone $\to \mathrm{BA}^{\mathrm{op}}$ 应用 Grothendieck构造。另一种则是将通常的布尔代数偏序集 $2 := \{0 < 1\}$（视为内化于 FinSet，因而也内化于 Stone）外化。事实上，Clopen 的对象 $(X,S)$ 对应于态射 $S \in \mathrm{Stone}(X, 2)$，而 Clopen 的态射 $f\colon (X,S) \to (Y,T)$ 对应于如下分解：



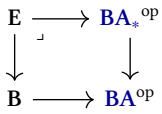

经过离散空间 $3 := \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$，该空间由偏序集 2 中的不等式构成，投影为 $s(b, b') := b$ 和 $t(b, b') := b'$。

现在我们证明，Clopen $\to$ Stone对于布尔代数纤维化具有分类性质。

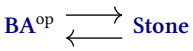
定理 5.2. 若纤维化 $p : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ 的纤维是布尔代数，且其重指标函子是布尔代数同态，则它可以如下通过基变换得到：



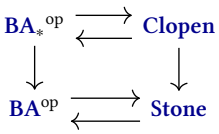

证明。 记 BA 为布尔代数及其同态所成的范畴，并且 $\mathrm{BA}_*$ 为如下范畴：其对象是一个布尔代数与该代数的某个元素组成的配对 $(B, b)$，其态射 $(B,b) \to (B', b')$ 是同态 $u$，满足 $u(b) \le b'$。关于 $p$的假设恰好对应于它可以通过基变换



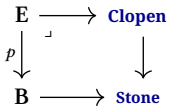

Stone 对偶告诉我们，存在一个伴随等价




它将布尔代数映射到其超滤子的 Stone 空间，并将 Stone 空间映射到其开闭子集构成的布尔代数。我们观察到，这一伴随等价提升为纤维化之间的伴随等价




因此我们得到一个拉回方块




其底函子将$\mathbf{B}$ 中的一个对象 $B$ 映射为 $B$上谓词布尔代数的超滤子空间。□

类似地，纤维化 SubSet $\to$ Set相对于完备原子布尔代数具有分类性质。

鉴于超滤子在模型论意义上是一种类型，因而也是一个模型，我们将定理 5.2 中构造的函子 $\mathbf{B} \to$ Stone 视为将每个对象 $B$ of $\mathbf{B}$ 关联到一个关于 $B$的谓词逻辑的规范模型空间。

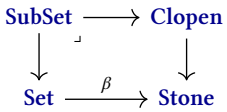
现在，我们已经定义了拓扑纤维化并描述了其分类性质，接下来希望了解哪些态射具有推前。多元空间文献中已研究过这一问题 [van Gool 和 Marquès 2024年，命题 4。7], 具有推前的态射可刻画如下。

命题5.3。 对于任意态射 $f \in \mathrm{Stone}(X, Y)$，以下陈述等价：

(1) 态射 $f$ 存在推前(2) $f$ 的直接像保持开闭子集(3) $f$ 的直接像保持开子集

若这些等价条件成立，我们就称 $f$ 是开映射。

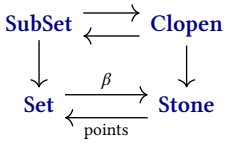
鉴于所有完备原子布尔代数都可以视为普通布尔代数，我们可以将定理 5.2 应用于纤维化 SubSet $\to$ Set 本身。由此得到拉回方块




其中 $\beta\colon$ Set $\to$ Stone 将一个集合映射到其对应离散空间的 Stone–Čech 紧化。事实上，$\beta X$的开闭子集与 $X$的子集相对应。

我们将纤维化 Clopen $\to$ Stone 视为 SubSet $\to$ Set的拓扑细化。本节余下部分将通过展示如何从开闭纤维化推导出子集纤维化的三个关键性质，来阐明这一观点。

**推前**。 第一个涉及这样一个事实：SubSet $\to$ Set是一个双纤维化，也就是说，所有集合论函数都有推前。为了将这一现象与 Stone 空间联系起来，值得注意的是，函子 $\beta\colon$ Set $\to$ Stone 是将空间映射到底层点集的函子的左伴随。由此，我们得到 Melliès and Zeilberger 2018, §2 意义下细化系统之间的一个伴随。 [Melliès和Zeilberger 2018，第2节。2]




