arXiv:2601.18041v1 [math.FA] 25 Jan 2026

非交换格拉斯曼流形上的nc函数

HYUGA ITO

Abstract. 我们说明如何将 Voiculescu 的非交换黎曼球面框架表述为全矩阵函数 [V10] ，并将其置于 Vinnikov 和 Kaliuzhnyi-Verbovetskyi 开发的非交换函数理论中 [KVV14]。随后，我们将这一框架从黎曼球面推广到格拉斯曼流形（以及旗流形）。此外，作为这一框架下非交换函数的一个例子，我们引入 Voiculescu 在黎曼球面上的非交换预解式的一种推广，研究相应的预解式方程推广，并讨论 Voiculescu 框架下无界算子谱分析的若干方面 [V10]。

1. Introduction

自 Taylor 的工作以来 [T72], 人们一直在探讨，何种概念才适用于多个非交换变量的函数。Taylor [T72，第 6] 节提出了一个候选概念，如今称为非交换函数（nc 是 non-commutative 的缩写），随后 Vinnikov 和 Kaliuzhnyi-Verbovetskyi [KVV14] 系统地发展了非交换函数理论。下面简要回顾该理论的一些概念。

设 $\mathcal{R}$ 是一个含幺交换环，且 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{R}$-模。令 $M(\mathcal{M}) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} M_n(\mathcal{M})$，其中 $M_n(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{R}} M_n(\mathcal{R})$， $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$。若对象 Ω 是 $M(\mathcal{M})$ 上的非交换集合，则 Ω 是 $M(\mathcal{M})$ 的子集，并且对任意 a, $b\in\Omega$， $a\oplus b\in\Omega$。若映射 f 从 $M(\mathcal{M})$ 上的非交换集合 Ω 映射到 $M(\mathcal{N})$，且对任意 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 都有 $f(\Omega_n)\subset M_n(\mathcal{N})$，则称其为分次映射，其中 Ω_n 表示 $\Omega\cap M_n(\mathcal{M})$。若分次映射$f\colon\Omega\to M(\mathcal{N})$ 满足对任意 $a,b\in\Omega$ 都有 $f(a\oplus b) = f(a)\oplus f(b)$，并且对任意$a\in\Omega\cap M_n(\mathcal{M})$ 以及满足 $sas^{-1}\in\Omega$ 的 $s\in GL_n(\mathcal{R})$，都有 $f(sas^{-1}) = sf(a)s^{-1}$，则称其为非交换映射。根据 [KVV14，命题 2.1],，分次函数 $f\colon\Omega\to M(\mathcal{N})$ 是非交换的，当且仅当 f 满足以下交织性质：对任意$a\in\Omega_n$, $b\in\Omega_m$ 以及 $T\in M_{n,m}(\mathcal{R})$,

$$aT = Tb \quad\Rightarrow\quad f(a)T = Tf(b). \tag{1}$$

我们还有非交换差分微分算子 Δ 的概念，它在非交换函数中扮演着某种“非交换微分算子”的角色。

在自由概率的背景下，Voiculescu [V00,V04] 独立地提出并发展了一套关于非交换变量函数的理论。其表述在概念上与 [KVV14]类似；也就是说，该理论包含相应的非交换集合、非交换函数和非交换差分微分算子，分别称为全矩阵集、全矩阵函数和*Voiculescu* 的导子-余乘法 ∂。不过，两者之间存在若干差异。

上述理论之间的一个主要区别在于各自如何构造“非交换微分算子”。对于所有非交换函数，非交换差分微分算子 Δ 都是通过反复利用交织性质（1）并结合适当的矩阵 T构造的。另一方面，Voiculescu 的导子-余乘法 ∂ 仅针对解析函数构造，并依赖于这些函数的性质（例如解析函数的 Gâteaux 导数的线性）。关于 Vinnikov 与 Kaliuzhnyi-Verbovetskyi 理论[It23、附录 B] 与 Voiculescu 理论之间关系的更精确说明，请参见 [KVV14] 和 [V04]。

上述理论是在矩阵空间上发展起来的；也就是说，它们是“仿射 框架”。Voiculescu [V10]进一步推广了他的仿射理论 [V04] 全矩阵函数

Date：2026年1月27日。

到黎曼球面上的“非仿射”空间。由此自然会问，在 [KVV14] 的背景下，能否建立相应的非仿射非交换函数框架?

本文旨在说明如何构造这样一种非仿射的 [KVV14],框架，尤其是在格拉斯曼流形（以及更一般的旗流形）情形下。一个关键观察是，即使在非仿射情形下，*1*中所述的交织性质也存在适当的替代物。事实上，我们将证明，在格拉斯曼流形情形下，存在这样一种性质（称为 格拉斯曼流形交织性质），它可以恢复上述交织性质（1）。正如交织性质（1）在 [KVV14], 中发挥了核心作用一样，格拉斯曼流形交织性质也将在非交换差分微分算子的构造中发挥核心作用。

除引言和一个附录外，本文还包括六个部分。在第 2 节中，我们将从齐性空间的角度介绍代数 $\mathcal{R}$ 上的非交换（$d; m$）-格拉斯曼流形 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 的概念。在第 3 节中，我们将在非交换（$d; m$）-格拉斯曼流形上定义非交换集合和非交换函数的概念。在此，我们将建立格拉斯曼流形交织性质（见命题 3.3）。在第 4 节中，我们将基于格拉斯曼流形交织性质，为每个 $(u, v) \in [m-d] \times [d]$ 构造一个非交换差分微分算子，记为$\widetilde{\Delta}_{u\,v}^{(d;m)}$,。在第 5 节中，我们将介绍关于 (v, u) 的（d; m）-格拉斯曼流形 $\mathcal{B}$-预解集 $\widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B})$和（$d; m$）-格拉斯曼流形$\mathcal{B}$-预解式 $\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B}|v, u)$，它们分别是非交换集合和非交换函数的例子，并且推广了 Voiculescu 的相应概念。在第 6 节中，我们将把 Voiculescu 预解方程 [V10，第 6.1] 小节推广到（$d; m$）-格拉斯曼流形 $\mathcal{B}$-预解式（见定理 6.1）。此外，我们将说明，Voiculescu 的黎曼球面框架（在 [V10], 中发展起来）可以在无界算子的谱分析中发挥作用，并给出定理 6.1 的部分逆命题（见定理 6.2）。在第 7 节中，我们将提出一些希望自然的问题。在附录 A 中，我们将说明如何将格拉斯曼框架推广到旗流形的情形。

2. The nc Grassmannian $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ over $\mathcal{R}$-algebra $\mathcal{A}$

设 $\mathcal{R}$ 为含幺交换环， $\mathcal{A}$为含幺 $\mathcal{R}$-代数。约定 $\mathcal{R}$ 的数乘作用是中心的；也就是说，对所有 $r \in \mathcal{R}$ 和 $\mathcal{A}$， $a \cdot r = r \cdot a$ 。固定 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$,$d \in [m] := \{1, 2, \ldots, m\}$。我们定义

$$H_n^{(d,m)}(\ \mathcal{A}) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, X \in GL_{m-d}(M_n(\mathcal{A})), Y \in M_{d,m-d}(M_n(\mathcal{A})), Z \in GL_d(M_n(\mathcal{A})) \right\}.$$

在 $GL_m(M_n(\mathcal{A}))$ 上的等价关系 $\sim_n^{(d;m)}$定义如下：对任意 $A, B \in GL_m(M_n(\mathcal{A}))$， $A \sim_n^{(d;m)} B$ 当且仅当存在一个元素 $\Gamma \in H_n^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 使得 $A = B\Gamma$。

定义 2.1. 我们将 $\mathcal{A}$上的非交换格拉斯曼流形 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 定义为

$$Gr^{(d;m)}(\mathcal{A}) := \bigsqcup_{n\geq 1} Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A}) \text{ with } Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A}) := GL_m(M_n(\mathcal{A}))/\sim_n^{(d;m)}.$$

在 $(d;\ m) = (1; 2)$ 的情况下，我们简写为 $Gr(\mathcal{A})$，而不写作 $Gr^{(1;2)}(\mathcal{A})$。

注记 2.2。 (1) 对任意 $A,\ B \in GL_m(M_n(\mathcal{A}))$，可知 $A \sim_n^{(d;m)} B$ 当且仅当存在元素 $Z \in H_n^{(d;m)}(\mathcal{A})$，使得 $A\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I_n \end{smallmatrix}\right] = B\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ Z \end{smallmatrix}\right]$。（2）若 $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ 且 $\mathcal{A}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的巴拿赫代数，且（d; m） $= (1; 2)$，则 $Gr(\mathcal{A})$ 无非就是 Voiculescu 的非交换黎曼球面 [V10]。

仿射空间 $M(\mathcal{A})^{d(m-d)}$ 通过以下方式嵌入到 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 中

$$M_n(\mathcal{A})^{d(m-d)} \simeq M_{m-d,d}(M_n(\mathcal{A})) \ni X \mapsto \widetilde{X} := \left[\begin{smallmatrix} 0 & I_d \otimes I_n \\ I_{m-d} \otimes I_n & X \end{smallmatrix}\right] / \sim_n^{(d;m)} \in Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A}). \tag{2}$$

