arXiv:2601.18153v1 [math.AC] 26 Jan 2026

关于 Golod 子式理想

OMKAR JAVADEKAR

摘要。设 $X=(x_{ij})_{m\times n}$ 为一个不定元矩阵，$S=\Bbbk[x_{ij}\mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n]$ 为无限域 $\Bbbk$ 上的多项式环。设 I 为由 X 的所有 2×2 子式中的一部分生成的理想。我们证明，商环 S/I 是 Golod 的，当且仅当对于某个 $2\times l$ 或 $l\times 2$ 子矩阵 Y，$I=I_2(Y)X$。事实上，我们证明，S/I 的 Golod 性等价于 S/I 的 Koszul 同调上的乘积平凡，也等价于 I 具有线性分解。除此之外，我们还证明了一个关于满足某些条件的环的张量积非 Golod 性的结果。

1. 引言

设 $S=\Bbbk[x_1,\dots,x_n]$ 为域 $\Bbbk$ 上的标准分次多项式环，$I\subseteq(x_1,\dots,x_n)^2$ 为一个齐次理想，且 $R=S/I$。幂级数 $\mathrm{P}^R_{\Bbbk}(z)=\sum_{i\ge 0}\dim_{\Bbbk}\left(\mathrm{Tor}^R_i(\Bbbk,\Bbbk)\right)z^i$ 称为 $\Bbbk$ 在 R 上的庞加莱级数。根据 Serre [31]，的一个结果，存在逐项不等式

$$\mathcal{P}^R_{\Bbbk}(z)\preceq\frac{(1+z)^n}{1-\sum\limits_{i\ge 1}\dim_{\Bbbk}\left(\mathrm{Tor}^S_i(R,\Bbbk)\right)z^{i+1}}.$$

在 [17], Golod 证明，当且仅当 Koszul 复形 $\mathrm{K}(x_1,\ldots\ldots,x_n;R)$ 上的同调的所有 Massey 运算均为平凡时，等式成立；在这种情况下，环 R 称为*Golod*。

判定 Golod 性是一个相当困难的问题。例如，即使 I 是单项式理想，我们也尚未完全刻画 S/I 的 Golod 性。人们已尝试刻画单项式商环的 Golod 性，尤其是那些源自组合对象的单项式商环，例如单纯复形的 Stanley–Reisner 环。对于至多含 4 个变量的多项式环上的 Golod 理想，也已有相关刻画。关于判定 Golod 性及相关判据的非穷尽性文献列表，感兴趣的读者可参阅 [1, 3, 7, 11, 12, 16, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 34] 及其中的参考文献。

当 R 是 Golod 时，所有 Massey 运算的平凡性迫使 Koszul 同调 $\mathrm{H}(\mathrm{K}(x_1,\ldots\ldots,x_n;R))$具有平凡乘积。然而，一般而言，这一条件不足以保证 Golod 性，即便对于单项式商环也是如此，De Stefani [12] 和 Katthän [29] 给出的例子便说明了这一点。在某些特殊情形下，Koszul 同调上的乘积平凡确实等价于 Golod 性。例如，若 I 是由二次元素生成的单项式理想，那么结合 [7, 20, 22], 中证明的结果可知，S/I 是 Golod 环，当且仅当 I 具有线性分解，当且仅当 Koszul 同调上的乘积平凡。本文的主要结果也遵循这一思路。

我们考虑由以下集合的子集生成的理想：所有 2×2 矩阵的子式 $X=(x_{ij})_{m\times n}$ 不定元，其中我们称这类理想为2-子行列式理想，定义在 X 上（见定义2.4）。在文献中，这些理想也被称为广义二项式边理想或一对图的二项式边理想（见 [15]）。由于这一对应关系，这些理想在组合交换代数中备受关注，近年来，人们研究了相关商环的若干同调性质，例如 Castelnuovo–Mumford 正则度、Koszul 性、二次 Gröbner 基的存在性等（例如参见 [6, 15, 26, 30]）。我们考虑的理想类还包括经典行列式理想，作为

