arXiv:2601.18039v1 [math.RA] 25 Jan 2026

四元组、对应与四面体方程（Summa tetralogiae）

Gleb Koshevoy、Vadim Schechtman 和 Alexander Varchenko

2026年1月27日

《自然是一座神殿》，那里有活的柱子，偶尔会
发出含混的话语；人穿行于象征的森林之中，它
们以熟悉的目光注视着他。

夏尔·波德莱尔，《应和》[1]

1 引言

1.1 ● 本注记的目的是：

(a) 提出从 [S] 及其解推广四面体方程的方法。由于参数数量增加，R-矩阵将由 [S]中的“R-对应”所取代。

(b) 按照[SV]的思想，用朗斯基演化来重新表述这些方程。

(c) 讨论隐藏在我们思考背后的一些具有上同调风格的基本结构。我们称之为“四元组”，或“双扭子”；它们或许本身也颇具独立的研究价值。

1.2 十四行诗方程。 它们是四面体方程的精化版本。为了描述它们，我们需要一些组合学知识，这是 [MS]的一个特例。

范畴 $\mathcal{A}(3,2)$ 和 $\mathcal{A}(4,2)$。考虑带有 Coxeter 生成元 s_1, s_2 的对称群 S_3。其关系为

$$s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$$

和 $s_1^2 = s_2^2 = e$。S_3 中最长元素的约化分解集合 $A(3,2)$ 包含两个元素 $s_1 s_2 s_1, s_2 s_1 s_2$，记作 (121),(212)。

[1] Not可参照这首十四行诗的结构与我们四面体方程的结构之间的相似之处，参见（6.13

范畴 $\mathcal{A}$(3,2) 有两个对象 (121)、(212) 和一个箭头 R: (121) $\longrightarrow$(212)。

考虑对称群 S_4，其 Coxeter 生成元为 s_1, s_2, s_3。其关系为

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},\ i = 1, 2,$$

以及 $s_i^2 = e,\ 1 \leq i \leq 2$。与之前一样，乘积 $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ 记作 $(i_1 \dots i_k)$。令A(4,2) 表示 S_4 中最长元素的所有约化分解组成的集合。例如

$$(121321), (321323) \in A(4, 2).$$

根据定义， $Ob\mathcal{A}(4, 2) = A(4,2)$。总共， $A(4, 2)$ 包含 14 个元素；下面将描述这些元素以及 $\mathcal{A}$(4,2) 中的态射。根据定义，$\mathcal{A}$(4,2) 中的态射是初等箭头的复合。初等箭头有两种类型:

(a) R-型：这类箭头的形式为

$$R(k):\ (\dots i_k i_{k+1} i_{k+2} \dots) \longrightarrow (\dots i'_k i'_{k+1} i'_{k+2} \dots),\ 1 \leq k \leq 4,$$

其中 $(i_k, i_{k+1}, i_{k+2}) = (j, j+1, j)$，且 $(i'_k, i'_{k+1}, i'_{k+2}) = (j+1, j, j+1)$，其中 $j = 1$ 为 2，其他元素保持不变。

例如

$$R(1):\ (121321) \longrightarrow (212321).$$

(b) L型：这些是形如

$$L(k):\ (\dots i_k i_{k+1} \dots) \longrightarrow (\dots i_{k+1} i_k \dots),\ 1 \leq k \leq 5,$$

在其他元素上相同，其中 $(i_k,\ i_{k+1}) = (1,\ 3)$ 或 $(3,\ 1)$。

例如

$$L(3):\ (121321) \longrightarrow (123121).$$

现在我们可以画出 $\mathcal{A}(4,\ 2)$ 中的所有对象，以及几乎所有箭头。

也就是说，有两条由初等箭头组成的链：第一条（上面一条）是

$$(121321) \xrightarrow{R(1)} (212321) \xrightarrow{R(3)} (213231) \xrightarrow{L(2)} (231231) \xrightarrow{L(5)} (231213)$$

$$\xrightarrow{R(3)} (232123) \xrightarrow{R(1)} (323123) \xrightarrow{L(3)} (321323)$$

令 C_+ 表示复合

$$C_+ = L(3)R(1)R(3)L(5)L(2)R(3)R(1):\ (121321) \longrightarrow (321323).$$

第二条（较低的）链是

$$(121321) \xrightarrow{L(3)} (123121) \xrightarrow{R(4)} (123212) \xrightarrow{R(2)} (132312) \xrightarrow{L(4)} (132132)$$

$$\xrightarrow{L(1)} (312132) \xrightarrow{R(2)} (321232) \xrightarrow{R(4)} (321323)$$

令 C_- 表示复合

$$C_- = R(4)R(2)L(1)L(4)R(2)R(4)L(3) : \ (121321) \longrightarrow (321323).$$

我们施加以下关系

$$L(i)^2 = \mathrm{Id}, \ 1 \leq i \leq 5,$$
$$L(i)L(j) = L(j)L(i) \text{ if } |i-j| \geq 2,$$

and

$$C_+ = C_-$$

（十四行诗关系），它可以用符号表示为

$$LRRLLRR = RRLLRRL.$$

如果我们忘掉字母 L，就得到如下形式的方程

$$RRRR = RRRR,$$

四面体关系。

设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴。我们称 $\mathcal{C}$ 中的十四行诗方程为一个函子 $\mathbb{A}: \ \mathcal{A}(4,2) \longrightarrow \mathcal{C}$。因此，它由 14 个对象 $\mathbb{A}(\mathsf{a}) \in Ob\mathcal{C}$组成，其中 $\mathsf{a} \in A(4,2)$，以及 14 个态射 $\mathbb{A}(f) : \mathbb{A}(\mathsf{a}) \longrightarrow \mathbb{A}(\mathsf{a}')$；对每个初等箭头 $f : \mathsf{a} \longrightarrow \mathsf{a}'$，即 $f = R(i)$ 或 $f = L(j)$，给定一个态射，并满足 $\mathbb{A}(L(j))^2 = \mathrm{Id}$，$\mathbb{A}(L(j))\mathbb{A}(L(j')) = \mathbb{A}(L(j'))\mathbb{A}(L(j))$，其中 $|j-j'| > 1$，并且

$$L(3)R(1)R(3)L(5)L(2)R(3)R(1) = R(4)R(2)L(1)L(4)R(2)R(4)L(3) :$$

$$\mathbb{A}(121321) \longrightarrow \mathbb{A}(321323).$$

这里为简便起见，我们用 f 表示 $\mathbb{A}(f)$。

更一般地，对于任意 $n \geq 2$，我们可以类似地定义集合 $A(n, 2)$，它由 S_n 中最长元素的所有约化分解组成；还可以定义范畴 $\mathcal{A}(n, 2)$，参见 [MS]。

1.3 有理对应范畴。在下面的例子中，目标范畴 $\mathcal{C}$ 将是这样一个范畴：其对象为固定基域上的簇，或更一般地为概形，态射则为有理对应。

具体而言，设 X、Y 是两个簇。我们称有理映射 $f: \ X \longrightarrow Y$ 为簇的一个映射 $f_0 : U \longrightarrow Y$，其中 $U \subset X$ 是 X 中的一个稠密 Zariski 开集；若两个映射 f_0: $U \longrightarrow Y$ 和 f_0': $U' \longrightarrow Y$ 在 $U \cap U'$ 上重合，则将它们视为相同。

我们称 f 为良，如果 $f_0(U)$ 包含 Y 中的一个 Zariski 稠密开集。良有理映射可以复合。

X_1 与 X_2 之间的有理对应是一个有理映射

$$P \longrightarrow X_1 \times X_2$$

其分量 p_i： $P \longrightarrow X_i, \quad i = 1, 2$ 都很好。

有理对应可以按照通常的方式进行复合。也就是说，给定另一个对应

$$(q_2, q_3) : \ Q \longrightarrow X_2 \times X_3,$$

令 $R = P \times_{X_2} Q$; 令 $r_1 : \ R \longrightarrow P$, $r_3 : \ R \longrightarrow Q$ 为投影。复合QP: $R \longrightarrow X_1 \times X_3$ 定义为 $(p_1 r_1, q_3 r_3)$。

复合满足结合律，且 Id_X 是对角线 $X \longrightarrow X \times X$。这样我们得到由簇和良有理对应构成的范畴 $\mathcal{V}$。它将成为我们的目标范畴。

1.4 范畴 $\mathcal{B}(n,2)$。

更一般地，对于每个 $n \geq 2$，我们的例子都导出函子 $\mathcal{A}(n,2) \longrightarrow \mathcal{V}$。在 [MS] 中，集合 $B(n,2)$ 被引入为 $A(n,2)$ 的某些商集。例如，$B(4,2)$ 是通过将由 L 变换关联的元素等同，从 $A(4,2)$ 得到的。它包含 8 个元素。我们可以类似于 $\mathcal{A}(n,2)$，定义范畴 $\mathcal{B}(n,2)$，其中 $Ob\mathcal{B}(n,2) = B(n,2)$。

取值于范畴 $\mathcal{C}$ 的四面体方程是一个函子

$$\mathcal{B}(4,2) \longrightarrow \mathcal{C}$$

它具有如下形式

$$RRRR = RRRR$$

我们有典范投影函子

$$\mathcal{A}(4,2) \longrightarrow \mathcal{B}(4,2),$$

并且可以立即看出它是一个范畴等价。因此，四面体方程等价于十四行诗方程。

1.5 ● 我们的例子见第 7 节和第 10 节。其中的空间 $\mathbb{A}$(a)是一些仿射空间 $\mathbb{A}^N$。

1.6 沿约化分解的演化。固定 $n \geq 2$。对于一个矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

并令 $1 \leq i \leq n-1$ let $\phi_i(A)$ 表示该线性变换的 $n \times n$ 矩阵

$$\phi_i(A)(e_i) = ae_i + be_{i+1}, \ \phi_i(A)(e_{i+1}) = ce_i + de_{i+1},$$
$$\phi_i(A)(e_j) = e_j \text{ for } j \neq i, i+1.$$

选取一些 S_n 的 Coxeter 生成元 $s_1, \ldots, s_{n-1}$；令 $w_0 \in S_n$ 为最长元素。对于一个约化分解

$$w_0 = s_{i_1} \ldots s_{i_{c(n)}}, \ c(n) = n(n-1)/2, \tag{1.1}$$

以及一个矩阵集合 $A_k \in Mat_2$，我们赋予矩阵

$$B_k = \phi_{i_1}(A_1)\dots\phi_{i_k}(A_k) \in Mat_n,\ 1 \le k \le c(n).$$

我们将把序列 $B_1, \dots, B_{c(n)}$ 称为沿分解(1.1).的演化。

1.7 c**-上三角版本。 </style}若方阵() -上三角**（或标准 c-Borel），则称其为上三角矩阵，当且仅当 $a_{ij} = 0$ 对 $i < j$成立。我们用 $B_n^c \subset Mat_n$表示 c-上三角矩阵组成的子空间。

事实证明，对于上述每个约化分解，若所有 $A_i \in B_2^c$，则所有$B_i \in B_n^c$。

1.8 朗斯基演化。 另一方面，我们可以将标准的n维仿射空间实现为基域$\mathbf{k}$上的次数为 $\le n-1$ 的多项式$\mathbf{k}[x]_{\le n-1}$所构成的空间；这里假设基域的特征为零。因此，一个 $n \times n$ 矩阵M 等同于一个序列

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(M) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

这样的多项式。我们为$\mathbf{f}$ 指定一个朗斯基行列式序列

$$Wr(\mathbf{f}) := (Wr(f_1), Wr(f_1, f_2), \dots, Wr(f_1, \dots, f_n))$$

令 $B_i, 1 \le i \le c(n)$ 如 1.7 所述，因此得到序列 $\mathbf{f}(B_1)\dots, \mathbf{f}(B_{c(n)})$。在第 13 节中，我们将描述相应的朗斯基行列式序列

$$Wr(\mathbf{f}(B_1)), \dots, Wr(\mathbf{f}(B_{c(n)})).$$

对于通常的上三角情形，这已在 [SV] 中完成。

1.9 ● 四元组／双扭子的形式体系见第 5 节。

1.10 ● 与四面体方程相关的对应已在[IKR]中讨论。

1.11 致谢。 G.K. 感谢高等数学研究所提供热情接待和优越的工作条件。A.V. 的部分研究经费由西蒙斯基金会的 TSM- 00012774 资助。

2 Berenstein-Zelevinsky 变换

2.1 旗标与基。 令 $V = V_{r+1} = \mathbb{C}[x]_{\leq r}$ 表示次数为 $\leq r$ 的复多项式空间。令 Fl_r 表示线性子空间的旗标簇

$$L_\bullet : \ L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_r \subset L_{r+1} = V_{r+1}, \ \dim L_i = i.$$

令 $U \subset Fl_r$ 为一般位置旗标的 Zariski 稠密开子簇。“一般位置”一词的含义如下:

(1) 若 $u_1 = u_1(x) \in L_1$ 是一个基向量，则我们要求 $u_1(0) \neq 0$;

(2) 如上选取 $u_1(x)$; 我们要求存在 $u_2(x) \in L_2$ 使得 u_1, u_2 构成 L_2、$u_2(0) = 0$ 和 $u_2'(0) \neq 0$ 的一组基;

(3) 如上选取 u_1, u_2; 我们要求存在 $u_3(x) \in L_3$ 使得 u_1, u_2, u_3 构成 L_3、$u_3(0) = u_3'(0) = 0$ 和 $u_3''(0) \neq 0$ 的一组基;

etc.