该事实的一个推论是，对于任意集合论函数 $f \in \mathrm{Set}(X, Y)$，相应的连续函数 $\beta f \in \mathrm{Stone}(\beta X, \beta Y)$

具有推前，其计算使用 $f$ 的推前，完整的一般性证明见 [Melliès and Zeilberger 2018，命题 2.3]。

因此，尽管 Clopen $\to$ Stone 不是双纤维化，但它包含了我们在 SubSet $\to$ Set 中拥有的所有推前。

**笛卡尔积**。函子 $\beta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Stone}$ 不保留积。然而，作为笛卡尔幺半范畴之间的任意函子，它具有唯一的反松结构 [Melliès 2009, §5.2] 我们将其记为

$$n_{X,Y} \quad : \quad \beta(X \times Y) \longrightarrow \beta X \times \beta Y \qquad \text{for any sets } X \text{ and } Y$$

设 $U$和 $V$是集合 $X$和 $Y$的子集，分别视为空间 $\beta X$和 $\beta Y$中的开闭子集。将它们作为 Clopen 的对象取积，得到空间 $\beta X \times \beta Y$的一个开闭子集，它可以沿反松结构拉回。

$$\mathbf{pull}_{n_{X,Y}}(U \times V) \dashrightarrow U \times V$$

$$\beta(X \times Y) \xrightarrow[n_{X,Y}]{} \beta X \times \beta Y$$

这样，我们恰好恢复了 $U$和 $V$作为 SubSet 对象的笛卡尔积。这表明，SubSet 的笛卡尔结构可以由 Clopen 的笛卡尔结构和反松结构构造而成。

**内部同态**。本理论的一大重要吸引力在于，它将通常针对单词正则语言的理论推广到高阶情形。因此，Clopen $\to$ Stone并非笛卡尔闭纤维化，这一点似乎会阻碍我们的高阶方法。尽管缺乏闭性，纤维化Clopen $\to$ Stone 仍具有简单积，这是纤维化理论中的一项性质，见 [Jacobs 1999，定义 1.9。1] 为方便读者，下面回顾这一性质。

定义 *5.4*。若纤维化 $p : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ 中，$\mathbf{B}$ 是一个笛卡尔范畴，并且对于任意对象 $X$和 $Y$，记 $\pi : X \times Y \to X$为相应的左投影态射，存在一个右伴随函子，则称该纤维化具有简单积

$$\mathbf{pull}_\pi \dashv \mathbf{copush}_\pi$$

并且满足以下 Beck-Chevalley 条件，即对于 $\mathbf{B}$ 中任意态射 $u : Z \to X$，典范自然变换

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}(X \times Y) & \xrightarrow{\mathbf{copush}_\pi} & \mathbf{E}(X) \\ {\scriptstyle \mathbf{pull}_{f \times \mathrm{Id}}}\downarrow & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{pull}_f} \\ \mathbf{E}(Z \times Y) & \xrightarrow[\mathbf{copush}_\pi]{} & \mathbf{E}(Z) \end{array}$$

是一个同构。

投影的一个重要拓扑性质

$$\pi \quad : \quad X \times Y \longrightarrow X$$

Stone 空间之间的投影是开映射，这一点的含义见命题 5。3 [Gehrke and Gool 2024，练习 2.2。2]因此，存在一个左伴随

$$\mathbf{push}_\pi \dashv \mathbf{pull}_\pi$$

并且，鉴于纤维是布尔代数，我们通过通常的公式推得右伴随函子的存在

$$\mathbf{copush}_\pi \quad := \quad \neg \circ \mathbf{push}_\pi \circ \neg$$

并且，由于推前是通过正像计算的，Beck-Chevalley 条件成立。因此，纤维化 Clopen $\to$ Stone 具有简单积。

这个简单事实有着深远的影响，Hermida 在其博士论文中对此进行了研究。特别是，我们可以利用一个接近于 SubSet $\to$Set 的论证，得出它具有简单积的结论： [Hermida 1993，命题 1.4。7]。反过来，基底为闭对象且具有简单积的纤维化本身是笛卡尔闭的 [Hermida 1993，推论 3.3。10]。这表明，纤维化 SubSet $\to$ Set 的笛卡尔闭性质可以从Clopen $\to$ Stone的简单积推导出来。