2020年 数学主题分类。13D02,13C40。关键词与短语。Golod 环，Koszul 同调，行列式理想，二项式边理想。

一个特殊情形（见 [9]）。本文旨在完整刻画这些理想的 Golod 性。我们的主定理如下。

定理 1.1。 设 $\Bbbk$ 为一个无限域，且 $X = (x_{ij})_{m\times n}$ 为一个不定元矩阵。假设 S 表示多项式环 $\Bbbk[x_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n]$，并且 I 是 X 的一个2-子行列式理想。则以下命题等价：

(i) 环 S/I 是 *Golod* 的。

(ii) I 在 S 上具有线性分解。(iii) $I = I_2(Y)$ 对于某个 $2 \times l$ 或 $l \times 2$ 子矩阵 Y *of* X。(iv) *Koszul* 同调 $\mathcal{H}(\mathcal{K}(x_{11}, \ldots, x_{mn}; S/I))$ 上的乘积是平凡的。

特别地，定理 1.1 说明，一对图 (G_1, G_2) 的二项式边理想是 Golod 的，当且仅当二者 G_1 和 G_2 都是完全图，并且其中一个等于 K_2。

我们对定理1.1 的证明分为几个步骤。首先考虑 X 是一个 $2 \times n$ 矩阵的情形，然后分析 3×3 和 $3\times n$ 的情形。这些初步情形为主要论证奠定了基础。在此过程中，我们证明了关于某些张量积的非 Golod 性的一般性结果，从而将问题化简到一个更简单的情形。该结果与以下经典结论具有相同的精神：Golod 完全交必须是超曲面。主定理证明中的一个关键要素是：对于 Gorenstein 局部环，其 Koszul 复形的同调代数是一个 Poincaré 代数，这一点由 Avramov 和 Golod 证明 [5]。假设 $\Bbbk$ 是无限的，则对于标准分次 Gorenstein $\Bbbk$-代数，同样的结果也成立，这正是我们将采用的版本。

本文的组织如下。第 2 节中，我们回顾必要的定义并建立记号，同时汇集相关的已知结果，推导出一些直接结论。第 3 节研究某些张量积的 Golod 性，并针对 2-子式理想证明一个更一般的结果，该结果将在后续的化简中使用。第 4 节中，我们证明若干准备性结果并建立主定理。最后，我们提出一些旨在推动结果可能推广的评论与问题，包括高阶子式、其他类别的矩阵以及相关类型的理想。

致谢

作者感谢 Aryaman Maithani 在一些 `Macaulay2` [18] 计算方面给予的帮助。作者也感谢 Mugdha Pokharanakar 和 Abhiram Subramanian 提出的意见，这些意见改进了本文的表述。作者感谢金奈数学研究所博士后奖学金提供的支持，以及 Infosys 基金会提供的额外资助。

2. 预备知识

在本文中，$\Bbbk$ 表示一个无限域。设 S 是 $\Bbbk$ 上的标准分次多项式环，I 是 S 的一个齐次理想，且 $R = S/I$。设 $f_1, \ldots, f_d$ 是 R 中的一列齐次元素。*Koszul* 复形 $\mathrm{K}(f_1, \ldots, f_d; R)$ 是自由 R-模构成的分次复形

$$\mathcal{K}(f_1, \ldots, f_d; R): \quad 0 \to \wedge^d R^d \xrightarrow{\partial_d} \wedge^{d-1} R^d \xrightarrow{\partial_{d-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} R^d \xrightarrow{\partial_1} R \to 0,$$

其中，$\partial_1(\mathbf{e}_i) = f_i$，并且对于 $i_1 < \cdots < i_r$，微分定义为

$$\partial_r(\mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_r}) = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1} f_{i_s} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \widehat{\mathbf{e}_{i_s}} \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_r}.$$

有时我们可能会滥用记号，省略 $\wedge$。此时，i^{th} *Koszul* 同调 定义为

$$\mathcal{H}_i(\mathcal{K}(f_1, \ldots, f_d; R)) := \ker(\partial_i)/\mathrm{Im}(\partial_{i+1}).$$

众所周知，H (K($f_1, \ldots, f_d$; R)) 继承了由 Koszul 复形的外代数结构所诱导的乘积结构。

定义 2.1. 若 *Koszul* 同调 $\mathcal{H}(\mathcal{K}(f_1, \ldots, f_d; R))$ 的乘积为平凡乘积，则称其具有平凡乘积。

$$\mathcal{H}_{\geq 1}(\mathcal{K}(f_1, \ldots, f_d; R)) \cdot \mathcal{H}_{\geq 1}(\mathcal{K}(f_1, \ldots, f_d; R)) = 0.$$

若该乘积非零，则称 *Koszul* 同调具有非平凡乘积 .

