arXiv:2601.18062v1 [math.LO] 26 Jan 2026

局部 o-极小结构中的区域不变性

MASATO FUJITA

Abstract. 在定义完备的局部 o-极小有序群扩张中，定义在同维欧几里得空间的可定义开集上的可定义连续单射映射是开映射。

1. Introduction

我们的目标是证明以下定理：

定理 1.1（区域不变性）。设 $\mathcal{M} = (M, <, +, 0, \ldots)$ 是有序群的一个定义完备的局部 *o*-极小扩张。设 V 是 M^n 的一个可定义开子集，且 $f\colon V \to M^n$ 是一个可定义连续单射映射。则 f 是开映射；也就是说，只要 U 是 V 的开子集，$f(U)$ 就是开集。

我们回顾几项已有工作。代数拓扑的经典著作中介绍了经典的区域不变性及其证明，例如 [2]。证明中常使用同调的概念。Woreheide 运用可定义同调理论，证明了当结构 $\mathcal{M}$ 是有序域的 o-极小扩张时，上述定理成立[12]。Johns 在[8] 中证明，在不使用同调概念的情况下，Woreheide 的结果在较宽松的条件下仍然成立。他假设 $\mathcal{M}$ 是一个 o-极小结构，并使用了可定义胞腔分解定理。Pierzcha-la 在 [10] 中独立于 Johns 证明了相同的结果。Dinh 和 Pha.m 在 [1]中给出了实数域的 o-极小扩张中可定义的连续映射为开映射的充要条件。他们在证明中使用了可定义映射的 Brouwer 度，而在我们的框架下无法定义可定义映射的 Brouwer 度。

人们提出了几种与 o-极小性类似的概念。我们将讨论其中的可定义完备局部 o-极小性 [9, 11] 。无端点稠密线性序的扩张 $\mathcal{M} = (M, <, \ldots\ldots)$ $M \cup \{\pm\infty\}$ [9] 若其中任意可定义子集 X 都有上确界和下确界，则称其为可定义完备的。若对每个可定义子集 X 和每个点 $a \in M$，都能选取一个包含该点 a 的开区间 I，使得 $X \cap I$ 是有限集与有限个开区间 [11]的并，则称 $\mathcal{M}$ 为局部 *o*-极小的。本文中，我们固定一个可定义完备的局部 o-极小有序群扩张 $\mathcal{M}$ 。

在定理 1.1 的情形下，无法使用可定义胞腔分解定理。作者及其合作者 [5, 7] 发现，在可定义完备的局部 o-极小结构中，维数函数的表现十分良好，与 o-极小结构中维数函数的良好表现类似，见第 [3, 章 4]。我们利用维数函数的这一良好性质证明该定理。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 03C64。

Key words and phrases. 局部 o-极小性；区域不变性。作者获得了日本学术振兴会科研费资助，项目编号为 JP25K07109。

我们介绍本文中使用的术语和记号。全文中，“可定义的”意为“在给定结构中带参数可定义”。我们假设 M 配备了由线性序 $<$ 诱导的序拓扑，而 M^n 上的拓扑是 M 上的序拓扑所诱导的积拓扑。开区间是形如 $(b_1,\ b_2):=\{x\in M\mid b_1<x<b_2\}$ 的集合，其中 $b_1,\ b_2\in M\cup\{\pm\infty\}$；开盒是开区间的乘积。闭区间以类似方式定义，记作 $[b_1,b_2]$。对于 M^n 的子集 A，$\mathrm{int}(A)$、$\mathrm{cl}(A)$、$\partial(A):=\mathrm{cl}(A)\setminus A$ 和 $\mathrm{bd}(A):=\mathrm{cl}(A)\setminus\mathrm{int}(A)$ 分别表示 A 的内部、闭包、前沿和边界。

