arXiv:2601.18126v1 [math.DG] 26 Jan 2026

椭圆陈特征与椭圆 Atiyah–Witten 公式

GEYANG DAI 和 FEI HAN

Abstract. 设 G 是一个紧致、连通且单连通的李群。流形 X上的一个主 G丛，配备一个联络，并与环群 LG的一个正能量表示一起，给出自由环空间 LX上的一个圆等变丛带模。由这些数据，我们在 LX上构造椭圆陈特征，并在双环空间 L^2X上构造其精化形式椭圆 *Bismut–Chern* 特征。

将经典 Atiyah–Witten 公式从自由环空间 LX推广到双环空间 L^2X，我们建立了椭圆 *Atiyah–Witten* 公式。在 LX上的 L^2X 上的椭圆 *holonomy* 由 τ-变形的等变扭曲平行输运定义。我们证明，与椭圆曲线上的四种自旋结构对应的四个 Pfaffian 截面，可与 $G = \mathrm{Spin}(2n)$ 时由四个虚拟一级正能量表示产生的四个椭圆 *holonomy* 相识别。这些构造与椭圆曲线上的 $G_{\mathbb{C}}$-丛模空间以及 Chern–Simons 规范理论背景下的共形块密切相关。

Contents

1. 引言 2 1.1. 背景与动机 2 1.2. 主要结果 4 2. 环群、环代数与正能量表示 15 2.1. LG上的哈密顿几何与中心扩张 15 2.2. 双扩张环代数 17 2.3. 正能量表示与 Kac-Weyl 特征 18 3. 等变扭曲陈特征与 Bismut–Chern 特征 21 3.1. 扩展环丛的 Bismut-Chern 特征 21 3.2. 奇异等变扭曲上同调 23 3.3. 等变扭曲 Bismut-Chern 特征 25 4. LX 28上的陈特征 4.1. q-分次陈特征与 Bismut-Chern 特征 29 4.2. 提升 gerbe 的几何 30 4.3. LX 32上的椭圆陈特征 4.4. 收敛性 33

4.5. 由 String-G结构给出的平凡化 36 ˆ 4.6. $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变 A-亏格 37 5. 椭圆 Atiyah–Witten 公式 39 5.1. LX 41上的经典 Atiyah-Witten 公式 5.2. 椭圆 holonomy 42 5.3. L^2X 46上的 Pfaffian 5.4. 线丛的等价 47 5.5. 模空间上的椭圆 Atiyah-Witten 公式 51 5.6. L^2X 56上的椭圆 Atiyah-Witten 公式 5.7. 陈-西蒙斯规范理论与双环空间几何 58 6. L^2X 62 上的椭圆 Bismut-Chern 特征 6.1. L^2X 62的奇异扭曲（$S^1 \times \mathbb{C}^*_{<1}$）-等变上同调 6.2. 椭圆 Bismut-Chern 特征 64 6.3. 进一步讨论 66 参考文献 68

1. Introduction

1.1. 背景与动机。 Atiyah–Singer 指标定理的回路空间方法基于两个主要要素：**Atiyah–Witten 公式** [Ati85]以及 **Bismut–Chern 特征** [Bis85]。二者共同将经典指标公式与自由环空间上的几何结构联系起来。

设 (X, g) 是一个 $2n$ 维黎曼流形，并记其自由环空间为 LX。假设 X 是自旋的。那么 Atiyah–Witten 公式指出，对于每条回路 $\gamma \in LX$，有

$$\mathrm{Tr}_s\big(hol_{\mathcal{S}_X}(\gamma)\big) \;=\; \mathrm{pf}_\zeta\big(\nabla_{\dot\gamma}\big), \tag{1.1}$$

其中，$\mathrm{Tr}_s(hol_{\mathcal{S}_X}(\gamma))$ 是 $\mathbb{Z}_2$ 分次旋量丛$\mathcal{S}_X$中 holonomy 的超迹，而 $\mathrm{pf}_\zeta(\nabla_{\dot\gamma})$ 是沿该回路的协变导数的 ζ 正则化 Pfaffian。这个恒等式建立了 X 上 Dirac 算子所对应的局部指标密度的环空间表达式与 LX 上局部化过程之间的联系。

第二个要素是 Bismut–Chern 特征 BCh_V，它是在 LX 上与带联络 $(V,\ \nabla^V)$ 的向量丛相关联的等变闭微分形式。它是普通陈特征形式 Ch_V 在 X 上的环空间精化。当 BCh_V 与环空间指标密度配对，并在 LX 上形式地应用局部化后，所得结果就是由 V 扭积的 Dirac 算子的指标。关于这些构造背后的 Hamiltonian–Lagrangian 对应的系统论述，见 [Bis11]。

在 [Wit87，Wit88], Witten 解释了 Hamiltonian–Lagrangian 对应如何自然地从有限维流形 X 扩展到其自由环空间 LX。形式上， S^1-等变的 LX 上 Dirac–Ramond 算子的指标，恰与以 X 为靶空间的（2|1）超对称 σ 模型的配分函数相一致。将两边局部化到 X 后，均可得到 Witten 属。

严格构造狄拉克–拉蒙算子，首先需要在 LX 上存在旋量丛，而这又要求 X 具有弦结构。Stolz 和 Teichner 在 [ST05] 中提出了这一方案。在 [KW24], 中，旋量丛 $\mathcal{S}_{LX} \to LX$ 被严格地构造成一个光滑福克丛，其关键是运用了装备希尔伯特空间技术。当 X 不具有弦结构时，我们转而考虑 LX 上环旋量提升 gerbe 上的环旋量 gerbe 模。

受 LX 上 Atiyah–Witten 公式的启发，自然会想到在双环空间 L^2X 上寻求一个类比，我们称之为 **椭圆 Atiyah–Witten 公式**。人们预期，与环旋量 gerbe 模相关联的 **椭圆 holonomy** 将会存在，并发挥旋量丛中 holonomy 超迹的椭圆类比作用。在解析侧，同样会涉及 Dirac 算子的 Pfaffian；不过现在这些算子定义在椭圆曲线上，并与由 L^2X 参数化的向量势耦合。椭圆 holonomy 可视为提升 gerbe 所关联的转移线丛的一个截面；预期它将与这一 Pfaffian 相等，而后者自然地作为 Pfaffian 线丛 [Fre87, Bun09] over L^2X 的截面出现。本文的目标之一是确立这一椭圆 Atiyah–Witten 公式。

与有限维情形十分相似，在有限维情形中，向量丛用于扭曲流形 X上的旋量复形；主 G-丛 P 与正能量表示 π 共同确定了对 LX上旋量复形的一种自然扭曲。现在有两个 gerbe 模参与其中：环旋量 gerbe 模 $\mathcal{S}_{LX}$，以及由主 G-丛和所选环群的正能量表示 π 共同确定的 gerbe 模 $\mathcal{E}$。当相应的扭曲 gerbe 相互抵消时，也就是说，发生反常抵消时，这两个 gerbe 模的耦合便能在 LX上给出定义良好的扭曲旋量复形。形式上，局部化到 X后，所得扭曲狄拉克–拉蒙算子的 S^1-等变指标计算出扭曲 Witten 属 [Bry90,Liu95]。

从拉格朗日视角出发，并以 Bismut–Chern 特征在自由环空间 LX上的作用为指引，自然可以预期，对于LX上的 gerbe 模 $\mathcal{E}$，在双环空间L^2X层面也存在相应的 Bismut–Chern 特征。我们将这一精化称为**椭圆 Bismut–Chern 特征**。从 Stolz–Teichner 计划的视角来看，这一概念也曾在 [BE24], 中提出；该计划探讨超对称场论与椭圆上同调及 tmf 之间的联系 [ST04], [Hop02]。未来我们将沿着这一思路研究椭圆 Bismut–Chern 特征。

限制回 X后，椭圆 Bismut–Chern 特征恰好恢复扭曲 Witten 属中出现的扭曲项。本文的另一项目标是构造并研究与数据（P, π）相关的各种陈特征，分别定义在 X、回路空间 LX以及双环空间 L^2X上。

现在，我们将更加详细地概述我们的计划。

我们首先讨论环空间 LX上提升 gerbe 的几何，以及由正能量表示产生的 gerbe 模。为简便起见，我们假设G 是一个紧致、连通、单连通的单李群。设 $P \to X$ 为一个配备联络 A的主 G丛，并考虑相应的环丛 $LP \to LX$。将 LP 到环群基本中心扩张的提升 gerbe 记为

$$(\mathcal{G}_P, \nabla^B) \longrightarrow LX. \tag{1.2}$$

此 gerbe 带有自然的 $\mathbb{S}^1$等变结构，且动量映射消失（见第 4.2 小节）。

令 $\mathscr{PER}^k(LG)$ 表示中心扩张环群 $\widetilde{LG}$ 的层为k 的正能量表示所构成的表示环。对于每个 $\mathcal{H} \in \mathscr{PER}^k(LG)$，都存在一个带联络的 $\mathbb{S}^1$等变 gerbe 模 $(\mathcal{E},\ \nabla^{\mathcal{E}})$，定义在 k次张量幂 $(\mathcal{G}_P,\ \nabla^B)^{\otimes k}$上。

当主 G丛 P 具有 string-G 结构时，这等价于$\widetilde{\ }$说主丛 $LP \to LX$ 可以提升为主 LG丛。在这种情况下，$\mathcal{E}$ 成为 LX上的无限维向量丛，正如 [Bry90]中所述。

在本文的第一部分，我们聚焦于自由环空间 LX，并构造与 gerbe 模 $(\mathcal{E},\ \nabla^{\mathcal{E}})$ 相关的陈特征。具体而言，我们在 LX 上引入两种特征：q**- 分次 Bismut–Chern 特征**和**椭圆陈特征**。后者定义为与 gerbe 模 $(\mathcal{E},\ \nabla^{\mathcal{E}})$ 相关的 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 Chern 特征的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-扩张，其中 $\mathbb{C}^*_{<1}$ 是穿孔开单位圆盘。

在第二部分，我们转而研究双环空间 L^2X 的几何。我们引入与 gerbe 模 $(\mathcal{E},\ \nabla^{\mathcal{E}})$ 相关的**椭圆 holonomy**，并在 $G = \mathrm{Spin}(2n)$ 的一级情形下证明**椭圆 Atiyah–Witten 公式**。此外，我们还构造了与 $(\mathcal{E},\ \nabla^{\mathcal{E}})$ 相关的**椭圆 Bismut–Chern 特征**，定义在 L^2X 上。可以发现，在 LX 上构造的两种陈特征，自然地对应于该椭圆 Bismut–Chern 特征沿两个环方向在 L^2X 上的限制。

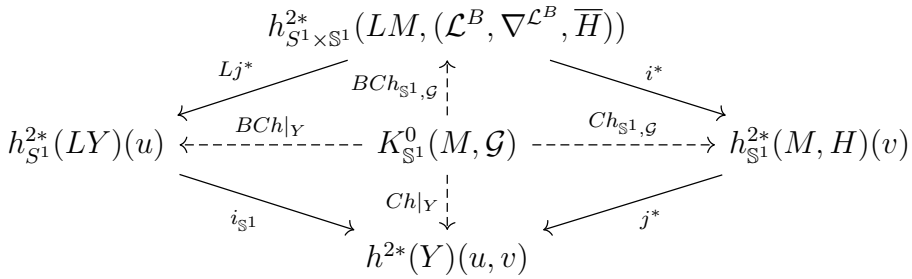
在发展椭圆 Atiyah–Witten 理论时，我们注意到，椭圆 holonomy 还可以通过二重转移作另一种描述，直接从 X 到 L^2X，并自然推广到高亏格映射空间。这种二重转移方法基于 Chern–Simons 规范理论中的量子化与约化可交换（见 [DLZ]）。将这一双环空间视角与源自 Wess–Zumino–Witten 模型共形场论的环空间表述进行比较，将会很有意义 [DS07]。从物理角度看，L^2X/LX 描述自然地融入 Chern–Simons/Wess–Zumino–Witten 对应的框架中。

1.2. **主要结果**。 现在我们来介绍这篇论文的主要结果。

1.2.1. 等变扭曲 *Bismut–Chern* 特征。 为了为 LX 上的椭圆陈特征以及 L^2X上的椭圆 Bismut–Chern 特征构建几何框架，我们首先在第 3 节建立等变扭曲 *Chern* 特征和等变扭曲 *Bismut–Chern* 特征的一般理论。

基于 [HM14], , 我们构造了 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 Bismut–Chern 特征，作为 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 Chern 特征的环空间精化；后者由 [MS02] 引入。更确切地说，设 M 是一个 $\mathbb{S}^1$-流形，且 $(\mathcal{G},\ \nabla^B)$ 是带有联络且动量映射消失的 $\mathbb{S}^1$-等变 gerbe（关于一般的等变 gerbe，见 [Mei03]）。我们在 LM 上构造了 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 Bismut–Chern 特征 $BCh_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G}}$，将其作为 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 Chern 特征 $Ch_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G}}$的环空间精化。

此外，若 gerbe $\mathcal{G}$ 限制在 $\mathbb{S}^1$-不动点集 $Y = M^{\mathbb{S}^1}$上是平凡的，则可得到以下交换图：

(1.3)


下面简要说明记号。 $H\in\Omega^3(M)^{\mathbb{S}^1}$ 是 gerbe $(\mathcal{G},\ \nabla^B)$ 的曲率 3-形式。$K^0_{\mathbb{S}^1}(M,\ \mathcal{G})$ 是 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 K-理论。$h^*_{S^1}(LY)$ 表示环空间 LY的完备 S^1-等变上同调。 $h^*_{\mathbb{S}^1}(M,\ H)$ 表示由 3-形式 H扭曲的 M的 $\mathbb{S}^1$-等变上同调。最后， $h^*_{S^1\times\mathbb{S}^1}(LM,\ (\mathcal{L}^B,\ \nabla^{\mathcal{L}^B},\ H))$ 表示 LM的奇异（$S^1\times\mathbb{S}^1$）-等变上同调，它由 LM 上的（$S^1\times\mathbb{S}^1$）-不变微分形式构造，并由与该 gerbe 相关联的转移线丛 $(\mathcal{L}^B,\ \nabla^{\mathcal{L}^B})$ 扭曲（见定义 3.4）。

值得强调的是，动量映射消失并非构造等变扭曲 *Bismut–Chern* 特征的必要条件。我们在此施加这一条件，仅仅是因为在后续应用中，我们将专门讨论 $M = LX$ 的情形，并取 $(\mathcal{G},\ \nabla^B)$ 为提升 gerbe，而它确实具有消失的动量映射。此外，采用等变上同调的 Cartan 模型表述时，整个构造自然可以推广到任意紧李群 G 的 G-等变扭曲 Bismut–Chern 特征。

1.2.2.提升 *gerbe*、由正能量表示得到的 *gerbe* 模，以及 ***LX*** 上的陈特征。

给定一个带联络的主 G-丛以及一个正能量表示，在第 4 节中，我们在 LX 上构造两种陈特征： q-**分次 Bismut–Chern 特征**和**椭圆陈特征**。

设 $(P,\ A)\ \to\ X$ 是一个带有联络的主 G-丛，并令$\mathscr{PER}^k(LG)$ 表示层-k 环群正能量表示的表示环

的 LG。对于 $\mathcal{H} \in \mathscr{PER}^k(LG)$，存在能量分解

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{H}_n, \tag{1.4}$$

其中每个 $\mathcal{H}_n$ 都是有限维的 G-表示。与这一分解相对应的是一个按 q分级的向量丛

$$\Psi(P,\mathcal{H}) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \big(P \times_G \mathcal{H}_n\big)\, q^n \;\in\; K(X)[[q]]. \tag{1.5}$$

相应的 q分级陈特征定义为

$$\begin{aligned} Ch:\ \mathscr{PER}^k(LG) &\longrightarrow H^{2*}(X)[[q]], \\ \mathcal{H} &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} Ch\big(P \times_G \mathcal{H}_n\big)\, q^n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

这一特征自然出现在扭曲 Witten 属 [Bry90,Liu95], 中，并且与 Miller 椭圆特征 [Mil89]密切相关。它也出现在 [BET21]中，用于在复解析等变椭圆上同调中构造泛欧拉类和托姆类的余循环代表元。只有乘以模异常 q^{m_Λ}后，才会出现模不变性，其中 Λ 表示 $\mathcal{H}$的最高权。此时，修正后的特征 $q^{m_\Lambda}Ch(\mathcal{H})$可以表示为雅可比 theta 函数的线性组合。

受 Bismut-Chern 特征的启发，自然可以定义 q分级的 ***Bismut–Chern*** 特征，将其视为 q 分级陈特征的回路空间细化：

$$\begin{aligned} BCh:\ \mathscr{PER}^k(LG) &\longrightarrow h^{2*}_{S^1}\big(LX\big)[[q]], \\ \mathcal{H} &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} BCh\big(P \times_G \mathcal{H}_n\big)\, q^n. \end{aligned} \tag{1.7}$$

为了在 LX上得到真正的环群椭圆陈–韦伊理论，我们使用 LX 上的提升 gerbe（$\mathcal{G}_P$, ∇^B），以及由正能量表示所产生的 gerbe 模。

提升 gerbe 衡量了将主 LG-丛 $LP \to\!\!\!\!\!\sim LX$ 提升为主 LG-丛的障碍（参见 [Gom01a,Wal10]）。令 R 表示联络 A的曲率，并设 $\Phi = \langle R,\ R\rangle$ 为由最小双线性型定义的 4 次曲率形式。它是 X [Wal09]上的陈–西蒙斯 2-gerbe 的曲率形式。与之相关的 LX 上的提升 gerbe 是 $\mathbb{S}^1$-等变的，且具有消失的动量映射；其曲率形式记为 H，由将 Φ 从 X 转导至 LX而得到。

对于 $\mathcal{H} \in \mathscr{PER}^k(LG)$，在 k 重张量幂 $(\mathcal{G}_P,\ \nabla^B)^{\otimes k}$ 上存在一个相应的无限维 gerbe 模 $(\mathcal{E},\ \nabla^{\mathcal{E}})$。定义椭圆陈特征的一种朴素方法，是将 $\mathbb{S}^1$等变扭曲 Chern 特征应用于 LX 上的 $(\mathcal{E},\ \nabla^{\mathcal{E}})$。然而，这种方法行不通，因为在此无限维情形下，[MS02] 中要求的迹类条件并不满足。

为了解决这个问题，我们改为在穿孔圆盘的内部进行研究，而不局限于其边界圆。

$\mathbb{C}^*_{<1} = \{q \in \mathbb{C}^*, |q| < 1\}$ 为穿孔圆盘，它可通过映射 $q = e^{2\pi i\tau}$ 与上半平面 $\mathbb{H}$ 进行识别。对于 $\tau \in \mathbb{H}$，我们引入上同调群$h^*_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX,\ kH)\big|_\tau$，其定义为复形的上同调

$$\big(\Omega^*(LX)^{\mathbb{S}^1},\ \mathcal{D}_\tau = d + \tau\,\iota_K - kH\big). \tag{1.8}$$

我们将其称为 $\mathbb{C}^*_{<1}$**–扩展的** S^1**–等变扭曲上同调** LX **在** τ**处的完备周期版本**。

注 1.1。我们强调，记号 $\mathbb{C}^*_{<1}$ 中的符号并不表示 $\mathbb{C}^*_{<1}$ 在 LX 上的作用。下文中，我们始终使用在 $\mathbb{C}$ 上的微分形式。

我们的**椭圆陈特征**随后定义为一个映射

$$ECh_A:\ \mathscr{PER}^k(LG) \longrightarrow \big\{\text{cocycles in }\ h^{2*}_{\mathbb{C}^*_{<1}}\big(LX, kH\big)\big\}\big|_\tau. \tag{1.9}$$

现在我们详细说明其构造。在表示论层面，当 $q \in S^1$ 时，Kac–Weyl 特征发散。然而，将 $\mathbb{S}^1$延拓到穿孔圆盘 $\mathbb{C}^*_{<1} = \{q \in \mathbb{C}^*, |q| < 1\}$ 后，便可克服收敛问题。上半平面上的参数 $\tau \in \mathbb{H}$ 现在表现为$\mathbb{C}^*_{<1}$–作用的生成元。因此，我们考虑 τ**–变形曲率**，即，相对于复向量场 τK 的等变曲率，其中 K 是 LX上环的旋转的生成元。

令 $\widetilde{L\mathfrak{g}_\mathbb{C}}' = L\mathfrak{g}_\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathfrak{d} \oplus \mathbb{C}\mathfrak{c}$ 为复双扩张环代数（参见第 2.5 小节），其中 $\mathfrak{c}$ 为中心部分，$\mathfrak{d}$ 为导子部分。局部地，$\backsim\tau$-变形曲率在 LX 上取值于 $L\mathfrak{g}_\mathbb{C}$，其形式如下：

$$\tau\mathfrak{d} + \big(\tau\iota_K\hat{A} + \hat{R} + \square\mathfrak{c}\big), \tag{1.10}$$

ˆ ˆ 其中 A 是联络 1-形式在 LX 上的求值，R 是曲率 2-形式在 LX 上的求值。中心部分 $\square\mathfrak{c}$ 源自提升 gerbe 的局部数据。LX 上的椭圆陈特征局部表示为

$$\mathrm{Tr}_\mathcal{H}\Big[\exp\big(\tau\mathfrak{d} + (\tau\iota_K\hat{A} + \hat{R} + \square\mathfrak{c})\big)\Big]. \tag{1.11}$$

我们证明，这些局部表达式拼合成 LX 上全局定义的偶形式，并且它是 D_τ-闭的。证明基于第 1.2.1 小节中讨论的等变扭曲 Chern 特征框架。

主要的困难在于证明上述表达式收敛。为克服这一困难，我们将结合 [GW84] 中的能量估计与弗洛凯理论 [Fre84]。

现在，我们在下图中总结定义在 LX 上的两种陈特征表述。

$$
\begin{array}{ccccc}
h^{2*}_{S^1}(LX)[[q]] & \xleftarrow{BCh} & \mathscr{PER}^k(LG) & \xrightarrow{ECh} & h^{2*}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX,kH)\big|_\tau \\
& {\scriptstyle i^*}\searrow & \downarrow{\scriptstyle Ch} & \swarrow{\scriptstyle i^*} & \\
& & h^{2*}(X)[[q]] & &
\end{array}
\tag{1.12}
$$

上述两者之间的关系目前尚不清楚。接下来，我们将说明**它们是椭圆 Bismut-Chern 特征沿回路两个方向的限制**。

作为一项应用，我们定义了 LX上的环旋量丛$\mathcal{S}_{LX}$ 的椭圆陈特征，并由此在 LX 上构造一个微分形式，它可以视为环空间上 A-形式的 τ变形（见公式 (4.61)）。进一步地，我们建立了它与 Witten 属之间的关系，其中局部化到 X （见公式 (4.62)）。

现在我们 转向双环空间 L^2X ，并在这一框架下介绍我们的结果 .

1.2.3. 上的椭圆 *Atiyah–Witten* 公式。如上所述，本文的核心目标之一是将经典 Atiyah–Witten 公式从环空间扩展到双环空间。我们将这一扩张称为**椭圆 Atiyah–Witten 公式**，并在第 5 节中加以证明。

回顾一下，经典 Atiyah–Witten 公式断言，沿回路的旋量 holonomy 的超迹与圆上 Dirac 算子的 ζ-正则化 Pfaffian 相等。在椭圆情形中，超迹的作用由环旋量 gerbe 模的超椭圆 *holonomy* 承担，而相应的解析对象则是椭圆曲线上 Dirac 算子族的 Pfaffian，该算子族与由 L^2X 参数化的向量势耦合（见 (1.14)）。

我们将 L^2X 上的**椭圆 holonomy** 定义为 gerbe 模（$\mathcal{E}$，$\nabla^{\mathcal{E}}$）的一种由 τ 变形的等变扭曲 holonomy；该 gerbe 模 $\to LX$源自一个正能量表示$\mathcal{H}$。所得椭圆 holonomy $Ehol_{\mathcal{H}}$ 是转移线丛 $\mathcal{L}(\mathcal{G}_P) \to L^2X$的一个 T^2-等变截面，其中 $\mathcal{L}(\mathcal{G}_P)$ 表示与提升 gerbe 相关联的转移线丛。

我们局部考虑一个沿 y方向、取值于 $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的$\widetilde{\ }'$一阶微分算子：

$$
\mathcal{D}_y = \frac{d}{dy} - (\tau\mathfrak{d} + \iota_{\tau\partial_x - \partial_y}\widetilde{A}),
\tag{1.13}
$$

其中，对 y方向的求值（$\iota_{\tau\partial_x-\partial_y}A$）$_y \in L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 包含一个由提升 gerbe 的局部数据产生的中心部分。随后，椭圆 holonomy 定义为 $\mathcal{D}_y$ 在正能量表示 $\mathcal{H}$下平行移动的迹（详情见第 5.2 小节）。

一个关键的分析难点在于，无法证明任意光滑双环的椭圆 holonomy 都收敛。为克服这一问题，我们将

注意力集中于带规范的多稳定双环，对这类双环可以严格证明其收敛。多稳定性是根据黎曼曲面上杨–米尔斯流的长时间收敛来定义的，并由平坦联络的复规范群轨道刻画（参见 [DLZ]）。

现在我们来解释椭圆 Atiyah–Witten 公式。设 $(X,\ g)$ 是一个 $2n$ 维自旋黎曼流形，其列维-奇维塔联络 ∇^g 定义在 TX 上。记 $P_{\mathrm{Spin}}\to X$ 为自旋标架丛，A 为诱导的自旋联络。

解析侧。Pfaffian 线丛自然地由二重转移构造得到。固定 $\tau\in\mathbb{H}$，并赋予椭圆曲线

$$\Sigma_\tau=\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})$$

标准的平坦 Kähler 度量，使其体积为 1。对于 Σ_τ 上由二阶挠点 $\frac{i+\tau j}{2}$，$(i,\ j)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 所指定的每一种自旋结构，都有一个与之对应的 Pfaffian 线丛

$$\mathrm{PF}_{i,j}\ \longrightarrow\ L^2X,$$

该线丛配备了 Bismut–Freed 联络 $\nabla^{\mathrm{PF}}_{i,\ j}$ 和 Quillen 度量 $g^{\mathrm{PF}}_{i,\ j}$。这个线丛在典范意义下是行列式线丛的平方根；该行列式线丛由将族指标定理应用于这一族而得到

$$\begin{array}{ccc} & ev^*(TX,\nabla^g) & \\ & \big\downarrow & \\ \Sigma_\tau\longrightarrow & L^2X\times\Sigma_\tau & \\ & \big\downarrow & \\ & L^2X & \end{array}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{array}{c}(\mathrm{PF}_{i,j},\nabla^{\mathrm{PF}}_{i,j},g^{\mathrm{PF}}_{i,j})\\ \big\downarrow\\ L^2X.\end{array}\tag{1.14}$$

在亏格一情形下，Atiyah–Singer 指标定理意味着这一族的指标恒等于零。因此，每个 Pfaffian 线丛 $\mathrm{PF}_{i,\ j}$ 都有一个典范 Pfaffian 截面，记作 $\mathrm{pf}_{i,\ j}[\tau]$。

拓扑侧。从 $(1+1)$-转移的角度来看，我们考虑 $L\mathrm{Spin}(2n)$ 在一级的四个虚正能量表示，它们构成 $\mathscr{PER}^1(L\mathrm{Spin}(2n))$ 的一组基（参见 [Bry90]）：

$$\mathscr{PER}^1(L\mathrm{Spin}(2n))=\{\,S^+-S^-,\ S^++S^-,\ S_+-S_-,\ S_++S_-\,\}.\tag{1.15}$$

根据以下对应关系，这四个虚表示对应于椭圆曲线上的四种自旋结构

$$S_{11}=S^+-S^-,\qquad S_{10}=S^++S^-,\qquad S_{01}=S_+-S_-,\qquad S_{00}=S_++S_-.\tag{1.16}$$

每个 S_{ij} 都对应一个椭圆 holonomy

$$Ehol_{S_{ij}}[\tau]\in\Gamma\big(L^2X,\mathcal{L}(\mathcal{G}_P)\big)^{T^2},$$

其中 $\mathcal{L}(\mathcal{G}_P)$ 表示提升 gerbe 的转移线丛。

特别是，奇自旋结构对应于层为一的 Fock 表示 $S_{11}=S^+-S^-$。这一表示可视为有限维

自旋表示的环空间类比。与之关联的 gerbe 模正是环旋量 gerbe 模 $\mathcal{S}_{LX} \to LX$。如果 X 具有弦结构，转移的环自旋结构会将此 gerbe 模提升为 LX上的真正 Fock 丛，从而得到环空间的旋量丛 $\mathcal{S}_{LX}$。关于通过光滑 Fock 丛进行的严谨构造，请参阅 [KW24]。

定理 1.2 (椭圆 Atiyah–Witten 公式)。 *Pfaffian 线丛与提升 gerbe 所关联的转移线丛之间存在一个等距同构，*

$$\Phi_{ij}:\ (\mathrm{PF}_{ij}, \nabla^{\mathrm{PF}}_{ij}, g^{\mathrm{PF}}_{i,j}) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{L}(\mathcal{G}_P, \nabla^B), h), \tag{1.17}$$

其中 h 表示转移线丛上的典范度量。对于规范化的多稳定双环，在此等距同构下有

$$\Phi_{1-i,\,1-j}\big(\mathrm{pf}_{1-i,\,1-j}[\tau]\big) \;=\; q^{m_{ij}} \cdot Ehol_{S_{ij}}[\tau], \tag{1.18}$$

其中 m_{ij} 表示模异常。

注 1.3。 *将奇自旋 Pfaffi亚与关联于 $S_{11} = S^+ - S^-$ 的环旋量 gerbe 模的椭圆 holonomy 相识别，尤其引人注目：这是经典 Atiyah–Witten 公式最自然的类比。相比之下，其余三种偶自旋结构没有可比的有限维对应物，这反映了它们内在的椭圆性质。*

限制在与 X相识别的常值双环上时，对应于 $S^+ - S^-$ 的椭圆 holonomy 消失。在解析侧，与奇自旋结构相关联的 Pfaffian 截面也消失，因为环面上具有奇自旋结构的 Dirac 算子（∂-算子）具有维数恒定的非平凡核。这种消失并非偶然：它恰好映照了将经典 Atiyah–Witten 公式从环空间 LX 限制回X时出现的熟悉现象。

令 $i_y, i_x:\ LX \to L^2X$ 分别表示沿 y 和 x 方向保持常值的双环所对应的包含。根据构造，椭圆 holonomy 沿 y 方向的限制是椭圆陈特征的零次分量。沿 x 方向的限制则与 LX 上 q 分次的 Bismut–Chern 特征的零次分量一致，即 q 分次的 holonomy。一个自然的问题是，当 $\tau \to i\infty$ 时，椭圆 Atiyah–Witten 公式如何退化为经典 Atiyah–Witten 公式。

在 holonomy 这一侧，修正椭圆 holonomy 沿x方向的限制满足

$$i_x^*\big(q^{m_\Lambda} \cdot Ehol_{S^+-S^-}[\tau]\big)(\gamma) = q^{\frac{n}{12}}\big(\mathrm{Tr}_s[hol_{\mathcal{S}_X}(\gamma)] + O(q)\big), \quad \gamma \in LX. \tag{1.19}$$