我们也将一般位置的旗标称为容许旗标。

设 $L_\bullet \in U$。存在唯一的集合 $u_\bullet = u_\bullet(L_\bullet) = \{u_1, \ldots, u_r\} \in V$，使得

(a) u_1、.....、u_i 构成 L_i 的一个基;

(b) $u_1(0) = 1$、$u_2 = x + \ldots$、$u_3 = x^2/2 + \ldots$，等等，也就是说 $u_i = x^{i-1}/(i-1)! + \ldots$ 其中.....表示高阶项。

我们将 $u_\bullet$ 称为 $L_\bullet$ 的特定基。

2.2 对角线求和。 更一般地，给定一个集合 $c = \{c_1, \ldots, c_{r+1} \in \mathbb{C}^*\}$，存在唯一的集合 $u_c = \{u_1, \ldots, u_{r+1}\}$，使得

(a) u_1、.....、u_i 构成 L_i的一个基;

(b)$_c$ $u_i = c_i x^{i-1}/(i-1)! \ + \ldots$。

注意， $u_{r+1} = c_r x^r / r!$

2.3 规范化集合与变换 $A_i(a)$。 我们将具有参数 c_1、.....、c_{r+1}、$c_i \in \mathbb{C}^*$ 的集合$\{u_1, \ldots, u_{r+1}\} \subset V$称为规范化集合，当且仅当

$$u_i = c_i x^{i-1}/(i-1)! + \ldots, \ i = 1, \ldots, r+1,$$

其中.....表示高阶项。

我们可以将 V^{r+1} 识别为 $(r+1)\times(r+1)$ 矩阵空间 $M = Mat_{r+1}(\mathbb{C})$；其元素可写成列

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{r+1} \end{pmatrix}$$

令 $U \subset V^{r+1}$ 表示所有标准化集合构成的簇。它可以与 $GL_{r+1}(\mathbb{C})$ 的标准上三角 Borel 子群相识别。

对于 $a \in \mathbb{C}^*$，令

$$A(a) = \begin{pmatrix} a^{-1} & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

定义算子 $A_i(a)$: $M \longrightarrow M$，如下:

$$A_i(a)\begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \cdots \\ u_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ a^{-1}u_i + u_{i+1} \\ au_{i+1} \\ \cdots \\ u_{r+1} \end{pmatrix},$$

$i = 1, \ldots\ldots, r$，参见 [BZ] (4.9)。

我们看到, $A_i(U) \subset U$。

2.4 定理（辫子关系），参见 [BZ], （5.2）。我们有

$$A_1(c)A_2(b)A_1(a) = A_2(c')A_1(b')A_2(a')$$

其中

$$a' = \frac{bc}{ac+b},\ b' = ac,\ c' = \frac{ac+b}{c}.$$

□

3 朗斯基行列式与过渡映射

3.1 朗斯基行列式。对于序列 $u = (u_1(x), \ldots, u_i(x))$ $u_j(x) \in \mathbb{C}[x]$, 定义朗斯基矩阵

$$\mathcal{W}r(u_1, \ldots, u_i) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_i \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_i' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_1^{(i-1)} & u_2^{(i-1)} & \ldots & u_i^{(i-1)} \end{pmatrix},$$

并令 $Wr(u) = Wr(u_1, \ldots, u_i)$ 表示其行列式。

例如

$$\mathcal{W}r(1, x, x^2/2, \ldots, x^{i-1}/(i-1)!)$$

是一个对角线上元素均为 1 的上三角矩阵，因此

$$Wr(1, x, x^2/2, \ldots, x^{i-1}/(i-1)!) = 1.$$

另一方面

$$\mathcal{W}r\left(1, x, \frac{x^2}{2}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}, \frac{x^{i+1}}{(i+1)!}\right)$$

是一个对角部分为 $Diag(1、\ldots\ldots、1,\ x)$ 的上三角矩阵，因此

$$Wr\left(1, x, \frac{x^2}{2}, \ldots, \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}, \frac{x^{i+1}}{(i+1)!}\right) = x.$$

3.2 标准化集合的朗斯基行列式。 设 $u = (u_1、\ldots\ldots、\ u_{r+1})$ 是一个参数为 $\{c_i\}$的标准化集合。记

$$f_i(x) := Wr(u_1, \ldots, u_i)$$

and

$$Wr(u) := (f_1, \ldots, f_{r+1}).$$

我们有

$$f_i(x) = c_1 \cdot \ldots \cdot c_i + O(x).$$

记

$$a_i := \prod_{j=1}^{i} c_j.$$

我们有

$$\frac{a_{i-1}a_{i+1}}{a_i} = \left(\prod_{j=1}^{i-1} c_j\right) c_{i+1}.$$

3.3 命题。 我们有

$$Wr(A_i(a)u) = (f_1, \ldots, f_{i-1}, a^{-1}f_i + \frac{a_{i-1}a_{i+1}}{a_i}x + O(x^2), af_{i+1}, f_{i+2}, \ldots, f_{r+1}).$$

3.4 朗斯基演化 我们可以沿相反方向进行。考虑一个簇

$$W = W_{r+1} = \{f = (f_1, \ldots, f_{r+1}),\ f_j \in \mathbb{C}[x], f_j(0) \neq 0,\ 1 \leq j \leq r+1\}.$$

我们已经定义了朗斯基映射

$$Wr:\ U \longrightarrow W.$$

$\widehat{}$令 $f \in W$, $f_j(0) = a_j$。微分方程存在唯一解 f_i

$$Wr(f_i, \widehat{f_i}) = f_{i-1}f_{i+1}$$

形式为

$$\widehat{f_i} = \frac{a_{i-1}a_{i+1}}{a_i}x + O(x^2).$$

对于 $a \in \mathbb{C}^*$，记作

$$\widetilde{f_i} = a^{-1}f_i + \widehat{f_i}$$

并定义

$$A_i(a)f = (f_1, \ldots, f_{i-1}, \widetilde{f_i}, af_{i+1}, f_{i+2}, \ldots, f_{t+1}).$$

3.5 定理 对于 $u \in U$

$$Wr(A_i(a)u) = A_i(a)Wr(u).$$

参见 [SV],定理 4.4, (4.8.1)。

3.6 例子 让我们从.....开始

$$u = (1, x, \frac{x^2}{2}, \ldots, \frac{x^r}{r!}),$$

so

$$f := Wr(u) = (1, 1, \ldots, 1).$$

Then

$$A_2(a)u = (1, x, a^{-1}x + \frac{x^2}{2}, \frac{ax^2}{2}, \frac{x^3}{3!}, \ldots, \frac{x^r}{r!}),$$

and

$$A_2(a)f = (1, a^{-1} + x, a, 1, \ldots, 1).$$

接下来,

$$A_1(b)A_2(a)u = (b^{-1} + a^{-1}x + \frac{x^2}{2}, b(a^{-1}x + \frac{x^2}{2}), \frac{ax^2}{2}, \frac{x^3}{3!}, \ldots, \frac{x^r}{r!}),$$

and

$$A_1(b)A_2(a)f = (b^{-1} + a^{-1}x + \frac{x^2}{2}, b(a^{-1} + x), a, 1, \ldots, 1).$$

4 Sergeev（α）作为朗斯基演化

.

4.1 $SL_n(\mathbb{C})$**恒等式。** 对于 $1 \le i,\ j \le n$, $i \ne j$，我们用 $e_{ij}^a \in SL_n(\mathbb{C})$ 表示矩阵 $I_n + ae'_{ij}$，其中 e'_{ij} 是一个矩阵，其第 i 行、第 j 列为 1，其余位置均为 0，参见 [M], §5。我们有

$$(e_{ij}^a)^{-1} = e_{ij}^{-a},$$

and

$$[e_{ij}^a, e_{jk}^b] := e_{ij}^a e_{jk}^b e_{ij}^{-a} e_{jk}^{-b} = e_{ik}^{ab}$$

如果 $i \ne k$。例如

$$[e_{12}^a, e_{23}^b] = e_{13}^{ab}.$$

这些恒等式使我们能够定义朗斯基演化。

4.2 三元组演化。 记

$$A(a) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

并令 $A_i(a)$ 表示作用于第 i 行、第 $(i+1)$ 行及相应列上为 $A(a)$、其他位置为单位矩阵的 $(n \times n)$ 分块矩阵。我们有

$$A_1(a)A_2(b) = \begin{pmatrix} a & -b & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意，如果交换上述矩阵的最后两行，我们将得到一个关于副对角线为上三角的矩阵。

我们有

$$A_1(a)A_2(b)A_1(c) = \begin{pmatrix} ac-b & -a & 1 \\ c & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 记号。 令 $I(m)$ 表示元素为 $d_{ij} = 1$ if$i + j = m + 1$，其他位置为 0 的 $(m \times m)$ 矩阵。

4.4 三重演化（续）。 令 $u_i(x) \in \mathbb{C}[x]$, $i = 1,\ 2,\ 3$,

$$u = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2/2 + \dots \\ x + \dots \\ 1 + \dots \end{pmatrix}.$$

我们有

$$u = I(3) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

我们有

$$A_1(a)A_2(b)A_1(c)u = \begin{pmatrix} (ac-b)u_3 - au_2 + u_1 \\ cu_3 - u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \dots \\ -x + \dots \\ x^2/2 + \dots \end{pmatrix}.$$

这种演化对应于分解

$$w_0 = s_1 s_2 s_1$$

$S(3)$ 中最长元素的

4.5 一种四重演化。 同样考虑分解

$$w_0 = s_1(s_2 s_1)(s_3 s_2 s_1)$$

$S(4)$ 中最长元素的。相应的 $SL(4)$ 中的乘积将是

$$A(a, b, c) := A_1(a)A_2(b)A_1(a)A_3(c)A_2(b)A_1(a).$$

它是一个相对于副对角线的上三角矩阵，副对角线上为 ± 1。因此

$$A(a, b, c) \begin{pmatrix} u_4 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 + \dots \\ \pm x + \dots \\ \pm x^2/2 + \dots \\ \pm x^3/6 + \dots \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

5 四元演算

生存还是毁灭?

哈姆雷特

5.1 一些术语和记号。 基环 $\mathbb{C}$ 将是复数域，或更一般地说，是任意交换环。在朗斯基行列式章节中，我们将假定它包含 $\mathbb{Q}$。

$(n \times n)$-矩阵所构成的空间将记为 $Mat_n = Mat_n(\mathbb{C})$； $I_n \in Mat_n$ 将表示单位矩阵。

如果方阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = 0$（对于 $i > j$）（分别满足 $i < j$），则称其为上三角（分别为下三角）矩阵。对角线上元素均为可逆元素的上三角（分别为下三角）$(n \times n)$-矩阵所成的群记为 $B_+(n)$（分别为 $B_-(n)$）。对角线上元素均为 1 的矩阵所成的子群记为 $N_+(n)$ $N_-(n)$。

设 $A = (a_{ij})$ 为一个（$n \times n$）矩阵。其副对角线是由满足 $i + j = n + 1$ 的元素 a_{ij} 组成的集合。我们将用 $B^c_+(n)$（分别用 $B^c_-(n)$）表示仅在副对角线上方（分别在副对角线下方）或副对角线上具有非零元素，且副对角线上的元素为可逆元素的矩阵集合。 $B^c_+(n)$（分别为 $B^c_-(n)$）中的元素称为 c-上（分别为 c-下）三角矩阵。

我们将用 $N_{\pm}^{c}(n) \subset B_{\pm}^{c}(n)$ 表示副对角线上元素均为 1 的矩阵子集； $I(n)$ 表示副对角线上元素均为 1、其余位置均为零的矩阵。

因此 $N_{+}^{c}(n) \cap N_{-}^{c}(n) = \{I(n)\}$。

我们有一个单射群同态

$$\iota : S(n) \longrightarrow Mat_n$$

将 $w \in S(n)$ 映射到相应的置换矩阵。
因此 $I(n) = \iota(w_0(n))$，其中 $w_0(n)$ 是 $S(n)$ 的最长元素。
$e(n)$ 表示 $S(n)$ 的单位元。

如果 $A \in Mat_n$，那么我们将算子 $L_A(B) = AB$（或 $R_A(B) = BA$）记作 L_A: $Mat_n \longrightarrow Mat_n$（或 R_A: $Mat_n \longrightarrow Mat_n$）。

5.2 一些矩阵恒等式。 (1) $w_0(n)^2 = e(n)$，因此 $I(n)^2 = I_n$，所以 $L_{I(n)}^2 = R_{I(n)^2} = \mathrm{Id}_{Mat_n}$。

(2) 若 $A \in Mat_n$，则 $I(n)A$（或 $AI(n)$）是将行的顺序（或列的顺序）反转后的结果。

5.3 四元性。 算子 $L = L_{I(n)}, R = R_{I(n)}$ 诱导出四个双射，它们构成一个称为 B-四元性的正方形，参见 [J][2]

$$\begin{array}{ccc} B_{+} & \xrightarrow{L} & B_{-}^{c} \\ R\uparrow & & \downarrow R \\ B_{+}^{c} & \xleftarrow{L} & B_{-} \end{array} \tag{5.1}$$

从任意位置开始，四者依次复合的结果都是单位矩阵。

类似地，我们定义 N-四元性，其中字母 B 替换为 N。

5.4 作用。 上述算子定义了群 B_{+}（或 B_{-}）从左侧（或从右侧）对集合 B_{-}^{c} 的作用。具体而言，对于 $x \in B_{+}, y \in B_{-}^{c}, z \in B_{-}$，我们规定

$$xy := L(xL^{-1}(y)),\ yz := R(R^{-1}(y)z).$$

这两个作用彼此可交换，并且 B_{-}^{c} 是左 B_{+}-扭子，也是右 B_{-}-扭子。
换言之， B_{-}^{c} 是一个（B_{+}， B_{-}）-双扭子，其含义见 [Gi], D´efinition 1.5.3 .

同理，B_{+}^{c} 是一个（B_{-}， B_{+}）-双扭子。

整个四元图（5.1）可以称为双双扭子。

同理，将 B 替换为 N。

[2]四元性：具有四重结构的图像，通常呈方形或圆形且对称；在心理学上，它指向完整性的概念（卡尔·荣格）。

6 R-对应与四面体方程（c-上三角情形）

6.1 ●对于 $A \in Mat_2$和 $1 \le i \le n-1$，我们用 $A_i \in Mat_n$表示分块矩阵：它在第 i行、第（$i+1$）行及相应的列上作用为 A，在其他位置则作用为单位矩阵。

例如，若 $n = 3$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

6.2 二重积和三重积。我们记作

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有

$$A(a_1,b_1,c_1)_1 A(a_2,b_2,c_2)_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1a_2 & b_1b_2 \\ c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

注意，在最后一个矩阵中，如果交换第二行和第三行，或交换第一列和第二列，就会得到 $B^c_+(3)$ 的一个元素。

接下来我们有

$$A(a_1,b_1,c_1)_1 A(a_2,b_2,c_2)_2 A(a_3,b_3,c_3)_1 = \begin{pmatrix} a_1a_3 + b_1a_2c_3 & a_1b_3 & b_1b_2 \\ c_1a_3 & c_1b_3 & 0 \\ c_2c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面

$$A(a_1,b_1,c_1)_2 A(a_2,b_2,c_2)_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ a_1c_2 & 0 & b_1 \\ c_1c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

交换第二列与第三列，或第一行与第二行后，它将变为 c-上三角。

Next

$$A(a_1,b_1,c_1)_2 A(a_2,b_2,c_2)_1 A(a_3,b_3,c_3)_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2a_3 & b_2b_3 \\ a_1c_2 & b_1c_3 & 0 \\ c_1c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.3 R-对应。 R-对应是一个子簇

$$R \subset \mathbb{A}^9 \times \mathbb{A}^9.$$

若将 $\mathbb{A}^9 \times \mathbb{A}^9$ 中的坐标记为 $(a_1, \ldots, c_3; a'_1, \ldots, c'_3)$，那么 R 由下列方程给出

$$A(a_1,b_1,c_1)_1 A(a_2,b_2,c_2)_2 A(a_3,b_3,c_3)_1 = A(a'_1,b'_1,c'_1)_2 A(a'_2,b'_2,c'_2)_1 A(a'_3,b'_3,c'_3)_2. \tag{6.3}$$

具体而言，这个方程等价于六个方程

$$a_1a_3 + a_2b_1c_3 = a'_2 \tag{6.4}$$

$$a_1b_3 = b'_2a'_3 \tag{6.5}$$

$$b_1b_2 = b'_2b'_3 \tag{6.6}$$

$$c_1a_3 = a'_1c'_2 \tag{6.7}$$

$$c_2c_3 = c'_1c'_2 \tag{6.8}$$

$$c_1b_3 = b'_1c'_3 \tag{6.9}$$

6.4 R**的参数化。**我们暂且忽略 a_2， a'_2。剩余的 16 个变量

$$(a_1, b_1, c_1, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3; a'_1, b'_1, c'_1, b'_2, c'_2, a'_3, b'_3, c'_3)$$

由 5 个方程 (6.5) - (6.9) 联系起来。这些方程中有两对：(6.5) - (6.6) 和 (6.7) - (6.8)。

如果我们在每一对 (a'_1， c'_1)、(a'_3， b'_3)、(b'_1， c'_3) 中各选一个变量，例如 a'_1， a'_3， b'_1，那么根据我们的方程，其余带撇号的变量便可唯一确定（处于一般位置时，也就是说，在一个 Zariski 稠密子簇上）。