2. Proof of the theorem

我们开始证明定理 1.1。设 X 是 M^n 的一个可定义子集。我们先回顾维数的定义。X 的维数是满足以下条件的最大非负整数 d：对于某个坐标投影 $\pi:M^n\to M^d$，$\pi(X)$ 有非空内部。我们将 M^0 视为赋有平凡拓扑的单点集。当 X 是空集时，我们定义 $\dim(X)=-\infty$。可定义完备的局部 o-极小结构中维数函数的温和性质总结于命题 2.8]。回顾一下，若可定义集 X 不能分解为 X 中两个互不相交的非空可定义开子集，则称其为**可定义连通**。

如果对于 X 中任意两点 x,y，都存在可定义连续映射 $\gamma:[a,b]\to X$，使得 $\gamma(a)=x$ 且 $\gamma(b)=y$，则称 X 可定义路径连通。设 X 中有两点 x,y。如果存在一个自然数 m 和可定义连续映射 $\gamma_i:[a_i,b_i]\to X$，其定义在非空有界闭区间 $[a_i,b_i]$ 上（$1\le i\le m$），并满足 $\gamma_1(a_1)=x$、$\gamma_m(b_m)=y$，且对于 $1\le i<m$，有 $\gamma_i(b_i)=\gamma_{i+1}(a_{i+1})$，则称在 X 中，y 从 x 可定义可达。显然，可定义可达性在 X 上构成一个等价关系。此外，当该结构是如我们所研究情形中的有序群的扩张时，X 可定义路径连通，当且仅当 X 中每个点 y 都能从 X 中任意一点 x 可定义可达。下面的引理显然成立，证明从略。

引理 2.1. *若可定义集 X 中的每个点 y 都可以定义地从 X 中任意一点 x 到达，则 X 是可定义连通的。*

接下来我们证明以下一个简单而重要的命题：

命题 2.2. *设 B 是 M^n 中的一个非空开盒，且 X 是 B 中维数为 $<n-1$ 的可定义闭集。那么可定义集 $B\setminus X$ 是可定义连通的。*

证明. 我们证明以下断言：由引理 2.1，该命题可由此断言推出。

断言. 任取两点 $x=(x_1,\dots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\dots,y_n)\in B\setminus X$。点 y 在 $B\setminus X$ 中可定义地从 x 到达。

我们通过对 n 作归纳来证明断言。对于 $n=1$，命题显然成立，因为 X 为空，而 B 是一个开区间。我们考虑 $n>1$ 的情形。令 $X_t:=\{z\in M^{n-1}\mid (z,\ t)\in X\}$，对每个 $t\in M$ 均成立。我们先将问题归约到 $\dim X_{x_n}<n-2$ 的情形。考虑由 $A:=\{t\in M\mid \dim X_t=n-2\}$ 定义的 M 的可定义子集 A。由于 $\dim X\le n-2$，根据 [7, 命题 2.8(11)]，我们有 $\dim A=0$。因为 A 的内部为空，我们可以找到一个足够接近 x_n 的 $x'_n\in M$，使得 $x'_n>x_n$ 且 $x'_n\notin A$。由于 $U\setminus X$ 是开集，且 x'_n 足够接近

于 x_n，对于每个 $x_n \le t \le x'_n$，点 $(x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}, t)$ 都属于 $U \setminus X$。点 $(x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}, x'_n)$ 可在 $U \setminus X$ 中从 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n)$ 到达。如有必要，我们可以用 $(x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}, x'_n)$ 替换 x，从而假设 $\dim X_{x_n} < n-2$。