这里， $O(q)$ 表示关于 q的高阶项，它们源于环群表示中高能模式的 holonomy。除以源自正则化 $\sum_{m=1}^{\infty} m = -\frac{1}{12}$ 的 Virasoro 异常因子$q^{\frac{n}{12}}$后，椭圆 holonomy 恰好化为 LX 上旋量 holonomy 的超迹。

在 Pfaffian 一侧，退化现象更为微妙，Virasoro 异常也不会立即显现。尽管如此，椭圆 Atiyah–Witten 公式使我们能够

推导出 Pfaffian 的极限行为。结合椭圆 Atiyah–Witten 公式、公式 (1.19) 和经典 Atiyah–Witten 公式

$$\mathrm{Tr}_s\big[hol_{\mathcal{S}_X}(\gamma)\big] = \mathrm{pf}_\zeta\big(\nabla_{\dot\gamma}\big), \tag{1.20}$$

我们得到以下推论。令 $\mathbf{pf}[\tau]$ 表示对应于奇自旋结构的 Pfaffian 截面。

推论 1.4。

$$q^{-\frac{n}{12}}\, i_x^*\big(\mathrm{pf}[\tau]\big)(\gamma) \to \mathrm{pf}\big(\nabla_{\dot\gamma}\big), \quad q \to 0. \tag{1.21}$$

该公式阐明了当椭圆曲线的复结构参数趋近尖点 $\tau \to i\infty$ 时，双环空间 L^2X 上的 Pfaffian 如何退化为环空间 LX 上的 Pfaffian。具体而言，这种退化是环空间中以下乘积展开的对应版本：

$$q^{-\frac{1}{12}} \cdot \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)} = (e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}) \prod_{m=1}^{\infty} \big(1 - q^m e^{2\pi i z}\big)\big(1 - q^m e^{-2\pi i z}\big). \tag{1.22}$$

1.2.4. *Chern–Simons* 规范理论的几何量子化与双环空间几何。

我们对椭圆 Atiyah–Witten 公式的证明基于 Chern–Simons 规范理论 [AP W91] 的几何量子化。我们首先描述定理 1.2 中的线丛等距同构。提升 gerbe 的转移线丛与 Pfaffian 线丛之间的对应并非偶然：二者都同构于 Chern–Simons 预量子线丛。

令 $\mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma,\ \mathfrak{g})$ 表示环面 Σ 上的 G-联络空间，并令 $\Sigma G = C^\infty(\Sigma,\ G)$ 表示规范群。在第5.4节中，我们回顾普适 Chern–Simons 线丛（$\mathcal{L},\ h,\ \nabla$）在 $\mathcal{A}$ 上的构造，它是一个 ΣG-等变预量子线丛 [Fre95]。在双环 $\gamma \to \gamma^* A$ 上对联络求值，定义了一个 ΣG-等变映射

$$\Psi_A :\ L^2P \longrightarrow \mathcal{A}. \tag{1.23}$$

这诱导出栈态射 $L^2X \to [\mathcal{A}/\Sigma G]$。沿着 Ψ_A 拉回（$\mathcal{L},\ h,\ \nabla$），得到 L^2X 上的 Chern–Simons 线丛（$\mathcal{L}_{\mathrm{CS}},\ \nabla^A_{\mathrm{CS}},\ h$），我们将证明它与转移线丛 $\mathcal{L}(\mathcal{G}_P,\ \nabla^B,\ h)$ 一致。另一方面，L^2X 上 Pfaffian 线丛与 Chern–Simons 线丛之间的等距同构已在 [Bun09] 中建立。在 [DLZ], 中，该等距同构被证明在 $\mathcal{A}$ 上普适成立，其中将两个线丛都视为 ΣG–等变 Hermitian 预量子线丛。

证明定理 1.2 的主要思路，是首先在粗模空间 $M_G[\tau]$ 上建立该恒等式，即半稳定全纯 $G_{\mathbb{C}}$ 主丛在椭圆曲线上的模空间。当 $G = \mathrm{Spin}(2n)$ 时，L^2X 上的椭圆 Atiyah–Witten 公式便作为 $M_G[\tau]$上相应公式的推论出现；我们将后者称为<样式 id='11'>模空间上的椭圆 Atiyah–Witten 公式</样式>，该公式断言，四个 Pfaffian 截面向 $M_G[\tau]$ 的推前与四个一级虚表示 $\{S_{ij}\}$ 的 Kac–Weyl 特征一致。详情请参见第5.5节。

在整个分析过程中，Chern–Simons 规范理论通过二重转移机制自然地出现。特别是，椭圆 holonomy 可根据 Chern–Simons 规范理论中“量子化与约化可交换”的原则得到自然解释。

不同于（$1+1$）转移，其中参数 $\tau \in \mathbb{H}$ 充当 $\mathbb{C}^*_{<1}$作用的生成元，τ 在此处的作用性质不同：它指定环面的复结构，从而确定几何量子化中的极化选择。一旦固定 τ，联络空间 $\mathcal{A}$ 便获得一个 K¨ahler 结构。选择此极化后，该空间

$$\mathcal{H}_k(G)|_\tau := H^0_{\Sigma G}(\mathcal{A}, \mathcal{L}^k) \tag{1.24}$$

是在约化之前进行量子化的空间，而其推前——即约化之后进行量子化的空间——恰好是亏格一共形块 $V_k(G)|_\tau$。 $M_G[\tau]$ 和 $V_k(G)|_\tau$的精确定义取自 [APW91、Loo 76],，必要的背景知识将在第5.5节第5.5.1节中回顾。

在此框架下，存在一种复解析形式来表达“量子化与约化可交换”这一原理，可与 [Tel98] 中的代数栈对应物进行比较。

定理 1.5 ([DLZ])。 推前映射

$$r : \mathcal{H}_k(G)|_\tau \longrightarrow V_k(G)|_\tau \tag{1.25}$$

是双射。

因此，我们得到如下复合映射

$$V_k(G)|_\tau \xrightarrow{r^{-1}} \mathcal{H}_k(G)|_\tau \xrightarrow{\Psi^*_A} \Omega^0(L^2X, \mathcal{L}^k_{\mathrm{CS}})^{T^2}, \tag{1.26}$$

它将共形块中的每个元素映射为整个双环空间上 Chern–Simons 线丛的一个 T^2-不变截面。

下面的定理表明，共形块由 Kac–Weyl 特征生成。

定理 1.6 ([Loo76])。 亏格一共形块 $V_k(G)|_\tau$ 由层-k 正能量表示的修正卡茨–韦伊尔特征生成。因此，与 $\mathbb{C}$ 张量化后，修正卡茨–韦伊尔特征映射

$$\mathrm{ch} : \mathscr{P}\mathscr{E}\mathscr{R}^k(LG) \longrightarrow V_k(G)|_\tau \tag{1.27}$$

是一个同构。

对于带规范的多稳定双环，复合映射 $\Psi^*_A \circ r^{-1} \circ$ch 与通过 $(1+1)$-转移得到的椭圆 holonomy $Ehol_A$ 重合。因此，我们继续将映射 $\Psi^*_A \circ r^{-1}$ 称为椭圆 holonomy。

注 1.7。 我们现在进一步说明，为什么将 $\Psi^*_A \circ r^{-1}$ 称为椭圆 holonomy是自然的。经典地， $X = BG$ 上的泛 *holonomy* 的迹给出

特征映射。与 $\mathbb{C}$张量化后， BG上的 *holonomy* 的普通迹给出

$$hol : \mathrm{Rep}(G) \cong K_G(pt) = K(BG) \longrightarrow \mathbb{C}[LBG] = \mathbb{C}[G]^G, \tag{1.28}$$

将表示映射为其在 G上的类函数特征。这里我们使用群胚 $LBG = [\mathcal{A}_{S^1}/LG] = [G/G]$ 的 *Morita* 等价（参见 *[BXZ03]*）。

从 K-理论转向椭圆上同调时，表示环$\mathrm{Rep}(G)$ 被正能量表示环 $\mathscr{PER}^k(LG)$取代。根据 *Gro- jnowski [Gro07], Ando [AdRB00],* 和 *Lurie [Lur09],* ，这个环表现为点的 k-扭积G-等变椭圆上同调。相应地，存在(1.28)的椭圆类比:

$$\mathscr{PER}^k(LG) = Ell^k_G(pt) \longrightarrow H^0(\Sigma BG, \mathcal{L}^k). \tag{1.29}$$

这里， ΣBG应在代数意义下理解为 $[\Sigma_\tau, BG_{\mathbb{C}}] = Bund_G(\Sigma_\tau)$，即椭圆曲线 Σ_τ 上全纯 $G_{\mathbb{C}}$-丛的模叠。因此，普适椭圆 *holonomy* 具有如下形式

$$Ehol : \mathscr{PER}^k(LG) \longrightarrow H^0(Bund_G(\Sigma_\tau), \mathcal{L}^k). \tag{1.30}$$

回顾一下， $Bund_G(\Sigma_\tau)$ 可以表示为复解析 *Atiyah–Bott* 模叠$[\mathcal{A}/\Sigma G_{\mathbb{C}}]$，而 $\mathcal{L}$ 表示普适 *Chern–Simons* 线丛。因此，右端恰为 $\mathcal{H}_k(G)$，即约化前的量子化空间。结合定理 *1.5*，这便说明了将 $Ehol$ 解释为 *holonomy* 的椭圆类比是合理的。

在 *[FHT05]*，$\mathscr{PER}^k(LG)$ 被识别为 $[G/G]$ 上的 k 扭曲 K理论，并且具有环结构。$\mathrm{Bund}_G(\Sigma_\tau)$ 有一个 q-共轭类表示 $[LG^h/_qLG^h]$ （例如参见*[EF94,BG96]*），其中 LG^h 表示全纯环群。椭圆 *holonomy* 也可以看作一个映射，它将 $[G/G]$ 上的扭曲 K理论映至 $[LG^h/_qLG^h]$上的转移线丛的全纯截面。

许多由二重转移产生的构造都可以自然地扩展到亏格一情形之外。设 J 是亏格为 $g > 1$的闭曲面 Σ 上的一个复结构，并用 $V_k(G)|_J$ 表示层级为k的相应亏格-g 共形块。完全类比亏格一的情形，可以将**高亏格 holonomy** 定义为以下复合

$$Ehol_A : V_k(G)|_J \longrightarrow \mathcal{H}_k(G)|_J \longrightarrow \Gamma(\Sigma X, \mathcal{L}^k_{\mathrm{CS}}), \tag{1.31}$$

其中 ΣX 表示从 Σ 到 X的映射空间。该构造给出了椭圆 holonomy 的高亏格推广，详情见第 5.7 小节。

本文不再进一步探讨这些深奥的主题。我们仅展示亏格一情形下相对 Pfaff 线丛的一些计算，并研究相对奇 Pfaffian 的模行为。关于相对 Pfaff 线丛的讨论，请参阅 [Fre87,Bun09]。我们确定了它在$[\mathcal{A}/\Sigma G] \times \mathbb{H}$ 上的自然对应物，并研究了它向常值 Cartan 联络子空间的推前。相对奇 Pfaffian 除相位因子外，由 $\frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)^3}$ 给出。这里 $\frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)}$ 给出

奇 Pfaffian，而来自相对结构的 $\eta(\tau)^{-2}$ 消去了 $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})$-反常。然而，所得的相对奇 Pfaffian 在 S- 变换 $(\tau, z) \to (-1/\tau, z/\tau)$ 下仍不具有模性。这一事实反映出 Hitchin 联络仅为射影平坦。

1.2.5. 椭圆 *Bismut–Chern* 特征 L^2X。 在论文的最后部分，我们在 L^2X上构造**椭圆 Bismut–Chern 特征**，其零次分量可还原椭圆 holonomy。

这一构造自然源自 $(1+1)$-转移。为此，我们引入 L^2X的完备周期 *exotic* 扭积($S^1 \times \mathbb{C}^*_{<1}$)-等变上同调，并以 Chern–Simons 线丛的 k次幂扭积（$\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}$， ∇^A_{CS}），记作

$$h^*_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}\big(L^2X, (\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}, \nabla^A_{\mathrm{CS}}, \overline{H})^k\big). \tag{1.32}$$

与之前一样，我们强调，双环空间 L^2X 本身并不带有真正的$\mathbb{C}^*_{<1}$-作用； $\mathbb{C}^*_{<1}$ 的出现仅仅反映了在相应的等变微分中以 τK 替代向量场K 。

在这一框架下，椭圆 Bismut–Chern 特征定义为映射

$$EBCh_A : \mathscr{P}\mathscr{E}\mathscr{R}^k(LG) \longrightarrow \big\{\text{cocycles in } h^{2*}_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}\big(L^2X, (\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}, \nabla^A_{\mathrm{CS}}, \overline{H})^k\big)|_\tau\big\}. \tag{1.33}$$

从双环空间的视角来看，这一构造提供了一个统一的概念框架，阐明了 q-分次的 Bismut–Chern 特征与 LX上的椭圆陈特征之间的关系：二者都只是椭圆 Bismut–Chern 特征在 L^2X 上沿两个相互独立的回路方向进行限制所得。

然而，我们必须强调，由于我们只能证明椭圆 Bismut–Chern 特征在带规范的多稳定双环上收敛，因此上述图景仍有待未来研究。

本文介绍的所有陈特征都概括在下面的交换图中：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h^{2*}_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}\big(L^2X,\,(\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}, \nabla^A_{\mathrm{CS}}, \overline{H})^k\big)\big|_\tau & & \\
 & \overset{i_{10}^*}{\swarrow} & \uparrow{\scriptstyle EBCh} & \overset{i_{01}^*}{\searrow} & \\
h^{2*}_{S^1}(LX)[[q]] & \xleftarrow{\quad BCh \quad} & \mathscr{P}\mathscr{E}\mathscr{R}^k(LG) & \xrightarrow{\quad ECh \quad} & h^{2*}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX, kH)\big|_\tau \\
 & \underset{i^*}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle Ch} & \underset{i^*}{\swarrow} & \\
 & & h^{2*}(X)[[q]] & &
\end{array} \tag{1.34}$$

该图展示了转移过程，并突出了椭圆 Bismut–Chern 特征作为核心组织对象的作用，各种环空间陈特征都从这一对象自然导出。

论文结构。 在第 2 节中，我们回顾环群、环代数和正能量表示。在第 3 节中，我们介绍等变扭曲

Bismut–Chern 特征。在第 4 节中，我们构造了 LX 上的椭圆陈特征。在第 5 节中，我们建立了 L^2X 上的椭圆 Atiyah–Witten 公式，并探讨其与 Chern–Simons 规范理论的关系。最后，在第 6 节中，我们介绍 L^2X上的椭圆 Bismut–Chern 特征。

2. LoopGroups、 Loop Algebras、 and Positive Energy Representations

我们概述环群、环代数和正能量表示。环群的哈密顿几何在理解环空间上的提升 gerbe 的几何结构方面发挥着关键作用。正能量表示贯穿本文始终，是本文的核心主题。

本节组织如下。 在第 2.1 小节中，我们回顾环群上的哈密顿几何以及环群的中心扩张。在第 2.2 小节中，我们回顾环代数上的扩展结构。在第 2.3 小节中，我们回顾正能量表示和 Kac-Weyl 特征。

约定与记号。 若无特别说明， G 是一个 Cartan 型群，即$i.e$，紧致、连通、单李群且单连通。 $G_{\mathbb{C}}$ 是 G的复化， $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$的复化。设 T 是 G的极大环面， $\mathfrak{t}$ 是 T的李代数，而后者是 $\mathfrak{g}$的 Cartan 子代数。 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathfrak{t}$的复化。

Killing 型 $\mathfrak{K}$ 由伴随表示的迹给出。由于假设 $\mathfrak{g}$ 是单的，Killing 型 $\mathfrak{K}$ 非退化，并且可归一化为以最小型为生成元。令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 上的最小双线性型，使得最长根的平方长度为 2。于是

$$\mathfrak{K}(X, Y) = \mathrm{Tr}(ad_X ad_Y) = 2h^\vee \langle X, Y \rangle. \tag{2.1}$$

$h^\vee$ 是对偶 Coxeter 数。对于一般表示 $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$，Dynkin 指数 d_V 定义为

$$\mathrm{Tr}_V(\rho(X)\rho(Y)) = d_V \langle X, Y \rangle. \tag{2.2}$$

F根据定义，伴随表示的 Dynkin 指数为 $d_{ad} = 2$ $h^\vee$.

2.1. 关于 LG 的哈密顿几何与中心扩张。 $LG := \mathbb{C}^\infty(S^1, G)$ 是光滑环群， $L\mathfrak{g}$ 是其李代数。令 $R : S^1 \to Aut(LG)$ 为环的旋转，即，对于 $g \in LG$, $R_t g = g_{-t+\cdot}$。生成旋转的 LG上的诱导向量场是导数 $K : g \to g' = \frac{dg}{dt}$ 的相反数。

令 $\mu \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ 为 G 的左 Maurer-Cartan 形式。我们经常使用映射$LG \to L\mathfrak{g}$, $g \to i_{\partial_t}(g^*\mu) = g^{-1}g'$。

我们定义**能量泛函** E 在 LG上为

$$E[g] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^1} \langle g^{-1}g', g^{-1}g' \rangle. \tag{2.3}$$

显然，能量泛函在 LG 的伴随作用以及由 S^1引起的旋转下保持不变。

LG 可以配备辛形式 ω_{LG}，使得 S^1的作用是哈密顿作用，且矩映射恰好就是能量 E。

定义 2.1。 ω_{LG} 的辛形式由 ω给出。对于 $g \in LG$、 x， $y \in T_g(LG)$,

$$\omega_{LG}(x,y)_g := \omega(g^{-1}x, g^{-1}y). \tag{2.4}$$

显然， ω_{LG} 确实是辛的，并且具有 $LG \rtimes S^1$-不变性。

作为 $H^3(G)$的生成元，陈-西蒙斯 3-形式 Θ为

$$\Theta(X,Y,Z) = \frac{1}{8\pi^2}\langle X, [Y,Z]\rangle. \tag{2.5}$$

在上同调层面， $[\omega_{LG}/2\pi] \in H^2(LG)$是陈-西蒙斯 3-形式 $[\Theta] \in H^3(G)$的转移。

引理 2.2 ([PS88, (4.4.4)], [CP89]。

$$\frac{1}{2\pi}\omega_{LG} = \int_{S^1} \Theta + d\beta, \tag{2.6}$$

其中 $\beta \in \Omega^1(LG)$,

$$\beta_\gamma(y) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^1} \langle \gamma^{-1}\gamma', (\gamma^{-1}y)\rangle. \tag{2.7}$$

直接计算 $\iota_K\beta$，即可得到以下推论。

推论 2.3. S^1-作用在(LG, ω_{LG}) 上是哈密顿的，其动量映射为能量E。(LG, ω_{LG}, E) 是一个哈密顿 S^1-空间。

由于上同调类 $[\omega_{LG}/2\pi]$ 是整数类，(LG, ω_{LG}) 存在预量子化。相应的预量子圆丛可实现为 LG 的中心扩张，由下列李群短正合列描述:

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \widetilde{LG} \xrightarrow{\rho} LG \longrightarrow 1. \tag{2.8}$$

中心扩张的模型遵循 [MS01]。与 [Mic87] 并无本质区别。

考虑光滑路径 $P(LG) = \{\gamma\colon [0,1] \to LG \mid \gamma(0) = e\}$。对于 $\gamma \in P(LG)$, 令 $\gamma^\wedge\colon [0,1] \times S^1 \to G$ 表示其伴随映射，定义为 $\gamma^\wedge(s, t) = \gamma(s)(t)$，其中 $\gamma^\wedge(0, t) = e$ 对所有 $t \in S^1$ 均成立。令 $ev\colon P(LG) \to LG$ 表示在 $\widetilde{\ }$端点处的求值映射。中心扩张 LG 定义为商空间 $(P(LG) \times S^1)/\sim$，其等价关系为

$$(\gamma_1, z_1) \sim (\gamma_2, z_2) \quad \text{if} \quad ev(\gamma_1) = ev(\gamma_2) \quad \text{and} \quad \exp\big(i\int_D \sigma^*\omega_{LG}\big)\cdot z_1 = z_2. \tag{2.9}$$

这里 $\sigma\colon D \to LG$ 是将 $(\gamma_1 \# \gamma_2^{-1})\colon S^1 \to LG$ 扩张为圆盘 D上的光滑映射的任意一种扩张的选择。由于上同调类 $[\omega_{LG}/2\pi]$ 是整数的，此定义与

$\widetilde{}$扩张的选择 σ无关。投影 ρ： $LG \to LG$ 由求值$\widetilde{}$映射 ev： $P(LG) \to LG$ 定义。 LG 上的群乘法定义为

$$(\gamma_1, z_1) \cdot (\gamma_2, z_2) \mapsto (\gamma_1\gamma_2, z_1 z_2 \cdot \exp(-2\pi i \int_{[0,1]\times S^1} (\gamma_1, \gamma_2)^*\alpha)), \tag{2.10}$$

其中 $\alpha \in \Omega^1(LG \times LG)$ 定义如下。令 π_1, π_2： $LG \times LG \to LG$ 为到第一因子和第二因子的投影， $\alpha := \int_{S^1} \langle \pi_1^* \hat{\mu}, \pi_2^* i_{\partial_t} \hat{\mu} \rangle dt$, 其中 $\hat{\mu} \in \Omega^1(LG, L\mathfrak{g})$ 是 Maurer-Cartan 形式 μ 的求值。数对 (α, ω_{LG}) 定义了一个 Deligne 上循环，从而保证群结构和结合律定义良好。

$\widetilde{}$联络 v 在 LG 上是规范定义的。角形式 $\theta \in \Omega^1(S^1)$ 与转移 $\int_{[0,1]} \omega_{LG} \in \Omega^1(P(LG))$ 组合形成

$$\theta + \int_{[0,1]} \omega_{LG} \in \Omega^1(P(LG) \times S^1). \tag{2.11}$$

$\widetilde{}$这一组合可以下降为 LG 上的联络 v ，其曲率由 $dv = \rho^* \omega_{LG}$ 给出。

~ $\widetilde{}$**命题 2.4**。令 K 为生成 S^1在 LG上的作用的向量场，使得

$$i_{\widetilde{K}} v = -\rho^* E. \tag{2.12}$$

Proof. For $(\gamma, t) \in P(LG) \times S^1$, $ev^*(i_{\widetilde{K}} v)(\gamma, t) = \int_{[0,1]} (\iota_K \omega_{LG})_\gamma = \int_{[0,1]} -dE = -E(ev(\gamma))$.

$\widetilde{}$这表明，(LG, v) 的伴随线丛是哈密顿 S^1-空间 (LG, ω_{LG}, E) 上的 S^1-等变预量子线丛。

$\widetilde{}$ 的 ***Maurer-Cartan*** 形式 LG。求值 $\hat{\mu} \in \Omega^1(LG, L\mathfrak{g})$ 是 LG 的 Maurer-$\widetilde{}$Cartan 形式。 LG 的 Maurer-Cartan 形式 $\widetilde{\mu}$ 由下式给出

$$\widetilde{\mu} = \rho^* \hat{\mu} + v \in \Omega^1(\widetilde{LG}, \widetilde{L\mathfrak{g}}). \tag{2.13}$$

由于预量子结构，它满足 Maurer-Cartan 方程 :

$$d\widetilde{\mu} + \frac{1}{2}[\widetilde{\mu}, \widetilde{\mu}]_{\widetilde{LG}} = dv + \rho^* \omega_{LG} = 0. \tag{2.14}$$

2.2. 双扩张环代数。 在本小节中，我们回顾环群和环代数的半直积与中心扩张。

我们将半直积 $\widehat{LG} := LG \rtimes S^1$ 称为**扩展环群**，其$\widehat{}$李代数 $L\mathfrak{g} = L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}\mathfrak{d}$ 可与取值于 $\mathfrak{g}$ 的一阶微分算子（η， A） $\to \eta \frac{d}{dt} + A$. 等同。伴随作用 $\widehat{Ad}$： $\widehat{LG} \to Aut(\widehat{L\mathfrak{g}})$由旋转与共轭组合而成：

$$\widehat{Ad}_{g,\theta}(\eta \frac{d}{dt} + A) = g(\eta \frac{d}{dt} + R_\theta A)g^{-1}. \tag{2.15}$$

令 ω：$L\mathfrak{g}\times L\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ 为余循环

$$\omega(X,Y):=\int_{S^1}\langle X,dY\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle X(t),Y'(t)\rangle dt, \tag{2.16}$$

这定义了 $L\mathfrak{g}$ 的中心扩张。

定义 2.5. 我们记

$$\widetilde{L\mathfrak{g}}':=L\mathfrak{g}\oplus\mathbb{R}\mathfrak{d}\oplus\mathbb{R}\mathfrak{c}=\widehat{L\mathfrak{g}}\oplus\mathbb{R}\mathfrak{c}, \tag{2.17}$$

$\widetilde{\ }'$其中 $\mathfrak{c}$ 是中心元。我们称 $L\mathfrak{g}$ 为**双扩张回路代数**。李括号定义如下：对于 $a,\ b\in L\mathfrak{g}$ 和 $t\in S^1$,

$$[a,b]_t=[a(t),b(t)]-\omega(a,b)\mathfrak{c},\quad [\mathfrak{d},a]=a'. \tag{2.18}$$

记 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 为 $L\mathfrak{g}$ 上由$\mathfrak{g}$的极小形式诱导的不变双线性形式，即，对于 $X,\ Y\in L\mathfrak{g}$,

$$\langle X,Y\rangle=\int_{S^1}\langle X(t),Y(t)\rangle\,dt. \tag{2.19}$$

$\widetilde{L\mathfrak{g}}'$ 有一个扩张，也记为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，定义如下：

$$\langle(X+a\mathfrak{d},c),(Y+b\mathfrak{d},d)\rangle=\langle X,Y\rangle+ad+bc. \tag{2.20}$$

命题 2.6 ([Fre84,(3.1.5)])。 LG 在 $\widetilde{L\mathfrak{g}}'$ 上的伴随作用 $\widetilde{Ad}$ 定义为

$$\widetilde{Ad}_g(a\mathfrak{c}+b\mathfrak{d}+x)=\widehat{Ad}_g(b\mathfrak{d}+x)+\left(a+\langle g^{-1}g',x\rangle-\frac{b}{2}\langle g'g^{-1},g'g^{-1}\rangle\right)\mathfrak{c}. \tag{2.21}$$

将群余循环 $\mathcal{Z}$：$LG\times L\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ 记为

$$\mathcal{Z}(g,x)=\langle g^{-1}g',x\rangle. \tag{2.22}$$

它满足余循环条件

$$\mathcal{Z}(g_1g_2,x)=\mathcal{Z}(g_1,Ad_{g_2}x)+\mathcal{Z}(g_2,x), \tag{2.23}$$

$\widetilde{\ }$它对应于中心扩张 LG。

2.3. 正能量表示与 Kac-Weyl 特征。 我们约定， LG 的正能量表示指的是 LG 的光滑酉正能量表示$\widetilde{\ }'$。在本质等价意义下，每个正能量表示都是完全可约的酉表示，可延拓到复化，并且具有 $\mathbf{Diff}^+(S^1)$ 的射影交织作用（见 [PS88]）。

2.3.1. 可积最高权模与 *Kac-Weyl* 特征。 不可约正能量表示可由李代数层面上相应的**可积最高权模**完全刻画。

$\widehat{\ }'$考虑 $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中的多项式环路子代数，称为**仿射 Kac-Moody 代数**，记作 $\widehat{\mathfrak{g}}$，其具有结构 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}\mathfrak{c}\oplus\mathbb{C}\mathfrak{d}\oplus\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[z, z^{-1}]$。代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 具有三角分解

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}}_- \oplus \hat{\mathfrak{h}} \oplus \hat{\mathfrak{n}}. \tag{2.24}$$

其中，$\hat{\ }\mathfrak{n}_{\pm}$ 是幂零子代数，并且

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathbb{C}\mathfrak{c} \oplus \mathbb{C}\mathfrak{d} \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \tag{2.25}$$

是 Cartan 子代数。

设 Δ 是根空间，其中 $\{\alpha_i\}$ 是根基，而 $Q = \mathbb{Z}(\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ 是根格。

定义 2.7。 A $\widehat{\mathfrak{g}}$-模 $L(\Lambda)$ 称为**最高权模**，其最高$\hat{\ }$权为 $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$，如果存在非零向量 $v_\Lambda \in L(\Lambda)$，使得

$$\hat{\mathfrak{n}}_+(v_\Lambda) = 0, \quad h(v_\Lambda) = \Lambda(h)v_\Lambda, \quad U(\widehat{\mathfrak{g}})v_\Lambda = L(\Lambda),$$

其中 $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ 是 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的泛包络代数。 $L(\Lambda)$ 的层是标量 $\hat{\ }k = \Lambda(c)$。若 $\Lambda \in P^+$，则称其为**可积的**，其中 $P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | (\lambda, \alpha_i) \in \mathbb{N}\}$ 是支配整权的集合。

根据 Serre 关系，可积性确保任意元素 $a \in \widehat{\mathfrak{g}}$ 在每个向量 $v \in L(\Lambda)$ 上的作用都是幂零的。这种可积性保证最高权模 $L(\Lambda)$ 唯一地积分为 LG的一个正能量表示。

定义 2.8. 令 $\mathscr{PER}^k(LG)$ 表示由 LG 在层 k上的正能量表示的等价类生成的阿贝尔群。

每个可积最高权模 $\mathcal{H} = L(\Lambda)$ 都可分解为有限维不可约 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-模的直和：

$$L(\Lambda) = \bigoplus_{\mu\in\hat{\mathfrak{h}}^*} L(\Lambda)_\mu. \tag{2.26}$$

对 $\tau \in \mathbb{H}$ 定义的**修正 Kac-Weyl 特征标**为

$$\chi_\Lambda(\tau, \cdot) = q^{m_\Lambda} \sum_{\mu\in\hat{\mathfrak{h}}^*} \dim L(\Lambda)_\mu e^\mu, \tag{2.27}$$

其中，模异常定义为

$$m_\Lambda = h_\Lambda - \frac{c}{24}. \tag{2.28}$$

这里， $h_\Lambda = \frac{\langle\Lambda+2\rho}{2\ k+h^\vee}^{\Lambda\rangle}()$ 表示最低共形权，而 $c = \frac{k\text{维数}\mathfrak{g}}{k+h^\vee}$ 是中心荷。

2.3.2. ***Theta*** 函数与 ***Dedekind η*** 函数。Dedekind η 函数 $\eta(\tau)$ 是

$$\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n). \tag{2.29}$$

带特征的 Theta 函数 $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ 定义为

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\big(\pi i(n+a)^2\tau + 2\pi i(n+a)(z+b)\big). \tag{2.30}$$

作为半特征的四个标准 $\theta_{ij}(i,\ j \in \{0,1\})$

$$\theta_{00}(z,\tau) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(z,\tau), \qquad \theta_{01}(z,\tau) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}(z,\tau), \tag{2.31}$$

$$\theta_{10}(z,\tau) = \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}(z,\tau), \qquad \theta_{11}(z,\tau) = \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}(z,\tau).$$