定义 2.2. 给定一个有限生成分次 R-模 M，其 i^{th} *Betti* 数 $\beta_i^R(M)$以及 $i, j)^{th}$分次 *Betti* 数 $\beta_{i,j}^R(M)$ 定义如下：

$$\beta_i^R(M) = \dim_{\Bbbk}\left(\mathrm{Tor}_i^R(M, \Bbbk)\right) \qquad and \qquad \beta_{i,j}^R(M) = \dim_{\Bbbk}\left(\mathrm{Tor}_i^R(M, \Bbbk)\right)_j .$$

级数 $\mathcal{P}_M^R(z) = \sum_{i\geq 0}\beta_i^R(M)z^i$ 称为 M在 R上的庞加莱级数。 若 M由次数为d的元素生成，则称 M 在 R上有线性分解，若 $\beta_{i,j}^R(M) \neq 0$ 蕴含 $j = d + i$。

给定多项式环 S中的一个齐次理想 I，令 $\mu(I)$ 表示 I的极小生成集的基数。换言之， $\mu(I) = \beta_0^S(I) = \beta_1^S(S/I)$。

注 2.3. 在本注中，我们回顾一些关于 Golod 性的已知事实，后文将会用到。令$S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, I 为 S的一个齐次理想，且 $R = S/I$。

(a) 由于 $\beta_i^S(R) = \dim_{\Bbbk}\left(\mathrm{Tor}_i^S(R, \Bbbk)\right)$，并且 Koszul 复形 K($x_1, \ldots, x_n$; S) 给出了 $\Bbbk$ 在 S上的一个极小自由分解，因此第 1 节提到的 Serre 逐项不等式可以改写为

$$\mathcal{P}_{\Bbbk}^R(z) \preceq \frac{(1+z)^n}{1 - z(\mathcal{P}_R^S(z) - 1)}.$$

环 R 是 Golod 环，当且仅当上述不等式取等号。

(b) 若 R是 Golod 环，则 Koszul 同调 $\mathcal{H}(\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n; R))$ 具有平凡乘积（见 [4, 注 5.2。1]）。

(c) 若 x 是 R上的线性非零因子，则 R 是 Golod 环，当且仅当 $R/(x)$是 Golod 环（见 [4, 命题 5.2.4]）。

令 $X = (x_{ij})_{m\times n}$为一个不定元矩阵。从现在起，我们用 $\Bbbk[X]$表示多项式环$\Bbbk[x_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$。

定义 2.4. 给定任意 $t \geq 1$，若理想 I属于 $\Bbbk[X]$，且 I由 X的所有 $t \times t$阶子式中的某个子集生成，则称其为 X的 t阶子行列式理想 。此外，我们用 $I_t(X)$ 表示由 X的所有 $t \times t$阶子式生成的理想。

注 2.5. 设 $X = (x_{ij})_{m\times n}$、 $S = \Bbbk[X]$，且 I是 X的一个 t阶子行列式理想。若 $\mu(I) \geq 2$，则 $\mathrm{ht}(I) \geq 2$。由此可得 $\mathrm{depth}(S/I) \leq \dim(S/I) \leq mn-2$。因此，由 Auslander–Buchsbaum 公式（见 [8, 定理 1.3.3]），可知对于 $0 \leq i \leq 2$，有 $\beta_i^S(S/I) \neq 0$。但由于 $\beta_i^S(S/I)$ 恰好是 $\mathrm{H}_i(\mathrm{K}(x_{11}, \ldots, x_{mn}; S/I))$ 的 $\Bbbk$维向量空间维数，因此 $\mathrm{H}_1(\mathrm{K}(x_{11}, \ldots, x_{mn}; S/I)) \neq 0$，且 $\mathrm{H}_2(\mathrm{K}(x_{11}, \ldots, x_{mn}; S/I)) \neq 0$。