设 $\pi\colon M^n \to M^{n-1}$ 是遗忘最后一个坐标的投影。接下来，我们将问题归约到 $\pi(y) \notin \pi(X)$ 的情形。当$\pi(y) \notin \pi(X)$ 时，无需证明。考虑 $\pi(y) \in \pi(X)$ 的情形。由 [7, 命题 2.6(6)]，有 $\dim \pi(X) < n-1$。任何包含点 $\pi(y)$ 的开盒都不包含于 $\pi(X)$。换言之，$\pi(y)$ 属于 $\partial(\pi(U) \setminus \pi(X))$。由曲线选择引理 [6, 推论 2.9]，，存在 $\varepsilon > 0$ 以及一个可定义连续映射$\delta\colon (0, \varepsilon) \to \pi(U)$，使得 $\lim_{t\to+0} \delta(t) = \pi(y)$，且对每个$0 < t < \varepsilon$ 都有 $\delta(t) \in \pi(U) \setminus \pi(X)$。取 $0 < d < \varepsilon$。考虑可定义映射 $\eta\colon [0, d] \to U$，其定义为$\eta(0) = \pi(y)$，且当 $0 < t \le d$ 时，$\eta(t) = \delta(t)$。映射 η 连续。考虑映射 $\gamma\colon [0, d] \to U$，其定义为 $\gamma(t) = (\eta(t)\ y_n)$。注意，对 $0 < t \le d$，有 $\gamma(t) \notin X$，因为 $\eta(t) \notin \pi(X)$。点 $\gamma(d)$ 在 $U \setminus X$ 中可从 y 可定义可达。通过用 $\gamma(d)$ 替代 y，不妨设 $\pi(y) \notin \pi(X)$。

由于 $\pi(y) \notin \pi(X)$，连接 y与 $z := (y_1, \ldots\ldots, y_{n-1}, x_n)$ 的线段不与 X相交。根据归纳假设，点 $(y_1, \ldots\ldots, y_{n-1})$ 在 $U_{x_n} \setminus X_{x_n}$ 中可从 $(x_1, \ldots\ldots, x_{n-1})$ 到达。这意味着 z在 $U \setminus X$中可从 x 定义可达。我们已经证明，y 在 $U \setminus X$中可从 x 到达。□

注记 2.3。L. van den Dries 提出了若干性质，预期“驯服”的维数函数应当具备这些性质。在 [4, 定义]中，命题 2.2 在维数函数 dim 满足这些性质的假设下成立；当该结构是有序域的可定义完备扩张时，无须假设局部 o-极小性。

证明。在命题 2.2 的证明中，我们将问题归结为 $\pi(y) \notin \pi(X)$ 的情形。证明的这一部分需要修订，但证明的其余部分无需修订，因为 [4, 节1]中给出的维数函数性质仅用于剩余部分。

我们将问题归结为 $\pi(y) \notin \pi(X)$ 的情形。考虑单位球面$S^{n-1} = \{u = (u_1, \ldots\ldots, u_n) \in M^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 = 1\}$。注意到维数为 $S^{n-1} = n-1$。定义可定义映射 $\kappa\colon X \to S^{n-1}$，使得 $\kappa(u) = (u-y)/\|u-y\|$，其中 $\|\cdot\|$表示 M^n中的欧几里得范数。映射 κ 定义良好，因为 $y \notin X$。根据 [4, 推论 1.5(ii)]，有维数 $\kappa(X) \le n-2$。特别地，我们可以找到$v \in S^{n-1} \setminus \kappa(X)$。通过线性坐标变换，我们可以将问题归结为 $\pi(y) \notin \pi(X)$ 的情形，使得向量 v与单位向量 $(0, \ldots\ldots, 0, 1)$ 重合。□

我们将在定理 1.1 的证明中使用以下推论。

推论 2.4。设 B 是 M^n 中的一个开盒，且 W 是 B 的一个可定义开子集，使得 $B \not\subseteq \mathrm{cl}(W)$。那么等式 $\dim(B \cap \partial W) = n-1$ 成立。

证明。反设 $\dim(B \cap \partial W) < n-1$。注意到 $B \cap \partial W$ 在 B 中是闭集。可定义集 $B \setminus \partial W$ 被分解为两个互不相交的可定义开集 W 和 $B \setminus \mathrm{cl}(W)$。这与命题 2.2 矛盾。□

现在我们可以证明定理 1.1 了。

定理 *1.1* 的证明。设 U 是 V 的一个开子集。不失一般性，我们可以假设 U 是一个有界开盒，使得 $\mathrm{cl}(U) \subseteq V$，因为任意