~ ~设 Ω 是定义在 $M(\mathcal{A})$ 上的非交换集合（按 [KVV14] 的定义），那么很容易看出 $\Omega = \{X \mid X \in \Omega\}$是定义在 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的非交换集合。设 Ω 是定义在 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的一个集合（不一定是非交换集合）。如果 $\Omega \cap M(\mathcal{A})$ 是

⌒定义在 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的非交换集合，那么通过上述嵌入，$\Omega \cap M(\mathcal{A})$ 的原像是定义在 $M(\mathcal{A})$ 上的非交换集合。⌒因此，我们将 $\Omega \cap M(\mathcal{A})$ 与它在该嵌入下的原像视为同一对象，并用同一个符号表示。

3. Nc sets and nc functions over $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$

首先，我们将为 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 的元素定义两种运算。

定义 3.1. 对于两个元素 $A \in M_m(M_n(\mathcal{A}))$ 和 $A' \in M_m(M_{n'}(\mathcal{A}))$，我们定义 $M_m(M_{n+n'}(\mathcal{A}))$ 的一个元素 $A\widetilde{\oplus}A'$ 为 $A\widetilde{\oplus}A' = \sum_{i,j=1}^{m}(A_{i,j} \oplus A'_{i,j}) \otimes e_{i,j}^{(m)}$，其中 $A = \sum_{i,j=1}^{m} A_{i,j} \otimes e_{i,j}^{(m)}$ 和 $A' = \sum_{i,j=1}^{m} A'_{i,j} \otimes e_{i,j}^{(m)}$，且 $A_{i,j} \in M_n(\mathcal{A})$，$A'_{i,j} \in M_{n'}(\mathcal{A})$。（这里，$e_{i,j}^{(m)}$ 表示 (i,j)-位置上的 m 乘 m 矩阵单位。）

对于两个元素 $\sigma \in Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 和 $\sigma' \in Gr_{n'}^{(d;m)}(\mathcal{A})$，我们定义它们的直和 $\sigma \oplus \sigma' \in Gr_{n+n'}^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 为 $\sigma \oplus \sigma' = (A\widetilde{\oplus}A')/\sim_{n+n'}^{(d;m)}$，其中 $A \in \sigma$ 且 $A' \in \sigma'$。

对于一个元素 $\sigma \in Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 和 $g \in GL_m(M_n(\mathcal{A}))$，我们定义 $g\sigma := (gA)/\sim_n^{(d;m)}$，其中某个$A \in \sigma$。对于任意 $s \in GL_n(\mathcal{R})$，我们定义相似变换 $s \cdot \sigma \in Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 为 $s \cdot \sigma = s^{\oplus m}\sigma$。

容易看出，上述两个运算是良定义的（即这些定义与分别选取 A, A' 和 σ, σ' 的代表元无关）。以下是本文中的核心对象：

定义 3.2。若对象 $\Omega = \bigsqcup_{n\geq 1}\Omega_n$ 满足以下条件，则称其为 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的非交换集合：

(1) 每个 Ω_n 都是 $Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 的子集。
(2) 对任意 $n, n' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，都有 $\Omega_n \oplus \Omega_{n'} \subset \Omega_{n+n'}$。

设 $\mathcal{B}$ 是一个 $\mathcal{R}$-模，且 Ω 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的非交换集合。那么，函数 $f : \Omega \to M(\mathcal{B})$ 称为分次 函数，若对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，有 $f(\Omega_n) \subset M_n(\mathcal{B})$。分次函数 $f: \Omega \to M(\mathcal{B})$ 称为非交换 函数，若 f满足以下条件：

(D) 保持直和：对于任意 $\sigma, \sigma' \in \Omega$，$f(\sigma \oplus \sigma') = f(\sigma) \oplus f(\sigma')$。
(S) 保持相似性：$f(s\cdot\sigma) = \mathrm{Ad}(s)(f(\sigma)) := sf(\sigma)s^{-1}$只要 $\sigma \in \Omega_n$和 $s \in GL_n(\mathcal{R})$满足 $s \cdot \sigma \in \Omega_n$。

我们用 $\mathcal{T}_{(0)}(\Omega; \mathcal{B})$ 表示从 Ω 到 $M(\mathcal{B})$ 的所有非交换函数所组成的空间。

下面是交织性质的格拉斯曼扩张 [KVV14，命题 2。1]：

命题 3.3。设 Ω 是定义在 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的非交换集合，且 f 是从 Ω 到$M(\mathcal{B})$ 的分次函数。则以下条件等价：

(a) f 是非交换函数。
(b) f 满足以下条件：
(I) 对于任意 $n, n' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $T \in M_{n,\ n'}(\mathcal{R})$ 以及 $\sigma \in \Omega_n$, $\sigma' \in \Omega_{n'}$，我们有

$$\begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_{n'} \end{bmatrix} \cdot (\sigma \oplus \sigma') = \sigma \oplus \sigma' \quad \Rightarrow \quad f(\sigma)T = Tf(\sigma').$$

证明。(a)⇒(b)：直接计算可得。
(b)⇒(a)：我们可以验证以下等式：

$$\begin{bmatrix} I_{n+n'} & T_1 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot ((\sigma \oplus \sigma') \oplus \sigma) = (\sigma \oplus \sigma') \oplus \sigma, \quad T_1 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{n',n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n+n'} & T_2 \\ 0 & I_{n'} \end{bmatrix} \cdot ((\sigma \oplus \sigma') \oplus \sigma') = (\sigma \oplus \sigma') \oplus \sigma', \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0_{n,n'} \\ I_{n'} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & s^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot (\sigma \oplus (s \cdot \sigma)) = \sigma \oplus (s \cdot \sigma) \tag{5}$$

对于一个 y $\sigma \in \Omega_n$、$\sigma' \in \Omega_{n'}$ 以及 $s \in GL_n(\mathcal{R})$。利用 (b) 和等式 (3)、(4)，我们得到

$$f(\sigma \oplus \sigma') \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(\sigma \oplus \sigma') \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(\sigma') \end{bmatrix}.$$

类似地，利用等式（5）中的 (b)，我们得到 $f(\sigma) s^{-1} = s^{-1} f(s \cdot \sigma)$，正如所需。 □

备注 3.4. 在 $(d; m) = (1, 2)$ 的情形下，考虑仿射元素 $\widetilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} / \sim_n \in Gr_n(\mathcal{A})$ 和 $\widetilde{X'} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n'} \\ I_{n'} & X' \end{bmatrix} / \sim_{n'} \in G_{n'}(\mathcal{A})$，其中 $X \in M_n(\mathcal{A})$ 以及 $X' \in M_{n'}(\mathcal{A})$。对于任意 $T \in M_{n,n'}(\mathcal{R})$，我们可以看到，$\begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_{n'} \end{bmatrix} \cdot (\widetilde{X} \oplus \widetilde{X'}) = \widetilde{X} \oplus \widetilde{X'}$ 当且仅当 $XT = TX'$。因此，命题 3.3 中的性质 (b) 恢复了由 [KVV14，命题 2.1] 给出的仿射交织性质。

注 3.5.（相似不变包络）设 Ω 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$上的一个非交换集合。我们将 Ω 的$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$相似不变包络 $\widehat{\Omega} = \bigsqcup_{n \geq 1} \Omega_n$ 定义为 $\Omega_n := GL_n(\mathcal{R}) \cdot \Omega_n := \{s \cdot \sigma \mid s \in GL_n(\mathcal{R}) \ \sigma \in \Omega_n\}$。容易看出，$\widehat{\Omega}$ 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$上的一个非交换集合。此外，根据构造，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $s \in GL_n(\mathcal{R})$，我们有$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $s \cdot \Omega_n = \Omega_n$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$设 f 是从 Ω 到 $M(\mathcal{B})$的一个非交换函数。那么，存在唯一的非交换函数 f，从 Ω 到 $\widehat{M}(\mathcal{B})$，使得 $f|_\Omega = f$。

以下是非交换函数的多变量版本。

定义 3.6。设 $\Omega^{(0)}$、$\Omega^{(1)}$ 是定义在 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的非交换集合，且 $\mathcal{B}^{(0)}$、$\mathcal{B}^{(1)}$ 是 $\mathcal{R}$-模。令 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M(\mathcal{B}^{(1)}) M(\mathcal{B}^{(0)})) := \bigsqcup_{n,n' \geq 1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M_{n,n'}(\mathcal{B}^{(1)}) M_{n,n'}(\mathcal{B}^{(0)}))$。若函数 $f\colon \Omega^{(0)} \times \Omega^{(1)} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M(\mathcal{B}^{(1)}) M(\mathcal{B}^{(0)}))$ 满足：对于任意 $n, n' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，都有 $f(\Omega_n^{(0)}; \Omega_{n'}^{(1)}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M_{n,n'}(\mathcal{B}^{(1)}) M_{n,n'}(\mathcal{B}^{(0)}))$，则称其为分次函数。若分次函数 $f\colon \Omega^{(0)} \times \Omega^{(1)} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M(\mathcal{B}^{(1)}) M(\mathcal{B}^{(0)}))$ 满足以下条件，则称其为一阶非交换函数：f