对于 $q = e^{2\pi i\tau},\quad \xi = 2\pi i z$，乘积展开为。

$$\theta_{11}(\xi,\tau) = q^{1/8}\big(e^{\xi/2} - e^{-\xi/2}\big)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1-q^n e^{\xi})\,(1-q^n e^{-\xi}), \tag{2.32}$$

$$\theta_{10}(\xi,\tau) = q^{1/8}\big(e^{\xi/2} + e^{-\xi/2}\big)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1+q^n e^{\xi})\,(1+q^n e^{-\xi}),$$

$$\theta_{00}(\xi,\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1+q^{n-\frac{1}{2}}e^{\xi})\,(1+q^{n-\frac{1}{2}}e^{-\xi}),$$

$$\theta_{01}(\xi,\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1-q^{n-\frac{1}{2}}e^{\xi})\,(1-q^{n-\frac{1}{2}}e^{-\xi}).$$

2.3.3. ***Spin()*** 的一级正能量表示 LSpin($2l$)。我们给出 Spin(L)$2l$ 的一级正能量表示的显式公式，这些公式将在整篇论文中反复使用。空间 $\mathscr{P}\mathscr{E}\mathscr{R}^1(L\text{Spin}(2l))$ 由四个不可约表示张成：$S^+,\ S^-,\ S_+,\ S_-$。有关更多细节，请参见 [Bry90、Liu95]。

命题 2.9。一级表示的修正超特征可以表示为 ***Jacobitheta*** 函数的乘积：

$$\chi_{S^+-S^-} = \prod_{j=1}^{l}\frac{\theta_{11}(\alpha_j,\tau)}{\eta(\tau)}, \quad \chi_{S_+-S_-} = \prod_{j=1}^{l}\frac{\theta_{01}(\alpha_j,\tau)}{\eta(\tau)} \tag{2.33}$$

$$\chi_{S^++S^-} = \prod_{j=1}^{l}\frac{\theta_{10}(\alpha_j,\tau)}{\eta(\tau)}, \quad \chi_{S_++S_-} = \prod_{j=1}^{l}\frac{\theta_{00}(\alpha_j,\tau)}{\eta(\tau)}.$$

这里，$\{\pm\alpha_j\}$ 表示spin$(2l)$的根。这四个虚表示自然对应椭圆曲线 Σ_τ 上的四种自旋结构。为方便起见，我们采用如下记号

$$S_{11} = S^+ - S^-, \qquad S_{10} = S^+ + S^-, \qquad S_{01} = S_+ - S_-, \qquad S_{00} = S_+ + S_-. \tag{2.34}$$

我们用 $\chi_{S_{ij}}$ 表示 $i,j\in\{0,1\}$ 下 S_{ij} 的修正超特征。

这里我们只计算 $G=\mathrm{Spin}(2l)$ 和一级。修正 Kac-Weyl 特征标通常可表示为高阶 theta 函数的线性组合。关于计算和 Kac–Weyl 特征公式，请读者参阅 [Kac90, PS88]。

3. Equivariant Twisted Chern and Bismut–Chern Characters

在 [HM14], 中，扭曲 Bismut–Chern 特征是基于 [Bis85] 中的 Bismut–Chern 特征引入的。本节旨在介绍等变扭曲 Bismut–Chern 特征，它为椭圆 Bismut–Chern 特征提供了有限维几何模型。稍后，我们将令 $M=LX$，并用 $\mathcal{G}$ 表示提升 gerbe。

设 M 是一个 $\mathbb{S}^1$-流形，且 $\mathcal{G}$ 是一个带有联络 ∇^B 的 $\mathbb{S}^1$-等变 gerbe，其曲率形式为 H，且其动量映射为零。令 $(\mathcal{L}^B,\ \nabla^{\mathcal{L}^B})=\mathcal{L}(\mathcal{G},\ \nabla^B)$ 表示 LM 上的转移线丛。等变扭曲 Bismut–Chern 特征 $\mathbb{S}^1BCh_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G}}$ 定义为使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} K^0_{\mathbb{S}^1}(M,\ \mathcal{G}) & \xrightarrow{BCh_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G}}} & h^{2*}_{S^1\times\mathbb{S}^1}(LM,\ (\mathcal{L}^B,\ \nabla^{\mathcal{L}^B},\ \overline{\ }H)) \\ & {\scriptstyle Ch_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G}}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle i^*} & \\ & H^{2*}_{\mathbb{S}^1}(M,\ H) & \end{array} \tag{3.1}$$

本节安排如下。 在第 3.1 小节中，我们回顾扩展环丛的几何以及 Bismut-Chern 特征。在第 3.2 小节中，我们描述 $\mathbb{S}^1$-等变 gerbe（$\mathcal{G},\ \nabla^B$）、其转置线丛$\mathcal{L}(\mathcal{G},\ \nabla^B)=(\mathcal{L}^B,\ \nabla^{\mathcal{L}^B})\to LM$，并在 LM 上建立完备周期性 exotic 扭曲（$S^1\times\mathbb{S}^1$）-等变上同调。在第 3.3 小节中，我们定义等变扭曲 Bismut-Chern 特征及限制。

3.1. 扩张环丛的 Bismut-Chern 特征。

我们回顾 [Bis85], 中 Bismut–Chern 特征的构造，它可视为 LX 上扩张环丛的特征微分形式。

为与后续讨论保持一致，这里采用主丛方法。从主 G-丛 $\pi:\ P\to X$ 出发，配备联络 A，环丛 $LP\to LX$ 是一个主 LG-丛。令 K 为 LX 上旋转 $\mathbb{S}^1$ 的生成元，K' 为其在 LP 上的提升。

我们首先介绍一些基本运算，以在环丛上构造微分形式。

(1) $\omega\in\Omega^*(P,\ \mathfrak{g})$ 的**求值** 记作 $\hat{}\omega\in\Omega^*(LP,\ L\mathfrak{g})$，给定 $X\in T_\gamma LP$,

$$\hat{\omega}(X_1\cdots X_n)_t:=\omega(X_1(\gamma(t)),\cdots X_n(\gamma(t)))\in\mathfrak{g}.$$

将 $\omega_t\in\Omega^*(LP,\ \mathfrak{g})$ 设为 $\hat{}\omega$ 在时间 t 的值。

(2) $\omega \in \Omega^*(P,\ \mathfrak{g})$ 的**平均**记作 $\omega \in \Omega^*(LP,\ \mathfrak{g})$，即

$$\overline{\omega}(X_1 \cdots X_n)_\gamma := \int_{S^1} \omega(X_1(\gamma(t)) \cdots X_n(\gamma(t)))dt = \int_{S^1} \omega_t dt \in \mathfrak{g}.$$

(3) $\omega \in \Omega^*(P, \mathfrak{g})$ 的转移写作 $\int_{S^1} \omega \in \Omega^{*-1}(LP, \mathfrak{g})$，即

$$(\int_{S^1} \omega)(X_1 \cdots X_{n-1})_\gamma := \int_{S^1} \omega(\dot{\gamma}, X_1(\gamma(t)) \cdots X_{n-1}(\gamma(t)))dt \in \mathfrak{g} = \iota_{K'}\overline{\omega}.$$

求值 $\hat{A} \in \Omega^1(LP, L\mathfrak{g})$ 是环丛 $LP \to LX$ 上的一个联络，其曲率为求值 R。

一个关键观察是，主 LG-丛 $LP \to LX$ 不是 $\mathbb{S}^1$-等变的。为此，我们考虑半直积、扩展环群 $\widehat{LG} = LG \rtimes S^1$ 以及相应的扩展环丛 $\widehat{LP} = (LP \times S^1) \to LX$，后者是 LX 上的一个 $\widehat{\ }$ 主 LG-丛。

$\widehat{\ }$我们将 $LP \to LX$ 上的联络 A 延拓为 $\widehat{A}$，如下所示：对于 $(Y, b) \in T_{(r,s)}LP$，其中 $r \in LP$ 且 $s \in S^1$，

$$\widehat{A}(Y, b) = (b, -k_{-s}\hat{A}(Y)) \in \widehat{L\mathfrak{g}}. \tag{3.2}$$

这里，k_s 表示将 $L\mathfrak{g}$ 旋转 s。向量场 $K'' = (K', 1)$作用于$\widehat{\ }$扩展环丛 LP。

$\widehat{\ }$命题 *3.1. </style>* $\widehat{A}$ 相对于 K''的等变曲率，限制在$\frown LP \subset LP$（其中 $b = 0$）上时，可写为

$$\widehat{R}_{\mathbb{S}^1} = \iota_{K''}\widehat{A} + \hat{R} = (1, \iota_{K'}\hat{A} + \hat{R}) \in \Omega^*(LP, \widehat{L\mathfrak{g}}). \tag{3.3}$$

$\widehat{\ }$为方便起见，我们总是将 $L\mathfrak{g}$ 视为取值于 $\mathfrak{g}$的一阶微分算子，此时等变曲率为

$$\widehat{R}_{\mathbb{S}^1} = \frac{d}{dt} - (\iota_K\hat{A} + \hat{R}) \in \Omega^*(LP, \widehat{L\mathfrak{g}}). \tag{3.4}$$

令 $P_t = \mathrm{ev}_t^*(P)$ 表示在时刻 t 对 LP求值。联络 A在 P上定义了水平向量场；记 $g_t : P_0 \to P_t$ 为将 A 从时刻 0 平行移动至 t 所给出的 G- 丛态射。令 $R_t \in \Omega^2(P_t, \mathfrak{g})$ 表示在时刻 t 对曲率求值。相对于联络 A和表示 V 的 Bismut–Chern 特征为

$$BCh_A(V) = \mathrm{Tr}_V \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \prod_{i=1}^{n} g_{t_i}^*(R_{t_i})dt_i \right], \tag{3.5}$$

其中 $\Delta_n = \{0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le 1\}$ 是标准的 n-单形。

上述定义实际上源自传输方程，这是一个取值于 LP 上微分形式的一阶微分方程：

$$\left(\frac{d}{dt} - (\iota_K\hat{A}_t + R_t) \right) \psi(t) = 0, \quad \psi(0) = I. \tag{3.6}$$

于是 $BCh_V[A] = \mathrm{Tr}_V[\psi(\mathbf{1})]$。

由此，我们还可以考虑两个表示的形式差，并类似地定义超 Bismut–Chern 特征。这一构造自然推广到配备超联络的$\mathbb{Z}_2$-分次向量丛。

$\mathbb{S}^1$-等变 ***Euler*** 类 LX。设 X 是一个配备黎曼度量 g的自旋流形。记 $P_{\mathrm{Spin}(X)}$ 为自旋标架丛，记 A 为由 Levi-Civita 联络诱导的自旋联络。记 R 为其曲率。令 $\mathcal{S}_X = \Delta^+ \oplus \Delta^-$ 为 X上的旋量丛。 $Ch_s(\mathcal{S}_X)$是旋量丛的超 Chern 特征。

由超迹给出的超 Bismut-Chern 特征 $BCh_s(\mathcal{S}_X)$是 LX 上的一个$(d+\iota_K)$-闭偶形式，且

(1) 零次项是旋量 holonomy 的超迹 $\mathrm{Tr}_s[hol_{\mathcal{S}_X}]$。(2) 将其限制到常值环空间 X上，得到 $Ch_s(\mathcal{S}_X)$。

通过局部化，

$$\int_{LX} BCh_s(\mathcal{S}_X) \to \int_X \hat{A}(X) \wedge Ch_s(\mathcal{S}_X) = \int_X e(X). \tag{3.7}$$

那么，它可以视为 LX 的 $\mathbb{S}^1$-等变 Euler 类。

3.2. 奇异等变扭曲上同调。 自由环空间 LM 具有一种内在的圆对称性，它源自环路旋转，记为 S^1。令 ∂_y 表示生成这些旋转的向量场。空间 M 本身具有一个 $\mathbb{S}^1$-作用，它在环的每个点上作用，从而在 LM 上诱导出一个作用。令 ∂_x 表示 M 上生成该 $\mathbb{S}^1$-作用的向量场。我们也用记号 ∂_x 表示 LM上诱导出的向量场。

3.2.1. 具有消失的动量映射的等变 *gerbe*。

定义 3.2. 假设 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个极大开覆盖，并满足以下性质：对于 $i = 2, 3$，有 $H^i(U_{\alpha_I}) = 0$，其中 $U_{\alpha_I} = \bigcup_{i\in I} U_{\alpha_i}$，$|I| < \infty$。我们称这样的开覆盖为 M的 Brylinski 开覆盖。为方便起见，假设存在$\mathbb{S}^1$-不变的 Brylinski 覆盖 $\{U_\alpha\}$，并在局部进行所有讨论。

关于等变 gerbe 的一般概念，可参见 [Mei03]。此处我们只讨论动量映射消失的$\mathbb{S}^1$-等变 gerbe。该条件并非必要，但能简化构造。带联络的 gerbe（$\mathcal{G}$，∇^B）由以下几何数据给出。

- 具有整数周期的全局 $H \in \Omega^3(M)$。
- 在每个 U_α 上，都有一个 2-形式 $B_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha, i\mathbb{R})$，使得 $dB_\alpha = H|_{U_\alpha}$.
- 在每个双重交集 $U_{\alpha\beta}$ 上，都有一个带联络 $\nabla^L_{\alpha\beta}$ 的线丛 $L_{\alpha\beta} \to U_{\alpha\beta}$，其等变曲率为 $F^L_{\alpha\beta} = B_\beta - B_\alpha$.
- 在每个三重交集 $U_{\alpha\beta\gamma}$ 上，都有一个线丛同构 $\mu_{\alpha\beta\gamma}$:$L_{\alpha\beta} \otimes L_{\beta\gamma} \to L_{\alpha\gamma}$，它在四重交集上满足余循环条件。

如果它们全都是 $\mathbb{S}^1$-等变的，那么 gerbe $(\mathcal{G},\ \nabla^B)$ 就是 $\mathbb{S}^1$-等变的。若 $\iota_{\partial_x}B_\alpha$ 和 $\nabla^L_{\alpha\beta}$ 的动量映射都消失，则它的动量映射也消失。

线丛 $L_{\alpha\beta}$ 平凡化后，联络 $\nabla^L_{\alpha\beta}=d+A_{\alpha\beta}$ 满足 $A_{\alpha\beta}\in\Omega^1(U_{\alpha\beta},i\mathbb{R})$，且

$$dA_{\alpha\beta}=B_\beta-B_\alpha. \tag{3.8}$$

于是，同构由 $z_{\alpha\beta\gamma}$ 给出：$U_{\alpha\beta\gamma}\to S^1$ 其中 $(z_{\alpha\beta\gamma},A_{\alpha\beta},B_\alpha)$ 是一个 Deligne 上循环（见 [Bry93]）。

3.2.2. 转移线丛。转移线丛 $(\mathcal{L}^B,\nabla^{\mathcal{L}^B})$ 描述如下。过渡函数由下式给出

$$h_{\alpha\beta}=e^{\int_{S^1}A_{\alpha\beta}}:LU_\alpha\cap LU_\beta\to S^1, \tag{3.9}$$

LU_α 上的联络为

$$\nabla^{\mathcal{L}^B}|_{LU_\alpha}=d+\iota_{\partial_y}\overline{B_\alpha}=d+\int_{S^1}B_\alpha. \tag{3.10}$$

曲率由 $R^{\mathcal{L}^B}=\int_{S^1}H.$ 给出。动量映射 $\mu^{\mathcal{L}^B}$ 对 S^1 作用和 $\mathbb{S}^1$ 作用均为零。

3.2.3. 建立上同调。我们记

$$H^*(BS^1)=\mathbb{C}[v],\quad H^*(B\mathbb{S}^1)=\mathbb{C}[u],\quad H^*(B(S^1\times\mathbb{S}^1))=\mathbb{C}[u,v], \tag{3.11}$$

其中 u 和 v 是次数为 2 的生成元。令 $\mathbb{C}(u,v)$ 表示关于两个变量的 Laurent 多项式环。

定义 3.3。 M 上的完备周期 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲上同调定义为

$$h^*_{\mathbb{S}^1}(M,H)=H^*(\Omega^*(M)^{\mathbb{S}^1}[u,u^{-1}],d-u\iota_{\partial_x}-H). \tag{3.12}$$

对于异质版本，我们定义

$$\mathcal{D}_{\overline{H}}=\nabla^{\mathcal{L}^B}+v\iota_{\partial_y}-u\iota_{\partial_x}-\overline{H} \tag{3.13}$$

作为 $\Omega^*(LM,\mathcal{L}^B)(u,v)$ 上的算子。局部地，它可以表示为共轭

$$\mathcal{D}_{\overline{H}}|_{LU_\alpha}=e^{\overline{B_\alpha}}(d+v\iota_{\partial_y}-u\iota_{\partial_x})e^{\overline{-B_\alpha}}. \tag{3.14}$$

于是 $(\mathcal{D}^{\overline{H}})^2=L_{v\partial_y-u\partial_x}$。它在 T^2-不变部分 $\Omega^*(LM,\mathcal{L}^B)^{T^2}(u,v)$ 上消失。

定义 3.4。 异质扭曲 T^2-等变上同调为

$$h^*_{S^1\times\mathbb{S}^1}(LM,(\mathcal{L}^B,\nabla^{\mathcal{L}^B},\overline{H})):=H(\Omega^*(LM,\mathcal{L}^B)^{T^2}(u,v),D_{\overline{H}}). \tag{3.15}$$

令 $i:M\to LM$ 为包含。它诱导上同调到常值环空间的限制

$$i^*:h^*_{S^1\times\mathbb{S}^1}(LM,(\mathcal{L}^B,\nabla^{\mathcal{L}^B},\overline{H}))\to h^*_{\mathbb{S}^1}(M,H). \tag{3.16}$$

注 3.5. 当$(\mathcal{G}, \nabla^B)$ 的动量映射不为零时，我们仍可用同样的方式定义上同调。我们用其等变扩张 $H_{\mathbb{S}^1} = H + u\mu$替换 H，该扩张是 ***Cartan*** 模型中的一个$(d - u\iota_{\partial_x})$-闭 3-形式，表示$\mathbb{S}^1$-等变 ***Dixmier-Douady*** 类。

3.3. 等变扭曲 Bismut-Chern 特征。我们定义 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 Bismut-Chern 特征，它是 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 Chern 特征的环空间细化。 $\mathbb{S}^1$-等变 gerbe 模带联络（$\mathcal{E}$， $\nabla^{\mathcal{E}}$）定义如下： $E_\alpha \to U_\alpha$ 是一个 $\mathbb{S}^1$-等变的 n维厄米向量丛，配备厄米联络 ∇_α，以及一个保持度量和联络不变的 $\mathbb{S}^1$-不变同构:

$$\Phi_{\alpha\beta} : (L_{\alpha\beta}, \nabla_{\alpha\beta}) \otimes (E_\beta, \nabla_\beta) \to (E_\alpha, \nabla_\alpha), \tag{3.17}$$

该同构在三重交上相容。

在平凡化后，联络为 $\nabla_\alpha = d + A_\alpha$，其中 $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, u(n))$ 是一个矩阵 1-形式。令 $R_{\mathbb{S}^1,\alpha} = R_\alpha + u\mu_\alpha$ 为其等变曲率，其中 $R_\alpha = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha$ 是曲率， $\mu_\alpha = -\iota_{\partial_x} A_\alpha$ 是动量映射。

3.3.1. 等变扭曲 ***Chern*** 特征。 接下来是 $F^L_{\alpha\beta} = B_\beta - B_\alpha$,

$$\Phi^{-1}_{\alpha\beta}(B_\alpha I + R_{\mathbb{S}^1,\alpha})\Phi_{\alpha\beta} = B_\beta I + R_{\mathbb{S}^1,\beta}. \tag{3.18}$$

于是， $e^{B_\alpha} tr[\exp(R_{\mathbb{S}^1,\alpha})]$ 可以拼接起来，得到 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 Chern 特征 $Ch_{\mathbb{S}^1,\mathcal{G}}(\mathcal{E}, \nabla^{\mathcal{E}})$。它定义了

$$Ch_{\mathbb{S}^1,\mathcal{G}} : K^0_{\mathbb{S}^1}(\mathcal{G}, H) \to H^{2*}_{\mathbb{S}^1}(M, H). \tag{3.19}$$

3.3.2. 等变扭曲 ***Bismut-Chern*** 特征。 当 $E_\alpha \to U_\alpha$ 被平凡化时， $\hat{A}_\alpha \in \Omega^1(LU_\alpha, Lu(n))$ 表示联络形式 A_α 在 LU_α上的求值。等变曲率由 $\hat{R}_{\mathbb{S}^1,\alpha} = \hat{R}_\alpha + u\hat{\mu}_\alpha$给出，其中 $\hat{R}_\alpha \in \Omega^2(LU_\alpha, Lu(n))$ 是曲率 R_α 在 LU_α上的求值，而 $\hat{\mu}_\alpha = -\iota_{\partial_x} A_\alpha$ 是动量映射的求值。此外， $\hat{B}_\alpha \in \Omega^2(LU_\alpha)$ 表示 B-场B_α的求值。

考虑沿 y方向、取值于 $\Omega^*(LU_\alpha)(u, v)$的一阶矩阵微分算子。

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{d}{dy} - v\iota_{\partial_y}\hat{A}_\alpha - (\hat{R}_{\mathbb{S}^1,\alpha} + \hat{B}_\alpha) = \frac{d}{dy} - [(i_{v\partial_y - u\partial_x}\hat{A}_\alpha + \hat{R}_\alpha) + \hat{B}_\alpha]. \tag{3.20}$$

其传输方程为，对于 $\psi \in \mathbb{C}^\infty([0,1], \mathbb{C}^n) \otimes \Omega^{2*}(LU_\alpha)(u, v)$,

$$\mathcal{D}_\alpha \psi = 0, \quad \psi(0) = 1. \tag{3.21}$$

等变扭曲 Bismut-Chern 特征局部表示为 $BCh_{\mathbb{S}^1,\mathcal{G},\alpha} = \mathrm{Tr}[\psi(1)]$.

令 $\Delta_n = \{(t_1, \cdots, t_n) | 0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \le 1\}$ 为标准的 n-单纯形。我们用迭代积分求解 ^ ^ 传输方程。设 $Y_\alpha = i_{v\partial_y - u\partial_x} A_\alpha + R_\alpha$,

$$BCh_{\mathbb{S}^1,\mathcal{G},\alpha} = \mathrm{Tr}[\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \prod_{i=1}^{n} (Y_\alpha + \hat{B}_\alpha)_{t_i} dt_i] = e^{(\overline{B_\alpha})} tr(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \prod_{i=1}^{n} (Y_\alpha)_{t_i} dt_i). \tag{3.22}$$

^ 最后一个等式由以下事实得出：$(B_\alpha)_t$ 与所有对象中心交换，并且

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \prod_{i=1}^{n} (\hat{B}_\alpha)_{t_i} dt_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\int_0^1 (\hat{B}_\alpha)_t dt)^n = e^{\overline{B_\alpha}}. \tag{3.23}$$

由 (3.18),

$$\Phi_{\alpha\beta}^{-1} (Y_\alpha + \hat{B}_\alpha)_t \Phi_{\alpha\beta} = (Y_\beta + \hat{B}_\beta)_t. \tag{3.24}$$

于是，$BCh_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G},\ \alpha} = BCh_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G},\ \beta}$ 在交叠区域 $LU_\alpha \cap LU_\beta$ 上。它全局定义了 $\mathbb{S}^1$-等变扭曲 Bismut-Chern 特征 $BCh_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G}}(\mathcal{E},\ \nabla^{\mathcal{E}})$。

此外，它是 $h^*_{S^1 \times \mathbb{S}^1}(LM,\ (\mathcal{L}^B,\ \nabla^{\mathcal{L}^B},\ H))$ 的一个上循环代表。

命题 3.6. $BCh_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G}}(\mathcal{E},\ \nabla^{\mathcal{E}})$ 是 $\mathcal{D}_H$-闭的。

证明。 回想一下， $\mathcal{D}_H|_{LU_\alpha} = e^{\overline{-B}_\alpha}(d + v\iota_{\partial_y} - u\iota_{\partial_x}) e^{\overline{B_\alpha}}$。只需证明局部非扭曲版本。

$$(d + v\iota_{\partial_y} - u\iota_{\partial_x}) tr(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \prod_{i=1}^{n} (Y_\alpha)_{t_i} dt_i) = 0. \tag{3.25}$$

这由 Bianchi 恒等式得出。具体细节可参见传输方程，只需在 [Bis85 定理 3.9]的证明中将曲率替换为等变曲率即可。

注 3.7。 与之前一样，当 *gerbe* 的动量映射不消失时，我们仍可通过在所有地方将 H 替换为$H_{\mathbb{S}^1}$ ，来定义等变扭曲 *Bismut–Chern* 特征。

3.3.3. 限制到常值环空间 M。 限制到常值环空间后，考虑算子

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{d}{dy} - (\hat{R}_{\mathbb{S}^1,\alpha} + \hat{B}_\alpha) \tag{3.26}$$

^ ^其中 $(R_{\mathbb{S}^1,\alpha} + B_\alpha)$ 为常数。传输方程的解由指数函数给出

$$BCh_{\mathbb{S}^1,\mathcal{G}}(\mathcal{E}, \nabla^{\mathcal{E}})|_M = \exp(B_\alpha) \mathrm{tr}[\exp(R_{\mathbb{S}^1,\alpha})] = Ch_{\mathbb{S}^1,\mathcal{G}}(\mathcal{E}, \nabla^{\mathcal{E}}). \tag{3.27}$$

因此，我们得到以下交换图：

$$
\begin{array}{ccc}
K^0_{\mathbb{S}^1}(M,\ \mathcal{G}) & \xrightarrow{\quad BCh_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G}}\quad} & h^{2*}_{S^1\times\mathbb{S}^1}(LM,\ (\mathcal{L}^B,\ \nabla^{\mathcal{L}^B},\ \overline{H})) \\
& {\scriptstyle Ch_{\mathbb{S}^1,\ \mathcal{G}}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle i^*} & \\
& h^{2*}_{\mathbb{S}^1}(M,\ H)[v,v^{-1}] &
\end{array}
\tag{3.28}
$$

3.3.4. 限制到不动点 $M^{\mathbb{S}^1}$ 及其环空间。 环面 $T^2=(S^1\times\mathbb{S}^1)$自然地作用于 LM。该环面作用的不动点集是 M 的 $\mathbb{S}^1$-不动点集。我们假设 $M^{\mathbb{S}^1}$ 是 M 的子流形。令 $j\colon M^{\mathbb{S}^1}\to M$表示包含映射，它诱导出 $Lj\colon LM^{\mathbb{S}^1}\to LM$。 $M^{\mathbb{S}^1}$ 的常值回路的包含映射记为 $i_{\mathbb{S}^1}\colon M^{\mathbb{S}^1}\to LM^{\mathbb{S}^1}$。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & M & & \\
 & {\scriptstyle j}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle i} & \\
M^{\mathbb{S}^1} & & \longrightarrow & & LM \\
 & {\scriptstyle i_{\mathbb{S}^1}}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle Lj} & \\
 & & LM^{\mathbb{S}^1} & &
\end{array}
\tag{3.29}
$$

我们假设 gerbe $(\mathcal{G},\nabla^B)$ 在 $M^{\mathbb{S}^1}$ 上限制为平凡。更确切地说， $U^{\mathbb{S}^1}_\alpha$ 上的 B_α 和 $U^{\mathbb{S}^1}_{\alpha\beta}$ 上的 $A_{\alpha\beta}$ 均消失。因此，曲率形式满足 $H=0$。在 $M^{\mathbb{S}^1}$ 上，扭积和等变性均消失，从而化为普通德拉姆上同调：

$$
j^*: h^*_{\mathbb{S}^1}(M,H)\to h^*(M^{\mathbb{S}^1})[u,u^{-1}]. \tag{3.30}
$$

另一方面， $LM^{\mathbb{S}^1}$ 的上同调是标准的完备周期 S^1-等变上同调（未扭曲）：

$$
h^*_{S^1}(LM^{\mathbb{S}^1}) := H^*(\Omega^*(LM^{\mathbb{S}^1})^{S^1}[v,v^{-1}], d+v\iota_{\partial_y}). \tag{3.31}
$$

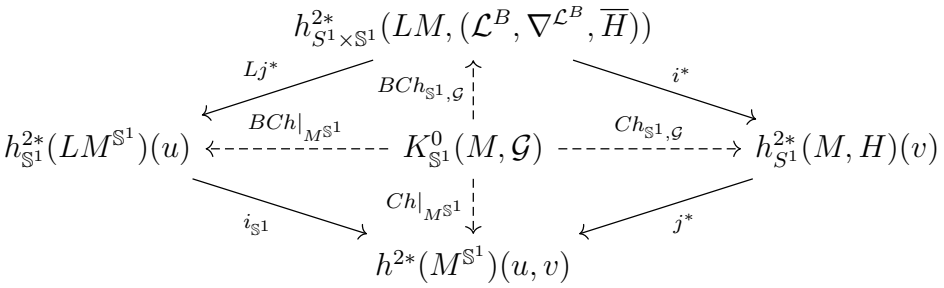
限制到 $M^{\mathbb{S}^1}$ 时，gerbe 模变为普通向量丛。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & h^{2*}_{S^1}(LM^{\mathbb{S}^1}) \\
 & & & {\scriptstyle BCh}\nearrow & \\
K^0_{\mathbb{S}^1}(M,\mathcal{G}) & \xrightarrow{j^*} & K^0(M^{\mathbb{S}^1}) & & \Big\downarrow{\scriptstyle i^*_{\mathbb{S}^1}} \\
 & & & {\scriptstyle Ch}\searrow & \\
 & & & & H^{2*}(M^{\mathbb{S}^1})[v,v^{-1}]
\end{array}
\tag{3.32}
$$

我们有 $BCh|_{M^{\mathbb{S}^1}}=BCh\circ j^*$ 和 $Ch|_{M^{\mathbb{S}^1}}=Ch\circ j^*$。环空间 LM 具有一个自然的 $(S^1\times\mathbb{S}^1)$-作用。存在两个限制方向：一个指向 M，另一个指向 $LM^{\mathbb{S}^1}$，最后指向 $M^{\mathbb{S}^1}$。

以下交换图总结了本节中的所有构造及其相互关系。

(3.33)



注 3.8。 在 *[HM14],* 中证明了，当 M 是一个强正则 $\mathbb{S}^1$-流形时，局部化映射 j^* 是一个同构。另一方面， LM 是一个强正则S^1-流形，因为不动点集 M 在 LM中存在一个 S^1-不变管状邻域。因此， $i^*_{\mathbb{S}^1}$ 也是一个同构。类似的论证应当也适用于等变扭曲情形，从而证明 i^* 和 Lj^* 是同构。

4. Chern Characters on LX

本节介绍与环群的正能量表示相关联的两个 Chern 特征： q-分次的 Bismut–Chern 特征和椭圆陈特征。椭圆陈特征定义为与正能量表示相关联的 gerbe 模的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-变形等变扭曲 Chern 特征。它可以视为环群的椭圆陈–韦伊理论。