V 的开子集都可以表示为可能无限多个此类开盒的并。令

$$H = f(U) \cap \mathrm{bd}(f(U))$$

与 [8] 的证明相同。注意，由于 H 的内部为空，$\dim H \leq n-1$。我们只需证明 $H = \emptyset$。反设 $H \neq \emptyset$，则导出矛盾。

我们先证明 H 是 $\mathrm{bd}(f(U))$ 的开子集。由于 f 连续，我们有 $f(\mathrm{cl}(U)) \subseteq \mathrm{cl}(f(U))$。下面证明反向包含关系。由命题 1.10] ， $f(\mathrm{cl}(U))$ 闭且有界，因为 $\mathrm{cl}(U)$ 闭且有界。由于 $f(\mathrm{cl}(U))$ 是闭集，我们有 $\mathrm{cl}(f(U)) \subseteq f(\mathrm{cl}(U))$。由此证明了 $f(\mathrm{cl}(U)) = \mathrm{cl}(f(U))$。由于 f 是单射，我们得到 $\partial f(U) = \mathrm{cl}(f(U)) \setminus f(U) = f(\mathrm{cl}(U)) \setminus f(U) = f(\partial U)$。同理，由命题 1.10]， $f(\partial U)$ 闭且有界。这意味着 $\partial f(U)$ 是闭集。由等式 $H = \mathrm{bd}(f(U)) \setminus \partial f(U)$，集合 H 是 $\mathrm{bd}(f(U))$ 中的开子集。

我们证明 $\dim H = n-1$。取定一点 $b \in H$。由于 H是 $\mathrm{bd}(f(U))$ 中的开集，我们可以取一个开盒 B，使得 $b \in B$且 $B \cap \mathrm{bd}(f(U)) \subseteq H$。令 $W := B \cap \mathrm{int}(f(U))$，并证明 W 非空。根据 $\mathrm{bd}(f(U))$ 的定义，B与 $f(U)$ 有非空交集，因为 $b \in \mathrm{bd}(f(U))$。 $f^{-1}(B) \cap U$ 是非空的可定义开集，因为 f 是连续的。特别地，我们有 $\dim(f^{-1}(B) \cap U) = n$。我们有 $\dim(B \cap f(U)) = \dim f(f^{-1}(B) \cap U)) = n$，这是由命题 2.8(6)] 得出的，因为 f 是单射。这意味着 $B \cap f(U)$ 有非空内部。我们已经证明 $W = B \cap \mathrm{int}(f(U)) \neq \emptyset$。

反设 $B \subseteq \mathrm{cl}(W)$，以导出矛盾。根据 W 的定义，我们有 $B \subseteq \mathrm{cl}(W) \subseteq \mathrm{cl}(f(U))$。由于 $B \cap \mathrm{bd}(f(U)) \subseteq H \subseteq f(U)$，可得 $B \subseteq f(U)$。特别地，点 b 属于 $\mathrm{int}(f(U))$，这与 H 的定义以及假设 $b \in H$ 矛盾。因此，我们证明了 $B \nsubseteq \mathrm{cl}(W)$。将推论 2.4 应用于 W，可得 $\dim(B \cap \partial W) = n-1$。注意到 $B \cap \partial W \subseteq B \cap \mathrm{bd}(f(U)) \subseteq H$。回忆 $\dim H \leq n-1$。由这两个事实可得等式 $\dim H = n-1$。

令 $D = f^{-1}(H)$。注意到，根据命题 2.8(6)， $D \subseteq U$ 且 $\dim D = n-1$ [7,]，因为 f 是单射。设 $\pi \colon M^n \to M^{n-1}$ 为忘掉最后一个坐标的坐标投影。必要时置换坐标后，我们可以选取

- 一个可定义开子集 C，其属于 M^{n-1} 且包含于 $\pi(D)$,
- 一个可定义开子集 O，属于 M^n，并且
- 一个可定义连续映射 $g : C \to D$