(1) 保持直和：（D-0）$f(\sigma_0 \oplus \sigma_0'; \sigma_1)\left(\begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\sigma_0; \sigma_1)(X) & (\sigma_0'; \sigma_1)(X') \\ f & \end{bmatrix}$ 对于任意 $\sigma_0 \in \Omega_{n_0}^{(0)}$、$\sigma_0' \in \Omega_{n_0'}^{(0)}$、$\sigma_1 \in \Omega_{n_1}^{(1)}$以及$X \in M_{n_0, n_1}(\mathcal{A})$，$X' \in M_{n_0', n_1}(\mathcal{A})$。（D-1）$f(\sigma_0; \sigma_1 \oplus \sigma_1')([Y\ Y']) = [f(\sigma_0; \sigma_1)(Y) \ f(\sigma_0; \sigma_1')(Y')]$对于任意 $\sigma_0 \in \Omega_{n_0}^{(0)}$、$\sigma_1 \in \Omega_{n_1}^{(1)}$、$\sigma_1' \in \Omega_{n_1'}^{(1)}$ 以及 $Y \in M_{n_0, n_1}(\mathcal{A})$，$Y' \in M_{n_0, n_1'}(\mathcal{A})$。(2) 保持相似性：（S）$f(s_0 \cdot \sigma_0; s_1 \cdot \sigma_1)(X) = s_0 f(\sigma_0; \sigma_1)(s_0^{-1} X s_1) s_1^{-1}$对于任意 $s_0 \in GL_{n_0}(\mathcal{R})$、$s_1 \in GL_{n_1}(\mathcal{R})$、$\sigma_0 \in \Omega_{n_0}^{(0)}$、$\sigma_1 \in \Omega_{n_1}^{(1)}$以及 $X \in M_{n_0, n_1}(\mathcal{A})$，其中 $s_0 \cdot \sigma_0 \in \Omega_{n_0}^{(0)}$且 $s_1 \cdot \sigma_1 \in \Omega_{n_1}^{(1)}$。

我们用 $\mathcal{T}_{(1)}(\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}; \mathcal{B}^{(0)}, \mathcal{B}^{(1)})$ 表示从 $\Omega^{(0)} \times \Omega^{(1)}$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M(\mathcal{B}^{(0)}) M(\mathcal{B}^{(1)}))$ 的所有一阶非交换函数构成的空间。

注 3.7。 我们也可以证明命题 3.3的多变量对应结果。不过，这里省略证明，因为本文后文不会用到它。此外，我们还可以定义高于二阶的非交换函数。

4. The nc (u, v)-difference-differential operator $\widetilde{\Delta}_{u\,v}^{(d;m)}$

本节将为非交换格拉斯曼流形上的nc函数构造非交换微分算子。我们的策略是将 [KVV14] 的论证调整到非交换格拉斯曼流形的框架中。具体做法是以格拉斯曼流形交织性质 $XT = TY \Rightarrow f(X)T = Tf(Y)$ 替代 [KVV14] 中使用的仿射交织性质 $\begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_{n'} \end{bmatrix} \cdot (\sigma \oplus \sigma') = \sigma \oplus \sigma' \Rightarrow f(\sigma)T = Tf(\sigma')$（见命题 3.3）。

4.1. 构造。 我们首先引入新的记号，以简化表述。固定 $(u,v) \in [m-d]\times[d]$，$\sigma \in Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A})$，$\sigma' \in Gr_{n'}^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 和 $X \in M_{n,n'}(\mathcal{A})$。我们将 $Gr_{n+n'}^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 中的一个元素 $(A;A')_{u,v}(X)/\sim_{n+n'}^{(d;m)}$ 定义为

$$(A;A')_{u,v}(X) := \left(A\widetilde{\oplus}A' + \sum_{j=1}^{d} \begin{bmatrix} 0_n & XA'_{v,m-d+j} \\ 0_{n',n} & 0_{n'} \end{bmatrix} \otimes e^{(m)}_{d+u,m-d+j} \right) \tag{6}$$

对任意 $A\in\sigma$ 和 $A'\in\sigma'$。注意，等价类 $(A;A')_{u,v}(X)/\sim_{n+n'}^{(d;m)}$ 与 $A\in\sigma$ 和 $A'\in\sigma'$的选取无关。

记号 4.1. 我们用 $(\sigma;\sigma')_{u,v}(X)$ 表示元素 $(A;A')_{u,v}(X)/\sim_{n+n'}^{(d;m)}$，其中 $A\in\sigma$和$A'\in\sigma'$。

定义 4.2. 设 Ω 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的非交换集合，并固定 $(u,v)\in[m-d]\times[d]$。若对于任意 $\sigma\in\Omega_n$、$\sigma'\in\Omega_{n'}$ 以及任意 $X\in M_{n,n'}(\mathcal{A})$，都存在一个可逆元素 $r\in\mathcal{R}$，使得 $(\sigma;\sigma')_{u,v}(rX)\in\Omega_{n+n'}$，则称 Ω 是 (u,v)-可容许 的。若 $(d;m)=(1;2)$，则我们简单地称 Ω 为可容许，而不称其为 (1,1)-可容许。

引理 *4.3.* 设 Ω 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的非交换集合，且 f 是从 Ω 到 $M(\mathcal{B})$ 的非交换函数。固定 $(u,v)\in[m-d]\times[d]$。假设 $\sigma\in\Omega_n$, $\sigma'\in\Omega_{n'}$ 和 $X\in M_{n,n'}(\mathcal{A})$ 满足 $(\sigma;\sigma')_{u,v}(X)\in\Omega_{n+n'}$。那么，存在唯一元素 $H\in M_{n,n'}(\mathcal{B})$，记作 $(\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v f)(\sigma;\sigma')(X)$，使得 $f((\sigma;\sigma')_{u,v}(X)) = \begin{bmatrix} f(\sigma) & H \\ 0 & f(\sigma') \end{bmatrix}$。此外，若对于某个 $r\in\mathcal{R}$，$(\sigma;\sigma')_{u,v}(rX)\in\Omega_{n+n'}$，则有 $(\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v f)(\sigma;\sigma')(rX) = r(\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v f)(\sigma;\sigma')(X)$。

证明。 结合命题3.3与以下等式：

$$\begin{bmatrix} I_{n+n'} & T_1 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot ((\sigma;\sigma')_{u,v}(X)\oplus\sigma) = (\sigma;\sigma')_{u,v}(X)\oplus\sigma, \quad T_1 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n'} & T_2 \\ 0 & I_{n+n'} \end{bmatrix} \cdot (\sigma'\oplus(\sigma;\sigma')_{u,v}(X)) = \sigma'\oplus(\sigma;\sigma')_{u,v}(X), \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n'} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n+n'} & rI_n\oplus I_{n'} \\ 0 & I_{n+n'} \end{bmatrix} \cdot ((\sigma;\sigma')_{u,v}(X)\oplus(\sigma;\sigma')_{u,v}(X)) = (\sigma;\sigma')_{u,v}(X)\oplus(\sigma;\sigma')_{u,v}(X). \tag{9}$$

□

定义 4.4。 设 $u\in[m-d]$ 和 $v\in[d]$，并设 Ω 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的一个 (u,v)-可容许非交换集合。设 f 是从 Ω 到 $M(\mathcal{B})$ 的非交换函数。对于任意 $\sigma\in\Omega_n$、$\sigma'\in\Omega_{n'}$ 以及 $X\in M_{n,n'}(\mathcal{A})$，我们定义

$$(\widetilde{\Delta}_{u,v}^{(d;m)} f)(\sigma;\sigma')(X) := r^{-1}(\widetilde{\Delta}_{u,v}^{(d;m)} f)(\sigma;\sigma')(rX),$$

其中，$r\in\mathcal{R}$ 是一个可逆元素，使得 $(\sigma;\sigma')_{u,v}(rX)\in\Omega_{n+n'}$。在 $(d;m)=(1;2)$ 的情况下，我们简单地用 $\widetilde{\Delta}$ 代替 $\widetilde{\Delta}_{1\,1}^{(1;2)}$。

容易看出，$(\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v f)(\sigma;\sigma')(X)$ 定义良好，即它与满足 $(\sigma;\sigma')_{u,v}(rX)\in\Omega_{n+n'}$ 的可逆元素 $r\in\mathcal{R}$ 的选取无关。因此，对于每个 n，$n'\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及 $\sigma\in\Omega_n$、$\sigma'\in\Omega_{n'}$，$(\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v f)(\sigma;\sigma')$ 定义了从 $M_{n,n'}(\mathcal{A})$ 到 $M_{n,n'}(\mathcal{B})$ 的良定义映射。

4.2. 性质。 在下文中，我们将看到 $\widetilde{\Delta}_{u\,v}^{(d;m)}$,是一个从 $\mathcal{T}_{(0)}(\Omega;\mathcal{B})$ 到$\mathcal{T}_{(1)}(\Omega,\Omega;\mathcal{A},\mathcal{B})$ 的 $\mathcal{R}$-线性映射。这里有一条注记。

注 4.5. 设 Ω 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的一个 (u,v)-可容许非交换集合，并且 f 是从$\widehat{\ }\Omega$ 到 $M(\mathcal{B})$ 的非交换函数。那么，容易看出，相似不变包络 Ω 也是 (u,v)-可容许的。特别地，对于任意 $\sigma\in\widehat{\ }\Omega_n$, $\sigma'\in\widehat{\ }\Omega_{n'}$ 和 $X\in M_{n,n'}(\mathcal{A})$，我们有 $(\sigma;\sigma')_{u,v}(X)\in\widehat{\ }\Omega_{n+n'}$。此外，对于任意 $\sigma\in\Omega_n$, $\sigma'\in\Omega_{n'}$ 和 $X\in M_{n,n'}(\mathcal{A})$，$(\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v \widehat{f})(\sigma;\sigma')(X) = (\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v f)(\sigma;\sigma')(X)$。

因此，它 $\widehat{\ }$只需在假设 $\Omega=\Omega$ 的条件下证明本节中的结论 .