这一事实将在第 4 节的若干结果中发挥关键作用。

注 2.6。 设 $X = (x_{ij})_{m\times n}$、 $t \geq 2$，并令 $S = \Bbbk[X]$为一个标准分次多项式环。令 I为 X 的一个 t-子行列式理想。

我们也可以将 S视为一个分次环，其中的分次通过规定 $\deg(x_{ij}) = \epsilon_j$来定义。于是，关于此分次，理想 I 是 S的一个分次理想。因此，商环也继承了这一分次，Koszul 复形 $\mathrm{K}(x_{11}, \ldots, x_{mn}; S/I)$ 也同样如此，且微分的次数为零。

注意，次数上存在一个自然的偏序 $\preceq$。我们称 $\sum \alpha_i\epsilon_i \preceq \sum \gamma_i\epsilon_i$，当且仅当对所有 i都有 $\alpha_i \leq \gamma_i$。在主定理的证明中，我们将用到这些事实。

3. 张量积的 Golod 性

我们首先刻画某些标准分次 $\Bbbk$-代数的张量积的 Golod 性。下一个结果可视为经典结论的一个类比：Golod 完全交必然是一个超曲面。

命题 3.1。 设 $I_1 \subseteq (x_1, \dots, x_n)^2 \subseteq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ 和 $I_2 \subseteq (y_1, \dots, y_m)^2 \subseteq \Bbbk[y_1, \dots, y_m]$ 为齐次理想，且满足 $I_1 \neq 0$。令

$$R_1 = \frac{\Bbbk[x_1, \dots, x_n]}{I_1}, \qquad R_2 = \frac{\Bbbk[y_1, \dots, y_m]}{I_2}, \qquad R = R_1 \otimes_{\Bbbk} R_2.$$

那么 R 是 *Golod*，当且仅当 R_1 是 *Golod*且 $I_2 = 0$。

证明。设 $S_1 = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$，$S_2 = \Bbbk[y_1, \dots, y_m]$，以及 $S = S_1 \otimes_{\Bbbk} S_2 \cong \Bbbk[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$。于是，令 $I = I_1 S + I_2 S$，有 $R \cong S/I$。

($\Longleftarrow$) 设 R_1 是 Golod，且 $I_2 = 0$。那么 $R \cong R_1[y_1, \dots, y_m]$，并且 $y_1, \dots, y_m$ 是R上的正则序列。由注 2.3(c)，R 是 Golod。

($\Longrightarrow$) 假设 R 是 Golod。我们首先证明 $I_2 = 0$。R 的 Golod 性质给出如下庞加莱级数等式：

$$\mathcal{P}^{R}_{\Bbbk}(z) = \frac{(1+z)^{n+m}}{1 - z\big(\mathcal{P}^{S}_{R}(z) - 1\big)}, \tag{1}$$

由注 2.3(a)。另一方面，由 [27, 2。3]可得

$$\mathcal{P}^{R}_{\Bbbk}(z) = \mathcal{P}^{R_1}_{\Bbbk}(z)\mathcal{P}^{R_2}_{\Bbbk}(z), \qquad \mathcal{P}^{S}_{R}(z) = \mathcal{P}^{S_1}_{R_1}(z)\mathcal{P}^{S_2}_{R_2}(z). \tag{2}$$

再次利用注2.3(a)，可得逐项不等式

$$\mathcal{P}^{R_1}_{\Bbbk}(z) \preceq \frac{(1+z)^{n}}{1 - z\big(\mathcal{P}^{S_1}_{R_1}(z) - 1\big)}, \qquad \mathcal{P}^{R_2}_{\Bbbk}(z) \preceq \frac{(1+z)^{m}}{1 - z\big(\mathcal{P}^{S_2}_{R_2}(z) - 1\big)}.$$