## 6 使用 profinite $\lambda$-演算的正则语言笛卡尔闭纤维化

近期关于 profinite $\lambda$-演算 [Gool 等人 2023]的研究，最初旨在将 Stone 对偶应用于高阶正则语言，从而开发一种用于识别它们的拓扑方法。论文的核心定义是一个空间 $\widehat{\Lambda}(A)$，对每种类型 $A$，其开闭集与布尔代数 Reg$(A)$中的正则语言自然对应。

所有这些空间构成一个函子

$$\widehat{\Lambda} \quad : \quad \mathbf{Lam} \longrightarrow \mathbf{Stone}$$

而前述关于 Clopen 的观察意味着，我们可以沿着这个函子作基变换，从而得到高阶正则语言的纤维化：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Reg} & \longrightarrow & \mathbf{Clopen} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbf{Lam} & \xrightarrow{\widehat{\Lambda}} & \mathbf{Stone} \end{array}$$

因此，我们能够通过对拓扑纤维化作一次基变换，给出纤维化的第二种定义Reg $\to$ Lam。

为了给出拓扑证明，证明 Reg $\to$ Lam 是一个 笛卡尔闭纤维化，我们使用 Hermida 的博士论文中的以下定理 [Hermida 1993，推论 3。3]。

定理 6.1。若 $p : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ 是一个 纤维化，且具有 简单积，使得 $\mathbf{B}$ 是笛卡尔闭的，并且其每个纤维 $p$ 都是笛卡尔闭的，那么 $\mathbf{E}$ 是笛卡尔闭的，且 $p$ 是一个 笛卡尔闭纤维化。

假设定理 6.1 的条件成立，则 $\mathbf{E}$ 中两个对象 $U \sqsubset X$和 $V \sqsubset Y$ 的内部同态计算如下

$$\mathbf{copush}_\pi \left( \mathbf{pull}_{\pi'}(U) \supset \mathbf{pull}_{\mathrm{ev}}(V) \right) \quad \sqsubset \quad X \Rightarrow Y$$

其中，$\pi : (X \Rightarrow Y) \times X \to X \Rightarrow$和 $\pi' : (X \Rightarrow) \times X \to X$是左、右投影，而 $\supset$是纤维范畴$\mathbf{E}((X \Rightarrow Y) \times X)$的内部同态。

$\widehat{\Lambda}$函子 的一个关键性质（已在 [Moreau 2025，命题 8.1 中证明）8], 是它保持有限积。因此，我们可以推出 Reg $\to$ Lam 具有 简单积，这是基于这样一个事实： Clopen $\to$ Stone 确实 [Hermida1993，命题 1.4。7]。由于对于任意类型 Reg$(A)$ 的纤维都是布尔代数 $A$，因而是笛卡尔闭的，我们可以应用定理 6.1，得到主要定理的另一个拓扑证明。

定理 6.2（定理 C）。函子 $p$： Reg $\to$Lam 是一个笛卡尔闭纤维化。

继第 5 节关于Stone 中允许推前的态射的讨论之后，我们引入如下定义。

定义 *6.3*。 设 $A$ 和 $B$ 是两个类型。一个 $\lambda$-项 $M \in \mathbf{Lam}(A,\ B)$ 是开映射，当且仅当其对应的连续函数

$$\widehat{\Lambda}(M) \quad : \quad \widehat{\Lambda}(A) \longrightarrow \widehat{\Lambda}(B)$$

在由有限型 $\lambda$-项构成的 Stone 空间之间，是一个开函数。

我们回顾一下，根据命题5.3，一个 $\lambda$-项 $M \in \mathbf{Lam}(A,\ B)$ 若通过正像保持正则语言，则它是开映射。我们强调，定义 6.3 中的类型不能进行柯里化。事实上，对于任意一个 $\lambda$-项 $M \in \mathbf{Lam}(A,\ B)$，这些 $\lambda$-项