引理 4.6. 设 Ω 是一个 (u,v)-可容许非交换集合，其定义在 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上，并且 f 是一个从 Ω 到 $M(\mathcal{B})$的非交换函数。那么，$(\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v \ f)(\sigma;\sigma')$ 满足定义 3.6 中的性质 *(D-0)*、*(D-1)*。

证明。 结合命题3.3以及以下等式：

$$\begin{bmatrix} I_{n_0+n_1+n_1'} & T_1 \\ 0 & I_{n_0+n_1} \end{bmatrix} \cdot \big((\sigma_0;\sigma_1\oplus\sigma_1')_{u,v}([Y\ Y'])\oplus(\sigma_0;\sigma_1)_{u,v}(Y)\big) = \\ = (\sigma_0;\sigma_1\oplus\sigma_1')_{u,v}([Y\ Y'])\oplus(\sigma_0;\sigma_1)_{u,v}(Y), \quad T_1=\begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ 0 & I_{n_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_0+n_1+n_1'} & T_2 \\ 0 & I_{n_0+n_1'} \end{bmatrix} \cdot \big((\sigma_0;\sigma_1\oplus\sigma_1')_{u,v}([Y\ Y'])\oplus(\sigma_0;\sigma_1')_{u,v}(Y')\big) = \\ = (\sigma_0;\sigma_1\oplus\sigma_1')_{u,v}([Y\ Y'])\oplus(\sigma_0;\sigma_1')_{u,v}(Y'), \quad T_2=\begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_1'} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_0+n_1} & T_3 \\ 0 & I_{n_0+n_0'+n_1} \end{bmatrix} \cdot \big((\sigma_0;\sigma_1)_{u,v}(X)\oplus(\sigma_0\oplus\sigma_0';\sigma_1)_{u,v}\left(\begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}\right)\big) = \\ = (\sigma_0;\sigma_1)_{u,v}(X)\oplus(\sigma_0\oplus\sigma_0';\sigma_1)_{u,v}\left(\begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}\right), \quad T_3=\begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_1} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_0'+n_1} & T_4 \\ 0 & I_{n_0+n_0'+n_1} \end{bmatrix} \cdot \big((\sigma_0';\sigma_1)_{u,v}(X')\oplus(\sigma_0\oplus\sigma_0';\sigma_1)_{u,v}\left(\begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}\right)\big) = \\ = (\sigma_0';\sigma_1)_{u,v}(X')\oplus(\sigma_0\oplus\sigma_0';\sigma_1)_{u,v}\left(\begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}\right), \quad T_4=\begin{bmatrix} 0 & I_{n_0'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

对于任意 $\sigma_0\in\Omega_{n_0}$, $\sigma_0'\in\Omega_{n_0'}$, $\sigma_1\in\Omega_{n_1}$, $\sigma_1'\in\Omega_{n_1'}$ 以及 $X\in M_{n_0,n_1}(\mathcal{A})$, $X'\in M_{n_0',n_1}(\mathcal{A})$, $Y\in M_{n_0,n_1}(\mathcal{A})$, $Y'\in M_{n_0,n_1'}(\mathcal{A})$。□

根据引理 4.6，我们可以得到以下结论：

命题 4.7。 设 Ω 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的一个(u,v)-可容许非交换集合，且 f 是从 Ω 到 $M(\mathcal{B})$ 的非交换函数。那么，$\widetilde{\Delta}_{u\ v}^{(d;m)}$,是从 $\mathcal{T}_{(0)}(\Omega;\mathcal{B})$ 到 $\mathcal{T}_{(1)}(\Omega,\Omega;\mathcal{A},\mathcal{B})$ 的一个 $\mathcal{R}$-线性映射。

证明。 该 $\mathcal{R}$-齐次性可通过与 $\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v \ f(\sigma;\ \sigma')$ 的相同计算得出，如 [KVV14，命题 2。

我们还可以证明可加性，即：

$$(\widetilde{\Delta}^{(d;m)}f)(\sigma;\sigma')(X+Y)=(\widetilde{\Delta}^{(d;m)}f)(\sigma;\sigma')(X)+(\widetilde{\Delta}^{(d;m)}f)(\sigma;\sigma')(Y)$$

对于任意 $\sigma\in\Omega_n$, $\sigma'\in\Omega_{n'}$ 以及 X, $Y\in M_{n,\ n'}(\mathcal{A})$，结合命题 3.3 与下列等式可得

$$\begin{bmatrix} I_{n+n'} & T_1 \\ 0 & I_{2n+n'} \end{bmatrix} \cdot \big((\sigma;\sigma')_{u,v}(X+Y)\oplus(\sigma\oplus\sigma;\sigma')_{u,v}\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)\big) = \\ = (\sigma;\sigma')_{u,v}(X+Y)\oplus(\sigma\oplus\sigma;\sigma')_{u,v}\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right), \quad T_1=\begin{bmatrix} I_n & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_{n'} \end{bmatrix} \tag{14}$$

然后，应用引理4.6。

还需证明 $(\widetilde{\Delta}_u^{(d;m)},_v \ f)(\sigma;\ \sigma')$ 满足定义 3.6中的性质 (S)。结合命题 3.3 与下列等式即可得到

$$\begin{bmatrix} I_{n+n'} & T_2 \\ 0 & I_{n+n'} \end{bmatrix} \cdot \big((s\cdot\sigma;s'\cdot\sigma')_{u,v}(X)\oplus(\sigma;\sigma')_{u,v}(s^{-1}Xs')\big) = \\ = (s\cdot\sigma;s'\cdot\sigma')_{u,v}(X)\oplus(\sigma;\sigma')_{u,v}(s^{-1}Xs'), \quad T_2=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s' \end{bmatrix}. \tag{15}$$

□

对于每个 $(u,v)\in[m-d]\times[d]$，我们称 $\widetilde{\Delta}_{u\ v}^{(d;m)},$ 为 *nc* (u,v)-差分微分算子。

4.3. **一阶差分公式的推广**。 对于任意 $\sigma \in \Omega_n$ 和 $Y \in M_{m-d,\,d}(M_n(\mathcal{B}))$，我们定义

$$\sigma(Y) := \begin{bmatrix} I_d \otimes I_n & 0 \\ -Y & I_{m-d} \otimes I_n \end{bmatrix} \sigma.$$

以下是对 [KVV14，定理 210] 在当前 nc $(d;\, m)$-格拉斯曼流形框架下的推广。

命题 4.8。 设Ω 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$上的一个非交换集合， f 是从Ω 到 $M(\mathcal{B})$ 的一个非交换函数，并且$\sigma \in \Omega_n$。那么，我们有

$$f(\sigma) - f\left(\sigma(e_{u,v}^{(m-d,d)} \otimes X)\right) = (\widetilde{\Delta}_{u,v}^{(d;m)} f)\left(\sigma; \sigma(e_{u,v}^{(m-d,d)} \otimes X)\right)(X)$$

对于任意 $X \in M_n(\mathcal{A})$，满足 $\sigma(e_u^{(m-d,d)}{}_{,v} \otimes X) \in \Omega_n$，以及$((\sigma; \sigma(e_u^{(m-d,d)}{}_{,v} \otimes X))_{u,v}(X) \in \Omega_{2n}$，其中$(u, v) \in [m-d] \times [d]$。

证明。 结合命题3.3与以下等式

$$\begin{bmatrix} I_{2n} & T \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot \left(((\sigma; \sigma(e_{u,v}^{(m-d,d)} \otimes X))_{u,v}(X) \oplus \sigma(e_{u,v}^{(m-d,d)} \otimes X)\right) =$$
$$= ((\sigma; \sigma(e_{u,v}^{(m-d,d)} \otimes X))_{u,v}(X) \oplus \sigma(e_{u,v}^{(m-d,d)} \otimes X), \quad T = \begin{bmatrix} I_n \\ -I_n \end{bmatrix}.$$

□

5. The $(d;\, m)$-Grassmannian $\mathcal{B}$-resolvent $\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\, \mathcal{B}|v, u)$ with respect to (u, v)

在本节中，我们将 Voiculescu 的预解集和预解函数推广到 nc $(d; m)$-格拉斯曼流形 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上。设 $1 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是含幺 $\mathcal{R}$- 代数的包含。对于任意 $A,\ B \in M_m(M_n(\mathcal{A}))$，我们定义

$$r^{(d;m)}(A; B) := \begin{bmatrix} A_{1,d+1} & \cdots & A_{1,m} & B_{1,m-d+1} & \cdots & B_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,d+1} & \cdots & A_{m,m} & B_{m,m-d+1} & \cdots & B_{m,m} \end{bmatrix}.$$

定义 5.1。 设 $\pi \in Gr_n^{(m-d;m)}(\mathcal{A})$ 和 $\sigma \in Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A})$。若对于某些 $A \in \pi$ 和 $B \in \sigma$， $r^{(d;m)}(A; B)$ 在 $M_m(M_n(\mathcal{B}))$ 中可逆，则称 π 和 σ 在 $\mathcal{B}$ 中横截。