将这些不等式相乘并利用 (2)，得到

$$\mathcal{P}^{R}_{\Bbbk}(z) \preceq \frac{(1+z)^{n+m}}{\big(1 - z(\mathcal{P}^{S_1}_{R_1}(z) - 1)\big)\big(1 - z(\mathcal{P}^{S_2}_{R_2}(z) - 1)\big)}. \tag{3}$$

结合 (1) 和 (3)，我们推出

$$\frac{1}{1 - z(\mathcal{P}^{S}_{R}(z) - 1)} \preceq \frac{1}{\big(1 - z(\mathcal{P}^{S_1}_{R_1}(z) - 1)\big)\big(1 - z(\mathcal{P}^{S_2}_{R_2}(z) - 1)\big)}. \tag{4}$$

将等式 (4) 两边展开为关于 z 的幂级数后，我们看到左边 z^3 的系数等于

$$\beta_1^{S_1}(I_1) + \beta_1^{S_2}(I_2) + \mu(I_1)\mu(I_2),$$

而右边的系数等于

$$\beta_1^{S_1}(I_1) + \beta_1^{S_2}(I_2).$$

由于 $\mu(I_1) > 0$ 根据假设，不等式 (4) 推出 $\mu(I_2) = 0$；因此 $I_2 = 0$。于是，我们有 $R = R_1 \otimes_{\Bbbk} S_2$。 y_1、……、y_m 在 R 中的像构成一个正则序列。根据注2.3(c)，商环 $R/(y_1, \dots, y_m) \cong R_1$ 是 Golod 的。证明完毕。□

事实上，命题 3.1 中的结论可以加强。设定与命题 3.1中的相同。考虑 Koszul 复形 $\mathcal{K}_1 := \mathcal{K}(x_1, \dots, x_n; S_1/I_1)$，$\mathcal{K}_2 := \mathcal{K}(y_1, \dots, y_m; S_2/I_2)$，以及

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \otimes_{\Bbbk} K_2 = \mathcal{K}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m; S/I).$$

应用 th Künneth 定理（见 [10, 第四章]）对于每个整数 k，我们都有一个同构

$$\bigoplus_{i+j=k} \mathcal{H}_i(\mathcal{K}_1) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{H}_j(\mathcal{K}_2) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}_k(\mathcal{K}),$$

其中映射 α 保持 Koszul 同调上的乘积结构。更准确地说，如果 $a \in \mathrm{H}_i(\mathrm{K}_1)$ 和 $b \in \mathrm{H}_j(\mathrm{K}_2)$，那么自然地有 $a \in \mathrm{H}_i(\mathrm{K})$ 和 $b \in \mathrm{H}_j(\mathrm{K})$，并且我们有 $\alpha(a \otimes b) = a \wedge b$ in $\mathrm{H}_{i+j}(\mathrm{K})$。如命题 3.1 所述，我们有庞加莱级数的等式 $\mathrm{P}_R^S(z) = \mathrm{P}_{R_1}^{S_1}(z)\mathrm{P}_{R_2}^{S_2}(z)$，这说明

$$\dim_{\Bbbk}(\mathcal{H}_k(\mathcal{K})) = \sum_{i+j=k} \dim_{\Bbbk}(\mathcal{H}_i(\mathcal{K}_1)) \cdot \dim_{\Bbbk}(\mathcal{H}_j(\mathcal{K}_2)).$$

因此可知，若 $\{a_{i1}, \ldots, a_{ir_i}\}$ 是 $\mathrm{H}_i(\mathrm{K}_1)$ 的一个 $\Bbbk$-基，而 $\{b_{j1}, \ldots, b_{js_j}\}$ 是 $\mathrm{H}_j(\mathrm{K}_2)$ 的一个 $\Bbbk$-基，则 $\mathrm{H}_k(\mathrm{K})$ 的一个 $\Bbbk$-基为 $\bigcup_{i+j=k}\{a_{ip} \wedge b_{jq} \mid 1 \le p \le r_i, 1 \le q \le s_j\}$。由此我们证明了