$$\lambda M \ \in \ \mathbf{Lam}(1, A \Rightarrow B)$$

总是开映射，而 $M$ 本身可能并非开映射，参见第7节中的例子。

我们通过引入另一种纤维化来结束本节；这次转向 Stone 空间揭示出，该纤维化比 **Reg** $\rightarrow$**Lam** 更为基础。正如类型和 $\lambda$-项构成一个笛卡尔闭范畴 **Lam** 一样，类型和有限生成 $\lambda$-项构成一个 **Stone**-富集的笛卡尔闭范畴 **ProLam**，其详细研究见 [Moreau 2025，第 8]章。每个 $\lambda$-项都可以看作一个有限生成 $\lambda$-项这一事实，可表示为一个对象恒等函子

$$\mathbf{Lam} \longrightarrow \mathbf{ProLam}$$

根据 Statman定理，该函子是忠实的 [Statman 1982，第 2][Statman 和 Dowek 2023]。因此，我们将该函子 $\widehat{\Lambda}$分解为复合函子

$$\mathbf{Lam} \longrightarrow \mathbf{ProLam} \xrightarrow{\mathbf{ProLam}(1,-)} \mathbf{Stone}$$

而这又诱导出一个新的笛卡尔闭纤维化 **ProReg** $\rightarrow$**ProLam**，如下面的基变换图表所示

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Reg} & \longrightarrow & \mathbf{ProReg} & \longrightarrow & \mathbf{Clopen} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbf{Lam} & \longrightarrow & \mathbf{ProLam} & \xrightarrow{\mathbf{ProLam}(1,-)} & \mathbf{Stone} \end{array}$$

我们还要指出，定义 6.3 可以直接推广为开有限生成 $\lambda$-项的概念。例如，在有限生成$\lambda$-项 $M \in \mathbf{ProLam}(1, A)$ 中，开项是孤立点，即通常的 $\lambda$-项 $M \in \mathbf{Lam}(1, A)$；根据 Statman定理，它们全都是开映射。这为有限生成量词开启了新的视角。

## 7 将 Brzozowski 导数保守扩展到高阶语言

本节将通过把 Brzozowski 的概念推广到 $\lambda$-演算的高阶情形，展示定理 C（定理4.7）的优势。为此，我们使用 Melliès 和 Zeilberger [Melliès 和 Zeilberger 2018]意义下的一种 Isbell 类似伴随。在有限单词的传统情形中，语言 $L \subseteq \Sigma^*$ 关于一个字母 $a \in \Sigma$ 的左导数和右导数是两个语言

$$\begin{aligned} a\backslash L \quad &:= \quad \{w \in \Sigma^* \mid aw \in L\} \\ L/a \quad &:= \quad \{w \in \Sigma^* \mid wa \in L\} \end{aligned}$$

它们彼此互为逆变伴随。正如引言中所提示的，这一构造可推广到高阶情形，如下所示：

定理 7.1. 设 $A$、$B$ 和 $C$ 是三种类型。对于任意 $\lambda$-项

$$M \quad : \quad A \times B \Rightarrow C$$

和正则语言 $L_C \in \mathbf{Reg}(C)$，我们有一个伴随

$$\mathbf{Reg}(A) \underset{L_C/L_B \ \mapsto\ L_B}{\overset{L_A \ \mapsto\ L_A\backslash L_C}{\rightleftarrows}} \mathbf{Reg}(B)^{op}$$

其中残余定义如下

$$\begin{aligned} L_A\backslash L_C \quad &:= \quad \mathbf{pull}_{\lambda x_B.\lambda x_A.M\ (x_A,x_B)}\ (L_A \Rightarrow L_C) \\ &\qquad \left\{ N_B : B \mid \forall N_A \in L_A,\ we\ have\ M\ (N_A, N_B) \in L_C \right\} \\ L_C/L_B \quad &:= \quad \mathbf{pull}_{\lambda x_A.\lambda x_B.M\ (x_A,x_B)}\ (L_B \Rightarrow L_C) \\ &\qquad \left\{ N_A : A \mid \forall N_B \in L_B,\ we\ have\ M\ (N_A, N_B) \in L_C \right\} \end{aligned}$$