这是对 [V10 第 4.5] 小节中引入的概念的推广。根据等价关系 $\sim_n^{(d;m)}$和 $\sim_n^{(m-d;m)}$的定义可知，π 和 σ 在 $\mathcal{B}$ 中的横截性与 $A \in \pi$ 和 $B \in \sigma$的选取无关。也就是说，若存在 $A \in \pi$ 和 $B \in \sigma$，使得 $r^{(d;m)}(A;\, B)$ 在 $M_m(M_n(\mathcal{B}))$ 中可逆，则对于任意 $A' \in \pi$和 $B' \in \sigma$， $r^{(d;m)}(A'; B')$ 也可逆。

定义 5.2. 对于元素 $\pi \in Gr_1^{(m-d;m)}(\mathcal{A})$，我们定义 $\widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi; \mathcal{B}) := \bigsqcup_{n\geq 1} \widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi;\, \mathcal{B})$，其中

$$\widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi; \mathcal{B}) = \left\{ \sigma \in Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{B}) \,\middle|\, \pi^{\oplus n} := \underbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}_{n} \text{ and } \sigma \text{ are transversal in } \mathcal{A} \right\}.$$

我们分别称 $\widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi;\, \mathcal{B})$ 和 $\widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi; \mathcal{B})$ 为 π 的 $(d;\, m)$-格拉斯曼流形 n- 阶 $\mathcal{B}$-预解集 以及 $(d;\, m)$-格拉斯曼流形满 $\mathcal{B}$- 预解集 。当 $(d; m) = (1; 2)$ 时，我们将 $\widetilde{\rho}^{(1;2)}(\pi;\, \mathcal{B})$ 简写为 $\widetilde{\rho}(\pi; \mathcal{B})$。

我们很容易看出， $\widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi; \mathcal{B})$ 不仅是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{B})$ 上的非交换集合，而且还具有以下更强的性质：

命题 5.3. *$(d; m)$-格拉斯曼流形的全 $\mathcal{B}$-预解集 $\widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi;\, \mathcal{B})$具有以下性质：*

(1) For any $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi; \mathcal{B}) \subset Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{B})$.

(2) 对任意 $n, n' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B}) \oplus \widetilde{\rho}_{n'}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B}) = \widetilde{\rho}_{n+n'}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B}) \cap \left(Gr_n^{(d;m)}(\mathcal{A}) \oplus Gr_{n'}^{(d;m)}(\mathcal{A}) \right)$。

(3) 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $s \in GL_n(\mathcal{R})$, $s \cdot \widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}) = \widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B})$。

现在我们可以在 $\widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B})$ 上定义预解函数。

定义 5.4. 设 $(u,v) \in [m-d] \times [d]$, 并设 π 是 $Gr_1^{(m-d;m)}(\mathcal{A})$ 的一个元素。π 关于 (v,u) 的 $(d;\ m)$-格拉斯曼流形 $\mathcal{B}$- 预解函数 记为 $\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B}|v,u)$, 它是从 $\widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B})$ 到 $M(\mathcal{A})$ 的映射, 定义如下:

$$\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)(\sigma) = [B_{v,m-d+1}, B_{v,m-d+2}, \ldots, B_{v,m}] \times \zeta_u$$

对于任意 $\sigma \in \widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B})$。这里, $a = [a_{i,j}] \in \pi$, $B = [B_{i,j}] \in \sigma$, 其中 $a_{i,j} \in \mathcal{A}$ 和 $B_{i,j} \in M_n(\mathcal{A})$, 且

$$r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus} n}; B)^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & \zeta_1 & \cdots & \zeta_{m-d} \end{bmatrix}, \quad \zeta_u \in M_{d,1}(M_n(\mathcal{A}))\ (u \in [m-d]).$$

In 对于 $(d;\ m) = (1;2)$ 的情形, 我们简单地写作 $\widetilde{\mathfrak{R}}(\pi;\mathcal{B})$, 而不写 $\widetilde{\mathfrak{R}}^{(1;2)}(\pi;\ \mathcal{B}|1,1)$。

很容易看出, $(d;m)$-格拉斯曼流形 $\mathcal{B}$-预解式定义良好。此外, 我们有以下结论:

命题 5.5。设 π 是 $Gr_1^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 的一个元素。则, $\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B}|v,u)$ 是从 $\widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B})$ 到 $M(\mathcal{A})$ 的非交换函数。

证明。固定 $\sigma \in \widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B})$ 和 $\sigma' \in \widetilde{\rho}_{n'}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B})$。令 $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m-d} \in M_{d,1}(M_n(\mathcal{A}))$ 以及 $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_{m-d} \in M_{d,1}(M_{n'}(\mathcal{A}))$ 满足

$$r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus} n}; B)^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & \zeta_1 & \cdots & \zeta_{m-d} \end{bmatrix}, \quad r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus} n'}; B')^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & \zeta'_1 & \cdots & \zeta'_{m-d} \end{bmatrix}$$

对于某些 $a \in \pi$、$B \in \sigma$ 和 $B' \in \sigma'$。

保持直和 (D): 我们有 $r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus}(n+n')};\ B \widetilde{\oplus} B') = r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus} n};\ B) \widetilde{\oplus} r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus} n'};\ B')$。因此,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)(\sigma \oplus \sigma') &= \begin{bmatrix} B_{v,m-d+1} & 0 & & B_{v,m} & 0 \\ 0 & B'_{v,m-d+1} & \cdots & 0 & B'_{v,m} \end{bmatrix} \times (\zeta_u \widetilde{\oplus} \zeta'_u) \\ &= \widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)(\sigma) \oplus \widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)(\sigma') \end{aligned}$$

如所需。

保持相似性 (S): 设 $s \in GL_n(\mathcal{R})$, 且 $s \cdot \sigma \in \widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B})$。由于 $\mathrm{Ad}(s^{\oplus m})[a^{\widetilde{\oplus} n}] = a^{\widetilde{\oplus} n}$, 我们可得

$$r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus} n}; \mathrm{Ad}(s^{\oplus m})[B])^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & s^{\oplus d}\zeta_1 s^{-1} & \cdots & s^{\oplus d}\zeta_{m-d} s^{-1} \end{bmatrix}.$$

因此,

$$\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)(s \cdot \sigma) = s\,[B_{v,m-d+1}, \ldots, B_{v,m}]\,(s^{-1})^{\oplus d} \times s^{\oplus d}\zeta_u s^{-1} = \mathrm{Ad}(s)\left[\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)(\sigma)\right]$$

as desired. □

6. More about the Grassmannian resolvent

6.1. **Voiculescu 预解方程的推广**。我们将建立 Voiculescu 预解方程的一个推广 [V00, 命题 1。4],[V10, 引理 6.1, 命题 6。1] 在 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 的框架内。

定理 6.1。设 (s,t)、$(u,v) \in [m-d] \times [d]$, 并设 $\pi \in Gr_1^{(m-d;m)}(\mathcal{A})$。假设 $\widetilde{\rho}^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B})$是$(s,t)$-可容许的。那么, 我们有

$$\left(\widetilde{\Delta}_{s,t}^{(d;m)} \widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)\right)(\sigma;\sigma')(X) = -\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,s)(\sigma) \cdot X \cdot \widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|t,u)(\sigma') \tag{16}$$

对任意 $\sigma \in \widetilde{\rho}_n(\pi;\ \mathcal{B})$、$\sigma' \in \widetilde{\rho}_{n'}(\pi;\ \mathcal{B})$ 以及 $X \in M_{n,\ n'}(\mathcal{B})$。

证明。固定 $\sigma \in \widetilde{\rho}_n^{(d;m)}(\pi;\ \mathcal{B})$、 $\sigma' \in \widetilde{\rho}_{n'}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B})$，并任意选取代表元 $a=[a_{i,j}]_{i\ ,j=1}^{m} \in \pi$, $B=[B_{i,j}]_{i\ ,j=1}^{m} \in \sigma$, $B'=[B'_{i,j}]_{i\ ,j=1}^{m} \in \sigma'$，其中$a_{i,j} \in \mathcal{A}$, $B_{i,j} \in M_n(\mathcal{B})$ 且$B'_{i,j} \in M_{n'}(\mathcal{B})$。根据 (s,t)-可容许性以及命题 5.3 中的性质 (3)，对于任意 $X \in M_{n,n'}(\mathcal{B})$，我们有 $(\sigma;\sigma')_{s,t}(X)\ =(B;B')_{s,t}(X)/\sim_{n+n'}^{(d;m)}$ 属于 $\widetilde{\rho}_{n+n'}(\pi;\mathcal{B})$（见公式 (6)）。令

$$r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus}n};B)^{-1}=\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & \zeta_1 & \cdots & \zeta_{m-d} \end{bmatrix}, \quad r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus}n};B')^{-1}=\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & \zeta'_1 & \cdots & \zeta'_{m-d} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