如下结论。

命题 3.2。 设 $I_1 \subseteq S_1 = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $I_2 \subseteq S_2 = \Bbbk[y_1, \ldots, y_m]$ 是非零齐次理想，分别由次数为 ≥ 2，$S = S_1 \otimes_{\Bbbk} S_2$ 和 $I = I_1 S + I_2 S$ 的元素生成。那么 *Koszul* 同调 $\mathcal{H}(\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m; S/I))$ 上的乘积非平凡。

注 3.3。 虽然命题 3.2，结合 Golod 环的 Koszul 同调具有平凡乘积这一事实，可以直接用于证明命题 非平凡的 蕴含关系，但我们想指出，命题 3.1的证明仍然具有启发性。证明中出现的额外因子 μ（I_1）μ（I_2）恰好等于 维数$_{\Bbbk}$（H_1（K_1））· 维数$_{\Bbbk}$（H_1（K_2）），可以将其视为 *Golod* 性的第一个障碍，正如预期的那样。

命题 3.2 很容易推出如下结论：如果 $I \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots\ldots, x_n]$ 是一个可以写成两个单项式理想之和的单项式理想，且这两个单项式理想的生成元不共享变量（例如，如果 I 是余维至少为二的完全交），那么 S/I 在其 Koszul 同调上不具有平凡乘积，因此不是 Golod 环。

命题 3.2 的以下版本将在下一节中发挥关键作用。

推论 3.4。 设 I 是 $X = (x_{ij})_{m\times n}$ 和 $S = \Bbbk[X]$ 的2阶子行列式理想。若 I 可写成 X 中两个2阶子行列式理想之和，且它们的生成子式没有共同变量，则 *Koszul* 同调 $\mathcal{H}(\mathcal{K}(x_{11}, \ldots, x_{mn}; S/I))$ 上的乘积非平凡。

4. Golod 2-Subdeterminantal Ideals

本节致力于证明定理 1.1。我们先介绍几个预备引理。

引理 4.1。 设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$ 是一个 $2\times n$ 不定元矩阵，$S = \Bbbk[X]$，且 I 是 X 的非零2阶子行列式理想。那么以下命题等价：

(i) H（K（$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$；$S/I$）上的乘积是平凡的。

(ii) $I = I_2$（Y）是 X 的某个 $2\times l$ 子矩阵 Y。

证明。（ii）蕴含（i）。当 $I = I_2(Y)$ 是某个 $2\times$l 矩阵 Y 时，Eagon–Northcott 复形（见 [13]）给出了 I 在 S 上的线性最小自由分解。由 [22, 定理 4]，可知，若 I 是逐分次线性的且不含线性形式，则 S/I 是 Golod。因此，根据注 2.3(b)，我们得到 H（K($x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$; S/I)) 上的乘积是平凡的。

(i) $\Longrightarrow$ (ii). 假设 $\mathcal{H}(\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; S/I))$ 上的乘积是平凡的。为证矛盾，假设 I不能写成 $I_2(Y)$ 的形式。那么根据推论 3.4，可知存在

$1 \le i < j < k \le n$，使得以下三个子式中恰有两个是 I 的极小生成元 :

$$M_1 = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}.$$

在不 失一般性，假设 M_1 和 M_2 是 I的极小生成元，而 M_3 不是。

回顾一下，Koszul 复形 $\mathcal{K}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n; S/I)$ 是一个分次复形，其映射的次数为零，分次定义如注 2.6所述。将 Koszul 复形限制在次数 $\le r\epsilon_i + r\epsilon_j + r\epsilon_k$ for$r \gg 0$上。由此得到的复形恰好是由元素 $x_i, x_j, x_j, y_i, y_j, y_k$在环$R' = \Bbbk[x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k]/(M_1, M_2)$上的 Koszul 复形。

注意， $\Bbbk[x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k]/(M_1, M_2)$ 是一个完全交，因此是 Gorenstein。根据 Avramov 和 Golod 的研究 [5], , 可知 S/I 的 Koszul 同调代数是一个 Poincaré 代数。由注 2.5 可知， H (K ($x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k$; R')) 的 socle次数至少为 2，因此它有非平凡乘积。因此， H (K ($x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$; S/I)) 有非平凡乘积，这就产生了矛盾。于是， I必为 $I_2(Y)$ 的形式，其中 Y是 X的某个 $2 \times$l 子矩阵。□