当$A = B = C = \mathrm{Words}_\Sigma$ 时，我们便得到通常意义上的 Brzozowski 导数，而 $M$是 $\lambda$-项

$$\begin{aligned} M \quad &: \quad \mathrm{Words}_\Sigma \Rightarrow \mathrm{Words}_\Sigma \Rightarrow \mathrm{Words}_\Sigma \\ M \quad &:= \quad \lambda u.\lambda v.\lambda \vec{a}.\lambda x.u\ \vec{a}\ (v\ \vec{a}\ x) \end{aligned}$$

其在闭合的 $\lambda$-项上的作用，通过丘奇编码对应于单词的连接。

为了进一步说明这一通用的 Brzozowski 导数，我们现在展示它如何应用于有限有序树（变量共享的情形）。对于任意有序字母表，即有限一阶签名

$$\Sigma \quad := \quad \{a_1 : n_1, \ldots, a_n : n_l\}$$

我们关联如下类型

$$\mathrm{Trees}_\Sigma \quad := \quad (o^{n_1} \Rightarrow o) \times \cdots \times (o^{n_l} \Rightarrow o) \ \Rightarrow \ o$$

其闭合 $\lambda$-项模去 $\beta\eta$-转换后，对应于 $\Sigma$上的有限有序树。对于任意有序字母表 $\Sigma$，我们定义另一个有序字母表

$$\Sigma + 1 \quad := \quad \{a_1 : n_1, \ldots, a_l : n_l, b : 0\}$$

它由 $\Sigma$ 添加一个常量 $b$得到。 $\Sigma + 1$上的每棵有序树都可以看作一个树上下文 $k$，它等待将 $\Sigma$ 上的树 $t$嫁接到常量 $b$上，从而得到 $\Sigma$ 上的另一棵树 $k[t]$。嫁接操作可以定义为如下简单类型的 $\lambda$-项

$$\begin{aligned} M \quad &: \quad \mathrm{Trees}_{\Sigma+1} \Rightarrow \mathrm{Trees}_\Sigma \Rightarrow \mathrm{Trees}_\Sigma \\ M \quad &:= \quad \lambda k.\lambda t.\lambda \vec{a}.k\ (\vec{a}\ ,\ t\ \vec{a}) \end{aligned}$$

注意

$$M(k\ ,\ t\ ) \ \cong_{\beta\eta} \ k[t]$$

根据定理 7.1，任意正则树语言 $L$ 都会诱导一个伴随

$$\mathbf{Reg}(\mathrm{Trees}_{\Sigma+1}) \underset{}{\overset{}{\rightleftarrows}} \mathbf{Reg}(\mathrm{Trees}_\Sigma)^{\mathrm{op}}$$

设给定一个树的正则语言 $L$。每个正则树上下文语言 $K$ 都会诱导出该树的正则语言

$$K\backslash L \quad := \quad \left\{ t : \mathrm{Trees}_\Sigma \mid \forall k \in K, \mathrm{we\ have}\ k[t] \in L \right\}$$

反过来，每个树的正则语言 $L$ 都会导出树上下文的正则语言

$$L/L' \quad := \quad \left\{ k : \mathrm{Trees}_{\Sigma+1} \mid \forall t \in L', \mathrm{we\ have}\ k[t] \in L \right\}$$

## 8 关于开映射的初步观察

本节回到开放性这一概念，该概念在定义 6.3 中引入。我们给出开映射的各种例子和反例 $\lambda$项。我们强调，非开 $\lambda$项的存在是我们方法的一大优势，因为这类$\lambda$项仍然可以拉回正则语言，并使我们能够从更具组合性的视角看待正则语言背后的逻辑结构。

**开映射的例子 $\lambda$-项。** Statman 的有限完备性定理 [Statman 1982，定理 2] [Statman 和 Dowek 2023], 是 $\lambda$-演算有限模型论中的一个结果，在我们的方法中可以赋予几何解释。事实上，这意味着 $\lambda$-项的单元素语言是正则的，这等价于 $\lambda$-项是由有限状态$\lambda$-项构成的空间中的孤立点，也等价于任意一个 $\lambda$-项

$$M \quad \in \quad \mathbf{Lam}(1, A)$$

具有推前。换句话说，所有全局元素都是开映射$\lambda$-项。

纤维化$\mathbf{Reg} \to \mathbf{Lam}$ 具有简单积这一事实意味着投影

$$\pi \quad \in \quad \mathbf{Lam}(A \times B, A)$$

是 开映射 $\lambda$-项。特别地，当 $A$ 是终对象类型 1时，我们得到终态态射 $!_A : \ A \to 1$。投影是 开映射 这一事实意味着我们可以使用由下式计算的存在量词和全称量词:

$$\mathbf{push}_\pi \ , \ \mathbf{copush}_\pi \quad : \quad \mathbf{Reg}(A \times B) \longrightarrow \mathbf{Reg}(A)$$