其中 $\zeta_1,\ldots,\zeta_{m-d} \in M_{d,1}(M_n(\mathcal{A}))$ 和 $\zeta'_1,\ldots,\zeta'_{m-d} \in M_{d,1}(M_{n'}(\mathcal{A}))$。于是，存在一个元素 $U \in GL_{m(n+n')}(\mathcal{R})$，使得

$$r^{(d;m)}\left(a^{\widetilde{\oplus}(n+n')};(B;B')_{s,t}(X)\right)=U^{-1}\left[\begin{array}{c|cc} r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus}n};B) & \begin{matrix} 0_{(d+s-1)n,(d+s-1)n'} & 0_{(d+s-1)n,dn'} \\ 0_{n,(m-d)n'} & X[B'_{t,m-d+1},\ldots,B'_{t,m}] \\ 0_{(m-d-s)n,(m-d)n'} & 0_{(m-d-s)n,dn'} \end{matrix} \\ \hline 0 & r^{(d;m)}(a^{\widetilde{\oplus}n};B') \end{array}\right] U.$$

因此，将此结果与方程（17）结合起来，我们可得

$$r^{(d;m)}\left(a^{\widetilde{\oplus}(n+n')};(B;B')_{s,t}(X)\right)^{-1}=\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & \eta_1 & \cdots & \eta_{m-d} \end{bmatrix},$$

其中

$$\eta_j=\begin{bmatrix} (\zeta_j)_1 & (-\zeta_s X\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|t,j)(\sigma'))_1 \\ 0 & (\zeta'_j)_1 \\ (\zeta_j)_2 & (-\zeta_s X\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|t,j)(\sigma'))_2 \\ 0 & (\zeta'_j)_2 \\ \vdots & \vdots \\ (\zeta_j)_d & (-\zeta_s X\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|t,j)(\sigma'))_d \\ 0 & (\zeta'_j)_d \end{bmatrix}, \quad v=\begin{bmatrix} (v)_1 \\ (v)_2 \\ \vdots \\ (v)_d \end{bmatrix} \in M_{d,1}(M_*(\mathcal{A}))$$

对于每个 $v \in \left\{\zeta_j,\zeta'_j,-\zeta_s X\widetilde{\mathfrak{R}}^{(k,m)}(\pi;\ \mathcal{B}|t,j)(\sigma')\right\}$，其中 $*$的大小适当。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)\left((\sigma;\sigma')_{s,t}(X)\right)&=\begin{bmatrix} B_{v,m-d+1} & 0 & \cdots & B_{v,m} & 0 \\ 0 & B'_{v,m-d+1} & \cdots & 0 & B'_{v,m} \end{bmatrix}\times\eta_u \\ &=\begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)(\sigma) & -\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,s)(\sigma)X\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|t,u)(\sigma') \\ 0 & \widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}(\pi;\mathcal{B}|v,u)(\sigma') \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

根据 $\widetilde{\Delta}_{s\ t}^{(d;m)}$ 的定义，这就得到了所需的等式（16）。 □

6.2. 无界算子谱分析的若干方面。 设 $\mathcal{H}$ 是一个（可分）复希尔伯特空间，并令 1 表示作用于 $\mathcal{H}$ 上的恒等算子。有界算子 $a \in B(\mathcal{H})$被视为仿射元素 $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right]/\sim_1^{(1;2)}$；也就是说，我们将 a 与其图 $\{(1x,\ ax)\ =(x,\ ax)\,|\,x \in \mathcal{H}\}$等同。

令 $B_0(\mathcal{H})$表示 $\mathcal{H}$ 上所有纯收缩算子（即满足对所有 $x \in \mathcal{H}$均有$\|ax\| < \|x\|$ 的算子 $a \in B(\mathcal{H})$）构成的集合，并令 $C_0(\mathcal{H})$表示 $\mathcal{H}$上所有稠密定义闭算子构成的集合。以下结论众所周知：存在一个从 $B_0(\mathcal{H})$到 $C_0(\mathcal{H})$上的双射 Γ_-，使得 $\Gamma(a)$的定义域为 $\mathsf{ran}((1-a^*a)^{\frac{1}{2}})$，且 $\Gamma(a)(1-a^*a)^{\frac{1}{2}}=a$。等价地， t的图由$\{((1-a^*a)^{\frac{1}{2}}x,ax)\ |\,x \in \mathcal{H}\}$给出（例如参见 [K78]）。于是，利用 Halmos 酉扩张，每个元素$t \in C_0(\mathcal{H})$都可以通过以下方式视为 $Gr_1(B(\mathcal{H}))\ =Gr_1^{(1;2)}(B(\mathcal{H}))$中的一个元素

$$\pi(t)=\begin{bmatrix} -a^* & (1-a^*a)^{\frac{1}{2}} \\ (1-aa^*)^{\frac{1}{2}} & a \end{bmatrix}/\sim_1^{(1;2)}, \quad \text{where } a \in B_0(\mathcal{H}) \text{ satisfies } \Gamma(a)=t.$$

设 $\mathcal{B}$ 是 $B(\mathcal{H})$ 的含幺子代数。对于与纯收缩算子 $a \in B_0(\mathcal{H})$ 相对应的稠密定义闭算子 $t \in C_0(\mathcal{H})$, t 的格拉斯曼流形 $\mathcal{B}$-预解集可以描述为

根据 C^* 在 $a($, $\mathcal{B})$ 内的预解集 $\rho(a; C^*(a,\ \mathcal{B}))$ 来描述，其中 C^* 是由 a 和 $\mathcal{B}$ 生成的含幺 C^*-代数。更确切地说，对于任意 $\beta \in \mathcal{B}$,

$$\widetilde{\beta} \in \widetilde{\rho}(\pi(t); \mathcal{B}) \quad \textit{if and only if} \quad \beta \cdot (1 - a^*a)^{\frac{1}{2}} \in \rho(a; C^*(a, \mathcal{B})). \tag{18}$$

在此情形下， $\beta - t$ 存在有界逆，且其显式表达式为

$$(\beta - t)^{-1} = \widetilde{\mathfrak{R}}(\pi(t); \mathcal{B})(\widetilde{\beta}) = (1 - a^*a)^{\frac{1}{2}}(\beta \cdot (1 - a^*a)^{\frac{1}{2}} - a)^{-1}, \tag{19}$$

这种等价关系可通过直接计算如下形式的分块矩阵得出: 形式:

$$\left[\begin{smallmatrix} b & 1 \\ a & \beta \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ a-\beta b & \beta \end{smallmatrix}\right], \quad \text{where } a, b \in \mathcal{A}. \tag{20}$$

这就确立了无界算子的经典预解式与格拉斯曼预解式之间的精确对应关系。

受这一观察的启发，我们将在6.1 定理的（d; m） = （1; 2）情形下证明如下部分逆命题。

定理 *6.2.* 设 $\mathcal{R}$ 为含幺交换环， $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是含幺 $\mathcal{R}$-代数的包含。设 $\pi = [\begin{smallmatrix} * & b \\ * & a \end{smallmatrix}] / \sim_1^{(1;2)} \in Gr_1(\mathcal{A})$, $b' \in \mathcal{A}$ 是一个满足 $b'b = 1$ 的元素，并且 f 是从 $Gr(\mathcal{B})$ 上的可容许非交换集合 Ω 到 $M(\mathcal{A})$ 的非交换函数。假设对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及任意 $\beta \in \Omega \cap M_n(\mathcal{B})\tilde{}$，存在一个元素 $c(\beta) \in GL_n(\mathcal{A})$, 使得 $f(\beta) = (b \otimes I_n)c(\beta)$。若 f 满足以下差分微分方程

$$\begin{cases} (\widetilde{\Delta} f)(\sigma; \sigma')(X) = -f(\sigma) X f(\sigma') \ \textit{for any } \sigma, \sigma' \in \Omega, \\ f(\widetilde{\beta_0}) = b \cdot (\beta_0 b - a)^{-1} \ \textit{for some } \beta_0 \in \Omega \cap \mathcal{B}, \end{cases} \tag{21}$$

~那么我们有 $\Omega \cap M(\mathcal{B}) \subset \widetilde{\rho}(\pi;\ \mathcal{B}) \cap M(\mathcal{B})$ 且 $f = \mathfrak{R}(\pi;\ \mathcal{B})$ 在 $\Omega \cap M(\mathcal{B})$。

~证明。 由于 $b'b = 1$ 和 $f(\beta) = (b \otimes I_n)c(\beta)$，我们有

$$c(\beta) = (b' \otimes I_n) f(\widetilde{\beta}) \tag{22}$$

对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$和 $\beta \in \Omega \cap M_n(\mathcal{B})$。因此， c按照 $\cap M(\mathcal{B})$ 的意义，是从 Ω $M($$\mathcal{A}$到 [KVV14] 中的一个非交换函数。利用差分微分方程（21），我们有

$$c\left(\left[\begin{smallmatrix} \beta_1 & X \\ 0 & \beta_2 \end{smallmatrix}\right]\right)) = \left[\begin{smallmatrix} c(\beta_1) & -c(\beta_1) X (b \otimes I_{n_2}) c(\beta_2) \\ 0 & c(\beta_2) \end{smallmatrix}\right] \tag{23}$$

对于任意 $\beta_1 \in \Omega_{n_1}$, $\beta_2 \in \Omega_{n_2}$ 和 $X \in M_{n_1,n_2}(\mathcal{B})$。利用方程（23）以及$c$的可逆性，我们可以看出，对于任意 $\beta_1 \in \Omega \cap M_{n_1}(\mathcal{B})$， $\beta_2 \in \Omega \cap M_{n_2}(\mathcal{B})$ 和 $X \in M_{n_1,n_2}(\mathcal{B})$， $(\Delta c^{-1})(\beta_1; \beta_2)(X) = X($ $b \otimes I_{n_2})$。因此，利用 KVV14 中的（一阶仿射）差分微分公式 [，根据定理 2.10], ，我们有

$$c^{-1}(\beta) - \beta(b \otimes I_n) = c^{-1}(\beta') - \beta'(b \otimes I_n) \tag{24}$$