以下是一个关键观察，它可直接由上文引理中 (i) $\implies$ (ii) 的证明得出。

推论 4.2. 设 $X = (x_{ij})_{m \times n}$ 是不定元矩阵， $S = \Bbbk[X]$，且令 I 为 X 的一个2-子行列式理想。给定任意 $1 \le j_1 < j_2 \le n$，令 I^{j_1, j_2} 为由 I 中形如以下形式的生成元生成的理想

$$\begin{vmatrix} x_{i_1 j_1} & x_{i_1 j_2} \\ x_{i_2 j_1} & x_{i_2 j_2} \end{vmatrix}.$$

若 $\mathcal{H}(\mathcal{K}(x_{11}, \ldots, x_{mn}; S/I))$具有平凡乘积，则对于某个 l，有 $I^{j_1, j_2} = I_2(Y)$，其中 Y 是

$$\begin{bmatrix} x_{1 j_1} & \cdots & x_{m j_1} \\ x_{1 j_2} & \cdots & x_{m j_2} \end{bmatrix}^T.$$

将 X 替换为 X^T 后，显然，对于任意选取的两行而非两列，也有类似的结论。

接下来我们关注 3×3 情形。

引理 4.3. 设 $X = (x_{ij})_{3 \times 3}$ 是不定元矩阵， $S = \Bbbk[X]$，且 I 是一个非零的2-子行列式理想 X。则以下条件等价:

(i) $\mathcal{H}(\mathcal{K}(x_{11}$、 ……、 $x_{33}; S/I))$ 上的乘积是平凡的。

(ii) 对于某个 $2 \times l$，或对于 X 的一个 $l \times 2$子矩阵 Y， $I = I_2(Y)$成立，其中 $l = 2$ 或 3。

证明。 如前所述，若 (ii) 成立，则 S/I 是 Golod，因此 (i) 成立。

反过来，假设 (i) 成立。若 $\mu(I) = 1$，则 I具有 $I_2(Y)$ 的形式，结论便得证。因此，假设 $\mu(I) \ge 2$。如引理4.1的证明中所述，若 S/I 是 Gorenstein，则根据 [5] 和注 2.5，$/I$ 的 Koszul 同调代数是 socle次数至少为 2的 Poincaré 代数；此时 (i) 不成立。因此，我们还可以进一步假设 S/I 不是 Gorenstein。

如果 $\mu(I) \le 3$，那么 I 不是 Gorenstein（事实上是完全交）的唯一可能性是：对于某个 2×3 或 3×2 子矩阵 Y， X 的 $I = I_2(Y)$，这意味着 (ii)。因此，我们可以假设 $\mu(I) \ge 4$。现在，考虑矩阵

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

并令

$$M_1 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix},$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}, \quad M_5 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix}, \quad M_6 = \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_7 = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}, \quad M_8 = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix}, \quad M_9 = \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}.$$

若 $\mu(I) = 9$，则 S/I 由 [9, 推论 89]可知是 Gorenstein。因此，我们可以假设 $\mu(I) \leq 8$。不失一般性，设 $M_9 \notin I$。然后，对第2行和第2 与3行组成的子矩阵应用推论 $M_8 \notin I$4.2，可假设 $M_8 \notin I$。类似地，对第2 和第3列组成的子矩阵应用该推论，可假设 $M_6 \notin I$。

将推论4.2 应用于由第1行和第3行组成的子矩阵，可知元素M_4 和 M_5 中至多有一个是 I的生成元。类似地，将该推论应用于由第1和第3列组成的子矩阵，元素 M_2 和 M_5 中至多有一个是 I的生成元。因此，我们得到以下几种情况:

•情形 *1*: M_5 是 I的一个生成元。
在这种情况下，由于 $\mu(I) \geq 2$，我们必有 $I = (M_1, M_3, M_5, M_7)$。然而，将推论 4.2 应用于由第 1行和第2行构成的子矩阵，可知条件 (i) 不成立，这不可能。