在 X 上，椭圆陈特征由 q-分次陈特征定义，它将能量子空间的普通 Chern 特征汇集起来。在能量分解下，我们有映射

$$\mathscr{PER}^k(LG)\otimes\mathbb{C}\to \mathrm{Rep}(G)\otimes\mathbb{C}[[q]]. \tag{4.1}$$

q-分次陈特征自然出现在扭曲亏格中 [Bry90,Liu96,Mil89]，并在理解模不变性方面发挥关键作用。这一构造自然延伸到环空间，从而得到相应的 q-分次 Bismut-Chern 特征。

给定一个主 G-丛 $P\to X$，自然会诱导出回路化的主 LG-丛 $LP\to LX$ 。存在 string G-结构，即 *i.e.*，也就是不存在 string$G$-异常，这使得 LG 的正能量表示能够在 LX 上定义一个可容许的 Virasoro- 等变向量丛，见 [Bry90]。然而，当存在 string G 异常时， LX 上的提升 gerbe $\mathcal{G}_P$ 会阻碍这种丛的存在。相反，对于 $\mathcal{H}\in\mathscr{PER}^k(LG)$, 可以构造相应的无限维 gerbe 模（$\mathcal{E}$， $\nabla^{\mathcal{E}}$），用于 k 重张量幂（$\mathcal{G}_P$， ∇^B）$^{\otimes k}$，从而得到映射

$$\mathscr{PER}^k(LG)\to K_{\mathbb{S}^1}(LX,k\mathcal{G}_P). \tag{4.2}$$

定义其陈特征的一种简单方法是取 $M=LX$，并按照第 3.3.1 节中的方法定义 $\mathbb{S}^1$等变扭曲 Chern 特征。然而，迹类

条件在这种无限维情形下不适用于 [MS02] 。这种发散在表示论中已十分明显：当 $q \in S^1$时，正能量表示的形式特征会发散。

如 [PS88], 所示，正能量表示扩展为穿孔圆盘 $\mathbb{C}^*_{<1}$的作用，其特征在 $q \in \mathbb{C}^*_{<1}$ 时收敛。为了恰当地定义等变扭积陈特征，我们用 $\mathbb{C}^*_{<1}$ 替换 S^1 ，并将特征定义为复系数微分形式。

一个关键挑战是确保收敛。 [Fre84] 中利用弗洛凯理论可以证明零次部分的收敛性。对于更高次数的部分，我们通过能量估计来处理。粗略地说，在能量分解下，旋转在 n-能量子空间上的作用为q^n ，而其他几何项至多呈多项式增长。

值得注意的是，由于与正能量表示相关联的 gerbe 模是无限维的，因此在**光滑**结构方面存在分析上的微妙之处。关于 Fock 表示以及 LX 上的光滑旋量丛，更多详情请参见 [KW24]。微妙之处在于，环群的正能量表示仅在一个稠密子空间上光滑。关于无限维表示的严格处理，请参见 [GW84]。这里，我们讨论微分形式层面的陈特征，而不深入探讨过渡函数的光滑性。

作为一项应用，尽管尚未严格构造 LX 上的 Dirac-Ramond 算子，我们仍可恰当地定义 LX的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变 A-亏格，从而形式上确立 LX上的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变指标定理的 Kirillov 公式。将其局部化到常值环空间 X时，便可得到 Witten 属。

本节安排如下。在第 4.1 小节中，我们定义 q-分次的陈特征和 Bismut-Chern 特征。在第 4.2 小节中，我们描述提升 gerbe 的几何以及 $\mathbb{S}^1$-等变性。在第 4.3 小节中，我们将 LX 上的椭圆陈特征定义为 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变扭曲 Chern 特征。在第 4.4 小节中，我们讨论椭圆陈特征的收敛。在第 4.5 小节中，我们考察 Chern-Simons 2-gerbe 的几何平凡化及其转移，并给出平凡化的椭圆陈特征公式。在第 4.6 小节中，我们提出 LX的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变 A-亏格。

4.1. q-分次陈特征与 Bismut-Chern 特征。

正能量表示的 q-分次陈特征自然地出现在对扭曲亏格的研究中。给定 $\mathcal{H} \in \mathscr{PER}^k(LG)$，能量分解给出

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n, \tag{4.3}$$

其中 $\mathcal{H}_n$ 是能量-n 子空间。存在一个相关的 q 级数，其项为分次向量丛：

$$\Psi(P, \mathcal{H}) = \sum_{n \geq 0} (P \times_G \mathcal{H}_n)\, q^n \in K(X)[[q]]. \tag{4.4}$$

定义 4.1. q 分次陈特征定义为

$$Ch_A(\mathcal{H})_q = \sum_{n\geq 0} Ch_{\mathcal{H}_n}(P,A)\, q^n, \tag{4.5}$$

其中 $Ch_{\mathcal{H}_n}(P,\ A)$ 是伴随向量丛 $(P,\ A)\times_G \mathcal{H}_n$ 的陈特征。类似地， q-分次的 Bismut-Chern 特征为

$$BCh_A(\mathcal{H})_q = \sum_{n\geq 0} BCh_{\mathcal{H}_n}(P,A)\, q^n. \tag{4.6}$$

4.2. **提升 Gerbe 的几何**。 我们描述环丛 $LP \to LX$ 的提升 gerbe $(\mathcal{G}_P,\ \nabla^B)$ 的几何，并建立其 $\mathbb{S}^1$-等变结构。我们构造提升 gerbe 的方法遵循 [Gom01a]。本小节引入的许多记号和公式将在后续各节中反复使用。

设 $P \to X$ 是一个配备联络 A的主 G-丛。局部而言，该丛由以下数据描述:

- 过渡函数 $g_{\alpha\beta}$： $U_\alpha \cap U_\beta \to G$,
- 联络形式 $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha,\ \mathfrak{g})$，满足

$$A_\beta = \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}^{-1}}(A_\alpha) + g_{\alpha\beta}^{*}\mu = g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}. \tag{4.7}$$

陈-西蒙斯 3-形式定义为:

$$\mathrm{CS}(A_\alpha) = \langle A_\alpha \wedge dA_\alpha\rangle + \frac{2}{3}\langle A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\rangle \in \Omega^3(U_\alpha). \tag{4.8}$$

ˆ ˆ 主 LG-丛 $(LP, A) \to LX$ 的局部数据为 $\{LU_\alpha, Lg_{\alpha\beta}, A_\alpha\}$，其中 ˆ$A_\alpha \in \Omega^1(LU_\alpha, L\mathfrak{g})$ 是 A_α 的求值。令 K 表示 LX 上的旋转生成元。描述提升 gerbe 的几何数据如下:

- $c_\alpha = \int_{S^1}\langle \iota_K \hat{A}_\alpha \wedge \hat{A}_\alpha\rangle\, dt \in \Omega^1(LU_\alpha)$,
- $\Psi_\alpha = \int_{S^1}\langle A_\alpha \wedge R_\alpha\rangle - \frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\alpha) \in \Omega^2(LU_\alpha)$,
- $\widetilde{A}_\alpha = \hat{A}_\alpha + c_\alpha \mathfrak{c} \in \Omega^1(LU_\alpha, \widetilde{L\mathfrak{g}})$.

引理 2.2 有一个逐纤维的扩张:

引理 4.2 ([CP89])。

$$\Psi_\alpha - dc_\alpha = \int_{S^1} \mathrm{CS}(A_\alpha). \tag{4.9}$$

$\sim$ $\sim A_\alpha$ 作为 LU_α上局部主 LG- 丛的联络形式。其曲率为:

$$\widetilde{R}_\alpha = \hat{R}_\alpha + \frac{1}{2}[\widetilde{A}_\alpha, \widetilde{A}_\alpha] = \hat{R}_\alpha + \left(\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\alpha) + dc_\alpha\right)\mathfrak{c}. \tag{4.10}$$

将 [Gom01a、定理 3.9]应用于环群的中心扩张，可得以下定理，它描述了带联络的提升 gerbe 的局部数据。

定理 4.3. 设 $Lg_{\alpha\beta}\colon L(U_\alpha\cap U_\beta)\to LG$ 是 $Lg_{\alpha\beta}$ 的一个提升。定义如下：

- $z_{\alpha\beta\gamma}=\widetilde{Lg}_{\alpha\beta}\widetilde{Lg}_{\beta\gamma}\widetilde{Lg}_{\gamma\alpha}\in\Omega^0(L(U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma),S^1)$,
- $u_{\alpha\beta}=\widetilde{A}_\beta-\left[\widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}\widetilde{A}_\alpha+\widetilde{Lg}^*_{\alpha\beta}\widetilde{\mu}\right]\in\Omega^1(L(U_\alpha\cap U_\beta),\mathbb{R})$,
- $K_\alpha=\Psi_\alpha-dc_\alpha=\int_{S^1}\mathrm{CS}(A_\alpha)\in\Omega^2(LU_\alpha,\mathbb{R})$.

*Čech*余链（$z_{\alpha\beta\gamma}$、 $u_{\alpha\beta}$、 K_α）描述了带联络的提升 *gerbe*（$\mathcal{G}_P$、 ∇^B）：K_α 是 LU_α上的局部 B-场，而 $u_{\alpha\beta}$ 是线丛$L_{\alpha\beta}\to L$（$U_\alpha\cap U_\beta$）的联络形式。

证明。我们将验证（$z_{\alpha\beta\gamma}$、 $u_{\alpha\beta}$、 K_α）的余循环条件。第一个条件由下式得出

$$d\log z_{\alpha\beta\gamma}=\widetilde{Ad}_{Lg_{\gamma\alpha}^{-1}}\widetilde{Ad}_{Lg_{\beta\gamma}^{-1}}\widetilde{Lg}^*_{\alpha\beta}\widetilde{\mu}+\widetilde{Ad}_{Lg_{\gamma\alpha}^{-1}}\widetilde{Lg}^*_{\beta\gamma}\widetilde{\mu}+\widetilde{Lg}^*_{\gamma\alpha}\widetilde{\mu}. \tag{4.11}$$

现在验证第二个条件，

$$du_{\alpha\beta}=K_\alpha-K_\beta. \tag{4.12}$$

由于 $u_{\alpha\beta}=\widetilde{A}_\beta-[\widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}\widetilde{A}_\alpha+\widetilde{Lg}^*_{\alpha\beta}\widetilde{\mu}]$,

$$\widetilde{R}_\beta=\widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}(\widetilde{R}_\alpha)+du_{\alpha\beta}. \tag{4.13}$$

考虑方程 (4.10)的中心部分，

$$du_{\alpha\beta}=\left[\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\beta,\hat{A}_\beta)+dc_\beta-\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\alpha,\hat{A}_\alpha)-dc_\alpha\right]-\mathcal{Z}(Lg_{\alpha\beta}^{-1},\hat{R}_\alpha). \tag{4.14}$$

此外，

$$\int_{S^1}\langle A_\alpha\wedge R_\alpha\rangle-\langle A_\beta\wedge R_\beta\rangle=-\mathcal{Z}(Lg_{\alpha\beta}^{-1},\hat{R}_\alpha). \tag{4.15}$$

结合

$$\Psi_\alpha=\int_{S^1}\langle A_\alpha\wedge R_\alpha\rangle-\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\alpha,\hat{A}_\alpha), \tag{4.16}$$

我们有

$$du_{\alpha\beta}=(\Psi_\alpha-dc_\alpha)-(\Psi_\beta-dc_\beta)=K_\alpha-K_\beta. \tag{4.17}$$

提升 gerbe 的曲率形式在局部由 dK_α 给出。这定义了 LX 上的一个全局 3-形式H，它是 Φ 的转移。

注 4.4。局部 B-场 K_α 也可以由约化分裂导出（参见[*MS01*、*Wal10*]）。局部地，约化分裂 L_α： $LU_\alpha\times L\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ 定义在$y+m\mathfrak{c}\in L\mathfrak{g}$ 上，如下所示：

$$L_\alpha(\gamma,y+m\mathfrak{c})=\int_{S^1}\mathrm{Tr}[A_\alpha\wedge y]_\gamma-m. \tag{4.18}$$

因此，局部 B-场由下式给出

$$K_\alpha = L_\alpha(\widetilde{R}_\alpha) = \int_{S^1} \langle A_\alpha \wedge R_\alpha \rangle - (\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\alpha) + dc_\alpha) = \int_{S^1} \mathrm{CS}(A_\alpha). \tag{4.19}$$

推论 4.5. 由式 (4.12) 和式(4.13)可得，

$$(\widetilde{R}_\beta + K_\beta) = \widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}(\widetilde{R}_\alpha + K_\alpha). \tag{4.20}$$

$\widetilde{\mathbb{S}^1}$-等变性。$(z_{\alpha\beta\gamma}, u_{\alpha\beta}, K_\alpha)$ 在 $Lg_{\alpha\beta}$ 具有 $\mathbb{S}^1$-等变性时描述一个 $\mathbb{S}^1$-等变 gerbe。动量映射消失的一种更具概念性的解释是，提升 gerbe 实际上是 Chern-Simons 2-gerbe 的 1-重积分。

命题 4.6. $z_{\alpha\beta\gamma}, u_{\alpha\beta}, K_\alpha)$ 的动量映射消失，即 $\iota_K(u_{\alpha\beta}) = 0$。

$\widetilde{\quad}^*$证明. 回忆一下，

$u_{\alpha\beta} = A_\beta - [Ad_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}} A_\alpha + Lg_{\alpha\beta}\ \widetilde{\mu}]$,

$$\iota_K(u_{\alpha\beta}) = \iota_K(c_\beta - c_\alpha) - \iota_K(\widetilde{Lg_{\alpha\beta}}^*\, v) - \mathcal{Z}(Lg_{\alpha\beta}^{-1}, \iota_K \hat{A}_\alpha). \tag{4.21}$$

$\widetilde{\quad}^*$由推论 2.3 可直接得出 $i_{\widetilde{K}} v = -\rho^* E$。因此，我们有 $\iota_K(Lg_{\alpha\beta}\ v) = -E \circ Lg_{\alpha\beta}$。

4.3. 在 LX上的椭圆陈特征。我们将LX 上的椭圆陈特征定义为与正能量表示 $\mathcal{H} \in \mathscr{PER}^k(LG)$ 相关联的 gerbe 模的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变扭曲 Chern 特征。

给定 $\tau \in \mathbb{H}$，我们将向量场 K 替换为 τK，所得的等变曲率在局部可写为如下形式。

定义 4.7（局部 τ-变形曲率）。

$$\widetilde{R}_\alpha[\tau] = \tau\mathfrak{d} + [\tau\iota_K(\widetilde{A}_\alpha) + \widetilde{R}_\alpha] \in \Omega^*(LU_\alpha, \widetilde{L\mathfrak{g}}'_{\mathbb{C}}). \tag{4.22}$$

椭圆陈特征在局部定义为

$$ECh_A(\mathcal{H})|_{LU_\alpha} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \left[\exp\left(\widetilde{R}_\alpha[\tau] + K_\alpha\right)\right]. \tag{4.23}$$

现在我们证明椭圆陈特征的整体良定义性和等变闭性。收敛性更为困难，将在下一小节中讨论。

4.3.1. 整体良定义性。

引理 4.8.

$$\widetilde{R}_\alpha[\tau] = \widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}(\widetilde{R}_\beta[\tau]) + (du_{\alpha\beta})\mathfrak{c}. \tag{4.24}$$

证明。由推论 4.5 可知，只需证明

$$(\tau\mathfrak{d} + \tau\iota_K(\widetilde{A}_\alpha)) = \widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}((\tau\mathfrak{d} + \tau\iota_K(\widetilde{A}_\beta))). \tag{4.25}$$

这可由命题 4.6 与命题 2.6 结合得到，即

$$\widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}(\mathfrak{d}+\iota_K(\widetilde{A}_\beta))=(\mathfrak{d}+\iota_K(\widetilde{A}_\alpha)). \tag{4.26}$$

因此，我们得到

推论 4.9。

$$(\widetilde{R}_\alpha[\tau]+K_\alpha)=\widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}(\widetilde{R}_\beta[\tau]+K_\beta). \tag{4.27}$$

由于正能量表示 $\mathcal{H}$ 是酉的，结合上述推论，我们有

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(\exp(\widetilde{R}_\alpha[\tau]+K_\alpha))=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(\exp(\widetilde{R}_\beta[\tau]+K_\beta)) \quad \text{on} \quad LU_\alpha\cap LU_\beta. \tag{4.28}$$

4.3.2. 等变闭性。

命题 4.10。 $ECh_A(\mathcal{H})\in\Omega^{2*}(LX)^{\mathbb{S}^1}$ 是 $(d+\tau\iota_K-kH)$-闭的。

证明。 只需证明 $(d+\tau\iota_K)\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(R_\alpha[\tau])]=0$. 在这个无限维情形下，Bianchi 恒等式仍然成立，但取迹时必须谨慎处理收敛问题。

$$(d+ad_{\widetilde{A}_\alpha}+\tau\iota_K)\cdot(\widetilde{R}_\alpha[\tau])=(d+ad_{\widetilde{A}_\alpha}+\tau\iota_K)\cdot(\tau\mathfrak{d}+[\tau\iota_K(\widetilde{A}_\alpha)+\widetilde{R}_\alpha])=0. \tag{4.29}$$

根据命题 4.14，在下一小节中，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[A_\alpha,\exp(R_\alpha[\tau])]=0$. 因此

$$(d+\tau\iota_K)\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\widetilde{R}_\alpha[\tau])]=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[(d+ad_{\widetilde{A}_\alpha}+\tau\iota_K)\exp(\widetilde{R}_\alpha[\tau])]=0. \tag{4.30}$$

4.4. 收敛。 现在我们讨论椭圆陈特征的收敛性。

4.4.1. 能量估计。 设 $\pi:\widetilde{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}'\to\mathrm{End}(\mathcal{H})$ 是一个正能量表示。下面的引理是 Segal-Sugawara 构造的推论。

引理 4.11 ([GW84, 引理 3.2], [Was98])。 对于一个能量固定为 n 且范数为单位范数的向量 v，存在一个常数 $C>0$，使得对于任意 $m\in\mathbb{Z}$ 和 $y_m\in\mathfrak{g}$,

$$\|\pi(y_m\otimes z^m)\cdot v\|\le C(|m|+n)\,|y_m|\,. \tag{4.31}$$

在该表示下， $L\mathfrak{g}$ 作为斜伴随但**无界**的算子作用。下面的命题表明，尽管它是无界的，但仍可由能量 n 按照 $n\to\infty$加以控制。

命题 4.12. 设 $y\in L\mathfrak{g}$, v 是固定能量 n 的单位范数向量。当 n 充分大时，存在 $C'(y)>0$，使得

$$\|\pi(y)\cdot v\|\le C'(y)n. \tag{4.32}$$

证明. 考虑傅里叶分解 $y = \sum_{m\in\mathbb{Z}} y_m \otimes z^m$, $y_m \in \mathfrak{g}_\circ$ 由于 y 是光滑的, $|y_m|$ 关于 m 的衰减速度快于任意多项式。因此，根据上述引理，当 n 充分大时，存在 $C'(y) > 0$，使得

$$\|\pi(y)\cdot v\| \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} C(|m|+n)\,|y_m| \leq C'(y)n. \tag{4.33}$$

更准确地说，为了处理常数 $C'(y)$，我们应当遵循 [GW84]，在 $L\mathfrak{g}$ 上引入索博列夫范数。但这里我们只关心收敛，因此省略许多分析细节。

接下来，Kac-Weyl 特征的收敛性是已知的。给定 $x \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$，令 $V_{n,\mu,c}$ 为权 (n,μ,c) 的权空间。根据最高权模的分解，形式特征为

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp\left((\pi(\tau\mathfrak{d}+x))\right)] = \sum_{n,\mu} q^n \mu(\exp(x))\dim(V_{n,\mu,c}). \tag{4.34}$$

下面的引理表明，形式特征随着能量 $n\to\infty$ 的增加而指数衰减。

引理 4.13 ([Slo85, 5.3], [Kac90]).

$$\sum_{n,\mu} |q^n\mu(\exp(x))|\dim(V_{n,\mu,c}) \preceq \sum_n n^r \exp(-\epsilon n) \tag{4.35}$$

对于某些 $r\in\mathbb{N}, \epsilon > 0$。

形式特征的绝对收敛性也可以通过将其乘以反常因子 q^{m_Λ} 后，利用 Theta 函数的性质推导出来。此外，我们证明，当与若干元素 $y^1,\ldots,y^k \in L\mathfrak{g}$ 耦合时，迹仍然收敛。算子 $\pi(y^1)\cdots\pi(y^k)$ 的非对角分量对迹没有贡献，因此只需估计对角部分。

命题 4.14。对于 $y^1, \cdots, y^k \in L\mathfrak{g}$ 以及 $x\in\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp\left((\pi(\tau\mathfrak{d}+x))\right)\cdot(\pi(y^1)\cdots\pi(y^k))] < \infty. \tag{4.36}$$

证明。为说明我们的方法，我们从 $k=1$ 的情形开始。只需考虑常数部分 $y\in\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$，因为其他非常数分量都是非对角的。范数 $\|\pi(y)\|_{\mathcal{H}_n}$ 在充分大的 n 下有界，而 $\exp\left((\pi(\tau\mathfrak{d}+x))\right)$ 指数衰减，从而确保迹收敛。对于任意 k，其基本思路完全相同。

在傅里叶分解下

$$y^j = \sum_{i_j\in\mathbb{Z}} y^j_{i_j}\otimes z^{i_j}, \quad j = 1\cdots k, \tag{4.37}$$

$\pi(y^1)\cdots\pi(y^k)$ 的常数部分由下式给出

$$\sum_{i_1+\cdots+i_k=0, i_j\in\mathbb{Z}} \pi(y^1_{i_1}\otimes z^{i_1})\cdots\pi(y^k_{i_k}\otimes z^{i_k}). \tag{4.38}$$

给定一个能量为 n 的单位范数向量 v，迭代使用引理 4.11，可得

$$\begin{aligned}(4.39)\qquad &\left\|\sum_{i_1+\cdots i_k=0}\pi(y_{i_1}^1\otimes z^{i_1})\cdots\pi(y_{i_k}^k\otimes z^{i_k})v\right\|\\ &\preceq\sum_{i_1+\cdots i_k=0}(|i_1|+|n-i_1|)\left|y_{i_1}^1\right|\left\|\pi(y_{i_2}^2\otimes z^{i_2})\cdots\pi(y_{i_k}^k\otimes z^{i_k})v\right\|\cdots\\ &\preceq\sum_{i_1+\cdots i_k=0}(|i_1|+|n-i_1|)(|i_2|+|n-i_1-i_2|)\cdots(|i_k|+|n|)\left|y_{i_1}^1\right|\cdots\left|y_{i_k}^k\right|.\end{aligned}$$

由于 y^j 是光滑的，$a_{i_j}=\left|y_{i_j}^j\right|$ 当 $i_j\Longrightarrow\infty$时呈现$_{|i_j|^\infty}^1$ 衰减。另一方面，系数

$$(4.40)\qquad c_{i_1,\cdots i_k}=(|i_1|+|n-i_1|)(|i_2|+|n-i_1-i_2|)\cdots(|i_k|+|n|)$$

仅在 n中呈现多项式增长。由于能量 $n\to\infty$,

$$(4.41)\qquad \left\|\sum_{i_1+\cdots i_k=0}\pi(y_{i_1}^1\otimes z^{i_1})\cdots\pi(y_{i_k}^k\otimes z^{i_k})v\right\|\preceq n^k, n\to\infty.$$

根据引理 4.13，我们有

$$(4.42)\qquad |\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\tau\mathfrak{d}+x)\cdot(y_1\cdots y_k)]|\preceq\sum_n n^{k+r}\exp(-\epsilon n)<\infty.$$

4.4.2. 椭圆陈特征的收敛。局部而言，椭圆陈特征为

$$ECh_A(\mathcal{H})|_{LU_\alpha}=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\tau\mathfrak{d}+[\tau\iota_K\hat{A}_\alpha+\hat{R}_\alpha])]\cdot\exp(k[(d+\tau\iota_K)c_\alpha+\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\alpha,\hat{A}_\alpha)]).$$

ˆ ˆ 我们只需证明 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\tau\mathfrak{d}+\tau\iota_K A_\alpha+R_\alpha)]$ 的收敛性。更确切地说，收敛是指：对于任意 $\gamma\in LU_\alpha$ 以及任意切向量X_1，$\cdots$，$X_{2k}\in T_\gamma(LX)$，所得算子相对于正能量表示 $\mathcal{H}$是迹类的。

弗洛凯理论应用于 [Fre84, (7.2.5)]，，可证明零次分量的收敛性。结合上述能量估计，我们证明了整个形式的收敛性。

命题 4.15。对于任意 $\gamma\in LU_\alpha$，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\tau\mathfrak{d}+[\tau\iota_K\,\hat{}\,A_\alpha+\hat{}\,R_\alpha])]_\gamma\in\Omega^{2*}(LU_\alpha)_\gamma$均收敛。

证明。我们证明在切向量 $X_1,\ldots,X_{2k}\in\hat{}T_\gamma(LU_\alpha)$存在时的收敛性。设 $Y_i=R(X_{2i-1},X_{2i})_\gamma\in L\mathfrak{g}$，其中 $i=1,\ldots,k$。根据弗洛凯理论，存在一个规范变换 $g_0\in LG$，使得

$$(4.43)\qquad \widehat{Ad}_{g_0}(\tau\mathfrak{d}+\tau(\iota_K\hat{A}_\alpha)_\gamma)=\tau\mathfrak{d}+\tau K_0,$$

其中 $K_0 \in \mathfrak{t}$ 是一个常数元素。因此，

$$\begin{aligned}(4.44)\qquad &\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\tau\mathfrak{d} + [\tau\iota_K \hat{A}_\alpha + \hat{R}_\alpha])]_\gamma(X_1 \cdots X_{2k}) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\widetilde{Ad}_{g_0}(\tau\mathfrak{d} + [\tau\iota_K \hat{A}_\alpha + \hat{R}_\alpha]))]_\gamma(X_1 \cdots X_{2k}) \\ &= \exp(k\triangle) \cdot \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\big[\exp(\pi(\tau\mathfrak{d} + \tau K_0))\tfrac{1}{k!}\pi((Ad_{g_0}Y_1)) \cdots \pi((Ad_{g_0}Y_k))\big],\end{aligned}$$

其中，$\triangle$ 表示由伴随作用产生的额外中心项。收敛性由命题 4.14 得出。

4.5. **通过 String-G 结构进行平凡化**。我们研究提升 gerbe $(\mathcal{G}_P, \nabla^B)$ 的平凡化，尤其是通过几何 string G-结构的转移来实现的平凡化。提升 gerbe 的平凡化由局部数据 $(h_{\alpha\beta}, \mathcal{B}_\alpha)$ 描述，其中 $h_{\alpha\beta}: LU_\alpha \cap LU_\beta \to S^1$ 且 $\mathcal{B}_\alpha \in \Omega^1(LU_\alpha)$，使得定理 4.3 中的余循环成为余边界（见 [Gom01a]）：

$$(4.45)\qquad (z_{\alpha\beta\gamma}, u_{\alpha\beta}, K_\alpha) = \delta(h_{\alpha\beta}, \mathcal{B}_\alpha).$$

我们可以通过以下方式修正过渡函数和联络：

- $\widetilde{Lg_{\alpha\beta}}^{cor} = h_{\alpha\beta} \cdot \widetilde{Lg_{\alpha\beta}} : LU_\alpha \cap LU_\beta \to \widetilde{LG}$.
- $\widetilde{A}_\alpha^{cor} = \widetilde{A}_\alpha + \mathcal{B}_\alpha\mathfrak{c} :\in \Omega^1(LU_\alpha, \widetilde{L\mathfrak{g}})$.