对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 β， $\beta' \in \Omega \cap M_n(\mathcal{B})$。特别地，我们有

$$c^{-1}(\beta) - \beta b = c^{-1}(\beta_0) - \beta_0 b \tag{25}$$

~对任意 $\beta \in \Omega \cap \mathcal{B}$，其中 β_0 由差分微分方程 (21) 给出。由于 $f(\beta_0) = b \cdot (\beta_0 b - a)^{-1}$ 且由方程 (22)，我们有 $c(\beta_0) = (\beta_0 b - a)^{-1}$。结合方程 (25)，我们得到，对于任意 $\beta \in \Omega \cap \mathcal{B}$， $c(\beta) = (\beta b - a)$ $^{-1}$。因此，结合 c 的直和保持性质与方程 (24)，对于任意 $\beta \in \Omega \cap M_n(\mathcal{B})$，有 $c(\beta) = (\beta(b \otimes I_n)$ $- a \otimes I_n)^{-1}$。因此，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$以及 $\beta \in \widetilde{\Omega} \cap M_n(\mathcal{B})$，我们得到 $f(\widetilde{\beta}) = (b \otimes I_n) \cdot (\beta \cdot ($ $b \otimes I_n) - a \otimes I_n)^{-1}$。此外，根据相同的计算 (20)，我们可以看出，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 以及 $\beta \in \Omega$ $\cap M_n(\mathcal{B})$， $\beta \in \widetilde{\rho}(\pi; \mathcal{B}) \cap M_n(\mathcal{B})$ 当且仅当 $\beta \cdot (b \otimes I_n) - a \otimes I_n \in GL_n(\mathcal{A})$。这意味着 $\Omega \cap M(\mathcal{B}) \subset \widetilde{\rho}$ $(\pi;\ \mathcal{B}) \cap M(\mathcal{B})$。接着可以验证，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq}$ 以及 $\beta \in \Omega \cap M_n(\mathcal{B})$，有 $\widetilde{\mathfrak{R}}(\pi;\ \mathcal{B})(\widetilde{\beta}) = (b \otimes I_n) \cdot ($ $\beta \cdot (b \otimes I_n) - a \otimes I_n)^{-1}$，证毕。□

注释 6.3。在定理 6.2 中，假设元素 b' 属于 $\mathcal{A}$。然而，在上文讨论的无界算子示例中， b' 的自然候选是 $(1-a^*a)^{-\frac{1}{2}}$的“无界”逆，其中 $(1-a^*a)$ 1 2 通常不属于 $B(\mathcal{H})$。因此，当 $B(\mathcal{H})=\mathcal{A}$ 且 t 无界时，定理 6.2 不能直接应用。尽管如此，即使在这种情形下，定理 6.2 仍提供了概念性解释。关键在于，重要的并非条件 $b'\in\mathcal{A}$，而是乘积 $b'b$ 和 $b'f$ 有定义。事实上，我们来考察 $\mathcal{A}=B(\mathcal{H})$ 的情形。若假设 b 是单射，且 b' 是它的（可能无界的）逆（因此 b' 不再属于 $\mathcal{A}$），那么，完全类似于定理 6.2 证明的论证仍然适用。换言之，只要相关算子乘积有定义，该定理背后的代数机制就仍然成立，即使 b' 本身位于环境代数之外。

7. 问题

在本节中，我们将提出若干问题。设 $\mathcal{A}$ 是一个上的含幺代数 $\mathbb{C}$，并且 ∂ 是一个导子 $\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{\otimes 2}$，使得 $\partial X=1\otimes 1$ 对于某个 $X\in\mathcal{A}$。Voiculescu [V00] 证明了，对于任意可逆元素 $a\in\mathcal{A}$， $\partial a=a\otimes a$ 当且仅当存在元素 $b\in\ker(\partial)$，使得$a=(b-X)^{-1}$。定理 6.1 可视为这一结果中“仅当”方向的对应结论。因此，自然会问“当”方向的对应结论是什么。

问题 7.1. 设 $\mathcal{R}$ 是一个含幺交换环，且 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是含幺 $\mathcal{R}$-代数之间的一个包含。对于任意 (u,v) $\in[m-d]\times[d]$，设 Ω 是 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{B})$ 上的 (u,v)-右可容许非交换集，并且 $\mathbf{f}=(f_{v,u})_{(v,u)\in[d]\times[m-d]}$ 是从 Ω 到 $M(\mathcal{A})$ 的非交换函数族。假设 $\mathbf{f}$ 满足以下差分微分方程组：

$$(\widetilde{\Delta}^{(d;m)}_{s,t}f_{v,u})(\sigma';\sigma'')(X)=-f_{v,s}(\sigma')\cdot X\cdot f_{t,u}(\sigma'') \tag{26}$$

对于任意（s， t）、（u， v） $\in[m-d]\times[d]$， n'， $n''\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$， $\sigma'\in\Omega_{n'}$， $\sigma''\in\Omega_{n''}$以及 $X\in M_{n',\ n''}$（$\mathcal{B}$）。那么，对于 Ω 或$\mathbf{f}$，还需要满足哪些附加条件，才能存在一个元素 $\pi\in Gr_1^{(m-d;d)}$（$\mathcal{A}$），使得 $\Omega=\widetilde{\rho}^{(d;m)}$（$\pi$； $\mathcal{B}$）并且 $f_{v,\ u}=\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d;m)}$（$\pi$； $\mathcal{B}|v$， u）对任意（u， v） $\in[m-d]\times[d]$ 均成立?

定理 6.2 可以看作是对问题 7.1 的一种回答尝试。然而，目前我们还没有方法处理 $Gr^{(d;m)}$（$\mathcal{A}$）中那些并非由无界算子产生的元素。

Agler-McCarthy-Young [AMY18] 提出了非交换流形的概念。因此，我们自然会关注他们的非交换流形与非交换格拉斯曼流形之间的关系。由此，我们提出以下问题：

问题 7.2。我们能否按照$d;m$的意义，为非交换（ $Gr^{(d;m)}$（$\mathbb{C}$）-格拉斯曼流形赋予一种非交换流形结构? [AMY18]?

在第6节中，我们观察到稠密定义闭算子的格拉斯曼预解式 t 与其通常预解式之间存在某种关系。我们已经看到 $\widetilde{\rho}$（π（t）； $\mathcal{B}$）$\cap\mathcal{B}\subset\rho$（$t$； $\mathcal{B}$）。因此，自然会提出以下问题：

问题 7.3。是否有 $\widetilde{\rho}(\pi(t);\mathcal{B})\cap\mathcal{B}=\rho_1(t;\mathcal{B})$？ 此外，高维预解集 $\bigsqcup_{n\geq 2}(\widetilde{\rho}(\pi(t);\mathcal{B})\cap M_n(\mathcal{B}))$ 中包含了关于 t 的哪类信息?

在 $\mathcal{B}=\mathbb{C}$、 $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$ 且 t 是多项式函数 p 在 $\mathbb{R}$ 上的乘法算子 M_p 的情况下，该算子与微分算子 $p(-i\partial_x)$ 的闭包酉等价，我们可以证明 $\widetilde{\rho}(t;\mathbb{C})\cap\mathbb{C}=\rho(t)(=\rho_1(t;\mathbb{C}))$。

Appendix 代数. The nc flag manifold $F\ell^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A})$ over $\mathcal{R}$-algebra $\mathcal{A}$

本节将说明如何将我们迄今为止建立的非交换函数格拉斯曼框架推广到“旗流形”中的情形。

A.1. 设 $\mathcal{R}$ 为含幺交换环，$\mathcal{A}$ 为含幺 $\mathcal{R}$-代数。任取 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 和 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k) \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^k$，其中 $d_1 < d_2 < \cdots < d_k < m$。令

$$\begin{aligned} LT_n^{(\mathbf{d})}(\mathcal{A}) &= \left\{ \begin{bmatrix} Z_k & & 0 \\ & \ddots & \\ * & * & Z_1 \end{bmatrix} \,\middle|\, Z_j \in GL_{d_j - d_{j-1}}(M_n(\mathcal{A})) \text{ for any } j \in [k] \ (d_0 := 0) \right\}, \\ H_n^{(\mathbf{d},m)}(\mathcal{A}) &= \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{bmatrix} \,\middle|\, X \in GL_{m-d_k}(M_n(\mathcal{A})), Y \in M_{d_k, m-d_k}(M_n(\mathcal{A})), Z \in LT_n^{(\mathbf{d})}(\mathcal{A}) \right\}. \end{aligned} \tag{27}$$

在 $GL_m(M_n(\mathcal{A}))$ 上的等价关系 $\sim_n^{(\mathbf{d};m)}$ 定义如下：对于任意 $A, B \in GL_m(M_n(\mathcal{A}))$，$A \sim_n^{(\mathbf{d};m)} B$ 当且仅当存在一个元素 $\Gamma \in H_n^{(\mathbf{d},;m)}(\mathcal{A})$ 使得 $A = B\Gamma$。