它们分别是 **拉回**$_\pi$ 的左伴随函子和右伴随。

正如 Bojańczyk、Klin 和 Salamanca 的工作 [Bojańczyk 等人。2023], 所阐明的，满射的逐字母同态通过正像保持正则语言这一事实对单子二阶逻辑至关重要。特别地，字母表上的一个单词

$$\Sigma \times \{0, 1\}^n$$

相当于一个单词及其位置上的 $n$ 谓词，而带有 $n$ 二阶变量的单子二阶逻辑公式定义了该字母表上的单词语言。典范投影

$$\Sigma \times \{0, 1\}^{n+1} \longrightarrow \Sigma \times \{0, 1\}^n$$

诱导出一个幺半群同态

$$(\Sigma \times \{0, 1\}^{n+1})^* \longrightarrow (\Sigma \times \{0, 1\}^n)^*$$

其正像计算单子二阶逻辑中的存在量词。更一般地，每个幺半群同态 $h : \ \Sigma^* \to \Gamma^*$都通过正像保持正则语言，并且可以编码为一个 $\lambda$-项

$$\underline{h} \quad \in \quad \mathbf{Lam}(\mathrm{Words}_\Sigma, \mathrm{Words}_\Gamma)$$

它是开映射。因此，本文所发展的纤维化设定涵盖了正则语言与单子二阶逻辑之间联系的核心常用技术。

**非开映射 $\lambda$项的例子。**正如引言中所解释的，非开映射 $\lambda$项的典型例子是对角线

$$\lambda x.(x, x) \quad \in \quad \mathbf{Lam}(A, A \times A)$$

例如在 $A =$ 自然数的情形下，这会与泵引理相矛盾。按照 Lawvere [Lawvere 1970], 的惯例，相等谓词定义为沿此类对角态射对定义域纤维的终对象进行的推前。在正则语言纤维化中通常无法进行这样的构造，这表明我们需要开发新的范畴工具，以更好地刻画自动机理论所蕴含的丰富逻辑结构。

由于所有全局元素都是开映射，而且有些 $\lambda$-项不是开映射，求值 $\lambda$-项

$$\lambda(f, x).f(x) \quad \in \quad \mathbf{Lam}((A \Rightarrow B) \times A, B)$$

本身并非开映射，否则所有 $\lambda$-项都会有推前，参见 [Melliès and Zeilberger 2018, 定理 3。1]。

## 9 结论与未来工作

本文表明，高阶正则语言类在简单类型 $\lambda$-演算的两个基本构造子——积类型和箭头类型——以及沿 $\lambda$-项的逆像运算下封闭。正如我们在文中所解释的，这相当于构造一个笛卡尔闭纤维化 $p : \ \mathbf{Reg} \to \mathbf{Lam}$，我们通过两种互补的方式完成了这一构造，一种基于纤维化，另一种基于拓扑。利用这个笛卡尔闭纤维化，我们证明了 Brzozowski 导数这一概念可以推广到高阶情形。

作为后续工作，我们希望对 开映射 $\lambda$-项进行完整分类。我们猜想，这一 开放性概念可能与线性有关，正如以下事实所暗示的那样：对角线 $\lambda$-项并非 开映射。这样的分类将为高阶规约逻辑铺平道路；这种逻辑类似于词上的逻辑中的单子二阶逻辑，能够精确描述 $\lambda$-项的正则语言。