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$修正后，得到提升主 LG-丛 $(LP, A) \to LX$，它与 $LP, A \to LX$ 相容，如 [CP89] 中所述：

$$(4.46)\qquad \begin{array}{ccc} (\widetilde{LP}, \widetilde{A}) & \longrightarrow & (LP, \hat{A}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & LX & \end{array}$$

$\widetilde{}$其中 $LP \to LP$ 是一个主圆丛。几何 string G-结构指的是在 X 上对 Chern-Simons 2-gerbe 的几何平凡化。它可以通过转移，成为在 LX 上的提升 gerbe $(\mathcal{G}_P,\ \nabla^B)$ 的几何平凡化。存在一个 $B_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha)$，且 $\mathcal{B}_\alpha = \int_{S^1} B_\alpha$. 于是，$\{B_\alpha\}$ 定义了 Chern-Simons 2-gerbe $(\mathbb{CS}_P,\ \nabla_A)$ 的平凡化联络，称为 string-G 联络，使得

$$(4.47)\qquad C = \mathrm{CS}(A_\alpha) - dB_\alpha$$

是曲率形式。它是在 X 上全局定义的 3-形式，满足 $dC = \Phi$。令

$$(4.48)\qquad \mathcal{C} = \int_{S^1} C \in \Omega^2(LX)$$

为转移，它充当提升 gerbe 平凡化的曲率形式。为此，我们可以对式 (4.47) 两边进行转移，

$$(4.49)\qquad \mathcal{C} = K_\alpha - d\mathcal{B}_\alpha.$$

修正后的曲率在局部表示为

$$(4.50)\qquad \widetilde{R}_\alpha^{cor} = \widetilde{R}_\alpha + d\mathcal{B}_\alpha\mathfrak{c}.$$

命题 4.16。 平凡化的椭圆陈特征 $ECh_A(\mathcal{H})|_{LU_\beta}$ 由下式给出

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[(\exp(\tau\mathfrak{d}+\tau\iota_K\hat{A}_\beta+\hat{R}_\beta+\tau\iota_K c_\beta\mathfrak{c})]\exp(k\int_{S^1}\langle A_\beta\wedge R_\beta\rangle)\cdot\exp(-k\mathcal{C}). \tag{4.51}$$

证明。 修正后的 τ-变形曲率为

$$\widetilde{R}^{cor}_\beta[\tau]=\tau\mathfrak{d}+\tau\iota_K\widetilde{A}^{cor}_\beta+\widetilde{R}^{cor}_\beta=(\tau\mathfrak{d}+\tau\iota_K\hat{A}_\beta+\hat{R}_\beta)+\Box_\beta\mathfrak{c}. \tag{4.52}$$

回忆

$$\widetilde{R}_\beta=\hat{R}_\beta+(\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\beta,\hat{A}_\beta)+dc_\beta)\mathfrak{c}, \tag{4.53}$$

那么中心部分为

$$\begin{aligned}\Box_\beta&=((d+\tau\iota_K)c_\beta+d\mathcal{B}_\beta+\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\beta,\hat{A}_\beta))\\&=\tau\iota_K c_\beta+K_\beta-\mathcal{C}+dc_\beta+\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\beta,\hat{A}_\beta)=\tau\iota_K c_\beta-\mathcal{C}+\int_{S^1}\langle A_\beta\wedge R_\beta\rangle.\end{aligned} \tag{4.54}$$

最后一个等式由第 4.2 节中的公式得出： $K_\beta+dc_\beta=\Psi_\beta$ 和 $\Psi_\beta+\frac{1}{2}\omega(\hat{A}_\beta,\hat{A}_\beta)=\int_{S^1}\langle A_\beta\wedge R_\beta\rangle$。

由于 $\mathcal{H}\in\mathscr{PER}^k(LG)$ 是一个层级为 k 的正能量表示，因此可得平凡化椭圆陈特征的公式。

我们来解释各项的几何含义： $\mathcal{E}_\beta=\iota_K c_\beta=\int_{S^1}\langle\iota_K\hat{A}_\beta,\ \iota_K\hat{A}_\beta\rangle$可视为规范场沿回路 γ 的动能。它只在局部定义，并起到修正项的作用，如 [Fre84] 中所示。因子 $\exp(-k\mathcal{C})$ 源自提升 gerbe 的几何平凡化所产生的全局 B-场 $\mathcal{C}$。$\exp(k\int_{S^1}A_\beta\wedge R_\beta)$ 则再次源自约化分裂。

4.6. $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变 A-亏格。 作为一项应用，我们提出了 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变 A-亏格，定义在 LX 上，它是经典 A-亏格在 X 上的椭圆类比。

4.6.1. 弦结构与环旋量结构。 设 (X,g) 是一个维数为 $2n$ 的自旋黎曼流形。令 $P=P_{\mathrm{Spin}(X)}$ 表示 TX 的自旋标架丛，它是一个主 $G=\mathrm{Spin}(2n)$ 丛。令 A 表示由 Levi-Civita 联络诱导的自旋联络。在这种情况下，与自旋标架丛 (P,A) 相关联的内禀陈-西蒙斯 2-gerbe 记作 (CS_X,∇^g)。其曲率形式是弦反常

$$\Phi=\langle R,R\rangle=\frac{1}{2}p_1(X,g), \tag{4.55}$$

其中 $p_1(X,g)$ 是第一庞特里亚金形式。因子 $_{1\ 2}$ 源于 Dynkin 指数为 2。因此，自旋$(2n)$ 上的极小形式是 Killing 型的一半。

X 上的 string 结构指的是 $(\mathrm{CS}_X,\ \nabla^g)$ 的平凡化。它可以经由转置给出 LX 上提升 gerbe $(\mathcal{G}_{\mathrm{Spin}(X)},\ \nabla^B)$ 的平凡化，这等价于将主 $L\mathrm{Spin}(X)$-丛 $L\mathrm{Spin}(X)\to LX$ 提升为主$\widetilde{\ \ }L\mathrm{Spin}(2n)$-丛。这种提升称为环旋结构（参见 [Wal12]）。

4.6.2. 上的旋量丛 LX。在 LX 上构造旋量丛一直备受关注，因为这是严谨构造 LX 上 Dirac-Ramond 算子的前提，而该算子是 Stolz 猜想的核心。我们简要概述 LX 上（扭曲）环旋量丛 $\mathcal{S}_{LX}$ 的构造。它是 LX 上提升 gerbe $\mathcal{G}_{\mathrm{Spin}(X)}$ 的 gerbe 模，与层一 Fock 表示 $\mathcal{F}=S^+-S^-$ 相关联，其中 $S^{\pm}\in\mathscr{PER}^1(L\mathrm{Spin}(2n))$。

假设 X 具有弦结构。则 LX 上的环自旋结构提供了一个$\widetilde{\ }$提升 $L\mathrm{Spin}(X)\to LX$。环旋量丛定义为与之关联的 Fock 丛

$$\mathcal{S}_{LX}=\widetilde{L\mathrm{Spin}(X)}\times_{\widetilde{L\mathrm{Spin}(2n)}}\mathcal{F}\longrightarrow LX. \tag{4.56}$$

由于$\widetilde{L\mathrm{Spin}(2n)}$作用仅在稠密子空间上光滑，我们请读者参阅 [KW24]，以了解严谨的处理。

4.6.3. τ-变形的 LX 的欧拉类。回顾一下，旋量丛的超 Bismut-Chern 特征 $BCh_s(\mathcal{S}_X)$ 可视为 LX的$\mathbb{S}^1$-等变欧拉类：

$$e_{\mathbb{S}^1}(LX)=BCh_s(\mathcal{S}_X). \tag{4.57}$$

我们先前说明，称其为 $\mathbb{S}^1$-等变欧拉类是合理的，因为

$$\hat{A}(X)\wedge Ch_s(\mathcal{S}_X)=e(X). \tag{4.58}$$

现在，我们通过如下修改这一构造，定义 $\tau\in\mathbb{H}$ 处的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变欧拉类：

$$e_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX)[\tau]:=\tau^{-\deg/2}\cdot e_{\mathbb{S}^1}(LX), \tag{4.59}$$

其中，$\deg:\Omega^*(LX)\to\Omega^*(LX)$ 表示次数算子，它对微分形式的作用为 $\deg(\omega)=m\omega$for $\omega\in\Omega^m(LX)$。于是，$e_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX)[\tau]$是 $(d+\tau\iota_K)$-闭的。

ˆ 4.6.4. τ-变形的 A-亏格在 LX上。当 X是 string 时，我们将环旋量丛 $\mathcal{S}_{LX}$ 的 τ-变形超 Chern 特征定义为

$$Ch_s(\mathcal{S}_{LX})[\tau]=ECh_s(\mathcal{F})\in\Omega^{2*}_{d+\tau\iota_K}(LX)^{\mathbb{S}^1}, \tag{4.60}$$

其中，$ECh_s(\mathcal{F})=ECh(S^+)-ECh(S^-)$ 是 Fock 表示 $\mathcal{F}=S^+-S^-$的超椭圆 Chern 特征。

ˆ $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变 A-亏格在 LX 上由形式展开给出

$$\hat{A}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX)[\tau]=\tau^n\frac{e_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX)[\tau]}{q^{m_\Lambda}\cdot Ch_s(\mathcal{S}_{LX})[\tau]/\eta(\tau)^{2n}}\in\Omega^{2*}_{d+\tau K}(LX)^{\mathbb{S}^1}. \tag{4.61}$$

这可以解释为预指标公式 Eq. (4.58) 的椭圆类比。应用局部化公式，我们旨在证明：

$$\int_{LX}\hat{A}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX)[\tau]=\int_X\hat{A}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX)[\tau]|_X\wedge\hat{A}(X)=\int_X\hat{W}(X), \tag{4.62}$$

ˆ其中 $W(X)$ 是 Witten 属。

限制到常值环空间 X 上时，

$$\hat{A}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX)[\tau]|_X = \frac{Ch_s(\mathcal{S}_X)}{q^{m_\Lambda}\cdot Ch(S^+-S^-)/\eta(\tau)^{2n}}, \tag{4.63}$$

其中 $Ch(S^+-S^-)$ 是 X 上的超 q 分次陈特征。用陈根 $\{x_i\}$ 表示，

$$q^{m_\Lambda}\cdot Ch(S^+-S^-)/\eta(\tau)^{2n} = \prod_{i=1}^{n}\frac{\theta_{11}(x_i,\tau)}{\eta(\tau)^3}. \tag{4.64}$$

因此，我们得到

$$\hat{A}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX)[\tau]|_X \wedge \hat{A}(X) = \prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta_{11}(x_i,\tau)/\eta(\tau)^3} = \hat{W}(X). \tag{4.65}$$

ˆ形式上， LX 上的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变 A-亏格可视为 LX 上 Dirac-Ramond 算子（若能严格定义）的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变指标密度：

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(\not{D}_{LX})[\tau] = \int_{LX}\hat{A}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX)[\tau] = \int_X \hat{W}(X). \tag{4.66}$$

另一方面，环面局部化 $L^2X\to X$ 可直接计算 Witten 属 ˆ（参见 [Liu94]）。LX 上的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变 A-亏格在局部化过程中 $L^2X\to LX\to X$充当中间结果。从这个角度来看， $\mathbb{C}^*_{<1}$-等变 ˆA-亏格是从 L^2X 到 LX 的等变局部化结果。

5. Elliptic Atiyah–Witten Formula

本节中，我们在 L^2X 上建立椭圆 Atiyah–Witten 公式，并将 Chern–Simons 规范理论的几何量子化与双环空间几何联系起来。

在 [Ati85], 中，归一化无穷乘积

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}}(x+n)\sim \sin(\pi x) \tag{5.1}$$

在 Atiyah-Singer 指标理论的环空间拉格朗日表述中，它发挥着主导作用。 X 在 LX 中，法丛的 $\mathbb{S}^1$-等变欧拉类计算出ˆ A-亏格

$$e_{\mathbb{S}^1}(X/LX)^{-1}\sim \hat{A}(X). \tag{5.2}$$

另一方面，它给出了关于 LX的 Atiyah-Witten 公式，该公式将协变导数的ζ-正则化 Pfaffian pf$_\zeta(\nabla_{\dot{\gamma}})$ 与旋量丛 holonomy 的超迹 $\mathrm{Tr}_s[hol_{\mathcal{S}_X}(\gamma)]$ 联系起来。

Liu 注意到，(5.1) 的二维类比就是艾森斯坦乘积公式（参见 [Liu94]）

$$\prod_{m,n\in\mathbb{Z}}(z+m+n\tau)\sim \theta_{11}(z,\tau)/\eta(\tau). \tag{5.3}$$

X 在 L^2X 中的法丛的环面等变欧拉类计算出 Witten 属

$$e_{T^2}(X/L^2X)^{-1} \sim \hat{W}(X). \tag{5.4}$$

我们预期归一化无穷乘积应在 L^2X 上给出椭圆 Atiyah-Witten 公式。共有四个公式，因为在公式 (5.3) 中，可以将 z 替换为 $z + \frac{i+\tau j}{2}$、i、$j \in \mathbb{Z}^2$，从而得到四个雅可比 theta 函数。

在 holonomy 一侧，我们从 $(1+1)$-转移视角出发，在 L^2X 上定义椭圆 holonomy，即 LX 上与正能量表示相关联的 gerbe 模 holonomy 的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-变形等变扭曲迹：

$$Ehol : \mathscr{PER}^k(LG) \to \Gamma(L^2X, \mathcal{L}(\mathcal{G}_P)^k)^{T^2}. \tag{5.5}$$

这里，$\mathcal{L}(\mathcal{G}_P) \to L^2X$ 表示 LX 上提升 gerbe $(\mathcal{G}_P、\ \nabla^B)$ 的转移线丛。一个关键限制是，我们目前只证明了椭圆 holonomy 在规范化多稳定双环上的收敛，而非在整个空间 L^2X 上的收敛。

现在我们聚焦于 $G =$ 上层为一级的 Spin$(2n)$，其中

$$\mathscr{PER}^1(L\mathrm{Spin}(2n)) = \{S^+ - S^-, S^+ + S^-, S_+ - S_-, S_+ + S_-\}. \tag{5.6}$$

这四个虚拟一级正能量表示在 L^2X 上产生了四个相应的椭圆 holonomy。

在解析侧，椭圆曲线 Σ_τ 上有四种自旋结构的 Pfaffian，它们是 L^2X 上相应 Pfaffian 线丛的典范截面。我们证明，提升 gerbe $\mathcal{L}(\mathcal{G}_P,\ \nabla^B)$ 的转移以及 L^2X 上的行列式（Pfaffian）线丛都同构于陈-西蒙斯线丛。

在探索过程中，我们发现椭圆Atiyah-Witten公式与陈-西蒙斯规范理论的几何量子化有关。这源于将四个 Pfaffian 推前至粗模空间后，能够以基到基的方式证明量子化与约化可交换（关于通过扩张给出的一般证明，见 [DLZ]）：

$$r : \mathcal{H}_1(\mathrm{Spin}(2n)) \cong V_1(\mathrm{Spin}(2n)). \tag{5.7}$$

本质上，我们证明，四个 Pfaffian 截面推前至粗模空间后，分别对应于四个雅可比 theta 函数；这四个函数构成亏格一共形块 V_1(Spin$(2n)$) 的一组基，其中当 $G =$Spin$(2n)$ 时，层为一级。椭圆 Atiyah–Witten 公式只要求一个带联络的主 Spin$(2d)$–丛 $(P,\ A) \to X$，以及通过标准表示 ρ : Spin$(2d)$ $\to$SO$(2d)$ 得到的伴随向量丛；它不必是黎曼自旋流形的自旋标架丛。在亏格一的情形，共形块 V_1(Spin$(2d)$) 具有特殊性质：其 Verlinde 维数为四，且一组自然基由四个雅可比 theta 函数给出。椭圆曲线 Σ_τ 上的四种自旋结构，分别对应于 LSpin$(2d)$ 的四个虚拟一级正能量表示，以及四个雅可比 theta 函数。对于其他群或更高层，不应期待 Pfaffian 的类似推前能给出完整的共形块。

本节安排如下。在第 5.1 小节中，我们回顾 LX 上的经典 Atiyah–Witten 公式，以及它针对非自旋流形的 $\mathbb{Z}_2$-挠率推广。在第 5.2 小节中，我们介绍椭圆 holonomy。在第 5.3 小节中，我们通过族指标理论介绍 L^2X 上的 Pfaffian。在第 5.4节中，我们介绍普适 Chern–Simons 线丛及其到映射空间的拉回。我们将提升 gerbe 的转移以及行列式（Pfaffian）线丛与 Chern–Simons 线丛联系起来。在第 5.5节中，我们计算行列式（Pfaffian）的推前，并在粗模空间上建立椭圆 Atiyah–Witten 公式。在第 5.6 小节中，我们给出 L^2X 上的椭圆 Atiyah–Witten 公式。在第 5.7 小节中，我们阐述 Chern–Simons 规范理论的量子化与双环空间几何之间的联系。

5.1. **关于 LX 上的经典 Atiyah-Witten 公式**。 设 (X, g) 是一个维数为 $2n$ 的紧致定向黎曼流形。当 X 为自旋时， $\mathcal{S}_X$ 是旋量丛。 [中 LX 上的 Atiyah-Witten 公式表明

$$\mathrm{pf}_\zeta(\nabla_{\dot\gamma}) = \mathrm{Tr}_s[hol_{\mathcal{S}_X}(\gamma)], \quad \gamma \in LX. \tag{5.8}$$

该公式将 $\nabla_{\dot\gamma}$ 的 ζ-正则化 Pfaffian 与 $\mathcal{S}_X$ 的 holonomy 的超迹联系起来。

当 X 不具有自旋结构时，其障碍由第二 Stiefel–Whitney 类 $w_2(X)$ 度量；该类可以转移为 LX 上的 $\mathbb{Z}_2$-挠率线丛。

在解析侧，该挠率线丛由 Pfaffian 线丛 $(\mathrm{PF}_V, \|\cdot\|_{\mathrm{PF}}) \to LX$ 表示；该线丛具有典范 Pfaffian 截面 $\mathrm{pf} \in \Gamma(LX, \mathrm{PF}_V)$，满足

$$\|\mathrm{pf}(\gamma)\|_{\mathrm{PF}} = \mathrm{pf}_\zeta(\nabla_{\dot\gamma}). \tag{5.9}$$

在拓扑侧，它实现为自旋提升 gerbe 的转移线丛。考虑环标架丛 $L\mathrm{SO}(X) \to LX$，它是一个主 $L\mathrm{SO}(2n)$-丛。存在如下李群的短正合列：

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{SO}(2n) \to 1. \tag{5.10}$$

单值化映射 $m : L\mathrm{SO}(2n) \to \mathbb{Z}_2$ 定义转移线丛 $\mathcal{L}$，即伴随线丛 $L\mathrm{SO}(X) \times_m \mathbb{R}$，它定义在 LX 上，并配备平凡度量 $\|\cdot\|$。holonomy 的超迹 $\mathrm{Tr}_s[hol_{\mathcal{S}_X}] \in \Gamma(LX, \mathcal{L})$ 作为典范截面，满足以下性质：

$$\|\mathrm{Tr}_s[hol_{\mathcal{S}_X}(\gamma)]\|^2 = \det(I - hol_{TX}(\gamma)). \tag{5.11}$$

挠率 Atiyah-Witten 公式 [HL22]指出，这两个线丛之间存在一个几何等距同构：

$$\Phi : (\mathrm{PF}_V, \|\cdot\|_{\mathrm{PF}}) \to (\mathcal{L}, \|\cdot\|). \tag{5.12}$$

在该等距同构下，典范截面 pf 和 $\mathrm{Tr}_s[hol_{\mathcal{S}_X}]$ 被视为相同。

~***Loc()*** 上的 ***Atiyah-Witten*** 公式。暂时记 G =SO($2n$)， G =Spin($2n$)。我们证明，经典 Atiyah–Witten 公式可以先在 Loc$_G$(S^1) 上建立，再将其拉回到 LX。

LBG 可实现为商栈 Loc$_G$(S^1) $=[\mathcal{A}_{S^1}/LG]$，它通过全纯映射 Ψ: $\mathcal{A}_{S^1}\to G$ 与 $[G/G]$ Morita 等价；该映射将一个联络映射为其沿 S^1 的 holonomy （见 [BXZ03]）。

在解析侧，Loc$_G$(S^1) 上的 Pfaffian 线丛 PF 可实现为 $\mathcal{A}_{S^1}$ 上的一个 LG-等变几何线丛，其典范截面 pf 是一个LG-等变截面。

~在拓扑侧，考虑线丛 $\mathcal{L}_G = G\times_{\mathbb{Z}_2}\mathbb{R}\to G$，它是一个 $\mathbb{Z}_2$-挠率G-等变线丛。下图展示了它们之间的关系：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L}_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_{S^1} & \xrightarrow{\Psi} & G\end{array} \tag{5.13}$$

拉回 $\mathcal{L}=\Psi^*\mathcal{L}_G$ 是 $\mathcal{A}_{S^1}$ 上的一个 LG-等变 $\mathbb{Z}_2$-挠率线丛。给定~旋量表示 $\Delta=\Delta^+\oplus\Delta^-$，其超特征 $\chi: G\to\mathbb{R}$ 是 G上的一个类函数~。它可识别为一个 G-等变截面 $\chi: G\to G\times_{\mathbb{Z}_2}\mathbb{R}$，其定义为~$\chi(g)=[\tilde{g},\chi_\Delta(\tilde{g})]$,，其中 $\tilde{g}\in G$ 是 $g\in G$的一个提升。此定义与提升的选择无关。截面 χ 是 $\mathcal{L}_G$的典范截面，因为表示~环 $R(G)$是一个由虚表示$\Delta^+-\Delta^-$生成的秩为一的自由 $R(G)$-模。

Pfaffian 线丛与转移线丛之间存在一个几何等距同构；将二者均视为 $\mathcal{A}_{S^1}$上的 LG-等变 $\mathbb{Z}_2$-挠率线丛。在此等距同构下，典范截面 pf 与拉回 $\Psi^*\chi$ 相对应。我们只需对常值联络验证这一点，因为$\mathcal{A}_{S^1}$ 中的任意 G-联络都规范等价于一个常值联络。常值联络的对应关系可直接由经典无穷乘积公式 (5.1) 得出。

这些想法将启发我们研究L^2X上的椭圆Atiyah-Witten公式。

5.2. **椭圆 Holonomy**。 我们将椭圆 holonomy 定义为 LX 上、由正能量表示产生的 gerbe 模的 $\mathbb{C}^*_{<1}$-变形等变扭积 holonomy。它是 L^2X上提升 gerbe 的转移线丛的 T^2-等变截面。

5.2.1. 提升 *gerbe* 的转移线丛。 回顾第 4.2 小节，Deligne 上循环 $(z_{\alpha\beta\gamma},u_{\alpha\beta},K_\alpha)$ 描述了提升 gerbe $(\mathcal{G}_P,\nabla^B)$。带联络 $\mathcal{L}(\mathcal{G}_P,\nabla^B)$ 的转移线丛 $\to L^2X$ 由以下条件刻画：

- 过渡函数 $h'_{\alpha\beta}$： $L^2U_\alpha\cap L^2U_\beta\to S^1$,
  $h'_{\alpha\beta}$:= 指数 $(i\int_S{}_1 u_{\alpha\beta})$。

- 联络形式 $\Theta_\alpha \in \Omega^1(L^2U_\alpha, i\mathbb{R})$,

$$\Theta_\alpha = i\int_{S^1} K_\alpha = i\int_\Sigma \mathrm{CS}(A_\alpha).$$

5.2.2. 椭圆 *holonomy* 的定义。给定 $\mathcal{H} \in \mathscr{PER}^k(LG)$，我们旨在定义

$$Ehol_A(\mathcal{H}) \in \Gamma(L^2X, \mathcal{L}(\mathcal{G}_P)^k)^{T^2}. \tag{5.14}$$

令 $\partial_z^\# = \tau\partial_x - \partial_y$ 为椭圆曲线 Σ_τ上标准 K¨ahler 形式下与 dz 对偶的复向量场。由此在 L^2X上诱导出一个复向量场。我们考虑下文定义的算子 $\mathcal{D}_\alpha^0$ 的平行移动，该算子沿 y方向$\widetilde{\ }'$作用，且取值于 $L\mathfrak{g}_\mathbb{C}$:

$$\mathcal{D}_\alpha^0 = \frac{d}{dy} - (\tau\mathfrak{d} + \iota_{\partial_z^\#}\widetilde{A}_\alpha). \tag{5.15}$$

在正能量表示 $\pi:\ \widetilde{L\mathfrak{g}_\mathbb{C}}' \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$下，当在$\sim\gamma \in L^2U_\alpha$ 处取值且时间为 y时，算子 $\pi(\tau\mathfrak{d} + \iota_{\partial_z^\#}A_\alpha(\gamma)_y)$作用于 $\mathcal{H}$。该平行移动由迭代积分给出

$$hol(\mathcal{D}_\alpha^0)_\gamma = \sum_{n=0}^\infty \int_{\Delta_n}\prod_{i=1}^n \pi(\tau\mathfrak{d} + \iota_{\partial_z^\#}\widetilde{A}_\alpha(\gamma)_{y_i})dy_i. \tag{5.16}$$

我们首先证明它定义了一个整体截面，称为椭圆 holonomy。

命题 5.1。 对于 $\mathcal{H} \in \mathscr{PER}^k(LG)$，定义 $f_\alpha(\gamma) = \mathrm{Tr}_\mathcal{H}[hol(\mathcal{D}_\alpha^0)_\gamma]$，$\gamma \in L^2U_\alpha$.在交集 $L^2U_\alpha \cap L^2U_\beta$ 上，我们有 $f_\beta(\gamma) = h_{\alpha\beta}^k(\gamma)f_\alpha(\gamma)$。

证明。 由定理 4.3 可知 $u_{\alpha\beta} = A_\beta - [Ad_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha + Lg_{\alpha\beta}\ \widetilde{\mu}]$，而由引理 4.8 可知 $(\tau\mathfrak{d} - \tau\iota_{\partial_x}A_\beta) = Ad_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}(\tau\mathfrak{d} - \tau\iota_{\partial_x}A_\alpha)$。 于是我们得到

$$\begin{aligned}
f_\beta(\gamma) &= \mathrm{Tr}_\mathcal{H} hol_\gamma\left(\frac{d}{dy} - [\iota_{\partial_y}\widetilde{A}_\beta] - [\tau\mathfrak{d} - \tau\iota_{\partial_x}\widetilde{A}_\beta]\right)\\
&= \mathrm{Tr}_\mathcal{H} hol_\gamma\left(\frac{d}{dy} - [\iota_{\partial_y}(u_{\alpha\beta} + \widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}\widetilde{A}_\alpha + \widetilde{Lg_{\alpha\beta}}^*\widetilde{\mu})] - \widetilde{Ad}_{Lg_{\alpha\beta}^{-1}}(\tau\mathfrak{d} - \tau\iota_{\partial_x}\widetilde{A}_\alpha)\right)\\
&= \exp\left(\int_{S^1} iku_{\alpha\beta}\right)\cdot \mathrm{Tr}_\mathcal{H} hol_\gamma\left(\widetilde{Lg_{\alpha\beta}}^{-1}\left(\frac{d}{dy} - [\iota_{\partial_y}\widetilde{A}_\alpha] - [\tau\mathfrak{d} - \tau\iota_{\partial_x}\widetilde{A}_\alpha]\right)\widetilde{Lg_{\alpha\beta}}\right)\\
&= \exp\left(\int_{S^1} iku_{\alpha\beta}\right)\cdot \mathrm{Tr}_\mathcal{H} hol_\gamma\left(\frac{d}{dy} - [\iota_{\partial_y}\widetilde{A}_\alpha] - [\tau\mathfrak{d} - \tau\iota_{\partial_x}\widetilde{A}_\alpha]\right) = h_{\alpha\beta}^k(\gamma)f_\alpha(\gamma).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

椭圆 holonomy $Ehol_A(\mathcal{H}) \in \Omega^0(L^2X,\ \mathcal{L}(\mathcal{G}_P)^k)^{T^2}$是利用局部数据$\{f_\alpha, L^2U_\alpha\}$定义的。

5.2.3. 规范多稳定双环上的收敛性。此前，在第 4.4 节中，我们利用弗洛凯理论证明了椭圆陈特征在 LX 上的收敛性，该理论表明，圆上的 G-联络可以通过规范变换化为常值联络。然而，环面上的 G-联络 $\mathcal{A}$表现出截然不同的行为：并非所有联络都能化为平坦联络，更不用说常值联络了。

考虑复结构时，这与稳定性问题有关。选定环面 $\tau \in \mathbb{H}$ 的复结构后， $\mathcal{A}$ 便具有 K¨ahler 结构，并且我们有作为 $\mathbb{C}$- 向量空间的 $\mathcal{A} \cong \Omega^{0,1}(\Sigma_\tau,\ \mathfrak{g}_\mathbb{C})$。规范群 $\Sigma G_\mathbb{C}$ 的相应复化作用于 $\mathcal{A}$。

给定一个联络 A，极化 $\mathcal{A} \cong \Omega^{0,1}(\Sigma_\tau,\ \mathfrak{g}_\mathbb{C})$将其与柯西-黎曼算子 $\partial_A = \partial + A$对应；该算子对$\Sigma_\tau$上的全纯 $G_\mathbb{C}$-丛进行分类。动量映射 μ 将联络映射到其曲率。原像 $\mu^{-1}(0)$是平坦联络空间。

定义 5.2. $\mathcal{A}$ 中 $\mu^{-1}(0)$的 $\Sigma G_\mathbb{C}$-轨道内的联络称为多稳定。记作 $\mathcal{A}^{ps} = \Sigma G_\mathbb{C} \cdot \mu^{-1}(0)$。

由黎曼-希尔伯特对应，我们得到以下结论

命题 5.3. 令 $\mathfrak{t}_\mathbb{C} \subset \Omega^{0,1}(\Sigma_\tau, \mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 表示取值于 $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ 的常值联络空间。每个平坦联络都与 $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ 中的一个元素规范等价。

因此，任意多稳定联络都与 $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ 中的一个常值 Cartan联络 $\Sigma G_\mathbb{C}$-等价。

对于 $Y \in \Sigma\mathfrak{g}_\mathbb{C}$，考虑算子 $\frac{d}{dy} - (\tau\mathfrak{d} + Y)$。一方面，它是沿 y 方向的一个取值于 $L\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的一阶微分算子。另一方面，记 $\mathfrak{d}$ 为 $\frac{d}{dx}$，以强调其沿 x 方向的微分作用，它可以看作是一个作用于 Σ_τ、取值于 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的 $\bar{\partial}$-算子。集合 $\{\frac{d}{dy} - (\tau\frac{d}{dx} + Y)$ $Y \in \Sigma\mathfrak{g}_\mathbb{C}\}$ 构成扩展双环代数 $\widehat{\Sigma\mathfrak{g}_\mathbb{C}} = \Sigma\mathfrak{g}_\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\frac{d}{dx} \oplus \mathbb{C}\frac{d}{dy}$ 的 $(-\tau, 1)$-层集。这个 $(-\tau, 1)$-层集与 G-联络空间 $\mathcal{A}$ 之间的识别是$\Sigma G_\mathbb{C}$-等变的。因此，沿y方向、取值于 $L\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的一阶微分算子 $\frac{d}{dy} - (\tau\mathfrak{d} + Y)$，可以识别为柯西-黎曼算子$\bar{\partial}_Y = \bar{\partial} + \frac{1}{2\tau_2} Y d\bar{z}$。于是，忽略中心部分时， $\mathcal{D}^0_\alpha = \frac{d}{dy} - (\tau\mathfrak{d} + \iota_{\partial_z^\#}\widetilde{A}_\alpha)$可以看作是一个作用于 Σ_τ、取值于 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$的 $\bar{\partial}$-算子，由 L^2X参数化。

令 $\Psi_A : LP \to \mathcal{A}$为联络 A的求值。这是一个 ΣG-等变映射。

定义 5.4. 若回路 $\gamma \in L^2X$ 满足 $[\Psi_A(\gamma_P)]$ 是 $\mathcal{A}$中的一个多稳定 $\Sigma G_\mathbb{C}$-轨道，其中 γ_P 是 L^2P中 γ 的一个提升，则称其为规范化多项式稳定。

此定义与提升 γ_P的选择无关，因为它们之间仅相差 ΣG的作用。

命题 5.5. 椭圆 *holonomy* $Ehol_A(\mathcal{H})$ 在规范化多项式稳定双环处收敛。

证明。 对于 $\gamma \in L^2X$ 是规范化多项式稳定的，存在 $g \in \Sigma G_{\mathbb{C}}$ 使得

$$g\mathcal{D}^0_\alpha(\gamma)g^{-1} = \frac{d}{dy} - (\tau\mathfrak{d} + K_\alpha) + \text{central part}, \tag{5.18}$$

其中 $K_\alpha \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 为常数。于是 holonomy 为指数

$$hol(\frac{d}{dy} - (\tau\mathfrak{d} + K_\alpha)) = \exp(\tau\mathfrak{d} + K_\alpha). \tag{5.19}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[hol(\mathcal{D}^0_\alpha(\gamma))] &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[g^{-1}hol(\frac{d}{dy} - (\tau\mathfrak{d} + K_\alpha))g] \cdot \exp(k\square) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\tau\mathfrak{d} + K_\alpha)] \cdot \exp(k\square) < \infty. \end{aligned} \tag{5.20}$$

$\square$ 是伴随作用中中心部分的额外贡献。由于 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\tau\mathfrak{d} + K_\alpha)]$ 由 Kac-Weyl 特征给出，因此收敛。

5.2.4. q-传输方程与收敛。如果在双环上取值的联络在极化后关于 z 全纯或实解析，我们就能证明其收敛。令 $LG^h = Hol(\mathbb{C}^*, G_{\mathbb{C}})$ 为全纯环群，并令 $L\mathfrak{g}^h = Hol(\mathbb{C}^*, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 为全纯环李代数。对于 $q \in \mathbb{C}^*$，映射 $R_q: LG^h \to LG^h$ 表示如下定义的复旋转

$$R_q \cdot g(z) := g(qz), \quad g \in LG^h. \tag{5.21}$$

相应的扩展全纯环群记为 $LG^h = LG^h \rtimes \mathbb{C}^*$。我们将 q 层集合定义为 $LG^h_q = \{(g, q)|g \in LG^h\}$。通过伴随作用，我们可以将取值于全纯环群的光滑环定义为 $L(LG^h) = C^\infty(S^1, LG^h)$，其李代数定义为 $L(L\mathfrak{g}^h)$。