例如，若我们选择 a'_1， a'_3， b'_1 作为自由参数，那么

$$c'_1 = c_2c_3/(a_3c_1) \cdot a'_1,\ b'_2 = a_1b_3/a'_3,\ c'_2 = a_3c_1/a'_1, \tag{6.10}$$

$$b'_3 = b_1b_2/(a_1b_3) \cdot a'_3,\ c'_3 = b_3c_1/b'_1. \tag{6.11}$$

因此， R 是一个 12 维有理子簇（即与 $\mathbb{A}^{12}$ 双有理同构），属于$\mathbb{A}^9 \times \mathbb{A}^9$ （“一个胞腔”）。

6.5 对应的复合。我们将一个对应$R \subset X \times Y$记作

$$X \xrightarrow{R} Y.$$

设 $R \subset X \times Y$、 $S \subset Y \times Z$是两个对应。它们的复合 $SR \subset X \times Z$定义为

$$SR = p_{13}(R \times_Y S)$$

其中 $R \times_Y S \subset X \times Y \times Z$和 p_{13}： $X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Z$是投影。换言之

$$SR = \{(x, z) \in X \times Z |\ \exists y \in Y \text{such that} (x, y) \in R, (y, z) \in S\},$$

参见 [CG], 2.7.5。

复合满足结合律。

由此我们得到一个范畴，记为 $Corr$，其对象是簇，态射是对应。单位矩阵 Id_X 是对角线 $\Delta \subset X \times X$。

6.6 四面体方程。 它们与 $w_0(4) \in S(4)$ 的约化分解相关。这类分解的集合包含 14 个元素；它是与 [MS] 中第二个 Bruhat序相关的集合 $A(4,\ 2)$。可在 [SV], (8.10) 中找到它们。

这个方程表示 $\mathbb{A}^{18} \times \mathbb{A}^{18}$ 中两个对应相等。有 8 个 R 型翻转和 6 个 L 型翻转，如 [SV], (8.14) 中所示；该方程的形式与 [SV], 8.2.3 中的 (8.16) 相同。

6.7 问题：两种方式是否得到相同结果？ 让我们看看图表是否

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{A}(212321) & \xrightarrow{\mathbf{R}(3)} & \mathbb{A}(213231) & \xrightarrow{\mathbf{L}(2)} & \mathbb{A}(231231) & \xrightarrow{\mathbf{L}(5)} & \mathbb{A}(231213) & \xrightarrow{\mathbf{R}(3)} & \mathbb{A}(232123) \\
\mathbf{R}(1)\uparrow & & & & & & & & \downarrow \mathbf{R}(1) \\
\mathbb{A}(121321) & & & & & & & & \mathbb{A}(323123) \\
\mathbf{L}(3)\downarrow & & & & & & & & \downarrow \mathbf{L}(3) \\
\mathbb{A}(123121) & & & & & & & & \mathbb{A}(321323) \\
\mathbf{R}(4)\downarrow & & & & & & & & \uparrow \mathbf{R}(4) \\
\mathbb{A}(123212) & \xrightarrow{\mathbf{R}(2)} & \mathbb{A}(132312) & \xrightarrow{\mathbf{L}(4)} & \mathbb{A}(132132) & \xrightarrow{\mathbf{L}(1)} & \mathbb{A}(312132) & \xrightarrow{\mathbf{R}(2)} & \mathbb{A}(321232)
\end{array} \tag{6.12}$$

在 $Corr$ 中双有理地交换。

换句话说，以下命题是否成立：

$$\mathbf{L}(3)\mathbf{R}(1)\mathbf{R}(3)\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2)\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1) \cong \mathbf{R}(4)\mathbf{R}(2)\mathbf{L}(1)\mathbf{L}(4)\mathbf{R}(2)\mathbf{R}(4)\mathbf{L}(3) \tag{6.13}$$

其中 $\cong$ 表示 Zariski稠密子空间相等?

这里的符号 $\mathbb{A}(k_1k_2k_3k_4k_5k_6)$ 表示 $\mathbb{A}^{18}$ 的副本。
$\mathbf{L}(i)$ 是函数图像

$$(a_i, b_i, c_i, a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}) \mapsto (a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, a_i, b_i, c_i)$$

在其他坐标上也相同。

在本节余下部分，我们将计算 (6.13) 的左边和右边。

6.8 记号。 将上方路径中的空间记为

$$\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}(121321), \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}(212321), \mathbb{A}_3 = \mathbb{A}(213231), \mathbb{A}_4 = \mathbb{A}(231231),$$

$$\mathbb{A}_5 = \mathbb{A}(231213), \mathbb{A}_6 = \mathbb{A}(232123), \mathbb{A}_7 = \mathbb{A}(323123), \mathbb{A}_8 = \mathbb{A}(321323),$$

而下方路径中的那些则为

$$\mathbb{B}_0 = \mathbb{A}_1 = \mathbb{A}(121321), \mathbb{B}_1 = \mathbb{A}(123121), \mathbb{B}_2 = \mathbb{A}(123212), \mathbb{B}_3 = \mathbb{A}(132312),$$

$$\mathbb{B}_4 = \mathbb{A}(132132), \mathbb{B}_5 = \mathbb{A}(312132), \mathbb{B}_6 = \mathbb{A}(321232), \mathbb{B}_7 = \mathbb{A}_8 = \mathbb{A}(321323).$$

(a)左侧胞腔（上方路径）

6.9 上方路径。 为简便起见，将 $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_8$ 中的坐标分别记为

$$(a_1, \ldots, c_6), (a_1', \ldots, c_6'), (a_1'', \ldots, c_6''), (a_1''', \ldots, c_6'''),$$
$$(a_1^{iv}, \ldots, c_6^{iv}), (a_1^{v}, \ldots, c_6^{v}), (a_1^{vi}, \ldots, c_6^{vi}), (a_1^{vii}, \ldots, c_6^{vii})$$

。

6.10 R(1)。 我们从

$$\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\mathbf{R}(1)} \mathbb{A}_2.$$

对应

$$\mathbf{R}(1) = R \times \mathrm{Id} \subset \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$$

由 $6 + 9 = 15$ 个方程给出：关于 9 个变量 $a_1, \ldots, c_3'$ 的六个方程 (6.4) - (6.9)，以及关于其余 9 个变量 $a_4, \ldots, c_6'$ 的 9 个方程：

$$a_4 = a_4', b_4 = b_4', \ldots c_6 = c_6'. \tag{6.14}$$

因此 **R(1)** 是一个维数为 $21 = 36 - 15$ 的胞腔。其中的自由坐标为

$$a_1, \ldots, c_6, a_1', a_3', b_1',$$

而其余变量正在被

$$c_1' = a_1' c_2 c_3/(a_3 c_1) \tag{6.15}$$

$$a_2' = a_1 a_3 + a_2 b_1 c_3 \tag{6.16}$$

$$b_2' = a_1 b_3/a_3' \tag{6.17}$$

$$c_2' = a_3 c_1/a_1' \tag{6.18}$$

$$b_3' = a_3' b_1 b_2/(a_1 b_3) \tag{6.19}$$

$$c_3' = b_3 c_1/b_1' \tag{6.20}$$

and

$$a_4' = a_4, \ldots, c_6' = c_6 \tag{6.21}$$

6.11 $\mathbf{R}(3)$。 接下来,

$$\mathbb{A}_2 \xrightarrow{\mathbf{R}(3)} \mathbb{A}_3, \mathbf{R}(3) \subset \mathbb{A}_2 \times \mathbb{A}_3.$$

这是一个维数为 21 的胞腔。其自由坐标为

$$a'_1, \dots, c'_6, a''_3, a''_5, b''_3,$$

它作用于第三、第四和第五个三元组中。

因此，剩下的坐标正在被

$$a''_1 = a'_1, \dots, c''_2 = c'_2 \tag{6.22}$$

and

$$c''_3 = a''_3 c'_4 c'_5 / (a'_5 c'_3) \tag{6.23}$$

$$a''_4 = a'_3 a'_5 + a'_4 b'_3 c'_5 \tag{6.24}$$

$$b''_4 = a'_3 b'_5 / a''_5 \tag{6.25}$$

$$c''_4 = a'_5 c'_3 / a''_3 \tag{6.26}$$

$$b''_5 = a''_5 b'_3 b'_4 / (a'_3 b'_5) \tag{6.27}$$

$$c''_5 = b'_5 c'_3 / b''_3 \tag{6.28}$$

and

$$a''_6 = a'_6, b''_6 = b'_6, c''_6 = c'_6 \tag{6.29}$$

6.12 $\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1)$. 现在让我们计算复合

$$\mathbb{A}(121321) \xrightarrow{\mathbf{R}(1)} \mathbb{A}(212321) \xrightarrow{\mathbf{R}(3)} \mathbb{A}(213231).$$

我们从纤维积开始

$$R' := \mathbf{R}(1) \times_{\mathbb{A}_2} \mathbf{R}(3) \subset \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times \mathbb{A}_3.$$

它由以下方程给出

$$A(a_1, b_1, c_1)_1 A(a_2, b_2, c_2)_2 A(a_3, b_3, c_3)_1 = A(a'_1, b'_1, c'_1)_2 A(a'_2, b'_2, c'_2)_1 A(a'_3, b'_3, c'_3)_2. \tag{6.30}$$

and

$$A(a'_3, b'_3, c'_3)_2 A(a'_4, b'_4, c'_4)_3 A(a'_5, b'_5, c'_5)_2 = A(a''_3, b''_3, c''_3)_3 A(a''_4, b''_4, c''_4)_2 A(a''_5, b''_5, c''_5)_3 \tag{6.31}$$

即 12 个方程:

$$a_1 a_3 + a_2 b_1 c_3 = a'_2 \tag{6.32}$$

$$a_1 b_3 = b'_2 a'_3 \tag{6.33}$$

$$b_1 b_2 = b'_2 b'_3 \tag{6.34}$$

$$c_1 a_3 = a'_1 c'_2 \tag{6.35}$$

$$c_2 c_3 = c'_1 c'_2 \tag{6.36}$$

$$c_1 b_3 = b_1' c_3', \tag{6.37}$$

and

$$a_3' a_5' + a_4' b_3' c_5' = a_4'' \tag{6.38}$$

$$a_3' b_5' = b_4'' a_5'' \tag{6.39}$$

$$b_3' b_4' = b_4'' b_5'' \tag{6.40}$$

$$c_3' a_5' = a_3'' c_4'' \tag{6.41}$$

$$c_4' c_5' = c_3'' c_4'' \tag{6.42}$$

$$c_3' b_5' = b_3'' c_5'' \tag{6.43}$$

以及 18 个简单方程

$$a_4 = a_4', \ldots, c_6 = c_6'; \tag{6.44}$$

and

$$a_1' = a_1'', \ldots, c_2' = c_2'', \ a_6' = a_6'', b_6' = b_6'', c_6' = c_6'' \tag{6.45}$$

这使得总共有 $12+18 = 30$ 个方程，因此我们预期 R' 的维数为 $54 - 30 = 24$。

让我们用参数化来看看。 R' 中的自由变量（坐标）为

$$a_1, \ldots, c_6, a_1', a_3', b_1', a_3'', a_5'', b_3''$$

这使得 $18 + 3 + 3 = 24$。因此，确实， R' 是一个维数为 24 的胞腔。

根据定义

$$\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1) = p_{13}(\mathbf{R}(1) \times_{\mathbb{A}_2} \mathbf{R}(3)) \subset \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_3.$$

取投影 p_{13} ，我们推得 **R(3)R(1)** 将是一个维数为 $24 = 18 + 3 + 3$ 、坐标为以下内容的胞腔

$$a_1, \ldots, c_6, a_1', a_3', b_1', a_3'', a_5'', b_3''.$$

这与**R(1)**类似，但其余变量的公式会更加复杂。具体如下:

$$a_1'' = a_1', \ b_1'' = b_1', \ c_1'' = \frac{a_1' c_2 c_3}{a_3 c_1} \tag{6.46}$$

$$a_2'' = a_1 a_3 + a_2 b_1 c_3 \tag{6.47}$$

$$b_2'' = \frac{a_1 b_3}{a_3'}, \ c_2'' = \frac{a_3 c_1}{a_1'} \tag{6.48}$$

$$c_3'' = \frac{a_3'' b_1' c_4 c_5}{a_5 b_3 c_1} \tag{6.49}$$

$$a_4'' = a_3' a_5 + \frac{a_3' a_4 b_1 b_2 c_5}{a_1 b_3} \tag{6.50}$$

$$b_4'' = \frac{a_3' b_5}{a_5''}, \ c_4'' = \frac{a_5 b_3 c_1}{a_3'' b_1'} \tag{6.51}$$

$$b_5'' = \frac{a_5'' b_1 b_2 b_4}{a_1 b_3 b_5},\ c_5'' = \frac{b_3 b_5 c_1}{b_1' b_3''}, \tag{6.52}$$

$$a_6'' = a_6,\ b_6'' = b_6,\ c_6'' = c_6 \tag{6.53}$$

总结:

$$\begin{aligned}(a_1'', \ldots, c_6'') = (a_1', b_1', \frac{a_1' c_2 c_3}{a_3 c_1},\\ a_1 a_3 + a_2 b_1 c_3, \frac{a_1 b_3}{a_3'}, \frac{a_3 c_1}{a_1'}, a_3'', b_3'', \frac{a_3'' b_1' c_4 c_5}{a_5 b_3 c_1},\\ a_3'\left(a_5 + \frac{a_4 b_1 b_2 c_5}{a_1 b_3}\right), \frac{a_3' b_5}{a_5''}, \frac{a_5 b_3 c_1}{a_3'' b_1'},\\ a_5'', \frac{a_5'' b_1 b_2 b_4}{a_1 b_3 b_5}, \frac{b_3 b_5 c_1}{b_1' b_3''}, a_6, b_6, c_6)\end{aligned} \tag{6.54}$$

6.13 L(5)L(2). 该态射

$$\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2) : \mathbb{A}_3 \longrightarrow \mathbb{A}_5$$

将第二个三元组与第三个三元组互换，并将第五个三元组与第六个三元组互换。换言之

$$\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2) \subset \mathbb{A}_3 \times \mathbb{A}_5$$

是一个维数为 18 的闭胞腔，其自由坐标为 $(a_1'', \ldots, c_6'')$，其余变量为

$$\begin{gathered}a_1^{iv} = a_1'',\ b_1^{iv} = b_1'',\ c_1^{iv} = c_1'',\\ a_2^{iv} = a_3'',\ b_2^{iv} = b_3'',\ c_2^{iv} = c_3'',\ a_3^{iv} = a_2'',\ b_3^{iv} = b_2'',\ c_3^{iv} = c_2'',\\ a_4^{iv} = a_4'',\ b_4^{iv} = b_4'',\ c_4^{iv} = c_4'',\\ a_5^{iv} = a_6'',\ b_5^{iv} = b_6'',\ c_5^{iv} = c_6'',\ a_6^{iv} = a_5'',\ b_6^{iv} = b_5'',\ c_6^{iv} = c_5''\end{gathered}$$

6.14 L(5)L(2)R(3)R(1). 因此，对应

$$\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2)\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1) \subset \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_5$$