## 参考文献


Jiří Adámek、Robert El Bashir、Manuela Sobral 和 Jiří Velebil。2001。关于作为松弛满态射的函子。《范畴理论及其应用》8, 20（2001），509–521。http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/8/n20/8-20abs.html Jorge Almeida。1995。《有限半群与普适代数》。WORLD SCIENTIFIC。arXiv:https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/2481 doi:10.1142/2481 Jorge Almeida、Alfredo Costa、Revekka Kyriakoglou 和 Dominique Perrin。2020年。《有限群与符号动力系统》。Springer International Publishing。doi:10.1007/978-3-030-55215-2 Mikołaj Bojańczyk、Bartek Klin 和 Julian Salamanca。2023年。《单子单子二阶逻辑》。Springer International Publishing, 701–754。doi:10.1007/978-3-031- 24117-8 19_ Ivan Di Liberti。2020年。余密度：Isbell 对偶、pro 对象、紧致性与可达性。《纯粹与应用代数杂志》224, 10（2020），106379。doi:10.1016/j. jpaa.2020.106379 Mai Gehrke 和 Sam van Gool。2024年。《分配格的拓扑对偶：理论与应用》。剑桥大学出版社。Mai Gehrke、Serge Grigorieff 和 Jean-Éric Pin。2008。正则语言的对偶与等式理论。载于《自动机、语言与编程，第*35*届国际学术会议，*ICALP 2008*，雷克雅未克，冰岛，*2008*年7月7日至*11*日，论文集，第二部分——*B*专题：逻辑、语义与编程理论及*C*专题：安全与密码学基础（计算机科学讲义，第*5126*卷）》，Luca Aceto、Ivan Damgård、Leslie Ann Goldberg、Magnús M. Halldórsson、Anna Ingólfsdóttir 和 Igor Walukiewicz（编）。施普林格，246–257。doi:10.1007/978-3-540-70583-3_21 Mai Gehrke、Serge Grigorieff 和 Jean-Éric Pin。2010。一种用于识别的拓扑方法。载于《自动机、语言与编程，第*37*届国际学术会议，*ICALP 2010*，波尔多，法国，*2010*年7月6日至*10*日，论文集，第二部分（计算机科学讲义，第*6199*卷）》，Samson Abramsky、Cyril Gavoille、Claude Kirchner、Friedhelm Meyer auf der Heide 和 Paul G. Spirakis（编）。施普林格，151–162。doi:10.1007/978-3-642-14162-1 13_

Sam van Gool、Paul -André Melliès 和 Vincent Moreau . 2023. Profinite λ - 术语与参数性。《理论信息学与计算机科学电子笔记》第3卷——MFPS XXXIX 会议论文集（2023年11月）。doi:10.46298/entics.12280

亚历山大·格罗滕迪克。1971年。纤维范畴与下降。施普林格，柏林、海德堡，145–194。doi:10.1007/bfb0058662 长谷川正人。1999a。线性逻辑模型的范畴粘合与逻辑谓词。预印本 RIMS-1223。京都大学。http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~hassei/papers/full.pdf。长谷川正人。1999b。直觉主义线性类型理论的逻辑谓词。载于《带类型的 λ 演算及其应用：第四届国际会议 *TLCA'99*，意大利拉奎拉，*1999*年*4*月*7*日至*9*日，论文集》（《计算机科学讲义》，第*1581*卷），让-伊夫·吉拉尔（编）。施普林格，198–212。doi:10.1007/3-540-48959-2_15 Claudio Alberto Hermida。1993年。纤维化、逻辑谓词与不定元。*DAIMI* 报告系列22，462（1993年11月）。doi:10.7146/dpb.v22i462.6935 Gerd G. Hillebrand 和 Paris C. Kanellakis。1996年。论简单类型与 Let-多态 λ 演算的表达能力。载于论文集，第十一届 *IEEE* 计算机科学逻辑年度研讨会，美国新泽西州新不伦瑞克，*1996*年*7*月*27*日至*30*日。IEEE 计算机学会，253–263。doi:10.1109/LICS.1996.561337 B. Jacobs。1999年。范畴逻辑与类型理论。《逻辑与数学基础研究》第141卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹。Peter T. Johnstone。2002年。《大象素描：托扑斯理论概要》。牛津大学出版社。doi:10.1093/oso/9780198515982.001.0001 Shin-ya Katsumata。2013年。通过 ττ-提升关联计算效应。《信息与计算》222（2013年1月），228–246。doi:10.1016/j.ic.2012.10.014 William Lawvere。1970年。超教义中的等式与概括模式作为伴随函子。美国数学会纯数学专题讨论会论文集，第十七卷999（1970），1–14。Paul-André Melliès。2009年。线性逻辑的范畴语义。《全景与综合》第27卷。法国数学会，1–196。Paul-André Melliès 和 Noam Zeilberger。2015年。函子即类型精化系统。载于第四十二届 *ACM SIGPLAN-SIGACT* 编程语言原理年度研讨会论文集（印度孟买）*(POPL '15)*。计算机协会，美国纽约州纽约市，3–16。doi:10.1145/2676726.2676970 Paul-André Melliès 和 Noam Zeilberger。2018年。类型精化系统的伊斯贝尔对偶定理。《计算机科学中的数学结构》28，6（2018），736–774。Vincent Moreau。2025年。高阶自动机的拓扑与纤维化方法。博士论文。巴黎西岱大学。https://theses.hal.science/tel-05428993 Lê Thành Dˇung Nguyˇên。2021年。线性逻辑中的隐式自动机与范畴换能器理论。博士论文。巴黎第十三大学。https://hal.science/tel- 04132636