对于 $Y \in L(L\mathfrak{g}^h)$，我们求解光滑 ψ 的传输方程：$\mathbb{R} \to LG^h$ 使得$t \to \psi(t) = (g(t)\ \lambda(t))$：

$$\frac{d\psi}{dy}\psi^{-1}(y) = \tau\mathfrak{d} + Y(y),\ \psi(0) = e. \tag{5.22}$$

holonomy $hol(\tau\mathfrak{d} + Y) = \psi(1)$。

命题5.6。 解由 q 变形的迭代积分给出

$$hol(\tau\mathfrak{d} + Y) = (\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \prod_{i=1}^{n} (R_{q^{t_i}}(Y_{t_i})dt_i), q). \tag{5.23}$$

证明。 请记住，我们使用半直积的乘法

$$(\dot{\lambda}, \dot{g})(\lambda^{-1}, R_{\lambda^{-1}}g^{-1}) = (2\pi i\tau, A). \tag{5.24}$$

由 $\dot{\lambda}\lambda^{-1} = 2\pi i\tau$，我们有 $\lambda(y) = q^y$。

$$R_{q^{-y}}(\dot{g})R_{q^{-y}}(g^{-1}) = A_y, \text{ then } \frac{dg}{dy}g^{-1} = R_{q^y}(A_y). \tag{5.25}$$

该解由迭代积分给出

$$hol(\tau\mathfrak{d}+Y)=\psi(1)=(\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Delta_n}\prod_{i=1}^{n}(R_{q^{t_i}}(Y_{t_i})dt_i),q). \tag{5.26}$$

令 $\widetilde{LG^h}$ 为 LG^h 的中心扩张，$\widetilde{LG^h}'$ 为双扩张的全纯回路群，它是 LG^h的 $\mathbb{C}^*$ 半直积。用 LG^h_q 表示LG^h的 q层$\backsim$集合。根据 [EFK94、定理 2.2、引理 2.3] 以及 [GW84], 在正$\backsim$能量表示下的结果，当 $q\in\mathbb{C}^*_{<1}$时，LG^h_q 的所有元素都是迹类算子。于是，对于任意 $\mathcal{H}\in\mathscr{PER}^k(LG)$ 和 $Y\in L(L\mathfrak{g}^h)$,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[hol(\tau\mathfrak{d}+Y)]<\infty. \tag{5.27}$$

注 5.7。实解析环同样收敛。令 $L\mathfrak{g}^{an}_{\mathbb{C}}$表示实解析环路代数，令 LG^{an} 表示相应的实解析环群。实解析元素的傅里叶系数呈指数衰减，因此存在一个共同的 $\delta>1$，使得任意 $Y(t)\in L\mathfrak{g}^{an}_{\mathbb{C}}$都能解析延拓到环域$D_\delta=\{z\in\mathbb{C}\mid\frac{1}{\delta}<|z|<\delta\}$，对所有 $t\in S^1$均成立。当 $|q|<\frac{1}{\delta}$ 时，上述估计给出迹$_{\mathcal{H}}[hol(\tau\mathfrak{d}+Y)]<\infty$。

然而，处理实解析主丛相当微妙。此外，我们无法指望所有实解析环都具有一个共同的 δ。因此，本文不再进一步探讨这一方向，而是转而研究光滑情形下的规范多稳定双环。

5.3. 关于 L^2X上的 Pfaffian。映射空间 ΣX 上的行列式线丛和 Pfaffian 线丛由 [Fre87, Fre86, Bun09] 构造。设 $P\to X$ 是一个配备联络 A的 G主丛，且 V是 G的酉表示。相应的伴随向量丛为 $E:=P\times_G V$，并配备诱导联络 ∇^E。设 Σ 是一个闭定向曲面，并用 ΣX 表示映射空间。

我们在 Σ 上赋予一个复结构，并通过选取典范线丛 K的平方根 $\sqrt{K}$ 来固定一个自旋结构。在 Σ上取定一个 K¨ahler 度量。求值映射 $ev:\Sigma X\times\Sigma\to X$ 定义为 $ev(\gamma,x):=\gamma(x)$。拉回$ev^*(E,\nabla^E)$ 是 $\Sigma X\times\Sigma$上的一个带联络的 Hermite 向量丛。

给定这些几何数据，便得到一个以 ΣX 为参数的 Dirac 算子族。根据族指标定理，可得到一个配备 Bismut-Freed 联络和 Quillen 度量的行列式线丛，如下所示：

$$\begin{array}{ccc} & & ev^*(E,\nabla^E) \\ & & \downarrow \\ \Sigma & \longrightarrow & \Sigma\times\Sigma X \\ & & \downarrow \\ & & \Sigma X \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{c} (\mathrm{DET}(V),\nabla^{\mathrm{DET}(V)},g^{\mathrm{DET}(V)}) \\ \downarrow \\ \Sigma X \end{array} \tag{5.28}$$

当 V 是实表示时，行列式线丛存在一个称为 Pfaffian 线丛的典范平方根，并配有诱导的联络和度量，使得

$$(\mathrm{PF}(V), \nabla^{\mathrm{PF}(V)}, g^{\mathrm{PF}(V)})^2 \cong (\mathrm{DET}(V), \nabla^{\mathrm{DET}(V)}, g^{\mathrm{DET}(V)}). \tag{5.29}$$

当亏格为一时，映射空间 ΣX 是双环空间 L^2X。根据 Atiyah–Singer 指标定理，Dirac 算子的指标始终为零。存在典范截面 $\mathrm{det}_V \in \Gamma(L^2X,\ \mathrm{DET}(V))$。当 V是实表示时，存在典范截面 $\mathrm{pf}_V \in \Gamma(L^2X,\ \mathrm{PF}(V))$，使得

$$\mathrm{pf}_V^2 = \mathrm{det}_V. \tag{5.30}$$

为简单起见，我们在椭圆曲线Σ_τ上固定标准的平坦单位体积 K¨ahler 度量。 Σ_τ 上的四种自旋结构对应于四个二阶挠点。

当 G =Spin(2n) 且 V 是由下式给出的标准实表示时

$$\rho : \mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{SO}(2n), \tag{5.31}$$

Pfaffian 线丛的曲率为

$$R^{\mathrm{PF}(V)} = \int_\Sigma \tfrac{1}{2} p_1(E, \nabla^E) \in \Omega^2(L^2X). \tag{5.32}$$

特别地，若 (X^{2n}, g) 是自旋黎曼流形，且 $P = P_{\mathrm{Spin}(X)}$ 是自旋标架丛，则伴随丛 E 是配备了 Levi-Civita 联络 ∇^g的 TX 。在 Σ_τ 上固定奇自旋结构和标准 K¨ahler 度量后，我们将 Pfaffian 线丛记为 (PF ∇^{PF}, g^{PF}) $\to L^2X$, ，其曲率是 $\frac{1}{2}p_1(X,\ g)$ 的转移。典范截面记作 pf$[\tau] \in \Gamma(L^2X,\ \mathrm{PF})$。其他三种自旋结构给出类似的 Pfaffian 截面。

5.4. 线丛的等价。在本小节中，我们证明提升 gerbe 的转移以及行列式（分别为 Pfaffian）线丛都同构于陈-西蒙斯线丛的适当幂。

从概念上说，提升 gerbe 的转移与陈-西蒙斯线丛之间的等价性源于陈-西蒙斯线丛是 Chern-Simons 2-gerbe 的二重转移。行列式（以及 Pfaffian）线丛与映射空间上的陈-西蒙斯线丛之间的等距同构已在 [Bun09] 中建立。为了将映射空间的几何与全纯 $G_{\mathbb{C}}$-丛的模空间联系起来，我们将利用 $[\mathcal{A}/\Sigma G]$上的等距同构，随后将其拉回到 ΣX。

5.4.1. 上的万有陈-西蒙斯线丛 $[\mathcal{A}/\Sigma G]$。我们从任意亏格开始，之后再专门讨论亏格一。设 Σ 为一个闭定向曲面，ΣX 为映射空间。定义 $\mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma,\ \mathfrak{g})$ 为 G-联络的空间，并设 ΣG 为通过规范变换作用于 $\mathcal{A}$ 的规范群。

在 Atiyah-Bott [AB83], $\mathcal{A}$ 上配备了最小整辛形式 ω，使得 ΣG-作用是哈密顿的。动量映射 μ 将联络映射为曲率。万有陈-西蒙斯线丛（$\mathcal{L}$, h, ∇）是一个 ΣG-等变

预量子线丛，定义在哈密顿 ΣG-空间（$\mathcal{A}$，ω，μ）上。有时我们会省略陈-西蒙斯线丛的度量 h，因为它是平凡的。

引理 5.8. A 是主 G-丛 $P \to X$ 上的联络，$g \in \mathcal{G}(P)$ 是规范变换。$A^g = g^{-1} \cdot A = Ad_{g^{-1}}(A) + g^{-1}dg$ 是作用于右侧的规范变换。我们有

$$\mathrm{CS}_{A^g} - \mathrm{CS}_A = \frac{1}{12\pi}\mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3 - d(\frac{1}{4\pi}\mathrm{Tr}(A \wedge dg \cdot g^{-1})). \tag{5.33}$$

这里的迹由极小形式给出。

命题 5.9. 设 B 是一个三维流形，其边界为 $\partial B = \Sigma$，其中对 $(\tilde{A}, \tilde{g}) \in \Omega^1(B, g) \times C^\infty(B, G)$ 是 $(A, g) \in \mathcal{A} \times \Sigma G$ 的扩张，其满足$\tilde{}(A, \tilde{g})|_{\partial B=\Sigma} = (A, g)$。规范化 *WZW* 余循环定义为

$$W(g, A) = \int_B (\mathrm{CS}_{\widetilde{A}} - \mathrm{CS}_{\widetilde{g}\cdot\widetilde{A}}), \tag{5.34}$$

$\widetilde{}$它与扩张的选择 $(A, \widetilde{g})$无关。

由引理 5.8 和 Stokes公式可得,

$$W(g, A) = \Gamma(g) - \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \langle A \wedge g^{-1}dg\rangle, \tag{5.35}$$

其中 Γ： $\Sigma G \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 是 gerbal holonomy，$\Gamma(g) = \int_B \widetilde{g}^*\Theta$，$\widetilde{g}$ 是g 到某个 B 的扩张，其边界为 Σ。

定义 5.10. 余循环 $W(g, A)$ 如下定义了一个覆盖 $\mathcal{A}$ 的 ΣG-等变线丛。$\mathcal{L} := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$，其中 ΣG-作用为

$$g(A, c) = (gA, e^{iW(g,A)}c), \text{ for } g \in \Sigma G, A \in \mathcal{A}. \tag{5.36}$$

我们在 $\mathcal{L}$ 上赋予平凡度量 h。酉联络 $\nabla = d - \sqrt{-1}\theta$，其中$\theta \in \Omega^1(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ 定义如下，对于 $A \in \mathcal{A}$ 和 $a \in T_A\mathcal{A}$,

$$\theta_A(a) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \langle A \wedge a\rangle. \tag{5.37}$$

我们称 $(\mathcal{L}, h, \nabla)$ 为覆盖 $\mathcal{A}$的万有陈-西蒙斯线丛。

命题 5.11 ([Fre95])。万有陈-西蒙斯线丛 $(\mathcal{L}, h, \nabla)$ 是覆盖哈密顿 ΣG-空间 $(\mathcal{A}, \omega, \mu)$的$\Sigma G$-等变预量子线丛。

5.4.2. 拉回到映射空间 ΣX。在同伦层面上，$[\mathcal{A}/\Sigma G] \sim \Sigma BG$。万有陈-西蒙斯线丛（$\mathcal{L}$、$\nabla$、$h$）$\to \mathcal{A}$ 是对 BG上的万有陈-西蒙斯 2-gerbe 作二重转移的几何实现。关于 BG 上的万有构造，参见 [Gom01b,CJM+04]。设 f_P： $X \to BG$ 为分类映射，且 Σf_P: $\Sigma X \to \Sigma BG$。由于二重转移具有函子性，拉回 $\Sigma f_P^*\mathcal{L} \to \Sigma X$即为对 X上的 Chern-Simons 2-gerbe 作二重转移所得。

现在我们给出 ΣX上的陈-西蒙斯线丛的几何描述。考虑主 ΣG-丛 $\Sigma P \to \Sigma X$。P 上的联络 A 诱导出一个 ΣG-等变映射

$$\Psi_A : \Sigma P \to \mathcal{A}, \quad \Psi_A(\gamma) = \gamma^* A. \tag{5.38}$$

拉回 $\Psi_A^*(\mathcal{L}, \nabla, h) \to \Sigma P$是带有不变联络与平凡度量的 ΣG-等变线丛。它下降到自由商 $\Sigma P/\Sigma G = \Sigma X$。我们称之为 ΣX上的陈-西蒙斯线丛 $\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}$，连同拉回联络$\nabla^A_{\mathrm{CS}}$与平凡度量 h。陈-西蒙斯线丛 $(\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}, \nabla^A_{\mathrm{CS}}) \to \Sigma X$ 由局部数据 $\{\Sigma U_\alpha, h_{\alpha\beta}, \Theta_\alpha\}$ 给出：

- 过渡函数 $h_{\alpha\beta}$： $\Sigma U_\alpha \cap \Sigma U_\beta \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，对于 x： $\Sigma \to U_\alpha \cap U_\beta$，
$$h_{\alpha\beta}(x) := \exp\left(iW(x \circ g_{\alpha\beta}, x^* A_\beta)\right).$$
- 联络形式
$$\Theta_\alpha = i \int_\Sigma \mathrm{CS}(A_\alpha).$$

5.4.3. 提升丛的转置是陈-西蒙斯线丛，位于 L^2X 上。在亏格一的情形下，映射空间 ΣX 是双环空间 L^2X。

命题 5.12. 提升 *gerbe* $\mathcal{L}(\mathcal{G}_P, \nabla^B) \to L^2X$ 的转移线丛与陈-西蒙斯线丛 $(\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}, \nabla^A_{\mathrm{CS}}) \to L^2X$一致。

证明. 要验证 $\mathcal{L}(\mathcal{G}_P, \nabla^B) = (\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}, \nabla^A_{\mathrm{CS}})$，只需证明它们具有相同的过渡函数。令 $x^\vee$：$S^1 \to LX$ 为 x：$S^1 \times S^1 \to X$的伴随映射。

$$h'_{\alpha\beta}(x) = \exp\Big(i \int_{S^1} (x^\vee)^* u_{\alpha\beta}\Big), \quad h_{\alpha\beta}(x) = \exp\big(i\, W(x \circ g_{\alpha\beta}, x^* A_\beta)\big).$$

因此，只需证明

$$\int_{S^1} (x^\vee)^* u_{\alpha\beta} \equiv W(x \circ g_{\alpha\beta}, x^* A_\beta) \pmod{2\pi\mathbb{Z}}. \tag{5.39}$$

取 x的一个扩张 $\widetilde{x}$：$D \times S^1 \to X$，并令 $\widetilde{x}^\vee$：$D \to LX$ 表示其伴随映射。由斯托克斯公式，

$$\int_{S^1} (x^\vee)^* u_{\alpha\beta} = \int_D (\widetilde{x}^\vee)^* (du_{\alpha\beta}). \tag{5.40}$$

利用式 (4.12)，我们得到 $du_{\alpha\beta} = K_\alpha - K_\beta$，并回忆 $K_\alpha = \int_{S^1} \mathrm{CS}(A_\alpha)$。因此右侧

$$\int_D (\widetilde{x}^\vee)^* (du_{\alpha\beta}) = \int_{D \times S^1} \widetilde{x}^* \big(\mathrm{CS}(A_\alpha) - \mathrm{CS}(A_\beta)\big). \tag{5.41}$$

根据规范化 WZW 余循环的定义，它恰好是 $W(x \circ g_{\alpha\beta},\ x^* A_\beta)$。因此，(5.39) 成立，从而 $h'_{\alpha\beta}(x) = h_{\alpha\beta}(x)$。

5.4.4. 行列式（*Pfaffian*）线丛就是 *Chern–Simons* 线丛。我们应用规范等变族指标定理，将行列式线丛与 Chern–Simons 线丛的适当幂相对应。行列式线丛的构造，以及 Quillen 度量和 Bismut–Freed 联络，都是标准的（参见 [BF86]）。

在我们的设定中（由联络空间参数化的柯西-黎曼算子族），行列式线丛可追溯至 Quillen 和 Atiyah–Singer 的奠基性工作 [Qui85, AS84]。对于实表示，可得到 Pfaffian 线丛； [Fre87,Fre86]讨论了它们的基本性质以及它们与反常线丛的关系。

我们先回顾表示的层 这一概念。对于有限维表示 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，Dynkin 指数 d_V 是由下式刻画的标量：

$$\operatorname{Tr}\big(\rho(x)\rho(y)\big) = d_V \langle x, y\rangle, \tag{5.42}$$

对所有 x， $y \in \mathfrak{g}$均成立。特别地，伴随表示的 Dynkin 指数为 $d_{\mathrm{ad}} = 2h^\vee$，其中 $h^\vee$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的对偶 Coxeter 数。众所周知，Σ上的自旋结构由典范线丛的一个平方根 $\sqrt{K}$ 的选取决定。

我们现在概述下文中的构造和结果。关于 ΣG-等变性的讨论以及与 Chern–Simons 线丛的等距同构，详见 [DLZ] 。

为了定义 $\mathcal{A}$ 上的行列式线丛，我们固定 Σ 的 K¨ahler 度量、自旋结构 $\sqrt{K}$ 以及 G 的酉表示 V。借助这些几何信息， $\mathcal{A}$ 参数化了 ΣG-等变的 Dirac 算子族。给定有限维酉表示 $V \in \mathrm{Rep}(G)$，可以得到该酉表示的伴随向量丛。由于它在光滑意义下是平凡的，我们仍将其记为 V。丛联络存在如下分解 $\nabla_A = \nabla^{1,0}_A + \nabla^{0,1}_A$， 其中 $\nabla^{0,1}_A$ 充当定义全纯结构的 $\bar\partial$-算子。相应的全纯向量丛记为 V_A。与矢势耦合的 Dirac 算子为

$$\not\partial^V_A : \Omega^0(\Sigma, V \otimes \sqrt{K}) \to \Omega^{0,1}(\Sigma, V \otimes \sqrt{K}). \tag{5.43}$$

其伴随算子为 $\not\partial^{V,*}_A$: $\Omega^{0,1}(\Sigma, V\overline{\otimes}\sqrt{K}) \to \Omega^0(\Sigma, V\overline{\otimes}\sqrt{K})$。 Dirac 算子的核与余核为

$$\operatorname{Ker}(\not\partial^V_A) = H^0(\Sigma, V_A \otimes \sqrt{K}) \quad \operatorname{Ker}(\not\partial^{V,*}_A) = H^1(\Sigma, V_A \otimes \sqrt{K}). \tag{5.44}$$

指标 $\operatorname{Ind}(\not\partial^V_A) = \dim H^0(\Sigma, V_A \otimes \sqrt{K}) - \dim H^1(\Sigma, V_A \otimes \sqrt{K})$ 根据黎曼-罗赫定理为

$$\operatorname{Ind}(\not\partial^V_A) = \chi(\Sigma, V_A \otimes \sqrt{K}) = -r(V)(1-g). \tag{5.45}$$

$r(V)$ 是表示 V 的维数， g 是 Σ的亏格。特别地，当亏格为 $g = 1$时，指标总是零。

定理 5.13 ([DLZ，定理 2。5])。 给定自旋结构 $\sqrt{K}$、 Σ 的 *K¨ahler* 度量以及有限维酉表示 V，存在行列式

线丛 $\mathrm{DET}(V)$ 在 $\mathcal{A}$ 上，配备 ***Quillen*** 度量 $g^{\mathrm{DET}(V)}$ 和 ***Bismut-Freed*** 联络 $\nabla^{\mathrm{DET}(V)}$。该行列式线丛具有以下性质：

(1) $(\mathrm{DET}(V)\ g^{\mathrm{DET}(V)}, \nabla^{\mathrm{DET}(V)})$ 是一个层为 d_V 的 ΣG-等变预量子线丛，定义在哈密顿 ΣG 空间 $(\mathcal{A}, \omega, \mu)$上。(2) $(\mathrm{DET}(V)\ g^{\mathrm{DET}(V)}, \nabla^{\mathrm{DET}(V)})$ 与 $(\mathcal{L}, h, \nabla)^{d_V}$ 同构。(3) 当亏格为一时，可以定义典范截面 $\det_V \in H^0_{\Sigma G}(\mathcal{A}, \mathrm{DET}(V))$，它具有如下性质：

$$\|\det_V(A)\|^2_{g^{\mathrm{DET}(V)}} = \det{}_\zeta(\partial\!\!\!/^{V,*}_A \partial\!\!\!/^V_A),$$

其中，$\partial\!\!\!/^V_A$ 是在 V 上由矢势 A 扭积得到的 ***Dirac*** 算子，而 $\partial\!\!\!/^{V,\ A}{}^*$ 是它的形式伴随算子。

(4) 当 V 是实表示时，存在行列式线丛的典范平方根，称为 ***Pfaffian*** 线丛 $(\mathrm{PF}(V)\ g^{\mathrm{PF}(V)}\nabla^{\mathrm{PF}(V)})$，其具有与上述类似的性质，层为 $d_V/2$。

上述定理是一个普遍版本，确立了行列式（Pfaffian）线丛与 Chern–Simons 线丛同构。映射空间上的等距同构直接得出，因为两个线丛都是从 $[\mathcal{A}/\Sigma G]$ 拉回的。

5.5. **模空间上的椭圆Atiyah-Witten公式**。在本小节中，我们推导粗模空间 $M_G[\tau]$ 上行列式推前的一般公式。对于 $2n$ 的 Spin($2n$) 一级情形，我们在 $M_G[\tau]$ 上建立椭圆Atiyah-Witten公式。

我们证明，在 $M_G[\tau]$ 上 Pfaffian 线丛与陈-西蒙斯线丛之间的等距同构下，四个 Pfaffian 截面（每个自旋结构对应一个）的推前与四个虚一级表示 $\{S_{ij}\}$ 的修正 Kac-Weyl 特征标相一致。

5.5.1. 粗模空间与亏格一共形块。我们首先回顾 Atiyah-Bott 堆栈的 K¨ahler 几何量子化。更多细节请参见 [DLZ]。

椭圆曲线 Σ_τ 上全纯主 $G_{\mathbb{C}}$-丛的模叠 $Bun_G(\Sigma_\tau)$ 可表示为 Atiyah-Bott 堆栈 $\mathcal{A}/\Sigma G_{\mathbb{C}}$，其中 $\mathcal{A}$ 是联络空间，视为一个无限维 K¨ahler 流形，而 $\Sigma G_{\mathbb{C}}$ 是复化规范群。令 $M_G[\tau]$ 表示 $Bun_G(\Sigma_\tau)$ 的粗模空间，即 *i.e.*， Σ_τ 上半稳定全纯 $G_{\mathbb{C}}$-丛的 S-等价类的模空间。从复解析角度看， $M_G[\tau]$ 可通过无限维几何不变理论（GIT）商来描述。曲面上的 Yang-Mills 流理论建立了 Kempf-Ness 定理，该定理将 GIT 商与 K¨ahler 商 $\mathcal{A}//\Sigma G$ 对应起来。

幸运的是，亏格一粗模空间 $M_G[\tau]$ 具有全局商模型，因此可以更简单地显式描述（例如参见 [FMW97,EF94]）。从几何上说，全局模型可以由常值 Cartan 联络构造而成（参见 [DLZ]）。作用在 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 上的受限规范群是仿射Weyl群 $W_{\mathrm{aff}} = (\Lambda \oplus \tau\Lambda) \rtimes W$，其中 Λ 是 G 的余根格，而 W 是 Weyl 群。于是，全局模型可表示为

常值 Cartan 联络对仿射Weyl群取商

$$M_G[\tau] = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}/W_{\text{aff}} = (\Sigma_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda)/W. \tag{5.46}$$

因此，亏格一共形块由 θ函数的 Weyl群不变组合给出，如 [Loo76] 中所示。

定义 5.14. $\tau \in \mathbb{H}$ 处的亏格一共形块为

$$V_k(G)|_\tau = H^0(M_G[\tau], \widetilde{\mathcal{L}}^k). \tag{5.47}$$

这里， $\mathcal{L}$ 是陈-西蒙斯线丛 $\mathcal{L}$ 向粗模空间 $M_G[\tau]$的下降。

由于 $M_G[\tau] = (\Sigma_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda)/W$，亏格一共形块可以等同于

$$V_k(G)|_\tau = H^0((\Sigma_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda)/W, \widetilde{\mathcal{L}}^k) = H^0(\Sigma_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda, \mathcal{L}_0^k)^W, \tag{5.48}$$

其中，阿贝尔簇 $\Sigma_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ 上的基本线丛 $\mathcal{L}_0$ 同构于陈-西蒙斯线丛 $\mathcal{L}$ 在常值 Cartan 联络 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{A}$上的限制。

5.5.2. 行列式的推前。 我们给出一个关于酉表示所关联行列式的推前的一般公式。全文中，我们始终假设椭圆曲线 Σ_τ 配备了单位体积的标准平坦 K¨ahler 度量。

将 Σ_τ 的雅可比簇记为 Σ_τ。行列式线丛V的推前由Theta除子 $\Theta(V)$给出，其描述如下:

定义5.15 ([DN89])。 给定一个酉表示 $V \in \text{Rep}(G)$，对于任意$\delta \in \Sigma_\tau$，定义

$$D_\delta = \{E \in M_G[\tau] \mid H^0(\Sigma_\tau, \delta \otimes E(V)) \neq 0\}, \tag{5.49}$$

其中， $E(V)$是关于表示 V的 E 的伴随丛。 D_δ是一个卡蒂埃除子，并且不依赖于 δ的选择。

$$\Theta(V) = \mathcal{O}_\Sigma(D_\delta) \tag{5.50}$$

称为表示 V的Theta除子。

为证明 $\Theta(V)$ 是行列式线丛 $\text{DET}(V)$ 在粗模空间 $M_G[\tau]$上的推前，我们考虑万有全纯向量丛 $\mathcal{E} \to \Sigma_\tau \times M_G[\tau]$，它限制在 $E \in M_G[\tau]$ 上时为相应的全纯向量丛$E(V)$。根据全纯族指标定理，我们得到推前行列式线丛 $\text{DET}(V) \to M_G[\tau]$，其典范截面 $\det_V$的零点集为 D_δ。由于 $M_G[\tau]$ 是奇异的，我们需要先在阿贝尔簇 $\Sigma_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ 上处理魏尔群等变线丛，再将其下降到粗模空间 $M_G[\tau]$。

$\widehat{\ }$关于雅可比簇 Σ_τ。首先，我们考虑雅可比簇 Σ_τ 上的（Theta）行列式线丛$\widehat{\ }$（参见 [Fre87, AGMV86]）。

$\widehat{\ }$存在一个 Poincar´e 线丛 $\mathcal{P}$，定义在 $\Sigma_\tau \times \Sigma_\tau$ 上，其在 $\Sigma_\tau \times \{L\}\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$上的限制就是线丛 $L \in \Sigma_\tau$ 本身。给定 $\delta \in \Sigma_\tau$，我们可以用 δ 扭积 Poincar´e 线丛，得到 $\mathcal{P}_\delta :=\mathcal{P}\otimes\delta$，其在 $\Sigma_\tau \times \{L\}$ 上的限制为 $L\otimes\delta$。根据全纯族指标定理,

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{P}_\delta & & \\ & & \downarrow & & \mathcal{L}_\delta \\ \Sigma_\tau & \longrightarrow & \Sigma_\tau \times \widehat{\Sigma_\tau} & \longrightarrow & \downarrow \\ & & \downarrow & & \widehat{\Sigma_\tau} \\ & & \widehat{\Sigma_\tau} & & \end{array} \tag{5.51}$$

$\widehat{\ }$ $^-$ $^-$每个 $L \in \Sigma_\tau$ 都给出一个 ∂-算子 $\partial_{\mathcal{L}\otimes\delta}$。 $\mathcal{L}_\delta$ 是相应的行列式线丛。典范截面 $\det_\delta \in H^0(\widehat{\Sigma_\tau},\ \mathcal{L}_\delta)$ 的零点轨迹是 Theta 除子$D_\delta = \{x \in \widehat{\Sigma_\tau} | H^0(\Sigma_\tau,\ \delta \otimes x) \neq 0\} = -\delta$。将 Σ_τ 与$\widehat{\ }$识别为其雅可比簇 Σ_τ 的阿贝尔-雅可比映射可明确描述如下。给定 $a + \tau b$ 作为 Σ_τ 的坐标$\widehat{\ }$，其中 $a,\ b \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。点 $a + \tau b$ 映射到 $\delta = A(a,\ b) \in \Sigma_\tau$，对应于特征 $m\tau + n \to e^{2\pi\sqrt{-1}(ma-nb)}$。

$\widehat{\ }$阿贝尔簇上 $(\Sigma_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge)$。我们从 $\Delta(\lambda)$ 开始，它是由 $\mathfrak{g}$ 的最高权 λ 给出的 G 的不可约表示。

令 $\mathcal{E}_\lambda \to \Sigma_\tau \times M_G[\tau]$ 为与$\Delta(\lambda)$ 相关联的万有全纯向量丛。令 $\Theta(\lambda)$ 为 $\Delta(\lambda)$ 的 Theta除子，如定义5.15 所述。在对 Weyl群 W 取商之前，我们先描述 $\Sigma_\tau \otimes \bigwedge$ 上的$\widehat{\ }$几何。

权 $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigwedge,\ \mathbb{Z})$ 诱导出映射

$$\mu : (\widehat{\Sigma_\tau} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge) \to \widehat{\Sigma_\tau}. \tag{5.52}$$

$\widehat{\ }$固定 $\delta \in \Sigma_\tau$，我们使用权 μ 拉回扭积的庞加莱线丛 $\mathcal{P}_\delta$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mu^*\mathcal{P}_\delta & \longrightarrow & \mathcal{P}_\delta & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Sigma_\tau & \longrightarrow & \Sigma_\tau \times (\widehat{\Sigma_\tau} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge) & \xrightarrow{Id\times\mu} & \Sigma_\tau \times \widehat{\Sigma_\tau} & \to & \begin{array}{ccc} \mu^*\mathcal{L}_\delta & \longrightarrow & \mathcal{L}_\delta \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\widehat{\Sigma_\tau} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge) & \xrightarrow{\mu} & \widehat{\Sigma_\tau} \end{array} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & (\widehat{\Sigma_\tau} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge) & \xrightarrow{\mu} & \widehat{\Sigma_\tau} & & \end{array} \tag{5.53}$$

根据最高权模的权空间分解

$$\Delta(\lambda) = \bigoplus_{\mu \preceq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu \tag{5.54}$$

其中， $\Delta(\lambda)^{\mu}$ 是权为 μ 、维数为 m_{μ} 的权空间。在取商之前，我们可以将万有全纯向量丛 $\mathcal{E}_{\lambda} \to \Sigma_{\tau} \times M_G[\tau]$ 描述为拉回的 Poincar´e 线丛的直和

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\mu \preceq \lambda} m_{\mu} \mu^{*} \mathcal{P} \to \Sigma_{\tau} \times (\widehat{\Sigma_{\tau}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge). \tag{5.55}$$