将是一个 24 维胞腔，其自由坐标与R(3)R(1)的相同，即

$$a_1, \ldots, c_6, a_1', a_3', b_1', a_3'', a_5'', b_3'',$$

且由下式给出

$$\begin{aligned}(a_1^{iv}, \ldots, c_6^{iv}) = (a_1', b_1', \frac{a_1' c_2 c_3}{a_3 c_1},\\ a_3'', b_3'', \frac{a_3'' b_1' c_4 c_5}{a_5 b_3 c_1}, a_1 a_3 + a_2 b_1 c_3, \frac{a_1 b_3}{a_3'}, \frac{a_3 c_1}{a_1'},\\ a_3'\left(a_5 + \frac{a_4 b_1 b_2 c_5}{a_1 b_3}\right), \frac{a_3' b_5}{a_5''}, \frac{a_5 b_3 c_1}{a_3'' b_1'},\\ a_6, b_6, c_6, a_5'', \frac{a_5'' b_1 b_2 b_4}{a_1 b_3 b_5}, \frac{b_3 b_5 c_1}{b_1' b_3''})\end{aligned} \tag{6.55}$$

我们将十四行诗方程两边的计算留给感兴趣的读者完成。

7 一个较小的双参数 R对应

7.1 ● 我们从一个 c-上三角矩阵开始

$$A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

于是我们得到

$$A(a_1,b_1)_1A(a_2,b_2)_2A(a_3,b_3)_1=\begin{pmatrix} a_1a_3+b_1a_2b_3^{-1} & a_1b_3 & b_1b_2 \\ b_1^{-1}a_3 & b_1^{-1}b_3 & 0 \\ b_2^{-1}b_3^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

另一方面

$$A(a_1,b_1)_2A(a_2,b_2)_1A(a_3,b_3)_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2a_3 & b_2b_3 \\ a_1b_2^{-1} & b_1b_3^{-1} & 0 \\ b_1^{-1}b_2^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令两者相等

$$A(a_1,b_1)_1A(a_2,b_2)_2A(a_3,b_3)_1=A(a_1',b_1')_2A(a_2',b_2')_1A(a_3',b_3')_2$$

我们得到 6 个方程

$$\begin{gathered} a_1a_3+b_1a_2b_3^{-1}=a_2' \\ a_1b_3=b_2'a_3' \\ b_1b_2=b_2'b_3' \\ b_1^{-1}a_3=a_1'b_2'^{-1} \\ b_1^{-1}b_3=b_1'b_3'^{-1} \\ b_2^{-1}b_3^{-1}=b_1'^{-1}b_2'^{-1} \end{gathered}$$

在最后五个方程中，若固定 a_1'，其他带撇号的量便可用不带撇号的量和 a_1' 表示:

$$b_1'=\frac{a_3b_2b_3}{a_1'b_1},\ b_2'=\frac{a_1'b_1}{a_3},\ a_3'=\frac{a_1a_3b_3}{a_1'b_1},\ b_3'=\frac{a_3b_2}{a_1'}$$

因此，我们的对应作用如下:

$$R:\ (a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3)\mapsto(a_1',\frac{a_3b_2b_3}{a_1'b_1},\frac{a_1a_3b_3+a_2b_1}{b_3},\frac{a_1'b_1}{a_3},\frac{a_1a_3b_3}{a_1'b_1},\frac{a_3b_2}{a_1'}),$$

换句话说

$$(a_1',b_1',a_2',b_2',a_3',b_3')=(a_1',\frac{a_3b_2b_3}{a_1'b_1},\frac{a_1a_3b_3+a_2b_1}{b_3},\frac{a_1'b_1}{a_3},\frac{a_1a_3b_3}{a_1'b_1},\frac{a_3b_2}{a_1'}).\tag{7.1}$$

7.2 ● 现在我们可以逐步考察四面体—十四行诗图（6.12），并描述相应的 f_+, f_- 簇。

每个 $\mathbb{A}_i$, $\mathbb{B}_j$ 都与 $\mathbb{A}^{12}$ 同构。 $\mathbb{A}_i$, $\mathbb{B}_j$ 中的坐标将为

$$(a_1, b_1, \dots, a_6, b_6), (a_1', b_1' \dots, a_6', b_6'),$$

etc.

(a)上方路径

7.3 $\mathbf{R}(1)$。对于

$$\mathbf{R}(1): \ \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$$

坐标将为

$$a_1, \dots, b_6, a_1',$$

其作用方式如下

$$(a_1', b_1', a_2', b_2', a_3', b_3') = (a_1', \frac{a_3 b_2 b_3}{a_1' b_1}, \frac{a_1 a_3 b_3 + a_2 b_1}{b_3}, \frac{a_1' b_1}{a_3}, \frac{a_1 a_3 b_3}{a_1' b_1}, \frac{a_3 b_2}{a_1'}),$$

$$(a_4', \dots, b_6') = (a_4, \dots, b_6)$$

7.4 $\mathbf{R}(3)$。

$$\mathbf{R}(3): \ \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_3$$

作用如下

$$(a_1'', \dots, b_2'') = (a_1', \dots, b_2')$$

$$(a_3'', b_3'', a_4'', b_4'', a_5'', b_5'') = (a_3'', \frac{a_5' b_4' b_5'}{a_3'' b_3'}, \frac{a_3' a_5' b_5' + a_4' b_3'}{b_5'}, \frac{a_3'' b_3'}{a_5'}, \frac{a_3' a_5' b_5'}{a_3'' b_3'}, \frac{a_5' b_4'}{a_3''}),$$

$$(a_6'', b_6'') = (a_6', b_6')$$

7.5 $\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1)$. 考虑复合

$$\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1): \ \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_3$$

它的坐标为

$$a_1, \dots, b_6, a_1', a_3''$$

其作用如下

$$(a_1'', \dots, b_6'') = (a_1', \frac{a_3 b_2 b_3}{a_1' b_1}, \frac{a_2 b_1 + a_1 a_3 b_3}{b_3}, \frac{a_1' b_1}{a_3},$$

$$a_3'', \frac{a_1' a_5 b_4 b_5}{a_3'' a_3 b_2}, \frac{a_3(a_1 a_5 b_3 b_5 + a_4 b_1 b_2)}{a_1' b_1 b_5}, \frac{a_3'' a_3 b_2}{a_1' a_5},$$

$$\frac{a_1 a_5 b_3 b_5}{a_3'' b_1 b_2}, \frac{a_5 b_4}{a_3''}, a_6, b_6)$$

7.6 L(5)L(2)。 该复合

$$\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2): \ \mathbb{A}_3 \longrightarrow \mathbb{A}_5$$

作用如下

$$(a_1^{iv}, \ldots, b_6^{iv}) = (a_1'', b_1'', a_3'', b_3'', a_2'', b_2'', a_4'', b_4'', a_6'', b_6'', a_5'', b_5'').$$

7.7 L(5)L(2)R(3)R(1).对于

$$\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2)\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1) : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_5$$

坐标将为

$$a_1, \ldots, b_6, a_1', a_3''$$

其作用如下:

$$(a_1^{iv}, \ldots, b_6^{iv}) = (a_1', \frac{a_3 b_2 b_3}{a_1' b_1}, a_3'', \frac{a_1' a_5 b_4 b_5}{a_3'' a_3 b_2},$$

$$\frac{a_2 b_1 + a_1 a_3 b_3}{b_3}, \frac{a_1' b_1}{a_3}, \frac{a_3(a_1 a_5 b_3 b_5 + a_4 b_1 b_2)}{a_1' b_1 b_5}, \frac{a_3'' a_3 b_2}{a_1' a_5},$$

$$a_6, b_6, \frac{a_1 a_5 b_3 b_5}{a_3'' b_1 b_2}, \frac{a_5 b_4}{a_3''})$$

7.8 R(3) 对于

$$\mathbf{R}(3): \ \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_6$$

坐标将为

$$a_1^{iv}, \ldots, b_6^{iv}, a_3^v$$

其作用方式如下:

$$(a_1^v, \ldots, b_2^v) = (a_1^{iv}, \ldots, b_2^{iv})$$

$$(a_3^v, b_3^v, a_4^v, b_4^v, a_5^v, b_5^v) = (a_3^v, \frac{a_5^{iv} b_4^{iv} b_5^{iv}}{a_3^v b_3^{iv}}, \frac{a_3^{iv} a_5^{iv} b_5^{iv} + a_4^{iv} b_3^{iv}}{b_5^{iv}}, \frac{a_3^v b_3^{iv}}{a_5^{iv}}, \frac{a_3^{iv} a_5^{iv} b_5^{iv}}{a_3^v b_3^{iv}}, \frac{a_5^{iv} b_4^{iv}}{a_3^v}),$$

$$(a_6^v, b_6^v) = (a_6^{iv}, b_6^{iv})$$

7.9 R(1)。 For

$$\mathbf{R}(1): \ \mathbb{A}_6 \longrightarrow \mathbb{A}_7$$

坐标将为

$$a_1^v, \ldots, b_6^v, a_1^{vi},$$

其作用方式如下

$$(a_1^{vi}, b_1^{vi}, a_2^{vi}, b_2^{vi}, a_3^{vi}, b_3^{vi}) = (a_1^{vi}, \frac{a_3^v b_2^v b_3^v}{a_1^{vi} b_1^v}, \frac{a_1^v a_3^v b_3^v + a_2^v b_1^v}{b_3^v}, \frac{a_1^{vi} b_1^v}{a_3^v}, \frac{a_1^v a_3^v b_3^v}{a_1^{vi} b_1^v}, \frac{a_3^v b_2^v}{a_1^{vi}}),$$

$$(a_4^{vi}, \ldots, b_6^{vi}) = (a_4^v, \ldots, b_6^v)$$

7.10 R(1)R(3)。 关于

$$\mathbf{R}(1)\mathbf{R}(3) : \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_7$$

坐标将为

$$a_1^{iv}, \ldots, b_6^{iv}, a_3^{v}, a_1^{vi},$$

其作用如下

$$(a_1^{vi}, \ldots, b_6^{vi}) = (a_1^{vi}, \frac{a_5^{iv}b_2^{iv}b_4^{iv}b_5^{iv}}{a_1^{vi}b_1^{iv}b_3^{iv}}, \frac{a_3^{v}(a_2^{iv}b_1^{iv}b_3^{iv} + a_1^{iv}a_5^{iv}b_4^{iv}b_5^{iv})}{a_5^{iv}b_4^{iv}b_6^{iv}}, \frac{a_1^{vi}b_1^{iv}}{a_3^{v}},$$

$$\frac{a_1^{iv}a_5^{iv}b_4^{iv}b_5^{iv}}{a_1^{vi}b_1^{iv}b_3^{iv}}, \frac{a_3^{v}b_2^{iv}}{a_1^{vi}}, \frac{a_4^{iv}b_3^{iv} + a_3^{iv}a_5^{iv}b_5^{iv}}{b_5^{iv}}, \frac{a_3^{v}b_3^{iv}}{a_5^{iv}},$$

$$\frac{a_3^{iv}a_5^{iv}b_5^{iv}}{a_3^{v}b_3^{iv}}, \frac{a_5^{iv}b_4^{iv}}{a_3^{v}}, a_6^{iv}, b_6^{iv})$$

7.11 L(3)。 映射

$$\mathbf{L}(3) : \ \mathbb{A}_7 \longrightarrow \mathbb{A}_8$$

作用如下

$$(a_1^{vii}, b_1^{vii}, a_2^{vii}, b_2^{vii}, a_3^{vii}, b_3^{vii}, a_4^{vii}, b_4^{vii}, a_5^{vii}, b_5^{vii}, a_6^{vii}, b_6^{vii}) =$$

$$(a_1^{vi}, b_1^{vi}, a_2^{vi}, b_2^{vi}, a_4^{vi}, b_4^{vi}, a_3^{vi}, b_3^{vi}, a_5^{vi}, b_5^{vi}, a_6^{vi}, b_6^{vi})$$

（我们只是交换了第三组和第四组）。

7.12 L(3)R(1)R(3)。 对于映射

$$\mathbf{L}(3)\mathbf{R}(1)\mathbf{R}(3) : \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_8$$

坐标将会是

$$a_1^{iv}, \ldots, b_6^{iv}, a_3^{v}, a_1^{vi},$$

其作用如下

$$(a_1^{vii}, \ldots, b_6^{vii}) = (a_1^{vi}, \frac{a_5^{iv}b_2^{iv}b_4^{iv}b_5^{iv}}{a_1^{vi}b_1^{iv}b_3^{iv}}, \frac{a_3^{v}(a_2^{iv}b_1^{iv}b_3^{iv} + a_1^{iv}a_5^{iv}b_4^{iv}b_5^{iv})}{a_5^{iv}b_4^{iv}b_6^{iv}}, \frac{a_1^{vi}b_1^{iv}}{a_3^{v}},$$

$$\frac{a_4^{iv}b_3^{iv} + a_3^{iv}a_5^{iv}b_5^{iv}}{b_5^{iv}}, \frac{a_3^{v}b_3^{iv}}{a_5^{iv}}, \frac{a_1^{iv}a_5^{iv}b_4^{iv}b_5^{iv}}{a_1^{vi}b_1^{iv}b_3^{iv}}, \frac{a_3^{v}b_2^{iv}}{a_1^{vi}},$$

$$\frac{a_3^{iv}a_5^{iv}b_5^{iv}}{a_3^{v}b_3^{iv}}, \frac{a_5^{iv}b_4^{iv}}{a_3^{v}}, a_6^{iv}, b_6^{iv})$$

7.13 左侧。四面体方程的左侧为

$$C_+^m := \mathbf{L}(3)\mathbf{R}(1)\mathbf{R}(3)\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2)\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1) : \ \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_8$$

坐标为

$$a_1, \ldots, b_6, a_1', a_3'', a_3^v, a_1^{vi},$$

其作用如下

$$(a_1^{vii}, \ldots, b_6^{vii}) = (a_1^{vi}, \frac{a_6b_4b_5b_6}{a_1^{vi}b_2b_3}, \frac{a_1'a_3''a_3^v(a_5b_3 + a_3a_6b_6)}{a_3a_5a_6b_4}, \frac{a_1^{vi}a_3b_2b_3}{a_1'a_3^vb_1},$$

$$\frac{a_1a_5b_3^2b_5 + a_4b_1b_2b_3 + (a_2b_1 + a_1a_3b_3)a_6b_6b_5}{b_3b_6b_5}, \frac{a_1'a_3^vb_1}{a_3a_6}, \frac{a_3''a_3a_6b_6}{a_1^{vi}a_5b_3}, \frac{a_1'a_3^va_5b_4b_5}{a_3''a_1^{vi}a_3b_2},$$

$$\frac{(a_2b_1 + a_1a_3b_3)a_3a_6b_6}{a_1'a_3^vb_1b_3}, \frac{a_3''a_3a_6b_2}{a_1'a_3^va_5}, \frac{a_1a_5b_3b_5}{a_3''b_1b_2}, \frac{a_5b_4}{a_3''})$$

(b)下方路径

7.14 L(3). 映射

$$\mathbf{L}(3) : \ \mathbb{B}_0 \longrightarrow \mathbb{B}_1$$

作用如下

$$(a_1', \ldots, b_2') = (a_1, \ldots, b_2),$$
$$(a_3', b_3', a_4', b_4') = (a_4, b_4, a_3, b_3),$$
$$(a_5', \ldots, b_6') = (a_5, \ldots, b_6)$$