Lê Thành Dˇung Nguyˇên 和 Cécilia Pradic。2020。类型化 *λ*演算中的隐式自动机 I：非交换逻辑中的周期性。在第*47*届国际自动机、语言与编程研讨会，*ICALP 2020*，*2020*年*7*月*8*日至*11*日，德国萨尔布吕肯（线上会议）（*LIPIcs*，第*168*卷）中，Artur Czumaj、Anuj Dawar 和 Emanuela Merelli（编）。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，135:1– 135:20。doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2020.135 Jean-Éric Pin。2009。自动机理论中的剖分有限方法。在第*26*届国际计算机科学理论方面研讨会（莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*），第*3*卷）中，Susanne Albers 和 Jean-Yves Marion（编）。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，德国达格施图尔，31–50。doi:10.4230/LIPIcs.STACS.2009.1856 Nicholas Pippenger。1997。正则语言与 Stone 对偶。计算系统理论30, 2（1997年4月），121–134。doi:10.1007/bf02679444 Cécilia Pradic 和 Colin Riba。2018。LMSO：通过线性逻辑实现 Church 综合的 Curry–Howard方法。在第*33*届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑年会论文集（*LICS '18*）中。ACM，849–858。doi:10.1145/3209108.3209195 Cécilia Pradic 和 Colin Riba。2019a。Church 综合的 Curry–Howard方法。计算机科学中的逻辑方法第15卷，第4期，文章13（2019年12月）。doi:10.23638/LMCS-15(4:13)2019 Cécilia Pradic 和 Colin Riba。2019b。对无限词上的线性*MSO*的一种类*Dialectica*解释。Springer International Publishing，470–487。doi:10.1007/978-3- 030-17127-8 27_ Colin Riba。2020a。树自动机的幺半闭范畴。计算机科学中的数学结构30, 1（2020年），62–117。doi:10.1017/S0960129519000173 Colin Riba。2020b。树自动机的幺半闭范畴。数学结构与计算机科学30, 1（2020年），62–117。doi:10.1017/S0960129519000173 Sylvain Salvati。2009。简单类型λ演算中的可识别性。在逻辑、语言、信息与计算，第*16*届国际研讨会 *WoLLIC 2009*，东京，日本，*2009*年*6*月*21*日至*24*日。论文集（计算机科学讲义，第*5514*卷）中，Hiroakira Ono、Makoto Kanazawa 和 Ruy J. G. B. de Queiroz（编）。施普林格，48–60。doi:10.1007/978-3-642-02261-6_5 Richard Statman。1982年。完备性、不变性与λ可定义性。符号逻辑杂志47, 1（1982年），17–26。doi:10.2307/2273377 Richard Statman 和 Gilles Dowek。2023年。关于Statman有限完备性定理。doi:10.48550/ARXIV.2309.03602 Sam van Gool 和 Jérémie Marquès。2024年。关于多元空间的对偶与模型论。纯粹与应用逻辑年刊175, 2（2024年2月），103388。doi:10.1016/j. apal.2023.103388

收稿日期：2007年2月20日；修订日期：2009年3月12日；录用日期：2009年6月5日