令 $V_{\delta}(\lambda) = V(\lambda) \otimes \delta$ 为 $V(\lambda)$ 关于 δ 的扭积，这等价于 $V_{\delta}(\lambda) = \bigoplus_{\mu \preceq \lambda} m_{\mu} \mu^{*} \mathcal{P}_{\delta}$。

$$\begin{array}{ccccc} & & V_{\delta}(\lambda) & & \\ & & \downarrow & & \\ \Sigma_{\tau} & \longrightarrow & \Sigma_{\tau} \times (\widehat{\Sigma_{\tau}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge) & \to & \begin{array}{c} \mathrm{DET}(\lambda) \\ \downarrow \\ (\widehat{\Sigma_{\tau}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge) \end{array} \to \begin{array}{c} \Theta(\lambda) \\ \downarrow \\ M_G[\tau] \end{array} \\ & & \downarrow & & \\ & & (\widehat{\Sigma_{\tau}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge) & & \end{array} \tag{5.56}$$

行列式线丛定义为

$$\mathrm{DET}(\lambda) = \bigotimes_{\mu \preceq \lambda} (\mu^{*} \mathcal{L}_{\delta})^{\otimes m_{\mu}}, \tag{5.57}$$

它与 δ 无关。此外，DET(λ) 是 W-等变的。典范截面 $\det_{\delta}^{\Delta(\lambda)} \in H^{0}(\widehat{\Sigma_{\tau}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge,$ DET(λ)) 定义为

$$\det\nolimits_{\delta}^{\Delta(\lambda)} = \bigotimes_{\mu \preceq \lambda} (\mu^{*} \det\nolimits_{\delta})^{\otimes m_{\mu}}, \tag{5.58}$$

它在 W 作用下保持不变，并下降为共形块 $V_{d_{\lambda}}(G)$ 中的一个截面，其中 d_{λ} 表示支配权 λ 的 Dynkin 指数。

为了展示推前行列式的公式，我们转到通用覆盖 $\widehat{\ }$，它是常值 Cartan 联络 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge \to \Sigma_{\tau} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge$ 所构成的空间。给定 $z \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 和权 μ，将 z 在映射 $\mu : \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ 下的像记为 $\mu(z)$。推前行列式通过限制到常值 Cartan 联络来定义。

命题 5.16。 令$\mathrm{res}(\det_{a\ b}^{\Delta(\lambda)}{}_{,})$表示行列式与$\frown\delta = A(a,b) \in \Sigma_{\tau}$ 扭积后的限制到 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$。它是相应行列式线丛的全纯截面。对于 $z \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$，相差一个相位因子，

$$\mathrm{res}(\det\nolimits_{[a,b]}^{\Delta(\lambda)})(z) \sim \prod_{\mu \preceq \lambda} \left\{ \frac{\vartheta \begin{bmatrix} a + \frac{1}{2} \\ b + \frac{1}{2} \end{bmatrix} (\mu(z), \tau)}{\eta(\tau)} \right\}^{m_{\mu}}. \tag{5.59}$$

带特征的 *Theta* 函数(a,b)的表达式见第 *2.3.2* 小节。

证明。 由式（5.58），

$$\mathrm{res}(\det\nolimits_{[a,b]}^{\Delta(\lambda)}) = \prod_{\mu \preceq \lambda} \mu^{*} (\det\nolimits_{\delta})^{m_{\mu}}. \tag{5.60}$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$我们只需证明，在 $\Sigma_\tau \to \Sigma_\tau$ 的覆盖映射 $\pi\colon \mathbb{C} \to \Sigma_\tau$ 下，

$$\pi^*\det_\delta(z) \sim \frac{\vartheta\begin{bmatrix} a+\frac{1}{2} \\ b+\frac{1}{2}\end{bmatrix}(z,\tau)}{\eta(\tau)}. \tag{5.61}$$

对于 δ 平凡情形， $\pi^*\det_0(z) \sim \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)}$ 见 [RS73, 定理 4.1]。对于任意$\delta = A(a, b)$，通过比较零点可类似地得到该公式（见 [AGMV86]）。

推论 5.17。 设 (a, b) 为二阶挠点，在此情形下，我们将 $\mathrm{res}(\det_i^{\Delta(\lambda)}, j)$ 记作相对于由二阶挠点二阶挠点$\frac{i+\tau j}{2}, i, j \in \{0, 1\}$所确定的自旋结构的行列式。

$\overline{\quad}$

$$\mathrm{res}(\det_{ij}^{\Delta(\lambda)})(z) \sim \prod_{\mu \preceq \lambda} \frac{\theta_{1-i,1-j}(\mu(z),\tau)}{\eta(\tau)}. \tag{5.62}$$

因此，当 V 是一个实表示且 δ 是一个二阶挠点时，存在相应的 Pfaffian 线丛。对等式两边取平方根，得到推前 Pfaffian截面的公式。

注 5.18。 在 *[APW91*，第 *5],* 节中，作者计算了一般李群 G的伴随表示的 ***Pfaffian***。

此情形的一个关键特征是，伴随表示具有源自 ***Cartan*** 子代数的常维核，从而导致 ***Pfaffian*** 截面的消失。移除该核后，会出现一个 $\mathbb{Z}_2$-异常；校正后，该截面变为层数为 $h^\vee$ 的 ***Weyl*** 群反不变***theta*** 函数。伴随表示的 ***Pfaffian*** 在亚纯量子化（***Coxeter***数平移）以及 ***Hitchin*** 联络的热算子表达式中发挥着重要作用。

5.5.3. 在 $M_G[\tau]$ 上的椭圆 ***Atiyah-Witten*** 公式，适用于 $G = \mathrm{Spin}(2n)$。现在考虑$G = \mathrm{Spin}(2d)$及其标准表示 $\rho\colon \mathrm{Spin}(2d) \to \mathrm{SO}(2d)$，这是一个 Dynkin 指数为 $d_\rho = 2$ 的实表示。

对于由 $(i, j) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 给出的自旋结构，Pfaffian 线丛 $(\mathrm{PF}_{ij}, \nabla^{\mathrm{PF}}_{ij}, g^{\mathrm{PF}}_{i,j})$ 通过等距同构 Φ_{ij} 与层数为一的陈-西蒙斯线丛 $(\mathcal{L}, \nabla, h)$ 同构。

令 χ_{ij} 表示层为一的虚表示 $S_{ij} \in \mathscr{PER}^1(L\mathrm{Spin}(2n))$ 的修正 Kac-Weyl 特征标。

定理 5.19. 在诱导的等距同构 Φ'_{ij} 下，推前 ***Pfaffian*** 截面与层为一的虚表示 $S_{ij} \in \mathscr{PER}^1(L\mathrm{Spin}(2n))$ 的修正 ***Kac-Weyl*** 特征标之间存在一个对应：

$$\Phi'_{1-i,1-j}(\mathrm{res}(\mathrm{pf}_{1-i,1-j})) = \chi_{i,j}. \tag{5.63}$$

证明。 限制在常值联络 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ 上时，与由二阶挠点 $\frac{i+\tau j}{2}$ 确定的自旋结构相对应的推前 Pfaffian 截面为 $\overline{\quad}$

by

$$\mathrm{res}(\mathrm{pf}_{i,j})(z_1,\cdots z_n,\tau)\sim\prod_{1\le k\le n}\frac{\theta_{1-i,1-j}(z_k,\tau)}{\eta(\tau)}. \tag{5.64}$$

回顾命题 2.9，四个一级虚表示的修正 Kac-Weyl 特征标为

$$\chi_{S_{ij}}=\prod_{1\le k\le n}\frac{\theta_{i,j}(z_k,\tau)}{\eta(\tau)}. \tag{5.65}$$

因此，除一个相位因子外，我们有 $\chi_{S_{ij}}\sim$res(pf$_{1-i,\ 1-j}$)。通过适当选取该相位因子，可以确定等距同构 Φ_{ij}。

5.6. 关于 L^2X 的椭圆 Atiyah-Witten 公式。 现在我们给出定理 1.2 的证明。我们考虑这样一个特例：$(P,\ A)$ 是黎曼自旋流形 $(X^{2n},\ g)$ 上配备自旋联络的自旋标架丛。

如前所示，环旋量 gerbe 模 $\mathcal{S}_{LX}\to LX$ 是 Fock 表示 $\mathcal{F}=S^+-S^-$ 对应的 gerbe 模丛。其椭圆 holonomy$Ehol_{S^+-S^-}[\tau]$ 是环空间上环旋量丛 holonomy 的自然选择。

为方便起见，我们用 $(\mathrm{PF}\ \nabla^{\mathrm{PF}},\ g^{\mathrm{PF}})$ 表示对应于奇自旋结构的 Pfaffian 线丛。我们仅针对奇自旋结构陈述并证明椭圆 Atiyah–Witten 公式；其余三种偶自旋结构的证明可通过完全类似的论证得出。

5.6.1. 整体变换性质。 我们首先证明，椭圆 holonomy 在整体规范变换下的变换方式与规范化 WZW 余循环一致。

命题 5.20。 对于 $\mathcal{H}\in\mathscr{PER}^k(LG)$，设 $g\in\mathcal{G}(P)$ 是 $P\to X$ 的整体规范变换。椭圆 *holonomy* 按如下方式变换：

$$Ehol_{gA}(\mathcal{H})=e^{iW(\hat{g},\hat{A})}Ehol_A(\mathcal{H}), \tag{5.66}$$

$\hat{}$其中 $\hat{}g$ 和 A 是在双环上的求值。换言之，若用局部形式表述，设 $g_\alpha:U_\alpha\to G$ 是局部规范变换，A_α 是局部联络形式。固定 $\gamma\in L^2U_\alpha$，我们有

$$Ehol_{gA}(\mathcal{H})(\gamma)|_{L^2U_\alpha}=e^{ikW(\gamma^*g_\alpha,\gamma^*A_\alpha)}Ehol_A(\mathcal{H})(\gamma)|_{L^2U_\alpha}. \tag{5.67}$$

证明。 椭圆 holonomy 的局部表达式为

$$Ehol_A(\mathcal{H})(\gamma)|_{L^2U_\alpha}=f_\alpha(\gamma)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}hol_\gamma\left(\frac{d}{dy}-[\iota_{\partial_y}\widetilde{A_\alpha}]-[\tau\mathfrak{d}-\tau\iota_{\partial_x}\widetilde{A_\alpha}]\right). \tag{5.68}$$

回顾一下，$\widetilde{A_\alpha}=\widehat{A_\alpha}+c_\alpha\mathfrak{c}\in\Omega^1(LU_\alpha,\ \widetilde{L\mathfrak{g}})$，其中中心部分定义为 $c_\alpha=\int_{S^1}\langle\iota_K\widehat{A_\alpha},\ \widehat{A_\alpha}\rangle dt$。按照惯例，我们用相同的符号表示它们在双环空间上的拉回。考虑 $\widetilde{g_\alpha A_\alpha}=\widehat{g_\alpha A_\alpha}+c_{g,\ \alpha}\mathfrak{c}\in\Omega^1(LU_\alpha,\ \widetilde{L\mathfrak{g}})$，其中 $c_{g_\alpha,\ \alpha}=\int_{S^1}\langle g_\alpha A_\alpha,\ g_\alpha A_\alpha\rangle$。

$\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}^{*}\qquad\widetilde{\quad}\qquad\qquad\widetilde{\quad}$设 $u_{\alpha,\ g_\alpha} = g_\alpha A_\alpha - [Ad_{Lg_\alpha}(A_\alpha)$ $+ Lg_\alpha^{-1}\ \widetilde{\mu}]$，其中 Lg_α：$LU_\alpha \to LG$ 是 Lg_α 的一个提升。$\widetilde{\quad}$尽管 $u_{\alpha,\ g_\alpha}$ 取决于提升 Lg_α 的选择，但微分$du_{\alpha,\ g_\alpha}$ 与此选择无关。这可由与第 4.2 节相同的计算得出：

$$du_{\alpha,g_\alpha} = \int_{S^1} \mathrm{CS}(A_\alpha) - \int_{S^1} \mathrm{CS}(gA_\alpha) \in \Omega^2(LU_\alpha). \tag{5.69}$$

现在，我们仿照命题 5.1 中的计算进行推导：

(5.70)

$$\begin{aligned}
&Ehol_{gA}(\mathcal{H})(\gamma)|_{L^2U_\alpha} = f_{\alpha,g_\alpha}(\gamma) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} hol_\gamma(\frac{d}{dy} - [\iota_{\partial_y}\widetilde{gA_\alpha}] - [\tau\mathfrak{d} - \tau\iota_{\partial_x}\widetilde{gA_\alpha}]) \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} hol_\gamma(\frac{d}{dy} - [\iota_{\partial_y}(u_{\alpha,g_\alpha} + \widetilde{Ad}_{Lg_\alpha}\widetilde{A}_\alpha + \widetilde{Lg_\alpha^{-1}}^{*}\widetilde{\mu})] - \widetilde{Ad}_{Lg_\alpha}(\tau\mathfrak{d} - \tau\iota_{\partial_x}\widetilde{A}_\alpha)) \\
&= \exp\left(k\int_{S^1}\gamma^* u_{\alpha,g_\alpha}\right)\cdot \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[hol_\gamma(\widetilde{Lg_\alpha}(\frac{d}{dy} - [\iota_{\partial_y}\widetilde{A_\alpha}] - [\tau\mathfrak{d} - \tau\iota_{\partial_x}\widetilde{A_\alpha}]))\widetilde{Lg_\alpha^{-1}}] \\
&= \exp(k\int_{S^1}\gamma^* u_{\alpha,g_\alpha})\cdot f_\alpha(\gamma) = e^{ikW(\gamma^* g_\alpha,\gamma^* A_\alpha)} f_\alpha(\gamma) = e^{ikW(\gamma^* g_\alpha,\gamma^* A_\alpha)} Ehol_A(\mathcal{H})(\gamma)|_{L^2U_\alpha}.
\end{aligned}$$

5.6.2. 椭圆*Atiyah-Witten*公式的证明（定理 *1.2*）。我们给出奇自旋情形的证明；其余三种偶自旋结构的证明方法相同。

定理5.21。*Pfaffian* 线丛与 L^2X 上提升 *gerbe* 的挠曲线丛之间存在等距同构：

$$\Phi : (\mathrm{PF}, \nabla^{\mathrm{PF}}, g^{\mathrm{PF}}) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{L}(\mathcal{G}_P, \nabla^B), h). \tag{5.71}$$

在该等距同构下，对于规范化多稳定双环，

$$q^m \cdot Ehol_{S^+ - S^-}[\tau] = \Phi(\mathrm{pf}[\tau]). \tag{5.72}$$

m 是 $S^+ - S^-$的模异常。

证明。由上面的引理可知，椭圆 holonomy 在 ΣG-作用下的变换方式与陈-西蒙斯线丛 $\mathcal{L} \to \mathcal{A}$ 的截面相同。令 $(L^2P)^{ps}$ 表示规范化多稳定双环。求值映射 $\Psi_A^* : (L^2P)^{ps} \to \mathcal{A}^{ps}$ 是 ΣG-等变的。定义在 $(L^2P)^{ps}$ 上的椭圆 holonomy，是 $\mathcal{L} \to \mathcal{A}^{ps}$ 的一个 $\Sigma G_{\mathbb{C}}$-等变截面的拉回。由于多稳定联络在 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 中与常值联络 $\Sigma G_{\mathbb{C}}$-等价，只需对常值联络证明该公式。

对于满足 $i_{\partial_z^\#}(\gamma^* A_\alpha) = K_\alpha \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 为常数联络的 $\gamma \in L^2U_\alpha$，椭圆 holonomy 由下式给出

$$\begin{aligned}
q^m \cdot Ehol_A(S^+ - S^-)(\gamma)|_{L^2U_\alpha} &= q^m \cdot \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\exp\left(\tau\mathfrak{d} + K_\alpha + i_{\partial_z^\#}\gamma^* c_\alpha \mathfrak{c}\right)\right] \\
&= e^{\frac{\pi i\langle K_\alpha, K_\alpha - \overline{K_\alpha}\rangle}{2\mathrm{Im}(\tau)}} q^m \cdot \mathrm{Tr}_{S^+ - S^-}[\exp(\tau\mathfrak{d} + K_\alpha)].
\end{aligned} \tag{5.73}$$

将 $K_\alpha = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ 视为同一对象；其计算公式为

$$F(z_1, \cdots, z_n) = e^{\frac{\pi i \sum_{i=1}^n (z_i, z_i - \bar{z_i})}{2\mathrm{Im}(\tau)}} \prod_{i=1}^n \frac{\theta_{11}(z_i, \tau)}{\eta(\tau)}. \tag{5.74}$$

根据定理 5.19，在所选等距同构下，它可被识别为奇 Pfaffian。这里的前置因子源于将陈-西蒙斯线丛限制在常值联络上后，与阿贝尔簇 $(\Sigma_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge)$ 上定义的基本线丛 $\mathcal{L}_0$ 之间的等距同构。

5.7. 陈-西蒙斯规范理论与双环空间几何。 根据 [APW91], 中讨论的陈-西蒙斯规范理论里的量子化与约化可交换 原理，我们推导出椭圆 holonomy 的二重转移描述。这一描述可以推广到高亏格黎曼曲面，并有望扩展至带标记点的曲面。

给定复结构 $\tau \in \mathbb{H}$ 时， $\mathcal{A}$ 是 K¨ahler。约化前的量子化 空间是 $\mathcal{H}_k(G)|_\tau = H^0_{\Sigma G}(\mathcal{A}, \mathcal{L}^k)$。约化后的量子化 空间是~亏格一共形块 $V_k(G)|_\tau = H^0(M_G[\tau], \mathcal{L}^k)$。在 [APW91, (1.56)], 中，作者指出，推前

$$r : \mathcal{H}_k(G)|_\tau \to V_k(G)|_\tau \tag{5.75}$$

是向量空间的一个同构。严谨的处理见 [DLZ]。

推论 5.22. 环面 T^2 自然地通过拉回作用于联络 $\mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$。令 $\mathcal{H}_k(G)^{T^2}|_\tau$为 T^2-不变子空间，其中 $\mathcal{H}_k(G)|_\tau$。我们有

$$\mathcal{H}_k(G)|_\tau = \mathcal{H}_k(G)^{T^2}|_\tau. \tag{5.76}$$

证明. 常值联络是 T^2-作用的不动点。由于推前 r 是单射， $\mathcal{H}_k(G)|_\tau$ 中的任意截面都必须是 T^2-不变的。

回顾一下，陈-西蒙斯线丛 $(\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}, \nabla^A_{\mathrm{CS}}) \to L^2X$ 是向下下降到 L^2X的拉回 $\Psi_A^*\mathcal{L} \to \mathcal{L}^2P$。结合上面的推论，它诱导出映射

$$\Psi_A^* : \mathcal{H}_k(G)|_\tau \to \Omega^0(L^2X, \mathcal{L}^k_{\mathrm{CS}})^{T^2}. \tag{5.77}$$

我们将二重转移得到的椭圆 holonomy 定义为扩张r^{-1} 与沿 Ψ_A的拉回的复合，

$$V_k(G)|_\tau \xrightarrow{r^{-1}} \mathcal{H}_k(G)|_\tau \xrightarrow{\Psi_A^*} \Omega^0(L^2X, \mathcal{L}^k_{\mathrm{CS}})^{T^2}. \tag{5.78}$$

上述构造自然地推广到高亏格情形。设 Σ 为一亏格为 $g > 1$ 的闭曲面，并配备复结构 J，该复结构为几何量子化提供极化。我们用 $\mathcal{A} = \Omega^{0,1}(\Sigma_J, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$表示 G-联络空间，并令 $\mathcal{L}$表示陈-西蒙斯线丛。

K¨ahler 商 $M_G[J] = \mathcal{A}//\Sigma G$ 可识别为通过几何不变量理论商在解析意义下得到的粗模空间。在此情形下，约化前的量子化空间为

$$\mathcal{H}_k(G)|_J := H^0_{\Sigma G}(\mathcal{A}, \mathcal{L}^k), \tag{5.79}$$

并且，共形块是约化后的量子化空间

$$V_k(G)|_J = H^0(M_G[J], \widetilde{\mathcal{L}}^k). \tag{5.80}$$

量子化与约化可交换在高亏格情形下仍然成立。同样，扩张与拉回的复合

$$V_k(G)|_J \to \mathcal{H}_k(G)|_J \to \Gamma(\Sigma X, \mathcal{L}^k_{\mathrm{CS}}) \tag{5.81}$$

给出　　高亏格黎曼曲线上椭圆 holonomy 的推广　　s.

5.7.1. 相对 ***Pfaffian***。当 τ 在 $\mathbb{H}$ 上变化时，共形块构成椭圆曲线模空间 $\mathcal{M}_{ell} = [\mathbb{H}//SL_2(\mathbb{Z})]$ 上的 Verlinde 丛：

$$V_k(G) \to \mathcal{M}_{ell}. \tag{5.82}$$

Verlinde 丛配备了一种称为 Hitchin 联络的射影平坦联络（显式公式见 [APW91]）。射影平坦性保证了 $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{Z})$ 的单值表示作用于共形块。

现在我们聚焦于 $G = \mathrm{Spin}(2n)$和层 $k = 1$。我们已经证明，四个 Pfaffian 构成了共形块 $V_1(\mathrm{Spin}(2n))|_\tau$的一组基。通过研究相对 Pfaffian 的模性质，我们可以理解 $V_1(\mathrm{Spin}(2n)$的模不变性。

在 [Fre87], 上半平面 $\mathbb{H}$ 参数化环面的复结构，¯从而定义了一族 ∂-算子。令 $\mathfrak{P} \to \mathbb{H}$表示与奇自旋结构相关的 Pfaffian 线丛。

我们研究与奇自旋结构对应的 Pfaffian 线丛的模性质。 $SL_2(\mathbb{Z})$在 $\mathcal{A} \times \mathbb{H}$ 上的作用定义如下：对于$\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$,

$$\gamma(A, \tau) = (\gamma^{-1,*}A, \gamma(\tau)). \tag{5.83}$$

Pfaffian 线丛 $\mathrm{PF} \to \mathcal{A}$ 可以扩展为一个**相对**Pfaffian 线丛，如下所示：

$$\mathrm{PF}^{\mathrm{rel}} := \mathrm{PF} \otimes \mathfrak{P}^{-2n} \to \mathcal{A} \times \mathbb{H}. \tag{5.84}$$

Pfaffian 线丛 $\mathrm{PF} \to \mathcal{A}\times\mathbb{H}$和 $\mathfrak{P} \to \mathbb{H}$都只允许 $Mp_2(\mathbb{Z})$-等变结构，其中 $Mp_2(\mathbb{Z})$表示 $SL_2(\mathbb{Z})$的亚辛双重覆盖。这是因为 $SL_2(\mathbb{Z})$的作用无法提升到旋量上，只有 $Mp_2(\mathbb{Z})$可以。相对结构消除了 $\mathbb{Z}_2$-异常，得到以下结果：

命题 5.23. 相对 ***Pfaff*** 线丛$\mathrm{PF}^{\mathrm{rel}} \to \mathcal{A} \times \mathbb{H}$ 是 $\Sigma G \times T^2 \times SL_2(\mathbb{Z})$-等变的。

拉回至 $L^2X \times \mathbb{H}$ 后，它给出 $SL_2(\mathbb{Z})$-等变的相对 Pfaff 线丛，定义如 $L^2X \times \mathbb{H}$ Fre87, (5.3)] 所述。

注记 5.24。令 $\Gamma < SL_2(\mathbb{Z})$ 为保持给定自旋结构的子群，$\widetilde{\Gamma}$ 并令 Γ 表示它的双覆盖。相应的 ***Pfaffian*** 线丛于是具有 Γ-等变性。

在模空间侧，限制到常值 Cartan 联络 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{H}$ 时，由于此时T^2作用是平凡的，所限制的相对 Pfaff 线丛允许 $W_{\mathrm{aff}} \times SL_2(\mathbb{Z})$作用。

我们研究平凡化下相对 Pfaff 的模性质。令$T \cdot (z,\tau) = (z, \tau+1)$ 和 $S \cdot (z,\tau) = \left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$ 为 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的生成元。归一化 theta 函数的变换律为：

$$T \cdot \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)} = e^{\frac{\pi i}{6}} \cdot \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)}, \quad S \cdot \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)} = -i\, e^{i\pi z^2/\tau} \cdot \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)}. \tag{5.85}$$

相对 Pfaff 由 Pfaff 除以 Dedekind η-函数 $\eta(\tau)^{2n}$ 给出，经过平凡化后，它为

$$\mathrm{res}(\mathrm{pf}^{\mathrm{rel}})(z_1,\dots,z_n,\tau) \sim \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta_{11}(z_k,\tau)}{\eta(\tau)^3}. \tag{5.86}$$

由 $\eta(\tau)$ 的变换律，我们有：

$$T \cdot \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)^3} = \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)^3}, \quad S \cdot \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)^3} = \frac{e^{i\pi z^2/\tau}}{\tau} \cdot \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)^3}. \tag{5.87}$$

$\frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)}$ 通过除以 $\eta(\tau)^2$ 进行修正，随后在 T-变换下的因子 $e^{\frac{\pi i}{6}}$ 被消去。这明确展示了相对结构如何消除由该特征给出的全局反常

$$\mu : Mp_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}. \tag{5.88}$$

在 S 变换下，它会获得一个无法消除的射影因子 $e^{i\pi z^2/\tau}/\tau$。为了使 $\frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)^3}$ 成为模形式，我们必须纳入由第二 Eisenstein 级数导出的指数因子。

令 $E_k(\tau) = \sum_{m,\, n \in \mathbb{Z}^2 - (0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^k}$ 表示权重为 k 的 Eisenstein 级数。这里我们使用归一化 Eisenstein 级数 $G_k(\tau) = \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k} \cdot E_k(\tau)$。对于偶数 k，$G_k(\tau)$ 是权重为 k 的模形式，而 $G_2(\tau)$ 仅为拟模形式，其变换律如下：

$$G_2(\tau+1) = G_2(\tau), \quad G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 G_2(\tau) + \frac{\tau}{4\pi i}. \tag{5.89}$$

由 $G_2(\tau)$ 的变换律可直接得到

$$e^{-4\pi^2 G_2(\tau) z^2} \cdot \frac{z}{\theta_{11}(z,\tau)/\eta(\tau)^3} \tag{5.90}$$

是 $SL_2(\mathbb{Z})$-不变的。

由 [Zag88], $\frac{z}{\theta_{11}(z,\tau)/\eta(\tau)^3}$ 表示 Witten 属的特征级数。由上述公式可直接看出，若 $\frac{1}{2}p_1 = 0$，则 Witten 属是模的。

射影因子 $e^{4\pi^2 G_2(\tau) z^2}$ 与 Verlinde 丛上的 Hitchin 联络密切相关。我们旨在找出与特征级数 $\theta_{11}\ z\ \tau^{z}\ (,)/\eta(\tau)^3$相应的微分算子。

众所周知，雅可比 theta 函数 $\theta_{ij}(z,\ \tau)$ 满足经典热方程，其中 $\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{4\pi i}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，使得

$$\mathcal{D}\theta_{ij}(z,\tau) = 0. \tag{5.91}$$

我们定义**修正热算子**

$$\widehat{\mathcal{D}} = \frac{\partial}{\partial\tau} - 3G_2(\tau) - \frac{1}{4\pi i}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.92}$$

$\theta_{ij}(z,\ \tau)\ \eta(\tau)^3$ 是修正热算子 $\widehat{\mathcal{D}}$ 的解，因为

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{D}}\frac{\theta_{ij}(z,\tau)}{\eta(\tau)^3} &= \frac{1}{\eta(\tau)^3}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - 3G_2(\tau) - \frac{1}{4\pi i}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta_{ij}(z,\tau) + \theta_{ij}(z,\tau)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{1}{\eta(\tau)^3} \\ &= \frac{\theta_{ij}(z,\tau)}{\eta(\tau)^3}\left(-3G_2(\tau) - 3\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)}\right) = 0.\end{aligned} \tag{5.93}$$

最后一个等式可由 $\eta(\tau)$ 的对数导数这一事实推出

$$(\log\eta(\tau))' = -G_2(\tau). \tag{5.94}$$

接下来我们考虑共轭

$$\widetilde{\mathcal{D}} = e^{4\pi^2 G_2(\tau) z^2} \circ \widehat{\mathcal{D}} \circ e^{-4\pi^2 G_2(\tau) z^2} = \mathcal{D} + C_1 z\partial_z + C_2 z^2 + C_3, \tag{5.95}$$

其中 C_1，C_2，C_3 是环 $\mathbb{C}[G_2, G_4]$ 中的元素。我们有

$$\widetilde{\mathcal{D}}\left(e^{4\pi^2 G_2(\tau) z^2} \cdot \frac{\theta_{11}(z,\tau)}{\eta(\tau)^3}\right) = 0. \tag{5.96}$$

~我们预计将研究 $\mathcal{D}$ 的模性质，因为它们与 Hitchin 联络的去射影化密切相关。

注 5.25。为实现模性，可以改用 $G_2(\tau)$ 的非全纯补全 ^ $G_2(\tau) = G_2(\tau) - \frac{1}{8\pi\Im(\tau)}$。然后

$$\hat{G}_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 G_2(\tau) + \frac{\tau}{4\pi i} - \frac{1}{8\pi\mathrm{Im}(-1/\tau)} = \tau^2\hat{G}_2(\tau). \tag{5.97}$$

^完备化 $G_2(\tau)$ 在几何上源于 ***Pfaffian*** 线丛 $\mathfrak{P}^{1/2} \to \mathbb{H}$ 上的 ***Bismut-Freed*** 联络。由于 ***Dirac*** 算子 D_τ 的核始终是一维的，它们构成一个线丛 $L \to \mathbb{H}$，其中 $w_\tau = \sqrt{dz}$ 是 L 的全纯截面。w_τ 的范数平方为 $\mathrm{Im}(\tau)$。预期在行列式丛 $\det(V_k(G)) \to \mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$ 上诱导的 ***Hitchin*** 联络与 ***Bismut-Freed*** 联络相容。

6. Elliptic Bismut-Chern Characters on L^2X

基于第 3 节，我们将 $EBCh$ 上的椭圆 Bismut-Chern 特征表述为椭圆 holonomy 的 $(S^1\times\mathbb{C}^*_{<1})$-等变闭扩张。它纳入以下交换图：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & h^{2*}_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}(L^2X,(\mathcal{L}_{\mathrm{CS}},\nabla^A_{\mathrm{CS}},\overline{H})^k)|_\tau & & \\
 & \overset{i_{10}^*}{\swarrow} & \uparrow{\scriptstyle EBCh} & \overset{i_{01}^*}{\searrow} & \\
h^{2*}_{S^1}(LX)[[q]] & \xleftarrow[BCh]{} & \mathscr{PER}^k(LG) & \xrightarrow{ECh} & h^{2*}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX,kH)|_\tau \\
 & \underset{i^*}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle Ch} & \underset{i^*}{\swarrow} & \\
 & & h^{2*}(X)[[q]] & &
\end{array}
\tag{6.1}
$$

本节结构。在第 6.1 小节中，我们构造 L^2X 的（完备周期）奇异扭曲（$S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}$）等变上同调。在第 6.2 小节中，我们将椭圆 Bismut-Chern 特征引入为（$S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}$）等变扭曲 Bismut-Chern 特征。在第 6.3 小节中，我们将讨论进一步的方向和开放问题。

6.1. 奇异扭曲（$S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}$）等变上同调 L^2X。

按照第 3.2 小节的做法，我们建立 $L(LX)$ 的完备周期奇异扭曲（$S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}$）等变上同调。

和之前一样，我们区分两个圆。设环面为 $T^2=S^1\times\mathbb{S}^1$，其中第一个圆 S^1 对应于 y方向，第二个圆 $\mathbb{S}^1$ 对应于 x方向。 ∂_x 是生成 x方向旋转的向量场，它是向量场 K 的求值； ∂_y 是 $L(LX)$ 上生成 y方向旋转的向量场。令 $\tau=\tau_1+i\tau_2\in\mathbb{H}$，并用 $z=x+\tau y$ 表示椭圆曲线 $\Sigma_\tau=\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})$ 上的复坐标。单位体积的标准平坦 K¨ahler 形式为 $\frac{-1}{2\tau_2}dz\wedge d\bar{z}$。与 dz 对偶的复向量场为 $\partial_z^{\#}=\tau\partial_x-\partial_y$。用 $\tau\partial_x$ 替换 ∂_x，实际上会将 x方向的圆 $\mathbb{S}^1$ 变形为穿孔圆盘 $\mathbb{C}^*_{<1}$。

定义 6.1。我们首先介绍非扭曲版本。$(S^1\times\mathbb{C}^*_{<1})$-等变双环空间上同调 $h^*_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}(L^2X)|_\tau$ 由 $\mathbb{Z}_2$-分次复形 $(\Omega^*(L^2X)^{T^2},d-i_{\partial_z^{\#}})$ 给出，其中 $\Omega^*(L^2X)^{T^2}$ 是 $\Omega^*(L^2X)$ 的 T^2-不变部分，并且在其上 $\mathcal{D}_\tau=d-i_{\partial_z^{\#}}$ 平方为零。该上同调称为 L^2X的完备周期 $(S^1\times\mathbb{C}^*_{<1})$-等变上同调。

对于奇异扭曲版本，我们考虑 $\mathbb{Z}_2$-分次复形 $\Omega^*(L^2X,\mathcal{L}_{\mathrm{CS}})$，并将 $\widehat{\Phi}\in\Omega^4(L^2X)$ 设为在 L^2X 上的求值。

$$
\overline{H}=\int_{S^1}(\iota_{\partial_x}\widehat{\Phi})dy\in\Omega^3(L^2X) \tag{6.2}
$$

是沿 y 方向对曲率形式 $H \in \Omega^3(LX)$ 取平均。考虑

$$\mathcal{D}_\tau = \nabla^A_{\mathrm{CS}} - \iota_{\partial_z^\#} - \overline{H}, \tag{6.3}$$

这是一个作用于 $\Omega^*(L^2X,\ \mathcal{L}_{\mathrm{CS}})$ 上的奇算子。在局部地，回顾一下，局部 B-场由陈-西蒙斯 3-形式 $K_\alpha = \int_{S^1}\mathrm{CS}(A_\alpha) \in \Omega^2(LU_\alpha)$ 的转移给出。K_α 是沿 y-方向对 K_α 的平均。

$$\mathcal{D}_\tau|_{\mathcal{L}^2U_\alpha} = d - \iota_{\partial_z^\#}\overline{K_\alpha} - \iota_{\partial_z^\#} - d\overline{K_\alpha} = e^{\overline{K_\alpha}}(d - \iota_{\partial_z^\#})e^{-\overline{K_\alpha}}. \tag{6.4}$$

于是 $\mathcal{D}_\tau^2 = -L_{\partial_z^\#}$，其限制在 T^2-不变部分 $\Omega^*(L^2X,\ \mathcal{L}_{\mathrm{CS}})^{T^2}$ 上为零。

定义 6.2。$(\Omega^*(L^2X,\ \mathcal{L}_{\mathrm{CS}})^{T^2},\ \mathcal{D}_\tau)$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次复形，我们称该复形的上同调为 L^2X 关于陈-西蒙斯线丛 $(\mathcal{L}_{\mathrm{CS}},\ \nabla^A_{\mathrm{CS}})$ 的奇异扭积 $(S^1 \times \mathbb{C}^*_{<1})$-等变上同调。在 $\tau \in \mathbb{H}$，记作$h^*_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}(L^2X,\ (\mathcal{L}_{\mathrm{CS}},\ \nabla^A_{\mathrm{CS}},\ H))|_\tau$.