7.15 R(4). 映射

$$\mathbf{R}(4) : \ \mathbb{B}_1 \longrightarrow \mathbb{B}_2$$

作用如下

$$(a_1'', \ldots, b_3'') = (a_1', \ldots, b_3'),$$
$$(a_4'', \ldots, b_6'') = (a_4'', \frac{a_6'b_5'b_6'}{a_4''b_4'}, \frac{a_5'b_4' + a_4'a_6'b_6'}{b_6'}, \frac{a_4''b_4'}{a_6'}, \frac{a_4'a_6'b_6'}{a_4''b_4'}, \frac{a_6'b_5'}{a_4''})$$

7.16 R(2). 映射

$$\mathbf{R}(2) : \ \mathbb{B}_2 \longrightarrow \mathbb{B}_3$$

作用如下:

$$(a_1''', b_1''') = (a_1'', b_1''),$$
$$(a_2''', \ldots, b_4''') = (a_2''', \frac{a_4''b_3''b_4''}{a_2'''b_2''}, \frac{a_3''b_2'' + a_2''a_4''b_4''}{b_4''}, \frac{a_2'''b_2''}{a_4''}, \frac{a_2''a_4''b_4''}{a_2'''b_2''}, \frac{a_4''b_3''}{a_2'''}),$$
$$(a_5''', \ldots, b_6''') = (a_5'', \ldots, b_6'')$$

7.17 $\mathbf{R}(2)\mathbf{R}(4)$。 映射

$$\mathbf{R}(2)\mathbf{R}(4):\ \mathbb{B}_1 \longrightarrow \mathbb{B}_3$$

具有以下坐标

$$(a_1', \ldots, b_6', a_2''', a_4''),$$

其作用如下:

$$(a_1''', \ldots, b_6''') = (a_1', b_1', a_2''', \frac{a_6' b_3' b_5' b_6'}{a_2''' b_2' b_4'},$$
$$\frac{a_4''(a_3' b_2' b_4' + a_2' a_6' b_5' b_6')}{a_6' b_5' b_6'}, \frac{a_2''' b_2'}{a_4''}, \frac{a_2' a_6' b_5' b_6'}{a_2''' b_2' b_4'}, \frac{a_4'' b_3'}{a_2'''},$$
$$\frac{a_5' b_4' + a_4' a_6' b_6'}{b_6'}, \frac{a_4'' b_4'}{a_6'}, \frac{a_4' a_6' b_6'}{a_4'' b_4'}, \frac{a_6' b_5'}{a_4''})$$

7.18 $C_{-+}^{m} = \mathbf{R}(2)\mathbf{R}(4)\mathbf{L}(3)$. 映射

$$C_{-+}^{m} := \mathbf{R}(2)\mathbf{R}(4)\mathbf{L}(3):\ \mathbb{B}_0 \longrightarrow \mathbb{B}_3$$

具有以下坐标

$$(a_1, \ldots, b_6, a_2''', a_4''),$$

其作用如下:

$$(a_1''', \ldots, b_6''') = (a_1, b_1, a_2''', \frac{a_6 b_4 b_5 b_6}{a_2''' b_2 b_3},$$
$$\frac{a_4''(a_4 b_2 b_3 + a_2 a_6 b_5 b_6)}{a_6 b_5 b_6}, \frac{a_2''' b_2}{a_4''}, \frac{a_2 a_6 b_5 b_6}{a_2''' b_2 b_3}, \frac{a_4'' b_4}{a_2'''},$$
$$\frac{a_5 b_3 + a_3 a_6 b_6}{b_6}, \frac{a_4'' b_3}{a_6}, \frac{a_3 a_6 b_6}{a_4'' b_3}, \frac{a_6 b_5}{a_4''})$$

7.19 $\mathbf{L}(1)\mathbf{L}(4)$. 映射

$$\mathbf{L}(1)\mathbf{L}(4) : \mathbb{B}_3 \longrightarrow \mathbb{B}_5$$

作用如下:

$$(a_1^v, b_1^v, a_2^v, b_2^v) = (a_2''', b_2''', a_1''', b_1''')$$
$$(a_3^v, b_3^v) = (a_3''', b_3''')$$
$$(a_4^v, b_4^v, a_5^v, b_5^v) = (a_5''', b_5''', a_4''', b_4''')$$
$$(a_6^v, b_6^v) = (a_6''', b_6''')$$

7.20 $\mathbf{R}(2)$. 映射

$$\mathbf{R}(2) : \mathbb{B}_5 \longrightarrow \mathbb{B}_6$$

作用如下:

$$(a_1^{vi}, b_1^{vi}) = (a_1^v, b_1^v)$$
$$(a_2^{vi}, \ldots, b_4^{vi}) = (a_2^{vi}, \frac{a_4^v b_3^v b_4^v}{a_2^{vi} b_2^v}, \frac{a_3^v b_2^v + a_2^v a_4^v b_4^v}{b_4^v}, \frac{a_2^{vi} b_2^v}{a_4^v}, \frac{a_2^v a_4^v b_4^v}{a_2^{vi} b_2^v}, \frac{a_4^v b_3^v}{a_2^{vi}})$$
$$(a_5^{vi}, \ldots, b_6^{vi}) = (a_5^v, \ldots, b_6^v)$$

7.21 $\mathbf{R}(4)$. 映射

$$\mathbf{R}(4):\mathbb{B}_6\longrightarrow\mathbb{B}_7$$

作用如下:

$$(a_1^{vii},\dots,b_3^{vii})=(a_1^{vi},\dots,b_3^{vi})$$

$$(a_4^{vii},\dots,b_6^{vii})=(a_4^{vii},\frac{a_6^{vi}b_5^{vi}b_6^{vi}}{a_4^{vii}b_4^{vi}},\frac{a_5^{vi}b_4^{vi}+a_4^{vi}a_6^{vi}b_6^{vi}}{b_6^{vi}},\frac{a_4^{vii}b_4^{vi}}{a_6^{vi}},\frac{a_4^{vi}a_6^{vi}b_6^{vi}}{a_4^{vii}b_4^{vi}},\frac{a_6^{vi}b_5^{vi}}{a_4^{vii}})$$

7.22 $\mathbf{R}(4)\mathbf{R}(2)$. 映射

$$\mathbf{R}(4)\mathbf{R}(2):\mathbb{B}_5\longrightarrow\mathbb{B}_7$$

作用如下:

$$(a_1^{vii},\dots,b_6^{vii})=(a_1^{v},b_1^{v},a_2^{vi},\frac{a_4^{v}b_3^{v}b_4^{v}}{a_2^{vi}b_2^{v}},$$

$$\frac{a_3^{v}b_2^{v}+a_2^{v}a_4^{v}b_4^{v}}{b_4^{v}},\frac{a_2^{vi}b_2^{v}}{a_4^{v}},a_4^{vii},\frac{a_2^{v}a_6^{v}b_5^{v}b_6^{v}}{a_4^{vii}a_4^{v}b_3^{v}},$$

$$\frac{a_4^{v}(a_5^{v}b_2^{v}b_3^{v}+a_2^{v}a_6^{v}b_4^{v}b_6^{v})}{a_2^{vi}b_2^{v}b_6^{v}},\frac{a_4^{vii}a_4^{v}b_3^{v}}{a_2^{vi}a_6^{v}},\frac{a_2^{v}a_6^{v}b_4^{v}b_6^{v}}{a_4^{vii}b_2^{v}b_3^{v}},\frac{a_6^{v}b_5^{v}}{a_4^{vii}})$$

7.23 $C^m_{--}=\mathbf{R}(4)\mathbf{R}(2)\mathbf{L}(1)\mathbf{L}(4)$. 映射

$$C^m_{--}:=\mathbf{R}(4)\mathbf{R}(2)\mathbf{L}(1)\mathbf{L}(4):\mathbb{B}_3\longrightarrow\mathbb{B}_7$$

作用如下:

$$(a_1^{vii},\dots,b_6^{vii})=(a_2^{\prime\prime\prime},b_2^{\prime\prime\prime},a_2^{vi},\frac{a_5^{\prime\prime\prime}b_3^{\prime\prime\prime}b_5^{\prime\prime\prime}}{a_2^{vi}b_1^{\prime\prime\prime}},$$

$$\frac{a_3^{\prime\prime\prime}b_1^{\prime\prime\prime}+a_1^{\prime\prime\prime}a_5^{\prime\prime\prime}b_5^{\prime\prime\prime}}{b_5^{\prime\prime\prime}},\frac{a_2^{vi}b_1^{\prime\prime\prime}}{a_5^{\prime\prime\prime}},a_4^{vii},\frac{a_1^{\prime\prime\prime}a_6^{\prime\prime\prime}b_4^{\prime\prime\prime}b_6^{\prime\prime\prime}}{a_4^{vii}a_5^{\prime\prime\prime}b_3^{\prime\prime\prime}},$$

$$\frac{a_5^{\prime\prime\prime}(a_4^{\prime\prime\prime}b_1^{\prime\prime\prime}b_3^{\prime\prime\prime}+a_1^{\prime\prime\prime}a_6^{\prime\prime\prime}b_5^{\prime\prime\prime}b_6^{\prime\prime\prime})}{a_2^{vi}b_1^{\prime\prime\prime}b_6^{\prime\prime\prime}},\frac{a_4^{vii}a_5^{\prime\prime\prime}b_3^{\prime\prime\prime}}{a_2^{vi}a_6^{\prime\prime\prime}},\frac{a_1^{\prime\prime\prime}a_6^{\prime\prime\prime}b_5^{\prime\prime\prime}b_6^{\prime\prime\prime}}{a_4^{vii}b_1^{\prime\prime\prime}b_3^{\prime\prime\prime}},\frac{a_6^{\prime\prime\prime}b_4^{\prime\prime\prime}}{a_4^{vii}})$$

7.24 右端。 四面体方程的右端为

$$C^m_{-}:=C^m_{--}C^m_{-+}=\mathbf{R}(4)\mathbf{R}(2)\mathbf{L}(1)\mathbf{L}(4)\mathbf{R}(2)\mathbf{R}(4)\mathbf{L}(3):\ \mathbb{B}_0\longrightarrow\mathbb{B}_7$$

坐标为

$$a_1,\dots,b_6,a_4^{\prime\prime},a_2^{\prime\prime\prime},a_2^{vi},a_4^{vii},$$

其作用方式如下

$$(a_1^{vii},\dots,b_6^{vii})=(a_2^{\prime\prime\prime},b_1,a_2^{vi},\frac{a_2^{\prime\prime\prime}(a_5b_3+a_3a_6b_6)b_2b_3}{a_2^{vi}a_6b_1b_6},$$

$$\frac{a_4b_1b_2b_3+a_1a_5b_3^2b_5+a_2a_6b_1b_5b_6+a_1a_3a_6b_3b_5b_6}{b_3b_5b_6},\frac{a_2^{vi}b_1b_6}{a_5b_3+a_3a_6b_6},a_4^{vii},\frac{a_1a_3a_6^2b_4b_5b_6^2}{a_2^{\prime\prime\prime}a_4^{vii2}b_2b_3(a_5b_3+a_3a_6b_6)},$$

$$\frac{(a_5b_3+a_3a_6b_6)(a_2b_1+a_1a_3b_3)}{a_2^{vi}b_1b_3},$$

$$\frac{a_2^{\prime\prime\prime}a_4^{vii}(a_5b_3+a_3a_6b_6)b_2b_3}{a_2^{vi}a_3a_6b_6^2},\frac{a_1a_3a_6b_5b_6}{a_2^{\prime\prime\prime}a_4^{vii}b_1b_2},\frac{a_3a_6b_4b_6}{a_2^{\prime\prime\prime}a_4^{vii}b_3})$$

7.25 四面体方程。 坐标:

$$a_1,\dots,b_6;a_1',a_3'',a_3^v,a_1^{vi}$$

对于 C_+^m，以及

$$a_1,\dots,b_6;a_4'',a_2'''',a_2^{vi},a_4^{vii}$$

对于 C^m.

方程为

$$(a_1^{vi},\frac{a_6b_4b_5b_6}{a_1^{vi}b_2b_3},\frac{a_1'a_3''a_3^v(a_5b_3+a_3a_6b_6)}{a_3a_5a_6b_4},\frac{a_1^{vi}a_3b_2b_3}{a_1'a_3^vb_1},$$

$$\frac{a_1a_5b_3^2b_5+a_4b_1b_2b_3+(a_2b_1+a_1a_3b_3)a_6b_6b_5}{b_3b_6b_5},\frac{a_1'a_3^vb_1}{a_3a_6},\frac{a_3''a_3a_6b_6}{a_1^{vi}a_5b_3},\frac{a_1'a_3^va_5b_4b_5}{a_3''a_1^{vi}a_3b_2},$$

$$\frac{(a_2b_1+a_1a_3b_3)a_3a_6b_6}{a_1'a_3^vb_1b_3},\frac{a_3''a_3a_6b_2}{a_1'a_3^va_5},\frac{a_1a_5b_3b_5}{a_3''b_1b_2},\frac{a_5b_4}{a_3''})=$$

$$=(a_2'''',b_1,a_2^{vi},\frac{a_2''''(a_5b_3+a_3a_6b_6)b_2b_3}{a_2^{vi}a_6b_1b_6},$$

$$\frac{a_4b_1b_2b_3+a_1a_5b_3^2b_5+a_2a_6b_1b_5b_6+a_1a_3a_6b_3b_5b_6}{b_3b_5b_6},\frac{a_2^{vi}b_1b_6}{a_5b_3+a_3a_6b_6},a_4^{vii},\frac{a_1a_3a_6^2b_4b_5b_6^2}{(a_2'''')^2a_4^{vii}b_2b_3(a_5b_3+a_3a_6b_6)},$$

$$\frac{(a_5b_3+a_3a_6b_6)(a_2b_1+a_1a_3b_3)}{a_2^{vi}b_1b_3},\frac{a_2''''a_4^{vii}(a_5b_3+a_3a_6b_6)b_2b_3}{a_2^{vi}a_3a_6b_6^2},$$

$$\frac{a_1a_3a_6b_5b_6}{a_2''''a_4^{vii}b_1b_2},\frac{a_3a_6b_4b_6}{a_2''''a_4^{vii}b_3})$$

7.26 ● 换言之:

$(1a)$

$$a_1^{vi}=a_2''''$$

$(1b)$

$$b_1=\frac{a_6b_4b_5b_6}{a_1^{vi}b_2b_3}$$

由此

$(1b1)$

$$a_1^{vi}=\frac{a_6b_4b_5b_6}{b_1b_2b_3}$$

$(2a)$

$$\frac{a_1'a_3''a_3^v(a_5b_3+a_3a_6b_6)}{a_3a_5a_6b_4}=a_2^{vi}$$

$(2b)$

$$\frac{a_1^{vi}a_3b_2b_3}{a_1'a_3^vb_1}=\frac{a_2''''(a_5b_3+a_3a_6b_6)b_2b_3}{a_2^{vi}a_6b_1b_6}$$

由此可知

(2b1)

$$a_2^{vi}=\frac{(a_5b_3+a_3a_6b_6)a_1'a_3^v}{a_3a_6b_6}$$

由此得出:

(2b2)

$$a_3''=\frac{a_5b_4}{b_6}$$

(3a) 和 (3b) 是重言式。

(4a)

$$\frac{a_3''a_3a_6b_6}{a_1^{vi}a_5b_3}=a_4^{vii}$$

由此可得

(4a1)

$$a_4^{vii}=\frac{a_3b_1b_2}{b_5b_6}$$

(4b)

$$\frac{a_1'a_3^va_5b_4b_5}{a_3''a_1^{vi}a_3b_2}=\frac{a_1a_3a_6^2b_4b_5b_6^2}{(a_2''')^2a_4^{vii}b_2b_3(a_5b_3+a_3a_6b_6)}$$

由此可得

(4b1)

$$a_1'a_3^v=\frac{a_1a_3a_6b_6^2}{b_4(a_5b_3+a_3a_6b_6)}.$$

由 (2b1) 可推出

(4b2)

$$a_2^{vi}=\frac{a_1b_6}{b_4}$$

(5a)

$$\frac{(a_2b_1+a_1a_3b_3)a_3a_6b_6}{a_1'a_3^vb_1b_3}=\frac{(a_5b_3+a_3a_6b_6)(a_2b_1+a_1a_3b_3)}{a_2^{vi}b_1b_3}$$

这与（2b1）一致。

(5b)

$$\frac{a_3''a_3a_6b_2}{a_1'a_3^va_5}=\frac{a_2'''a_4^{vii}(a_5b_3+a_3a_6b_6)b_2b_3}{a_2^{vi}a_3a_6b_6^2}$$

由此

(5b1)

$$a_2'''=\frac{a_6b_4b_5b_6}{b_1b_2b_3},$$

这是显然的。

（6a）由（5b1）显然成立

(6b)

$$\frac{a_5b_4}{a_3''}=\frac{a_3a_6b_4b_6}{a_2'''a_4^{vii}b_3}$$

由此

$(6b1)$

$$a_2'''a_4^{vii} = \frac{a_3a_6b_4}{b_3},$$

因此

$$a_2''' = \frac{a_3a_6b_4}{a_4^{vii}b_3} = \frac{a_6b_4b_5b_6}{b_1b_2b_3},$$

我们已经知道这一点。

a_4''不受任何条件限制，而 a_1'， a_3^v 仅通过（$4b1$）出现。

7.27 十四行诗方程成立。我们据此得出，十四行诗方程成立，其含义如下：两个胞腔

$$f_+ := Im(C_+^m), f_- := Im(C_-^m) \subset \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_8 = \mathbb{B}_0 \times \mathbb{B}_7$$

双有理地重合，即 $f_+ \cap f_-$ 在二者中都是Zariski稠密的。

f_+ 和f_- 都与$\mathbb{A}^{12}$ 双有理同构，其坐标为（a_1， b_1，..... a_6， b_6）。

当 $b \longrightarrow 1$ 时，我们得到下一节第8节中讨论的方程。

7.28 一个准逆 R-对应。令 $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ 分别表示六维仿射空间，其坐标分别为 $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$ 和 $(a_1', b_1', a_2', b_2', a_3', b_3')$。定义一个对应 S： $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$，其定义如下：

$$(a_1', b_1', a_2', b_2', a_3', b_3') = (a_1', \frac{a_3b_2b_3}{a_1'b_1}, \frac{-a_1a_3b_3 + a_2b_1}{b_3}, \frac{a_1'b_1}{a_3}, \frac{a_1a_3b_3}{a_1'b_1}, \frac{a_3b_2}{a_1'}). \tag{7.2}$$

因此，我们在 (7.1) 中改变了一个符号。

令 $\mathbb{A}''$ 表示一个六维仿射空间，其坐标为 $(a_1'', b_1'', a_2'', b_2'', a_3'', b_3'')$。不难看出，复合

$$SR: \ \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}''$$

由下式给出：

$$(a_1'', \ldots, b_3'') = (a_1'', \frac{a_1b_1}{a_1''}, \frac{a_2b_1}{b_3}, \frac{a_1''b_2}{a_1}, \frac{a_1a_3}{a_1''}, \frac{a_1b_3}{a_1''}). \tag{7.3}$$

如果我们在这里代入 $a_1'' = a_1$ 和 $b_1 = b_3$，就得到恒等映射。

此外，如果将 $b = 1$ 代入 (7.2)，就得到下一节中讨论的“极小” R-矩阵的逆映射，见 (8.2)。

8 一个非常小的 R-矩阵

这里我们描述前一节中内容在 $b = 1$ 处的特化。在这种情况下， R-对应变成一个 R-矩阵。

8.1 ● 我们从一个矩阵开始

$$A(a)=\begin{pmatrix} a & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

于是我们有

$$A(a_1)_1A(a_2)_2A(a_3)_1=\begin{pmatrix} a_1a_3+a_2 & a_1 & 1\\ a_3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

and

$$A(a_1)_2A(a_2)_1A(a_3)_2=\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & 1\\ a_1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此得到 R-矩阵（这次不是 R-对应）

$$\mathbf{R}:\ \mathbb{A}(121)\longrightarrow\mathbb{A}(212)$$

由下式给出

$$(a_1',a_2',a_3')=(a_3,a_1a_3+a_2,a_1)\tag{8.1}$$

其逆映射由下式给出

$$(a_1',a_2',a_3')=(a_3,-a_1a_3+a_2,a_1)\tag{8.2}$$

8.2 十四行诗方程。 让我们检验四面体（十四行诗）方程。见下文 $\mathbb{A}_i=\mathbb{A}^6$。

映射

$$\mathbf{R}(1):\ \mathbb{A}_1\longrightarrow\mathbb{A}_2$$

作用如下

$$(a_1',\dots,a_6')=(a_3,a_1a_3+a_2,a_1,a_4,a_5,a_6).$$

映射

$$\mathbf{R}(3):\ \mathbb{A}_2\longrightarrow\mathbb{A}_3$$

作用如下

$$(a_1'',\dots,a_6'')=(a_1',a_2',a_5',a_3'a_5'+a_4',a_3',a_6')$$

因此

$$\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1):\mathbb{A}_1\longrightarrow\mathbb{A}_3$$

作用为

$$(a_1'',\dots,a_6'')=(a_3,a_1a_3+a_2,a_5,a_1a_5+a_4,a_1,a_6)$$

8.3 L(5)L(2)R(3)R(1) 接下来,

$$\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2):\mathbb{A}_3\longrightarrow\mathbb{A}_5$$

交换 2 和 3，以及 5 和 6。

由此可得

$$\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2)\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1):\mathbb{A}_1\longrightarrow\mathbb{A}_5$$

充当

$$(a_1^{iv},\dots,a_6^{iv})=(a_3,a_5,a_1a_3+a_2,a_1a_5+a_4,a_6,a_1)$$

8.4 ● 映射

$$\mathbf{R}(3) : \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_6$$

充当

$$(a_1^v, \ldots, a_6^v) = (a_1^{iv}, a_2^{iv}, a_5^{iv}, a_3^{iv}a_5^{iv} + a_4^{iv}, a_3^{iv}, a_6^{iv})$$

映射

$$\mathbf{R}(1) : \ \mathbb{A}_6 \longrightarrow \mathbb{A}_7$$

作用如下

$$(a_1^{vi}, \ldots, a_6^{vi}) = (a_3^v, a_1^v a_3^v + a_2^v, a_1^v, a_4^v, a_5^v, a_6^v).$$

因此

$$\mathbf{R}(1)\mathbf{R}(3) : \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_7$$

作用为

$$(a_1^{vi}, \ldots, a_6^{vi}) = (a_5^{iv}, a_1^{iv}a_5^{iv} + a_2^{iv}, a_1^{iv}, a_3^{iv}a_5^{iv} + a_4^{iv}, a_3^{iv}, a_6^{iv})$$

8.5 **L(3)R(1)R(3)** 接下来,

$$\mathbf{L}(3) : \mathbb{A}_7 \longrightarrow \mathbb{A}_8$$

将 3 与 4 互换。

由此可得

$$\mathbf{L}(3)\mathbf{R}(1)\mathbf{R}(3) : \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_8$$

充当

$$(a_1^{vii}, \ldots, a_6^{vii}) = (a_5^{iv}, a_1^{iv}a_5^{iv} + a_2^{iv}, a_3^{iv}a_5^{iv} + a_4^{iv}, a_1^{iv}, a_3^{iv}, a_6^{iv})$$

8.6 左侧。十四行诗方程的左侧为

$$C_+^{mm} = \mathbf{L}(3)\mathbf{R}(1)\mathbf{R}(3)\mathbf{L}(5)\mathbf{L}(2)\mathbf{R}(3)\mathbf{R}(1) : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_8$$

并如下运作

$$(a_1^{vii}, \ldots, a_6^{vii}) = (a_6, a_3a_6 + a_5, a_1a_3a_6 + a_2a_6 + a_1a_5 + a_4, a_3, a_1a_3 + a_2, a_1)$$

下方道路

8.7 ● 映射

$$\mathbf{R}(4) : \ \mathbb{B}_1 \longrightarrow \mathbb{B}_2$$

作用如下

$$(a_1'', \ldots, a_6'') = (a_1', a_2', a_3', a_6', a_4'a_6' + a_5', a_4')$$

映射

$$\mathbf{R}(2) : \ \mathbb{B}_2 \longrightarrow \mathbb{B}_3$$

作用如下

$$(a_1''', \ldots, a_6''') = (a_1'', a_4'', a_2''a_4'' + a_3'', a_2'', a_5'', a_6'')$$

因此

$$\mathbf{R}(2)\mathbf{R}(4) : \ \mathbb{B}_1 \longrightarrow \mathbb{B}_3$$

作用如下

$$(a_1''', \ldots, a_6''') = (a_1', a_6', a_2'a_6' + a_3', a_2', a_4'a_6' + a_5', a_4')$$

8.8 ● 映射

$$\mathbf{L}(3):\mathbb{B}_0\longrightarrow\mathbb{B}_1$$

将 3 与 4 互换。

因此，映射

$$\mathbf{R}(2)\mathbf{R}(4)\mathbf{L}(3):\ \mathbb{B}_0\longrightarrow\mathbb{B}_3$$

作用如下

$$(a_1''',\ldots,a_6''')=(a_1,a_6,a_2a_6+a_4,a_2,a_3a_6+a_5,a_3)$$

8.9 ● 映射

$$\mathbf{R}(2):\mathbb{B}_5\longrightarrow\mathbb{B}_6$$

作用为

$$(a_1^{vi},\ldots,a_6^{vi})=(a_1^{v},a_4^{v},a_2^{v}a_4^{v}+a_3^{v},a_2^{v},a_5^{v},a_6^{v})$$

映射

$$\mathbf{R}(4):\mathbb{B}_6\longrightarrow\mathbb{B}_7$$

充当

$$(a_1^{vii},\ldots,a_6^{vii})=(a_1^{vi},a_2^{vi},a_3^{vi},a_6^{vi},a_4^{vi}a_6^{vi}+a_5^{vi},a_4^{vi})$$

因此

$$\mathbf{R}(4)\mathbf{R}(2):\mathbb{B}_5\longrightarrow\mathbb{B}_7$$

充当

$$(a_1^{vii},\ldots,a_6^{vii})=(a_1^{v},a_4^{v},a_2^{v}a_4^{v}+a_3^{v},a_6^{v},a_2^{v}a_6^{v}+a_5^{v},a_2^{v})$$

8.10 ● 映射

$$\mathbf{L}(1)\mathbf{L}(4):\mathbb{B}_3\longrightarrow\mathbb{B}_5$$

将 1 与 2、4 与 5 互换。

由此可得

$$\mathbf{R}(4)\mathbf{R}(2)\mathbf{L}(1)\mathbf{L}(4):\mathbb{B}_3\longrightarrow\mathbb{B}_7$$

充当

$$(a_1^{vii},\ldots,a_6^{vii})=(a_2''',a_5''',a_1'''a_5'''+a_3''',a_6''',a_1'''a_6'''+a_4''',a_1''')$$

8.11 右端。 十四行诗方程的右端为

$$C_6^{mm}=\mathbf{R}(4)\mathbf{R}(2)\mathbf{L}(1)\mathbf{L}(4)\mathbf{R}(2)\mathbf{R}(4)\mathbf{L}(3):\mathbb{B}_0\longrightarrow\mathbb{B}_3\longrightarrow\mathbb{B}_7$$

并按如下方式运作

$$(a_1^{vii},\ldots,a_6^{vii})=(a_6,a_3a_6+a_5,a_1a_3a_6+a_1a_5+a_2a_6+a_4,a_3,a_1a_3+a_2,a_1),$$

这与左侧一致，也就是说，十四行诗方程得以满足。

9 另一种三重运算

9.1 ● 对于一个 2×2 矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

我们用 M_{13} 表示矩阵

$$M_{13}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

9.2 三角性引理。 若 A、B、C 是 c-上三角 2×2 矩阵，则三重乘积 $A_{12}B_{13}C_{23}$ 和 $A_{23}B_{13}C_{12}$ 都是 c-上三角的。 □

9.3 R**-矩阵。** 考虑一个矩阵

$$A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Then

$$A(a_1)_{12}A(a_2)_{13}A(a_3)_{23}=\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1+a_3 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$A(a_1)_{23}A(a_2)_{13}A(a_3)_{12}=\begin{pmatrix} a_2a_3 & a_2 & 1 \\ a_1+a_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们通过方程定义相应的 R-矩阵

$$A(a_1)_{12}A(a_2)_{13}A(a_3)_{23}=A(a_1')_{23}A(a_2')_{13}A(a_3')_{12}$$

它等价于一个方程组

$$a_1a_2=a_2'a_3'$$
$$a_1+a_3=a_2'$$
$$a_2=a_1'+a_3'$$

or

$$R:(a_1',a_2',a_3')=(\frac{a_2a_3}{a_1+a_3},a_1+a_3,\frac{a_1a_2}{a_1+a_3}).$$

9.4 R **是幂等的。** 注意， $R^2=$Id。

9.5 十四行诗方程。此 R-矩阵应满足如下形式的十四行诗方程

$$L(3)R(123)R(124)L(1)L(4)R(134)R(234) =$$
$$= R(234)R(134)L(2)L(5)R(124)R(123)L(3),$$

或用符号表示

$$LRRLLRR = RRLLRRL$$

我们将使用以下记号:

$$\mathbb{A}(12,13,14,23,24,34) = \mathbb{A}_1,\ \mathbb{A}(12,13,14,34,24,23) = \mathbb{A}_2$$

$$\mathbb{A}(12,34,14,13,24,23) = \mathbb{A}_3,\ \mathbb{A}(34,12,14,24,13,23) = \mathbb{A}_5,$$
$$\mathbb{A}(34,24,14,12,13,23) = \mathbb{A}_6,\ \mathbb{A}(34,24,14,23,13,12) = \mathbb{A}_7,$$
$$\mathbb{A}(34,24,23,14,13,12) = \mathbb{A}_8$$

表示左侧，而

$$\mathbb{A}_1 = \mathbb{B}_0,\ \mathbb{A}(12,13,23,14,24,34) = \mathbb{B}_1,$$

$$\mathbb{A}(23,13,12,14,24,34) = \mathbb{B}_2,\ \mathbb{A}(23,13,24,14,12,34) = \mathbb{B}_3,$$
$$\mathbb{A}(23,24,13,14,34,12) = \mathbb{B}_5, \mathbb{A}(23,24,34,14,13,12) = \mathbb{B}_6, \mathbb{A}_8 = \mathbb{B}_7$$