使得

- $\pi(O) = C$,
- $D \cap O = g(C)$，并且
- 复合映射 $\pi \circ g$ 是 C上的恒等映射

由 [5, 引理 3.5]可知。在 [5, 引理 3.5], 中，假设结构 $\mathcal{M}$ 具有一种称为性质 (a) 的性质，但根据 [7, 定理 2.5] ，每个可定义完备的局部 o-极小结构都具有性质 (a)，因此可以省略这一假设。注意， $C \subseteq \pi(D) \subseteq \pi(U)$。将$O$替换为 $O \cap U$后，我们可以假设 $O \subseteq U$。 $D \cap O$是可定义连续函数 $h \colon C \to M$的图像。令$O_1 = \{(x, y) \in (C \times M) \cap O \mid y > h(x)\}$，且 $O_2 = \{(x, y) \in (C \times M) \cap O \mid y < h(x)\}$。显然有 $D \cap O \subseteq \partial O_1 \cap \partial O_2$，且 $\dim(D \cap O) = n-1$。令

$$H' = f(D \cap O) = f(f^{-1}(H) \cap O).$$

根据 [7, 命题 2.8(6)] 以及 f的单射性，我们有 dim $H' = n-1$。于是得到

$$H' \subseteq \partial f(O_1) \cap \partial f(O_2)$$

因为 f 是连续且单射的。

我们有 dim bd($f(O_i)$) $\leq n-1$，因为 $i = 1$，2，这是因为 bd($f(O_i)$) 的内部为空。我们有 dim bd($f(O_i)$) $= n-1$，因为 H'包含于 bd($f(O_i)$)。根据 [7, 命题 2.8(5)]，我们有 dim(bd($f(O_1)$) ∪bd($f(O_2)$)) $= n-1$。我们将 [5,引理 3.5] 应用于 H'和 bd($f(O_1)$) ∪bd($f(O_2)$)。如有必要，置换坐标后，我们可以选取

- 一个 C' 包含于 $\pi(H')$中的 M^{n-1} 可定义开子集,
- 一个 M^n 的 O' 可定义开子集，以及
- 一个 g' $C' \to H'$的可定义连续映射

使得

- $\pi(O') = C'$,
- (边界($f(O_1)$) ∪边界($f(O_2)$)) $\cap O' = g'(C')$以及
- 复合映射 $\pi \circ g'$ 是 C'上的恒等映射。

等式 (边界($f(O_1)$) ∪边界($f(O_2)$)) $\cap O' = H' \cap O'$显然成立，这是因为关系式 (边界($f(O_1)$) ∪边界($f(O_2)$))∩$O' = g'(C')$、 $g'(C') \subseteq H'$以及 $H' \subseteq$边界($f(O_1)$)∪边界($f(O_2)$)。此外，我们有

$$H' \cap O' = (\partial(f(O_1)) \cap \partial(f(O_2))) \cap O' = (\mathrm{bd}(f(O_1)) \cup \mathrm{bd}(f(O_2))) \cap O'$$

因为 $H' \subseteq \partial(f(O_1))\cap\partial(f(O_2)) \subseteq$边界($f(O_1)$)∪边界($f(O_2)$)。利用这些等式，我们得到

$$H' \cap O' = \partial(f(O_i)) \cap O' = \mathrm{bd}(f(O_i)) \cap O'$$

对于 $i = 1$，2. 存在一个可定义连续函数 $h' : C' \to M$，使得$H' \cap O'$是 h'的图像。令 $O'_1 = \{(x, y) \in (C' \times M) \cap O' \mid y > h'(x)\}$，且$O'_2 = \{(x, y) \in (C' \times M) \cap O' \mid y < h'(x)\}$。注意到 $O' \setminus H' = O'_1 \cup O'_2$。根据可定义选择引理 [6, 引理 2.8], ，我们可以找到可定义函数 $h_i : C' \to M$，使得对每个 $x \in C'$ 和 $i = 1$，均有 $(x, h_i(x)) \in O_i$。2. 利用 [7, 命题 2.8(5),(7)], ，必要时用包含于 C' 中的小开盒代替 C'，我们可以假设 C' 是一个开盒，且 h_i 在 C' 上连续（ $i = 1$ 取 2 ）。我们可以用 $\{(x, y) \in C \times M \mid h_2(x) < y < h_1(x)\}$ 替换 O'，从而假设 O' 具有 $\{(x, y) \in C \times M \mid h_2(x) < y < h_1(x)\}$ 的形式。特别地，可定义集 O'_1 和 O'_2 是可定义连通的。我们已将问题化归为 O'_1 和 O'_2 均可定义连通的情形。