我们将 $\mathcal{A}$ 上的非交换旗流形 $F\ell^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A})$ 定义为

$$F\ell^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A}) := \bigsqcup_{n \geq 1} F\ell_n^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A}) \text{ with } F\ell_n^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A}) := GL_m(M_n(\mathcal{A}))/\sim_n^{(\mathbf{d};m)}.$$

接着，我们可以将仿射空间 $M_n(\mathcal{A})^{[\mathbf{d}]}$（其中 $[\mathbf{d}] := \sum_{j=1}^k (m - d_j)(d_j - d_{j-1})$，$d_0 = 0$）嵌入到 $F\ell^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 中，使得

$$\begin{aligned} M_n(\mathcal{A})^{[\mathbf{d}]} \ni X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & X(1,1) \\ 0 & 0 & \cdots & X(2,2) & X(2,1) \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & X(k-1,k-1) & \cdots & X(k-1,2) & X(k-1,1) \\ X(k,k) & X(k,k-1) & \cdots & X(k,2) & X(k,1) \end{bmatrix} \\ \mapsto \widetilde{X} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I_{d_1} \otimes I_n \\ 0 & 0 & 0 & I_{d_2 - d_1} \otimes I_n & X(1,1) \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & I_{d_k - d_{k-1}} \otimes I_n & \cdots & X(k-1,2) & X(k-1,1) \\ I_{m-d_k} \otimes I_n & X(k,k) & \cdots & X(k,2) & X(k,1) \end{bmatrix} / \sim_n^{(\mathbf{d};m)} \in F\ell_n^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A}), \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $X(i, j) \in M_{d_{i+1} - d_i,\ d_j - d_{j-1}}(M_n(\mathcal{A}))$，其中 $d_0 := 0$ 且 $d_{k+1} := m$。

取一个元素 $\sigma \in F\ell_n^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A})$。那么，由定义可知，对于任意 $A, B \in \sigma$ 以及 $j \in [k]$，$A \sim^{(d_j;\ m)_n} B$。因此，对于任意 $j \in [k]$，我们有良定义的映射 p_{d_j}：$F\ell_n^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A}) \ni A/\sim_n^{(\mathbf{d};m)} \mapsto A/\sim^{(d_j;\ m)}_n \in Gr_n^{(d_j);m)}(\mathcal{A})$。

A.2. 关于 $Gr^{(d;m)}(\mathcal{A})$ 上的非交换集合和非交换函数的概念（参见定义 3.1 和 3.2）可以自然地推广到 $F\ell^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A})$。通过完全相同的计算，我们也可以将格拉斯曼流形交织性质（参见命题 3.3）推广到当前情形。

命题 A.1. 设 Ω 是 $F\ell^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{A})$ 上的一个非交换集合，且 f 是从 Ω 到 $M(\mathcal{B})$ 的一个分次函数。那么，以下条件等价：

(a) f 是非交换的。*(b)* f 满足以下条件：*(I)* 对任意 $n, n' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$T \in M_{n,\ n'}(\mathcal{R})$ 以及 $\sigma \in \Omega_n$，$\sigma' \in \Omega_{n'}$，都有

$$\begin{bmatrix} I_n & T \\ 0 & I_{n'} \end{bmatrix} \cdot (\sigma \oplus \sigma') = \sigma \oplus \sigma' \quad \Rightarrow \quad f(\sigma)T = Tf(\sigma').$$

A.3. 定义了 非交换 $(j; u,\ v)$-差分微分算子 $\widetilde{\Delta}_{j\ u\ v}^{(\mathbf{d};m)}{}_{;\ ,}$，其中 $j \in [k]$ 且 $(u,\ v) \in [m - d_j] \times [d_j - d_{j-1}]$，其定义为 $\widetilde{\Delta}_{j\ u\ v}^{(\mathbf{d};m)}{}_{;\ ,} := \widetilde{\Delta}^{(d_j;\ m)\ u,\ d_{j-1}+v}$。

A.4. 在第 5 节中，我们引入了 $(d;\ m)$-格拉斯曼流形 $\mathcal{B}$-预解式。其旗流形扩展的一种可能形式（其中包含格拉斯曼预解式）如下：

令 $\mathbf{d} \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^k$，其中 $d_1 < d_2 < \cdots < d_k < m$，其中 $k \in [m-1]$ 且 $\pi \in F\ell_1^{(m-\mathbf{d};m)}(\mathcal{A})$，满足 $m - \mathbf{d} := (m - d_k,\ m - d_{k-1},\ \ldots,\ m - d_1)$。然后，我们按如下方式定义 $(\mathbf{d};\ m)$-旗 $\mathcal{B}$-预解集 $\widetilde{\rho}^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\mathcal{B}) = \bigsqcup_{n\geq 1} \widetilde{\rho}_n^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\ \mathcal{B})$：

$$\widetilde{\rho}_n^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\mathcal{B}) := \left\{ \sigma \in F\ell_n^{(\mathbf{d};m)}(\mathcal{B}) \,\middle|\, p_{d_j}(\sigma) \in \widetilde{\rho}_n^{(d_j;m)}(p_{m-d_j}(\pi);\mathcal{B}) \text{ for any } j \in [k] \right\}. \tag{29}$$

我们定义 $(\mathbf{d};m)$-旗 $\mathcal{B}$-预解集 $\widetilde{\mathfrak{R}}^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\ \mathcal{B}|j;\ v,u)$ 关于 $(j;v,u)$ 的，定义如下：

$\widetilde{\mathfrak{R}}^{(\mathbf{d};m)}$（对于任意 $j \in [k]$）和 $\widetilde{\mathfrak{R}}^{(d_j;m)}$

$$(\pi;\mathcal{B}|j;v,u)(\sigma) = \widetilde{\mathfrak{R}}^{(d_j;m)}(p_{m-d_j}(\pi);\mathcal{B}|d_{j-1}+v,u)(p_{d_j}(\sigma)), \quad \sigma \in \widetilde{\rho}^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\mathcal{B}) \tag{30}$$

$\in [m-d_j] \times [d_j - d_{j-1}]$。

A.5. 根据定理 6.1，我们有如下结果：

推论 A.2. 对于任意 $j \in [k]$ 和 (s,t)，$(u,v) \in [m-d_j] \times [d_j - d_{j-1}]$，我们有

$$\left(\Delta_{j\ s;\ t}^{(\mathbf{d};m)}\ \mathfrak{R}^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\ \mathcal{B}|j;\ v,u)\right)(\sigma;\ \sigma')(X) = -\widetilde{\mathfrak{R}}^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\ \mathcal{B}|j;\ v,s)(\sigma) \cdot X \cdot \widetilde{\mathfrak{R}}^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\ \mathcal{B}|j;\ t,u)(\sigma') \tag{31}$$

对于任意 $\sigma \in \widetilde{\rho}_n^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\ \mathcal{B})$，$\sigma' \in \widetilde{\rho}_{n'}^{(\mathbf{d};m)}(\pi;\mathcal{B})$ 和 $X \in M_{n,n'}(\mathcal{B})$。

Acknowledgements

作者衷心感谢导师 Yoshimichi Ueda 教授的鼓励。作者也感谢 Kenta Kojin 博士进行了愉快的讨论。本研究部分得到了 JST SPRING（资助编号 JPMJSP2125）和日本学术振兴会特别研究员（科研费资助编号 JP25KJ1405）的支持。

References

[AMY18] J. Agler、J. E. McCarthy 和 N. J. Young，《非交换流形、自由平方根与两个非交换变量中的对称函数》，*Trans. London Math. Soc.*，（2018）5(1)，第132–183页。[B88] N. Bourbaki，*Lie groups and Lie algebras*；第1-3章，施普林格出版社，1988年。[Bo89] N. Bourbaki，*Algebra I*；第1-3章，施普林格出版社，1989年。[BMM95] K. I. Beidar、W. S. Martindale III 和 A. V. Mikhalev，*Rings with generalized identities*，CRC 出版社，1995年。[GN24] *Int. Math. Res. Not.* 2024 21 13525 13562
I. Ghosh 和 S. Nayak，《伴随算子集的代数方面与函子性》，，（），第–页。[It23] H. Ito，全矩阵函数的微分演算 I，预印本，arXiv:2310.09841v2。[Iz89] S. Izumino，有界算子的商，*Proc. Amer. Math. Soc.*，第106卷，第2期，1989年。[K78] W. E. Kaufman，将闭算子表示为连续算子的商，*Trans. Amer. Math. Soc.*，第72，3，1978卷号。[KVV14] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi 和 V. Vinnikov，*Foundations of Noncommutative Function Theory*，《数学调查与专著》，第199卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2014年。[RS72] M. Reed 和 B. Simon，*Methods of Modern Mathematical Physics I; Functional Analysis*，学术出版社，1972年。[T72] J. L. Taylor，多算子函数演算的一般框架，*Adv. Math.*，第9卷，第183-252页（1972年）。[V00] D. Voiculescu，自由概率中自由差商的余代数，*Int. Math. Not. Res*，2000年。[V04] D. Voiculescu，自由分析问题 I：余代数的对偶变换 $\partial_{X:B}$ *Int. Math. Res. Not.*，第2004卷，第16期，2004年，第793–822页。[V10] D. Voiculescu，自由分析问题 II：格拉斯曼流形完备化与原点处的级数展开，《纯数学与应用数学杂志》645（2010），155–236。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya, 464-8602, Japan
Email address: hyuga.ito.e6@math.nagoya-u.ac.jp