6.1.1. *String-G* 结构与平凡化。回顾第 4.5 小节，几何 string-G 结构为 Chern-Simons 2-gerbe 提供了几何平凡化，由此得到：

- $C \in \Omega^3(X)$ 满足 $dC = \Phi$.
- $B_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha)$ 满足 $\mathrm{CS}(A_\alpha) - C = dB_\alpha$.

现在我们利用 string-G 结构构造平坦联络 ∇^C 和一个单位范数的协变平坦截面 s^C，从而为 Chern–Simons 线丛提供平凡化。

命题6.3。对每个 α，定义 $f_\alpha = i\int_\Sigma B_\alpha \in \Omega^0(\Sigma U_\alpha)$。这一族 $\{df_\alpha\}$ 定义了 $\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}$ 上的平坦联络 ∇^C。

证明。由于 $\Theta_\alpha - \Theta_\beta = \sqrt{-1}(\int_\Sigma \mathrm{CS}(A_\alpha) - \int_\Sigma \mathrm{CS}(A_\beta)) = h_{\alpha\beta}dh^{-1}_{\alpha\beta}$ 且 $H_\alpha = H_\beta$，我们有

$$df_\alpha - df_\beta = \sqrt{-1}(\int_\Sigma dB_\alpha - \int_\Sigma dB_\beta) = \Theta_\alpha - \Theta_\beta = h_{\alpha\beta}dh^{-1}_{\alpha\beta}. \tag{6.5}$$

命题 6.4. 对 $x \in \mathcal{L}^2U_\alpha$ 定义 $s_\alpha(x) = e^{f_\alpha(x)} = e^{i\int_\Sigma x^*B_\alpha}$。集合$\{s_\alpha\}$ 粘合在一起，从而在平凡化的 *Chern–Simons* 线丛上定义一个单位范数的整体平坦共变截面 s^C。

证明. 局部地，s_α 是共变平坦的，因为 $(d - df_\alpha)s_\alpha = 0$. 为验证 $\{s_\alpha\}$ 定义一个整体截面，注意到

$$s_\alpha/s_\beta(x) = e^{f_\alpha - f_\beta(x)} = e^{\sqrt{-1}\int_\Sigma x^*(B_\alpha - B_\beta)}. \tag{6.6}$$

任取一个以 $\partial B = \Sigma$ 为边界的三维流形 B，并将x 延拓为一个映射 $\widetilde{x}:\ B \to U_\alpha \cap U_\beta$，使得 $\widetilde{x}|_{\partial B} = x$。由 Stokes公式,

$$\int_\Sigma x^*(B_\alpha - B_\beta) = \int_B \widetilde{x}^*(dB_\alpha - dB_\beta) = \int_B \widetilde{x}^*(\mathrm{CS}(A_\alpha) - \mathrm{CS}(A_\beta)). \tag{6.7}$$

因此，$s_\alpha/s_\beta(x) = e^{iW(x\circ g_{\alpha\beta}, x^*A_\beta)} = h_{\alpha\beta}(x)$。

当几何 string G 结构存在时，陈-西蒙斯线丛可以被平凡化，从而导致

$$h^*_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}(L^2X,(\mathcal{L}_{\mathrm{CS}},\nabla^A_{\mathrm{CS}},\overline{H}))|_\tau \cong h^*_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}(L^2X)|_\tau. \tag{6.8}$$

类似地，我们可以定义关于多个由带联络的主 G_k-丛所关联的 Chern–Simons 线丛乘积的上同调（P_k，A_k）$\to X$。当发生反常抵消时，即，存在 $C\in\Omega^3(X)$，使得 $dC=\sum_k \Phi_K$，其中 $\Phi_K=\langle R_k,\ R_k\rangle$，此时该上同调与非扭曲版本 $h^*_{S^1\times\mathbb{S}^1}(L^2X)|_\tau$ 同构。

6.1.2. 限制。 令 $M=LX$，从而 $M^{\mathbb{S}^1}=X$。令 $i_{00}:\ X\to L^2X$ 表示在两个方向上均为常值的双环的包含。令 $i_{01}=i_{LX}:LX\to L^2X$ 表示在 y 方向上为常值的双环的包含。令 $i_{10}=Li:\ LX\to L^2X$ 表示在 x 方向上为常值的双环的包含。下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} & & L^2X & & \\ & \overset{i_{10}}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle i_{00}} & \overset{i_{01}}{\nwarrow} & \\ LX & & & & LX \\ & \underset{i}{\nwarrow} & & \underset{i}{\nearrow} & \\ & & X & & \end{array} \tag{6.9}$$

经由 i_{10}限制后，上同调约化为 S^1等变上同调的LX，因为提升 gerbe 在常值环空间 X上是平凡的。经由 i_{01}限制后，上同调约化为由算子 $\mathcal{D}_\tau=d-\tau\iota_{\partial_x}-kH$控制的扭曲 $\mathbb{C}^*_{<1}$等变上同调的 LX。以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} & & h^*_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}(L^2X,\ (\mathcal{L}_{\mathrm{CS}},\ \nabla^A_{\mathrm{CS}},\ \overline{H})^k)|_\tau & & \\ & \overset{i_{10}^*}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle i_{00}^*} & \overset{i_{01}^*}{\searrow} & \\ h^*_{S^1}(LX) & & & & h^*_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX,\ kH)|_\tau \\ & \underset{i^*}{\searrow} & & \underset{i^*}{\swarrow} & \\ & & h^*(X) & & \end{array} \tag{6.10}$$

6.2. 椭圆 Bismut-Chern 特征。在 LX上等变扭曲 Bismut-Chern 特征的表述基础上，我们令 $M=LX$，进而 $LM=L^2X$。考虑提升 gerbe（$\mathcal{G}_P$，∇^B）$\to LX$，它是 $\mathbb{S}^1$等变的，且其动量映射为零。

椭圆 Bismut-Chern 特征定义为与由 $\mathcal{H}\in\mathscr{PER}^k(LG)$ 给出的 gerbe 模相关联的（$S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}$）-等变扭曲 Bismut-Chern 特征。

它是椭圆陈特征在双环空间上的精化：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{PER}^k(LG) & \xrightarrow{\quad EBCh \quad} & h^{2*}_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}(L^2X,(\mathcal{L}_{\mathrm{CS}},\nabla^A_{\mathrm{CS}},\overline{H})^k|_\tau) \\ & \searrow^{ECh} \quad \swarrow_{i_{10}^*} & \\ & h^{2*}_{\mathbb{C}^*_{<1}}(LX,kH)|_\tau & \end{array} \tag{6.11}$$

根据第3.3.2节，在 L^2U_α 上，我们考虑 $\mathcal{D}_\alpha$，它是一个取值于 $\widetilde{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}'\otimes\Omega^*(L^2U_\alpha)$ 的 y 一阶微分算子，

$$\mathcal{D}_\alpha=(\frac{d}{dy}+\iota_{\partial_y}\widetilde{A}_\alpha)-(\widetilde{R}_\alpha[\tau]+K_\alpha). \tag{6.12}$$

$\widetilde{A}_\alpha$， $R_\alpha[\tau]$， K_α 均定义在 LU_α 上。为简便起见，我们用相同的符号表示它们在 L^2U_α 上的求值。记作 $\mathcal{D}_\alpha=\frac{d}{dy}-(\tau\mathfrak{d}+Y_\alpha)$，其中

$$Y_\alpha=\iota_{\partial_z^\#}\widetilde{A}_\alpha+\widetilde{R}_\alpha+K_\alpha\in\Omega^*(L^2U_\alpha,\widetilde{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}'). \tag{6.13}$$

设 $Y_\alpha(t)$ 为 Y_α 在 $y=t$ 上求值所得到的拉回。在表示$\mathcal{H}\in\mathscr{PER}^k(LG)$ 下，椭圆 Bismut-Chern 特征局部可表示为整体性的迹，并可写成迭代积分，

$$EBCh_A(\mathcal{H})|_{L^2U_\alpha}=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[hol(\mathcal{D}_\alpha)]=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\Delta_m}Y_\alpha(t_1)\cdots Y_\alpha(t_m)dt_1\cdots dt_m]. \tag{6.14}$$

首先，零次分量对应于椭圆 holonomy。虽然我们无法讨论一般光滑双环上的收敛性，但可以确保在规范多稳定双环上的收敛性。

根据定理 5.1 中相同的论证，它在 L^2X 上定义了一个取值于陈-西蒙斯线丛的整体形式。由定理 3.6 可知， $EBCh_A(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{D}_\tau$-闭的，因此它是 $h^{2*}_{S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}}(L^2X,(\mathcal{L}_{\mathrm{CS}},\nabla^A_{\mathrm{CS}})^k,\overline{H})|_\tau$ 的一个余循环。

我们证明，它在一个方向上的限制就是椭圆陈特征。

命题 6.5. *$i_{10}=Li$：$LX\to L(LX)$ 是双重回路的包含，在 y 上为常值，*

$$i_{10}^*(EBCh_A(\mathcal{H}))=ECh_A(\mathcal{H}). \tag{6.15}$$

证明。 由于在 y 上为常值， $\iota_{\partial_y}A_\alpha=0$。holonomy $hol(\mathcal{D}_\alpha)$ 化简为指数函数 $\exp(R_\alpha[\tau]+K_\alpha)$。于是

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[hol(\mathcal{D}_\alpha)]=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[\exp(\widetilde{R}_\alpha[\tau]+K_\alpha)]=Ech_A(\mathcal{H})|_{LU_\alpha}. \tag{6.16}$$

我们证明，其在另一个方向上的限制是 q-分次的 Bismut-Chern 特征。

命题 6.6. 令 $i_{01}=i_{LX}:\ LX\to L(LX)$ 为沿 x方向保持常值的回路的包含。于是，

$$i_{01}^{*}(EBCh_A(\mathcal{H}))=BCh_A(\mathcal{H})[q]. \tag{6.17}$$

证明。 由于回路在 x 方向上是常值的，中心项 c_α 和 B 场 K_α 均消失。因此，$\mathcal{D}_\alpha$ 简化为 $\mathcal{D}_\alpha=\frac{d}{dy}-\iota_{\partial_y}\hat{}A_\alpha-(\tau\mathfrak{d}+\hat{}R_\alpha)$。在固定时刻 $y\equiv t$ 取值后，得到一个取值于 a 的表达式。由迭代积分可知，迹按照 $\mathcal{H}$ 的能量分解进行分解：

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}[hol(\mathcal{D}_\alpha)]&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_n}[hol(\frac{d}{dy}-\iota_{\partial_y}\hat{A}_\alpha-(\tau\mathfrak{d}+\hat{R}_\alpha))]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_n}[hol(\frac{d}{dy}-(\iota_{\partial_y}\hat{A}_\alpha+\hat{R}_\alpha))]=\sum_{n=0}^{\infty}q^nBCh_A((P\times_G\mathcal{H}_n)).\end{aligned} \tag{6.18}$$

由此得到 q-分次的 Bismut-Chern 特征。

6.3. 进一步讨论。 我们将 L^2X 上的解析椭圆 Bismut-Chern 特征定义为超 Pfaffian。从椭圆 Bismut-Chern 特征的构造可以明显看出，两个回路在 $(1+1)$-转移中发挥着不同的作用。一个回路与环群和环丛相关联，另一个回路则用于转移。因此，由于对两个回路的处理并不对称，无法直接观察到模性质。相比之下，二重转移方法似乎更适合用于理解模性。若考虑前文讨论的双环空间 L^2X 上的 Pfaffian 线丛，则应存在解析椭圆 Bismut-Chern 特征 pf($\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-(i_{\partial_z^{\#}}\hat{}A+\hat{}R)$)，它是一个取值于该 Pfaffian 线丛的 L^2X 上的形式。注意，$\nabla_{\bar{z}}^{A}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-i_{\partial_z^{\#}}\hat{}A$ 是在 $\gamma\in L^2X$ 处与联络 γ^*A 耦合的 Dirac 算子族。零次分量恰好对应于典范截面 Pfaffian。

另一方面，将其限制在常值环空间 X 上时，它简化为正则化 Pfaffian pf($\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-\hat{}R$)，其严格定义可参见 [BE24, (5.2)]。相对正则化 Pfaffian pf($\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-\hat{}R$)/pf($\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$) 在 X 进一步具有 string 结构时，计算 Witten 属。

然而，要在 L^2X 上精确定义 pf($\nabla_{\bar{z}}^{A}-\hat{}R$) 面临着重大挑战。这里我们不深入探讨技术细节，而是简要概述并指出主要难点。

首先，我们定义高阶扭曲拉普拉斯算子 $\hat{}\,\Delta_A=(\nabla_{\bar{z}}^{A}-\hat{}R)^*(\nabla_{\bar{z}}^{A}-\hat{}R)=\Delta_A+\mathcal{F}$，其中 Δ_A 是普通拉普拉斯算子，$\mathcal{F}$ 是由曲率给出的高阶项。形式上，我们可以通过 Volterra 级数写出 $e^{-t\Delta_A}$

$$e^{-t\hat{\Delta}_A}=e^{-t\Delta_A}+\sum_{k=1}^{\infty}(-t)^k\int_{\Delta_k}e^{-s_0t\Delta_A}\mathcal{F}e^{-s_1t\Delta_A}\cdots\mathcal{F}e^{-s_kt\Delta_A}ds_1\cdots ds_k. \tag{6.19}$$

这里的求和延伸至无穷，因为 L^2X 现在是无限维的。如果能够严格构造$\hat{}\,\Delta_A$ 的热核，我们就可以定义迹 Tr$[e^{-t\hat{\Delta}_A}]$

ˆ，方法是对角线上热核的积分。现在，Tr$[e^{-t\Delta_A}]$是定义在L^2X 上的一个形式，当 $t\to\infty$ 时呈指数衰减，并在 $t\to 0$时具有渐近展开，其中系数是形式。然后，我们可以通过梅林变换定义 ζ正则化行列式

$$\zeta_{\hat{\Delta}_A}(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{Tr}[e^{-t\hat{\Delta}_A}]dt, \tag{6.20}$$

而形式版本的 ζ 正则化行列式由下式给出

$$\det{}_\zeta(\hat{\Delta}_A)=\exp\left(-\zeta'_{\hat{\Delta}_A}(0)\right). \tag{6.21}$$

我们不确定它能否作为 L^2X 上的形式良定义。唯一可以确定的是，零次分量对应于狄拉克算子的拉普拉斯算子的 ζ 正则化行列式，它定义了行列式线丛和 Pfaffian 线丛的 Quillen 度量。最后，我们预期解析椭圆 Bismut-Chern 特征 pf($\nabla^A_{\tilde{z}}-\hat{}R$) 满足

$$\|\mathrm{pf}(\nabla^A_{\tilde{z}}-\hat{R})\|^2_{\mathrm{PF}}=\det{}_\zeta(\hat{\Delta}_A). \tag{6.22}$$

解析椭圆 Bismut-Chern 特征 pf($\nabla^A_{\tilde{z}}-\hat{}R$) 指的是超 Pfaff。若 X 上存在弦结构，且 Pfaffian 线丛已平凡化，则 pf($\nabla^A_{\tilde{z}}-\hat{}R$) 可视为超双环空间 $\mathcal{S}(L^2X)$ 上的函数。实际操作中，考虑一个参数化双环的有限维空间 B 会更方便，即存在一个映射 ρ：$B\times\Sigma\to X$。此外，我们要求 B 具有 T^2作用，且 ρ在 $B\times\Sigma$上的 T^2作用下保持 T^2不变。

即使能够解决上述分析上的困难，仍有另一个问题：如何表述由相对 Pfaffian 线丛扭曲的 ($S^1\times\mathbb{C}^*_{<1}$)-等变上同调。我们需要找到一种解析构造，构造出 ξ on L^2X 上的 3-形式，使得 $i_{\partial^\#_z}\xi$等于 Pfaffian 线丛的曲率。然后我们定义扭曲等变微分

$$Q_\tau=\nabla^{\mathrm{rel}}-i_{\partial^\#_z}-\xi, \tag{6.23}$$

作用于 $\Omega^*(L^2X\times\mathbb{H},\ \mathrm{PF}^{\mathrm{rel}})^{T^2}$，其中 $\mathrm{PF}^{\mathrm{rel}}$ 是相对 Pfaffian 线丛，∇^{rel} 是相对 Bismut-Freed 联络。这种情形不同于 (1+1)- 转移的情形，在后者中，3-形式 $\xi=H$ 是通过沿 y方向对曲率形式 H取平均得到的。若能针对 L^2X，以二重转移线丛为对象发展这种等变扭曲上同调，将会很有意义。

在 [BE24], 中，复解析椭圆上同调的双环空间模型被表述为 $SL_2(\mathbb{Z})$-等变交换微分分次代数层，其定义在 $\mathbb{H}$上。对于固定的 $\tau\in\mathbb{H}$，当弦结构存在时，式 (6.8) 中给出的上同调与上述 Q-上同调在纤维 τ处相容。

一个自然的问题随之而来：我们能否将 [BE24] 的结果推广到 X 不是 string 的情形，并如 [Fre86] 中那样，考虑对 $L^2X\times\mathbb{H}$ 上的相对 Pfaff 线丛进行扭曲？这个问题揭示了 Green-Schwarz 弦反常与由 Hitchin 联络仅射影平坦所引起的共形反常之间的联系。相对 Bismut-Freed 联络与

Dedekind η 函数的对数导数有关，而该函数是第二个归一化 Eisenstein 级数 $G_2(\tau)$。这一结构发挥着双重作用：它为构造由相对 Pfaff 线丛扭曲的双环空间上同调提供关键的几何数据，同时也支配着 Hitchin 联络的去射影化。我们预期，随着对这些关系的进一步研究，将会形成一个整合维林德丛、Hitchin 联络以及复解析椭圆上同调的双环空间模型的统一框架。

References

[AB83] M. F. Atiyah 和 R. Bott，《黎曼曲面上的杨-米尔斯方程》，《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑：数学与物理科学 308 (1983)，523 – 615。[AdRB00] M. Ando 和 M. d. R. Basterra，《Witten 属与等变椭圆上同调》，《数学杂志》240 (2000)，787–822。[AGMV86] L. Alvarez-Gaum´e、G. W. Moore 和 C. Vafa，《Theta 函数、模不变性与弦》，《数学物理通讯》106 (1986)，1–40。[APW91] S. Axelrod、S. Della Pietra 和 E. Witten，《陈-西蒙斯规范理论的几何量子化》，《微分几何杂志》33 (1991)，787–902。[AS84] M. F. Atiyah 和 I. M. Singer，《与矢势耦合的狄拉克算子》，《美国国家科学院院刊》81 8 (1984)，2597– 600。[Ati85] M. F. Atiyah，《圆对称性与驻相近似》，《纪念 Laurent Schwartz 文集》第1卷，Ast´erisque，法国数学会，1985，第 43–59 页。[BE24] D. Berwick-Evans，《超对称局域化、模性与 Witten 属》，《微分几何杂志》126 (2024)，第 2 期，401 – 430。[BET21] D. Berwick-Evans 和 A. Tripathy，《复解析等变椭圆上同调的德拉姆模型》，《数学进展》380 (2021)，107575。[BF86] J.-M. Bismut 和 D. S. Freed，《椭圆族的分析》，《数学物理通讯》107 (1986)，103–163。[BG96] V. Baranovsky 和 V. Ginzburg，《环群中的共轭类与椭圆曲线上的 G-丛》，《国际数学研究通知》(1996)，第 15 期，733–751。MR 1413870[Bis85] J.-M. Bismut，《环空间上的指标定理与等变上同调》，《数学物理通讯》98 (1985)，第 2 期，213–237。[Bis11] ，《杜斯特马特-赫克曼公式与指标理论》，《分析与力学的几何方面：献给 Hans Duistermaat 65 岁生日》，Birkh¨auser Boston，2011，第 1–55 页。[Bry90] J.-L. Brylinski，《环群表示、环空间上的狄拉克算子与模形式》，《拓扑学》29 (1990)，461–480。[Bry93] ，《环空间、特征类与几何量子化》，出版方 Birkh¨auser Boston，MA，1993。[Bun09] U. Bunke，《弦结构与 Pfaffian 线丛的平凡化》，《数学物理通讯》307 (2009)，675–712。[BXZ03] K. A. Behrend、P. Xu 和 B. Zhang，《紧致单李群上的等变 gerbe》，《数学报告》336 (2003)，251–256。[CJM+04] A. Carey、S. Johnson、M. K. Murray、D. Stevenson 和 B.-L. Wang，《用于陈-西蒙斯理论与韦斯-祖米诺-维滕理论的丛格》，《数学物理通讯》259 (2004)，577–613。

———

[CP89] R. Coquereaux 和 K. Pilch，《环丛上的弦结构》，《数学物理通讯》120 (1989)，353–378。[DLZ] Geyang Dai、Ruiming Liang 和 Yang Zhang，《陈-西蒙斯规范理论的量子化与约化可交换》，2601.09666。[DN89] J.-M. Dr´ezet 和 M. Narasimhan，《代数曲线上半稳定向量丛模空间的皮卡群》，《数学新进展》97 (1989)，53–94。[DS07] J. Distler 和 E. Sharpe，《具有一般群与一般层级主丛的异质弦紧化》，《理论与数学物理进展》14 (2007)，335–397。[EF94] P. Etingof 和 I. B. Frenkel，《二维流群的中心扩张》，《数学物理通讯》165 (1994)，第 3 期，429–444。[EFK94] P. Etingof、I. B. Frenkel 和 A. A. Kirillov，《仿射李群上的球函数》，《杜克数学杂志》80 (1994)，59–90。[FHT05] D. S. Freed、M. J. Hopkins 和 C. Teleman，《环群与扭曲 K 理论 II》，《美国数学会杂志》26 (2005)，595–644。[FMW97] R. Friedman、J. W. Morgan 和 E. Witten，《椭圆曲线上的主 G 丛》，《数学研究快报》5 (1997)，97–118。[Fre84] I. B. Frenkel，《仿射李代数的轨道理论》，《数学新进展》77 (1984)，301–352。[Fre86] D. S. Freed，《行列式、挠率与弦》，《数学物理通讯》107 (1986)，483–513。[《关于行列式线丛》，《弦理论的数学方面》，1987，第 189–238 页。[Fre95] ，《经典陈-西蒙斯理论》，1，《数学进展》113 (1995)，第 2 期，237–303。[Gom01a] K. Gomi，《提升丛 gerbe 上的联络与曲率形式》，《伦敦数学会杂志》67 (2001)，510–526。[Gom01b] ,《使用 Deligne 上同调表述一般紧李群的陈-西蒙斯作用量》，《东京大学数学科学杂志》8 (2001)，223–242。[Gro07] I. Grojnowski，《非局部化等变椭圆上同调》（Matthew Ando 和 Haynes Miller 撰写引言），伦敦数学会讲义系列，第 114–121 页，剑桥大学出版社，2007。[GW84] R. Goodman 和 N. Wallach，《环群与圆周微分同胚群的结构及酉余循环表示》，《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal）(1984)，133 – 69。[HL22] F. Hanisch 和 M. Ludewig，《环空间上的费米子积分与 Pfaffian 线丛》，《数学物理杂志》63 (2022)，第 12 期，123502。[HM14] F. Han 和 V. Mathai，《环空间的奇异扭曲等变上同调、扭曲 Bismut–陈特征与 T 对偶》，《数学物理通讯》337 (2014)，127–150。[Hop02] M. Hopkins，《代数拓扑与模形式》，《国际数学家大会论文集》，第 1 卷，2002。[Kac90] V. G. Kac，《无限维李代数》，剑桥大学出版社，1990。[KW24] P. Kristel 和 K. Waldorf，《环空间上的光滑 Fock 丛与旋量丛》，《微分几何杂志》128 (2024)，第 1 期，193 – 255。[Liu94] K. Liu，《模不变性与特征数》，《数学物理通讯》174 (1994)，29–42。[Liu95] ，《关于模不变性与刚性定理》，《微分几何杂志》41 (1995)，343–396。[Liu96] ，《模形式与拓扑学》，《当代数学》193 (1996)，237–262。[Loo76] E. Looijenga，《根系与椭圆曲线》，《数学新进展》38 (1976)，17–32。

[Lur09] J. Lurie, 《椭圆上同调综述》，第 219–277 页，Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2009 年。[Mei03] E. Meinrenken, 《紧致单李群上的基本丛纤维》，《数学教学》（第 2 辑）49（2003），307–333。[Mic87] J. Mickelsson, 《Kac-Moody 群、Dirac 行列式丛的拓扑与费米子化》，《数学物理通讯》110（1987），173–183。[Mil89] H. Miller, 《椭圆特征与 Witten 属》，《代数拓扑》（伊利诺伊州埃文斯顿，1988）（M. Mahowald 和 S. Priddy 编），《当代数学》第 96 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1989 年，PDF，第 281–289 页。[MS 01] M. K. Murray 和 D. Stevenson, 《希格斯场、丛 gerbe 与弦结构》，《数学物理通讯》243（2001），541–555。[MS02] V. Mathai 和 D. Stevenson, 《扭曲 K 理论中的陈特征：等变与全纯情形》，《数学物理通讯》236（2002），161–186。[PS88] A. Pressley 和 G. Segal, 《环群》，克拉伦登出版社，1988 年。[Qui85] D. Quillen, 《黎曼曲面上柯西-黎曼算子的行列式》，《泛函分析及其应用》19（1985），31–34。[RS73] D. Ray 和 I. M. Singer, 《复流形上的解析挠率》，《数学年刊》98（1973），154–177。[Slo85] P. Slodowy, 《广义根系的 Looijenga 不变量理论的特征方法》，《组合数学》55（1985），3–32。[ST04] S. Stolz 和 P. Teichner, 《什么是椭圆对象？》，《拓扑、几何与量子场论》（Ulrich Tillmann 编），伦敦数学会讲义系列，第 308 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004 年，第 247–343 页。[ST05] ,《环空间上的旋量丛》。[Tel98] C. Teleman, 《重新审视量子化猜想》，《数学年刊》152（1998），1–43。[Wal09] K. Waldorf, 《弦联络与陈-西蒙斯理论》，《美国数学会汇刊》365（2009），4393–4432。[Wal 10] ,《几何提升问题的环空间表述》，《澳大利亚数学会杂志》90（2010），129–144。[Wal12] ———— ,《刻画弦流形的环空间上的自旋结构》，2012 年 9 月，arXiv:1209。1731 [math]版本：1。[Was98] A. Wassermann, 《算子代数与共形场论》，《数学发明》133（1998），966–979。[Wit87] E. Witten, 《椭圆属与量子场论》，《数学物理通讯》109（1987），第 4 期，525–536。[Wit88] ,《环空间上 Dirac 算子的指标》，《数学讲义》第 1326 卷（1988），161–181。[Zag88] Don Zagier, 《关于 Landweber-Stong 椭圆属的注记》，《代数拓扑中的椭圆曲线与模形式》（柏林、海德堡）（Peter S. Landweber 编），Springer Berlin Heidelberg, 1988 年，第 216–224 页。

———

Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore 119076
电子邮件地址：e0983446@u.nus.edu

Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore 119076
电子邮件地址：mathanf@nus.edu.sg