开集 $O' \setminus H'$ 与 $f(O_1)$ 相交，因为 $H' \subseteq \partial(f(O_1))$，且 O' 是 $H' \cap O'$ 的一个邻域。由此得到 $O' \cap (f(O_1) \setminus \mathrm{int}(f(O_1))) \subseteq H'$，因为 bd($f(O_1)$) $\cap O' = H' \cap O'$。因此， O'_1 和 O'_2 中至少有一个与 int($f(O_1)$) 相交，因为 $O' \setminus H' = O'_1 \cup O'_2$。不失一般性，假设 O'_1 与 int($f(O_1)$) 相交。其余情况可类似处理。我们有 $O'_1 \cap$bd($f(O_1)$) $= \emptyset$，因为 bd($f(O_1)$) $\cap O' = H' \cap O'$。我们有 $O'_1 \subseteq f(O_1)$。否则，可定义连通的可定义集 O'_1 可分解为两个互不相交的非空可定义开集 $O'_1 \cap$int($f(O_1)$) 和 $O'_1 \setminus$cl($f(O_1)$)，这就产生矛盾。

出于同样的原因， O'_1 和 O'_2 中至少有一个包含于 $f(O_2)$。我们有$f(O_1)\cap f(O_2) = \emptyset$，因为 $O_1 \cap O_2 = \emptyset$是单射。除此之外， $f(O_2)\cap O' \neq \emptyset$，因为 $\partial f(O_2) \cap O' = H' \cap O' \neq \emptyset$且 O'是开映射。这说明可定义集 O'_2 包含于 $f(O_2)$。总之，我们已经证明 O' 包含于 $f(U)$。取 $c' \in C'$并令 $b' = g'(c')$。我们有 $b' \in$int($f(U)$)，因为 b'是

包含于 O'。另一方面，我们有 $b' \in H' = f(f^{-1}(H) \cap O) \subseteq H \subseteq \mathrm{bd}(f(U))$，这显然矛盾。我们终于证明了 H为空。这意味着 $f(U)$ 是开集；因此， f是开映射。□

在定理 1.1 中，我们假设 f 的定义域是一个可定义开集，陪域为 M^n。我们可以轻易地将主定理推广到局部可定义流形之间的可定义映射。维数为 n 的局部可定义流形 是一个三元组 $(S, (U_i, \theta_i)_{i\leq\kappa})$，其中：

- S 是一个集合，且 $(U_i)_{i\leq\kappa}$ 是 S的覆盖；
- 每个 $\theta_i : U_i \to M^n$ 都是一个注入映射，使得 $\theta(U_i)$ 是 M^n 的可定义开子集；
- 对于所有 i， j， $\theta_i(U_i \cap U_j)$ 都是 $\theta_i(U_i)$ 的可定义开子集，并且由 $\theta_{ij}(x) = \theta_j(\theta_i^{-1}(x))$ 给出的过渡映射 $\theta_{ij} : \theta_i(U_i \cap U_j) \to \theta_j(U_i \cap U_j)$ 是可定义同胚。

我们称 (U_i, θ_i)'s 为 S 的可定义图册。如果存在满足上述条件 $(U_i, \theta_i)_{i\leq\kappa}$ 的族，按照术语上的宽泛用法，我们称 S 为局部可定义流形。局部可定义流形 S 配备如下拓扑：每个 θ_i 都是到其像上的同胚。

我们回顾另一个概念。设 $f : X \to S$ 是从拓扑空间 X 到集合 S 的映射。若对任意 $x \in X$，都存在 X 中包含 x 的开邻域 U，使得将 f 限制到 U 后是单射，则称该映射为局部单射。