表示右侧。

9.6 C_{++}**.** 映射

$$R(234) : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$$

充当

$$(a_1', \ldots, a_6') = (a_1, a_2, a_3, \frac{a_5a_6}{a_4+a_6}, a_4+a_6, \frac{a_4a_5}{a_4+a_6})$$

映射

$$R(134) : \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_3$$

充当

$$(a_1'', \ldots, a_6'') = (a_1', \frac{a_3'a_4'}{a_2'+a_4'}, a_2'+a_4', \frac{a_2'a_3'}{a_2'+a_4'}, a_5', a_6')$$

由此可得，映射

$$R(134)R(234) : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_3$$

充当

$$(a_1'', \ldots, a_6'') = (a_1, \frac{a_3a_5a_6}{a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6}, \frac{a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6}{a_4+a_6},$$
$$\frac{a_2a_3(a_4+a_6)}{a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6}, a_4+a_6, \frac{a_4a_5}{a_4+a_6}).$$

映射

$$L(1)L(4) :\ \mathbb{A}_3 \longrightarrow \mathbb{A}_5$$

将 1 与 2、4 与 5 互换，因此映射

$$C_{++} := L(1)L(4)R(134)R(234) : \ \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_5$$

充当

$$(a_1^{iv}, \ldots, a_6^{iv}) = (\frac{a_3a_5a_6}{a_2a_4 + a_2a_6 + a_5a_6}, a_1, \frac{a_2a_4 + a_2a_6 + a_5a_6}{a_4 + a_6},$$
$$a_4 + a_6, \frac{a_2a_3(a_4 + a_6)}{a_2a_4 + a_2a_6 + a_5a_6}, \frac{a_4a_5}{a_4 + a_6}).$$

9.7 C_{+-}. 映射

$$R(124) : \ \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_6$$

充当

$$(a_1^v, \ldots, a_6^v) = (a_1^{iv}, \frac{a_3^{iv}a_4^{iv}}{a_2^{iv} + a_4^{iv}}, a_2^{iv} + a_4^{iv}, \frac{a_2^{iv}a_3^{iv}}{a_2^{iv} + a_4^{iv}}, a_5^{iv}, a_6^{iv}).$$

映射

$$R(123) : \ \mathbb{A}_6 \longrightarrow \mathbb{A}_7$$

充当

$$(a_1^{vi}, \ldots, a_6^{vi}) = (a_1^v, a_2^v, a_3^v, \frac{a_5^va_6^v}{a_4^v + a_6^v}, a_4^v + a_6^v, \frac{a_4^va_5^v}{a_4^v + a_6^v})$$

由此可知，映射

$$R(123)R(124) : \ \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_7$$

充当

$$(a_1^{vi}, \ldots, a_6^{vi}) = (a_1^{iv}, \frac{a_3^{iv}a_4^{iv}}{a_2^{iv} + a_4^{iv}}, a_2^{iv} + a_4^{iv},$$
$$\frac{a_5^{iv}a_6^{iv}(a_2^{iv} + a_4^{iv})}{a_2^{iv}a_3^{iv} + a_2^{iv}a_6^{iv} + a_4^{iv}a_6^{iv}}, \frac{a_2^{iv}a_3^{iv} + a_2^{iv}a_6^{iv} + a_4^{iv}a_6^{iv}}{a_2^{iv} + a_4^{iv}}, \frac{a_2^{iv}a_3^{iv}a_5^{iv}}{a_2^{iv}a_3^{iv} + a_2^{iv}a_6^{iv} + a_4^{iv}a_6^{iv}}).$$

映射

$$L(3) : \mathbb{A}_7 \longrightarrow \mathbb{A}_8$$

将 3 与 4 互换，因此

$$C_{+-} := L(3)R(123)R(124) : \ \mathbb{A}_5 \longrightarrow \mathbb{A}_8$$

充当

$$(a_1^{vii}, \ldots, a_6^{vii}) = (a_1^{iv}, \frac{a_3^{iv}a_4^{iv}}{a_2^{iv} + a_4^{iv}}, \frac{a_5^{iv}a_6^{iv}(a_2^{iv} + a_4^{iv})}{a_2^{iv}a_3^{iv} + a_2^{iv}a_6^{iv} + a_4^{iv}a_6^{iv}},$$
$$a_2^{iv} + a_4^{iv}, \frac{a_2^{iv}a_3^{iv} + a_2^{iv}a_6^{iv} + a_4^{iv}a_6^{iv}}{a_2^{iv} + a_4^{iv}}, \frac{a_2^{iv}a_3^{iv}a_5^{iv}}{a_2^{iv}a_3^{iv} + a_2^{iv}a_6^{iv} + a_4^{iv}a_6^{iv}}).$$

9.8 左侧 十四行诗方程的左侧

$$C_+ := C_{+-}C_{++} = L(3)R(123)R(124)L(1)L(4)R(134)R(234) : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_8$$

作用如下

$$= (\frac{a_3a_5a_6}{a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6}, \frac{a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6}{a_1+a_4+a_6}, \frac{a_2a_3a_4a_5(a_1+a_4+a_6)}{(a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5)(a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6)},$$

$$a_1+a_4+a_6, \frac{a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5}{a_1+a_4+a_6}, \frac{a_1a_2a_3}{a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5})$$

我们使用了两个恒等式

$$a_1a_2a_4+a_1a_2a_6+a_1a_5a_6+a_1a_4a_5+a_4a_4a_5+a_4a_5a_6 =$$

$$= (a_4+a_6)(a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5), \tag{9.1}$$

and

$$a_1a_2a_4+a_2a_4a_4+a_2a_4a_6+a_1a_2a_6+a_1a_5a_6+a_4a_5a_6 =$$

$$= (a_1+a_4)(a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6) \tag{9.2}$$

第一个恒等式意味着

$$a_2^{iv}a_3^{iv}+a_2^{iv}a_6^{iv}+a_4^{iv}a_6^{iv} = a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5$$

由此可得

$$(a_1^{vii}, \dots, a_6^{vii}) =$$

$$= (\frac{a_3a_5a_6}{a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6}, \frac{a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6}{a_1+a_4+a_6}, \frac{a_2a_3a_4a_5(a_1+a_4+a_6)}{(a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5)(a_2a_4+a_2a_6+a_5a_6)},$$

$$a_1+a_4+a_6, \frac{a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5}{a_1+a_4+a_6}, \frac{a_1a_2a_3}{a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5})$$

9.9 下方道路。 C_{-+}。 映射

$$R(123): \mathbb{B}_1 \longrightarrow \mathbb{B}_2$$

作用如下

$$(a_1'', \dots, a_6'') = (\frac{a_2'a_3'}{a_1'+a_3'}, a_1'+a_3', \frac{a_1'a_2'}{a_1'+a_3'}, a_4', a_5', a_6')$$

映射

$$R(124): \mathbb{B}_2 \longrightarrow \mathbb{B}_3$$

作用如下

$$(a_1''', \dots, a_6''') = (a_1'', a_2'', \frac{a_4''a_5''}{a_3''+a_5''}, a_3''+a_5'', \frac{a_3''a_4''}{a_3''+a_5''}, a_6'')$$

因此，映射

$$R(124)R(123):\ \mathbb{B}_1 \longrightarrow \mathbb{B}_3$$

作用如下

$$(a_1''', \ldots, a_6''') = (\frac{a_2'a_3'}{a_1'+a_3'}, a_1'+a_3', \frac{a_4'a_5'(a_1'+a_3')}{a_1'a_2'+a_1'a_5'+a_3'a_5'},$$

$$\frac{a_1'a_2'+a_1'a_5'+a_3'a_5'}{a_1'+a_3'}, \frac{a_1'a_2'a_4'}{a_1'a_2'+a_1'a_5'+a_3'a_5'}, a_6')$$

映射

$$L(3):\ \mathbb{B}_0 \longrightarrow \mathbb{B}_1$$

将 3 与 4 互换。由此可知，映射

$$C_{-+} := R(124)R(123)L(3):\ \mathbb{B}_0 \longrightarrow \mathbb{B}_3$$

作用为

$$(a_1''', \ldots, a_6''') = (\frac{a_2a_4}{a_1+a_4}, a_1+a_4, \frac{a_3a_5(a_1+a_4)}{a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5},$$

$$\frac{a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5}{a_1+a_4}, \frac{a_1a_2a_3}{a_1a_2+a_1a_5+a_4a_5}, a_6)$$

9.10 C_{--}. 映射

$$R(134) : \mathbb{B}_5 \longrightarrow \mathbb{B}_6$$

作用如下

$$(a_1^{vi}, \ldots, a_6^{vi}) = (a_1^v, a_2^v, \frac{a_4^va_5^v}{a_3^v+a_5^v}, a_3^v+a_5^v, \frac{a_3^va_4^v}{a_3^v+a_5^v}, a_6^v)$$

映射

$$R(234) : \mathbb{B}_6 \longrightarrow \mathbb{B}_7$$

的作用如下

$$(a_1^{vii}, \ldots, a_6^{vii}) = (\frac{a_2^{vi}a_3^{vi}}{a_1^{vi}+a_3^{vi}}, a_1^{vi}+a_3^{vi}, \frac{a_1^{vi}a_2^{vi}}{a_1^{vi}+a_3^{vi}}, a_4^{vi}, a_5^{vi}, a_6^{vi}).$$

由此可知，映射

$$R(234)R(134) : \mathbb{B}_5 \longrightarrow \mathbb{B}_7$$

的作用如下

$$(a_1^{vii}, \ldots, a_6^{vii}) = (\frac{a_2^va_4^va_5^v}{a_1^va_3^v+a_1^va_5^v+a_4^va_5^v}, \frac{a_1^va_3^v+a_1^va_5^v+a_4^va_5^v}{a_3^v+a_5^v}, \frac{a_1^va_2^v(a_3^v+a_5^v)}{a_1^va_3^v+a_1^va_5^v+a_4^va_5^v},$$

$$a_3^v+a_5^v, \frac{a_3^va_4^v}{a_3^v+a_5^v}, a_6^v).$$

映射

$$L(5)L(2) : \mathbb{B}_3 \longrightarrow \mathbb{B}_5$$

将 2 与 3、5 与 6 互换。

由此可得

$$C_{--} := R(234)R(134)L(5)L(2) : \mathbb{B}_3 \longrightarrow \mathbb{B}_7$$

充当

$$(a_1^{vii}, \dots, a_6^{vii}) = (\frac{a_3''' a_4''' a_6'''}{a_1''' a_2''' + a_1''' a_6''' + a_4''' a_6'''}, \frac{a_1''' a_2''' + a_1''' a_6''' + a_4''' a_6'''}{a_2''' + a_6'''}, \frac{a_1''' a_3''' (a_2''' + a_6''')}{a_1''' a_2''' + a_1''' a_6''' + a_4''' a_6'''},$$

$$a_2''' + a_6''', \frac{a_2''' a_4'''}{a_2''' + a_6'''}, a_5''').$$

9.11 右端。 十四行诗方程的右端

$$C_- := C_{--}C_{-+} = R(234)R(134)L(5)L(2)R(124)R(123)L(3) : \mathbb{B}_0 \longrightarrow \mathbb{B}_7$$

充当

$$(a_1^{vii}, \dots, a_6^{vii}) =$$

$$= (\frac{a_3 a_5 a_6}{a_2 a_4 + a_2 a_6 + a_5 a_6}, \frac{a_2 a_4 + a_2 a_6 + a_5 a_6}{a_1 + a_4 + a_6}, \frac{a_2 a_3 a_4 a_5 (a_1 + a_4 + a_6)}{(a_1 a_2 + a_1 a_5 + a_4 a_6)(a_2 a_4 + a_2 a_6 + a_5 a_6)},$$

$$a_1 + a_4 + a_6, \frac{a_1 a_2 + a_1 a_5 + a_4 a_6}{a_1 + a_4 + a_6}, \frac{a_1 a_2 a_3}{a_1 a_2 + a_1 a_5 + a_4 a_6})$$

我们使用了单位矩阵恒等式

$$a_1 a_2 a_4 + a_2 a_4 a_4 + a_2 a_4 a_6 + a_1 a_2 a_6 + a_1 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_6 =$$

$$= (a_1 + a_4)(a_2 a_4 + a_2 a_6 + a_5 a_6) \tag{9.3}$$

这意味着

$$a_1''' a_2''' + a_1''' a_6''' + a_4''' a_6''' = a_2 a_4 + a_2 a_6 + a_5 a_6 \tag{9.4}$$

我们看到 $C_+ = C_-$，即十四行诗方程成立。

10 双参数上三角情形

本节中，我们提出一个涵盖 Lusztig 翻转和 Berenstein–Zelevinsky 翻转的例子。

10.1 考虑一个矩阵 $\begin{pmatrix} a^{-1} & x \\ 0 & a \end{pmatrix}$。

对于分解 121，我们有

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & x & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & y \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{-1} & z & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{ac} & \frac{cx}{b}+\frac{z}{a} & xy \\ 0 & \frac{ac}{b} & ay \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

对于分解 212，我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'^{-1} & x' \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'^{-1} & y' & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c'^{-1} & z' \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b'} & \frac{y'}{c'} & y'z' \\ 0 & \frac{b'}{a'c'} & \frac{b'z'}{a'}+c'x' \\ 0 & 0 & a'c' \end{pmatrix} \tag{10.2}$$

因此，变换 $121 \to 212$ 给出了对应

$$(a,b,c,x,y,z) \to$$

$$\to (b/c',\, ac,\, c',\, \frac{zyb}{c'}\frac{1}{za^{-1}b+xc},\, \frac{c'}{b}(za^{-1}b+xc),\, \frac{xyb}{c'}\frac{1}{za^{-1}b+xc}). \tag{10.3}$$

No注意，若在 (10.3) 中令 $a=b=c=c'=1$，便得到 Lusztig 变换 n

$$(1,1,1,x,y,z) \to (1,1,1,\frac{zy}{x+z}, x+z, \frac{xy}{x+z}).$$

若令 $x=y=z=1$ 和 $c'=a+\frac{b}{c}$，便得到 Sergeev 情形（β），也就是上三角版本的 BZ 变换，即在 BZ 变换中交换 a 和 c，

$$(a,b,c,1,1,1) \to (\frac{bc}{a+bc}, ac, a+\frac{b}{c}, 1, 1, 1).$$

对应 (10.3) 可以部分分解，也就是说，可以考虑一个对应

$$(a,b,c) \to (\frac{b}{c'}, ac, c'). \tag{10.4}$$

(10.4) 的上路径如下

$$(a,b,c,d,e,f) \to (\frac{b}{c'}, ac, c', d, e, f) \to (\frac{b}{c'}, ac, \frac{d}{e'}, c'e, e', f) \to (\frac{b}{c'}, \frac{d}{e'}, acf, \frac{c'e}{f'}, f', e') \to$$

$$(\frac{d}{d'e'}, \frac{be}{f'}, acf, \overline{d}, f', e') \tag{10.5}$$

下路径为

$$(a,b,c,d,e,f) \to (a,b,d,\frac{e}{f_1}, cf, f_1) \to (a, \frac{d}{e_1}, \frac{be}{f_1}, e_1, cf, f_1) \to (\frac{d}{e_1'}, \frac{be}{f_1 d_1}, acf, d_1, e_1, f_1) \to$$

$$(\frac{d}{e_1}, \frac{be}{f_1 d_1}, acf, \frac{e_1}{\overline{f}_1}, d_1 f_1, \overline{f}_1) \tag{10.6}$$