我们将定理 1.1 推广如下：

推论 2.5。 设 X 和 Y 是维数分别为 d 和f 的局部可定义流形， $X \to Y$ 是一个可定义的、连续且局部单射的映射：则 f 是开映射。

证明。 设 U 是 X 的一个开子集。任取一点 $y_0 \in f(U)$。我们只需证明存在 Y 中包含 y_0 的开邻域 V，且该邻域包含于$f(U)$。我们选取一点 $x_0 \in X$，使得 $f(x_0) = y_0$。

我们首先选取 Y 中 y_0 的一个可定义开邻域 W_1 、 M^d 中原点的一个可定义开邻域 W_2 ，以及一个可定义同胚 $\psi : W_1 \to W_2$ ，使得 $\psi(y_0)$ 是原点。这是可行的，因为 Y 是一个局部可定义流形。出于同样的原因，我们可以取 X 中 x_0 的一个可定义开邻域 N_1 、 M^d 中原点的一个可定义开邻域 N_2 ，以及一个可定义同胚 $\varphi : N_1 \to N_2$ ，使得 $\varphi(x_0)$ 是原点。必要时缩小 N_1，我们可以假设 $N_1 \subseteq U \cap f^{-1}(W_1)$。此外，由于 f 是局部单射，再次缩小 N_1 ，我们可以假设 f 在 N_1 上的限制是单射。令 $V = f(N_1)$。我们证明 V 是所需的邻域。

可定义映射 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : N_2 \to M^d$ 连续且为单射。由定理 1.1，它是一个开映射。这意味着 $\psi(V) = \psi(f(N_1)) = \psi(f(\varphi^{-1}(N_2)))$ 是 M^d 中的开集。由于 W_2 在 M^d 中是开集，集合 $\psi(V)$ 在 W_2 中是开集。集合 $V = \psi^{-1}(\psi(V))$ 是 W_1 中的子集且为开集，同时它在 Y 中也是开集。开集 V 是 Y 中 y_0 的一个开邻域，且包含于 $f(U)$ 中。□

References

[1] S. T. Dinh 和 T-S. Pha.m, *Definable continuous mappings and Whyburn's conjecture*, 《美国数学学会会刊》, **151** (2023), 2081-2095。[2] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, 施普林格出版社，纽约，柏林，1972。

[3] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, 伦敦数学学会讲义系列, 第248卷。剑桥大学出版社, 剑桥, 1998。[4] L. van den Dries, *Dimension of definable sets, algebraic boundedness and henselian fields*, 《纯粹与应用逻辑年刊》, **45** (1989), 189-209。[5] M. Fujita, *Locally o-minimal structures with tame topological properties*, 《符号逻辑杂志》, **88** (2023), 219–241。[6] M. Fujita, *Decomposition into special submanifolds*, 《数学逻辑季刊》**69** (2023), 104–116。[7] M. Fujita、T. Kawakami 和 W. Komine, *Tameness of definably complete locally o-minimal structures and definable bounded multiplication* **68** 2022 496 515 , 《数学逻辑季刊》( ), –。[8] J. Johns, *An open mapping theorem for o-minimal structures*, 《符号逻辑杂志》, **66** (2001), 1817–1820。[9] C. Miller, *Expansions of dense linear orders with the intermediate value property*, 《符号逻辑杂志》, **66** (2001), 1783–1790。[10] R. Pierzcha-la, *Invariance of domain in o-minimal structures*, 《波兰数学年刊》, **77**, 289–294。[11] C. Toffalori 和 K. Vozoris, *Notes on local o-minimality*, 《数学逻辑季刊》, **55** (2009), 617-632。[12] A. Woerheide, *Topology of definable sets in o-minimal structures*, 博士论文, 伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校, 1996。

Department of Liberal Arts, Japan Coast Guard Academy, 5-1 Wakaba-cho, Kure, Hiroshima 737-8512, Japan*Email address*: fujita.masato.p34@kyoto-u.jp