那么，(10.5) =(10.6) 可写为

$$\frac{d}{e_1}=\frac{d}{d'e'},$$
$$\frac{be}{f_1d_1}=\frac{be}{f'},$$
$$acf=acf,$$
$$\frac{e_1}{\overline{f}_1}=\overline{d},$$
$$c_1f_1=f',$$
$$\overline{f}_1=e'.$$

由此方程组可得

$$f'=c_1f_1,\ e'=\overline{f}_1,\ \overline{d}=\frac{e_1}{\overline{f}_1}. \tag{10.7}$$

该方程组由 (a、 b、 c、 d、 e、 f) 坐标的上路径与下路径相等得到。

10.2 上路径 2

这里我们计算以下变换的上路径

$$(x,y,z,u,v,w)$$

在 (10.3) 之下。所得的六元组具有如下形式

$$(\frac{1}{e'\overline{d}}P_1,\frac{\overline{d}e'}{f'}P_2,\frac{f'}{e'^2\overline{d}}P_3,f'P_4,,\frac{e'}{f'}P_5,\frac{1}{e'}P_6), \tag{10.8}$$

其中， P_i 是 (a、 b、 c、 d、 e、 f、 x、 y、 z、 u、 v、 w) 中的有理函数。

10.3 下路径 2

下路径将 (x， y， z， u， v， w) 映射为六元组

$$(\frac{1}{e_1}R_1,\frac{e_1}{f_1d_1}R_2,\frac{f_1d_1}{e_1\overline{f}_1}R_3,f_1d_1R_4,\frac{\overline{f}_1}{d_1f_1}R_5,\frac{1}{\overline{f}_1}R_6), \tag{10.9}$$

其中， R_i 是 (a， b， c， d， e， f， x， y， z， u， v， w) 的有理函数。

为保证这些路径的一致性，并考虑到 (10.7)，我们得到关于 12 个变量 (a， b， c， d， e， f， x， y， z， uv， w) 的以下六个方程，

$$P_i=R_i,\qquad i=1,\cdots,6.$$

11 某些特定情形下的四面体方程

(a)*Lusztig* 翻转

11.1 ● 本节旨在证明 [SV], 定理 8.1。该定理指出，图表 (6.12) 是交换的，其中 R 表示 Lusztig 映射

$$(a,b,c)\mapsto(bc/(a+c),a+c,ab/(a+c)),$$

参见 [L],命题 42.2.4 的证明，第 336 页。

我们使用 [SV], 8.2.2 中的记号。

11.2 **●记号与恒等式。** 线性:

$$\alpha=a_1+a_3;\gamma=a_3+a_6;\ \beta=a_1+a_3+a_6;$$

二次:

$$\delta=a_2a_3+a_2a_6+a_5a_6;\ \epsilon=a_1a_2+a_1a_5+a_3a_5.$$

立方恒等式:

$$\mu:=a_6\epsilon+a_2a_3\beta=\alpha\delta, \tag{11.1}$$

$$\nu:=a_1\delta+a_3a_5\beta=\gamma\epsilon. \tag{11.2}$$

GO!

11.3 ● 一方面：这种方式

$$\begin{array}{ccc}\cdot&\longrightarrow&\cdot\\ \uparrow&&\downarrow\end{array}$$

给出

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&2&1\\ a_6&a_5&a_4&a_3&a_2&a_1\end{pmatrix}\xrightarrow{L(3)}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&2&1\\ a_6&a_5&a_3&a_4&a_2&a_1\end{pmatrix}\xrightarrow{R(1)}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&2&3&2&1\\ a_3a_5/\gamma&\gamma&a_5a_6/\gamma&a_4&a_2&a_1\end{pmatrix}\xrightarrow{R(3)}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&3&2&3&1\\ a_3a_5/\gamma&\gamma&a_2a_4\gamma/\delta&\delta/\gamma&a_4a_5a_6/\delta&a_1\end{pmatrix}\xrightarrow{L(2)L(5)}$$

$$\begin{pmatrix}2&3&1&2&1&3\\ a_3a_5/\gamma&a_2a_4\gamma/\delta&\gamma&\delta/\gamma&a_1&a_4a_5a_6/\delta\end{pmatrix}\xrightarrow{R(3)}$$

$$\begin{pmatrix}2&3&2&1&2&3\\ a_3a_5/\gamma&a_2a_4\gamma/\delta&a_1\delta/\gamma\beta&\beta&\delta/\beta&a_4a_5a_6/\delta\end{pmatrix}\xrightarrow{R(1)}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&3&1&2&3\\ a_1a_2a_4/\epsilon&\epsilon/\beta&a_2a_3a_4a_5\beta/\delta\epsilon&\beta&\delta/\beta&a_4a_5a_6/\delta\end{pmatrix}$$

最后一步使用立方恒等式 (11.2)。

11.4 ● 另一方面,

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \uparrow \\ \cdot & \longrightarrow & \cdot \end{array}$$

得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_1a_2/\alpha & \alpha & a_2a_3/\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ a_6 & a_1a_2a_4/\epsilon & \epsilon/\alpha & a_4a_5\alpha/\epsilon & \alpha & a_2a_3/\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{L(1)L(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ a_1a_2a_4/\epsilon & a_6 & \epsilon/\alpha & \alpha & a_4a_5\alpha/\epsilon & a_2a_3/\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ a_1a_2a_4/\epsilon & \epsilon/\beta & \beta & a_6\epsilon/\alpha\beta & a_4a_5\alpha/\epsilon & a_2a_3/\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ a_1a_2a_4/\epsilon & \epsilon/\beta & \beta & a_2a_3a_4a_5\beta/\epsilon\delta & \delta/\beta & a_4a_5a_6/\delta \end{pmatrix} \xrightarrow{L(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ a_1a_2a_4/\epsilon & \epsilon/\beta & a_2a_3a_4a_5\beta/\delta\epsilon & \beta & \delta/\beta & a_4a_5a_6/\delta \end{pmatrix}$$

最后一步用到了立方恒等式 **(11.1)**。

两种方法得出了相同的答案，这证明了我们的断言。 □

另一种证明见 [L], 命题 42.2.4。

(b)*Sergeev* (α) 翻转

11.5 ● 考虑另一个对合

$$\mathbf{R}: \ \mathbb{C}(a,b,c) \longrightarrow \mathbb{C}(a,b,c)$$

定义为

$$a' = c, \ b' = ac - b, \ c' = a.$$

它与 [S], (17) 在 $k = -1$ 时重合。

11.6 有用的量。

$$\alpha = \delta' = a_1a_3 - a_2; \ \alpha' = \delta = a_3a_6 - a_5$$

$$\beta = a_1a_5 - a_4; \ \beta' = a_2a_6 - a_4$$

$$\gamma = \gamma' = a_6\alpha - \beta = a_1\alpha' - \beta' =$$

$$= a_1a_3a_6 - a_1a_5 - a_2a_6 + a_4.$$

一个立方关系:

$$a_6\alpha - \beta = a_1'\alpha' - \beta' \tag{2.2.1}$$

11.7 引理。

$$\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ 1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_6 \end{vmatrix}.$$

□

11.8 演化 1。 这种方式

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \longrightarrow & \cdot \\ \uparrow & & \downarrow \end{array}$$

给出

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ a_6 & a_5 & a_3 & a_4 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ a_3 & \alpha' & a_6 & a_4 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ a_3 & \alpha' & a_2 & \beta' & a_6 & a_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L(2)L(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ a_3 & a_2 & \alpha' & \beta' & a_1 & a_6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \gamma' & \alpha' & a_6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ a_1 & \delta' & a_3 & \gamma' & \alpha' & a_6 \end{pmatrix}$$

11.9 演化 2。 这种方式

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \uparrow \\ \cdot & \longrightarrow & \cdot \end{array}$$

给出

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_1 & \alpha & a_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ a_6 & a_1 & \beta & a_5 & \alpha & a_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L(1)L(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ a_1 & a_6 & \beta & \alpha & a_5 & a_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ a_1 & \alpha & \gamma & a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ a_1 & \alpha & \gamma & a_3 & \delta & a_6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L(3)}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ a_1 & \alpha & a_3 & \gamma & \delta & a_6 \end{pmatrix}$$

现在我们回想一下， $\alpha = \delta', \delta = \alpha'$ 和 $\gamma = \gamma'$，由此两种方法得出相同的结果。

11.10 ● 因此，自然可以预期，演化中一般会出现通用三角矩阵的子式。

12 长乘积与 $S(n)$ 演化。

12.1 $c(n)$**重乘积。** 取 n，于是我们有矩阵 $A(a,\ b,\ c)_i \in Mat_n$、$1 \leq n-1$。

取 $S(n)$ 的 Coxeter 生成元 s_1、.....、s_{n-1}，并考虑将 $w_0(n)$ 分解为 s_i 的乘积的一个约化分解

$$w_0(n) = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_{c(n)}},\ c(n) = n(n-1)/2. \tag{12.1}$$

给定 $3c(n)$ 个数

$$\mathbf{a} = (a_1, b_1, c_1, \dots, a_{c(n)}, b_{c(n)}, c_{c(n)}) \tag{12.2}$$

考虑乘积

$$A(\mathbf{a}) = A(a_1, b_1, c_1)_{i_1} A(a_2, b_2, c_2)_{i_2} \dots A(a_{c(n)}, b_{c(n)}, c_{c(n)})_{i_{c(n)}} \in Mat_n$$

12.2 定理。 对于任意约化分解 *(12.1)*，这个$(n \times n)$矩阵是 c-上三角的，$A(\mathbf{a}) \in B_+^c$。

12.3 截断乘积。 对于任意 $k, 1 \leq k \leq c(n)$，记

$$w_k = w_0(n)_{\leq k} = s_{i_1} \dots s_{i_k},$$

and

$$w'_k = w_0(n)_{\geq k+1} = s_{i_{k+1}} \dots s_{i_{c(n)}}$$

Let

$$A(\mathbf{a})_{\leq k} = A(a_1, b_1, c_1)_{i_1} A(a_2, b_2, c_2)_{i_2} \dots A(a_k, b_k, c_k)_{i_k}.$$

在约化分解 (12.1) 中，有两个特殊的分解：形如以下形式的最小分解

$$w_0(n) = s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 \dots,$$

以及形如以下形式的最大分解

$$w_0(n) = s_n s_{n-1} s_n s_{n-2} s_{n-1} s_n \dots.$$

下面的断言推广了（6.1）。

12.4 定理。 对于任意 $1 \leq k \leq c(n)$，考虑与 $w_0(n)$的最小或最大约化分解相对应的矩阵 $A(\mathbf{a})_{\leq k}$。

(a) w_k 是唯一的排列 $w_k \in S(n)$，满足 $\iota(w_k)A(\mathbf{a})_{\leq k} \in B_+^c(n)$。(b) w'_k 是唯一的排列 $w'_k \in S(n)$，满足 $A(\mathbf{a})_{\leq k}\iota(w'_k) \in B_+^c(n)$。

证明思路。 只需假设所有 $a_i = b_i = c_i = 1$。

此外，以下更一般的陈述成立：

12.5 定理。 任取 $w_0(n)$的一个约化分解。对于任意 $1 \leq k \leq n$，考虑相应的矩阵 $A(\mathbf{a})_{\leq k}$。

(a) w_k 是唯一的排列 $w_k \in S(n)$，满足 $\iota(w_k)A(\mathbf{a})_{\leq k} \in B_+^c(n)$。(b) w'_k 是唯一的排列 $w'_k \in S(n)$，满足 $A(\mathbf{a})_{\leq k}\iota(w'_k) \in B_+^c(n)$。

13 朗斯基演化

在本节中，我们假设基环包含 $\mathbb{Q}$。

13.1 过程开始。 上述讨论使我们能够描述相应的朗斯基演化。共有四种：上三角和下三角演化，以及 c-上三角和 c-下三角演化。

考虑 c-上三角情形。固定一个整数 $n \geq 1$。与 4.4 和 4.5 类似，我们从一个多项式集合 $u_i(x) \in \mathbb{C}[x], u_i(x) = x^{i-1}/(i-1)! + \ldots, 1 \leq i \leq n$ 开始。这里 $\ldots$ 表示次数较高的项。

固定一个约化分解 (12.1)。选取数值 (12.2)。我们有

$$A(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \cdot \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + \ldots \\ d_2 x + \ldots \\ \cdot \\ d_n x^{n-1}/(n-1)! + \ldots \end{pmatrix}, \ d_i \in \mathbb{C}^*,$$

参见 4.1。

13.2 朗斯基坐标。 对于任意 $1 \leq k \leq n$，根据定理 12.5，存在元素 $w_k \in S(n)$，使得 $\iota(w_k)A(\mathbf{a})_{\leq k} \in B_+^c(n)$。

考虑列向量

$$\begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \cdot \\ v_{nk} \end{pmatrix} = \iota(w_k)A(\mathbf{a})_{\leq k} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \cdot \\ u_1 \end{pmatrix}$$

我们定义

$$w_k(x) := Wr(v_{1k}(x), \ldots, v_{kk}(x)).$$

于是我们有

$$w_k(x) = e_i + \ldots, \ e_i \in \mathbb{C}^*.$$

参考文献

[BZ] A. Berenstein, A. Zelevinsky, 《张量积重数、典范基与全正簇》, 《数学发明》 143（2001）, 77–128。

[CG] N.Chriss, V.Ginzburg, 《表示论与复几何》, Birkh¨auser, 1997。

[J] 关于四元性的卡尔·荣格, https://carljungdepthpsychologysite.blog/2020/07/20/quaternity/

[IKR]S. Igonin, S. Konstantinou-Rizos, 《局部杨-巴克斯特对应与扎莫洛奇科夫四面体方程的集合论解》, arXiv:2302.03059

[Gi] J.Giraud, 《非阿贝尔上同调》, 施普林格出版社, 1971。

[L] J.Lusztig, 《量子群导论》, Birkh¨auser, 1993。

[MS] Yu.I.Manin、V.V.Schechtman, 与对称群相关的高阶 Bruhat 序。（俄文）Funktsional. Anal. i Prilozhen.20（1986）, 第 2 期, 74 - 75。

[M] J.Milnor, 《代数 K理论导论》, 普林斯顿大学出版社, 1971年。

[SV] V.Schechtman, A.Varchenko, 《正人口》, arXiv:1912.11895

[S] S.M.Sergeev, 与铁电体情形下局部 Yang - Baxter 方程相关的函数型四面体方程解, arXiv:solv-int/970900。

[St] R.Steinberg, 《切瓦莱群讲义》, 耶鲁大学, 1967年。

G.K.: 哈克维奇信息传输问题研究所, 莫斯科, 俄罗斯 127994; koshevoyga@gmail.com V.S.: 图卢兹数学研究所, 图卢兹第三大学保罗·萨巴蒂埃校区, 119 Route de Narbonne, 31062 图卢兹, 法国; 卡夫利数理物理与宇宙学研究所, 5-1-5 Kashiwanoha, 柏市, 千叶, 277-8583 日本; schechtman@math.ups-tlse.fr A.V.: 北卡罗来纳大学教堂山分校数学系, 教堂山, NC 27599-3250, 美国; 莫斯科国立罗蒙诺索夫大学数学与力学系, 列宁山 1, 119991 莫斯科 GSP-1, 俄罗斯; anv@email.unc.edu