•情形 *2*: M_5 不是 I的一个生成元。
在这种情况下，要么 $I = (M_1, M_2, M_3, M_4, M_7)$，要么 I 由 $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_7\}$ 的一个含 4 个元素的子集生成。在前一种情况下，S/I 是 Gorenstein，这与假设矛盾。在后一种情况下，将推论 4.2 应用于由第 1 行和第 2 行构成的子矩阵，可知 I 包含 M_1, M_2, M_3。对由第 1 列和第 2 列构成的子矩阵进行类似论证，可知 I 包含 M_1, M_4, M_7。因此，$I = (M_1, M_2, M_3, M_4, M_7)$，这是不可能的。

这表明，对于某个 $2 \times l$ 或 $l \times 2$ 子矩阵 Y，其属于 X，其中 $l = 2$或 3 . □

推论 4.4. 设 $X = (x_{ij})_{3\times n}$ 是一个不定元矩阵，$S = \mathbb{k}[X]$，且 I 是 X 的非零2- 子行列式理想。那么以下条件等价:

(i) $x_{11}, \ldots\ldots, x_{3n}; S/I)$ 上的乘积是平凡的。

(ii) 对于某个 $2\times$，$I = I_2(Y)$ 是 X 的 l 或 $l \times 2$ 子矩阵 Y，其中 $l \geq 2$。

将 X 替换 为 X^T 后可知，对于 $n \times 3$ 不定元矩阵也有类似的结论。

证明。正如前面所述，(ii) ⟹(i) 成立。反过来，假设 (i) 成立。回顾一下，Koszul 复形 $\mathrm{K}(x_{11}, \ldots, x_{3n}; S/I)$ 关于由 $\deg(x_{ij}) = \epsilon_j$ 定义的分次是分次的。因此，若 X^{j_1,j_2,j_3} 是由 X 的列 j_1, j_2, j_3 组成的子矩阵，且若 I^{j_1,j_2,j_3} 是由来自 X^{j_1,j_2,j_3}的生成子式生成的 S 的理想，那么由引理 4.3 可知，对于某个 $2\times$l 或 l $\times 2$，有 $I^{j_1,j_2,j_3} = I_2(Y)$，其中 Y 是 X^{j_1,j_2,j_3}的子矩阵。

为导出矛盾，假设 (ii) 不成立。那么必有 $\mu(I) \geq 2$。不失一般性，设 $M_1 := \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \in I$。我们考虑以下情形:

• *Case 1:* $M_2 := \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} \in I$.
根据我们的假设和推论 3.4， I 必定有一个子式生成元 M_3 形如 $\begin{vmatrix} x_{i_1 j} & x_{i_1 k} \\ x_{i_2 j} & x_{i_2 k} \end{vmatrix}$，其中 $j \leq 2$且 $k > 2$。但如上所述，取 $(j_1, \ j_2, \ j_3) = (1, \ 2, \ k)$，便得到矛盾。

•情形 *2*： $M_2 \notin I$.
鉴于推论 4.2，如有必要，对 X 的列进行置换后，我们可以令l 为这样一个整数：由 I 的前两行得到的生成元所生成的理想 $I_{1,2}$ 等于 $I_2(Y)$，其中
$Y = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1\ell} \\ x_{21} & \cdots & x_{2\ell} \end{bmatrix}$.
我们断言 $I = I_2(Y)$。根据我们的假设和推论 3.1， I 必须有一个子式生成元 $M_3 \notin I_2(Y)$，其中包含至少一个且至多两个出现在 Y中的变量。如果 M_3 与 Y有一个共同变量，那么如有必要，对 X 的列进行置换后，我们可以假设 $M_3 = \begin{vmatrix} x_{22} & x_{2k} \\ x_{32} & x_{3k} \end{vmatrix}$，其中某个 $k > 1$。但取 $(j_1, j_2, j_3) = (1, 2, k)$ 会导致矛盾。如果 M_3 与 Y有两个共同变量，那么同样地，如有必要，对列进行置换后，我们可以假设 $M_3 = \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$。取 $(j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 3)$ 也会导致矛盾。□

我们现在可以证明主定理了。

定理 *1.1*的证明。

蕴含关系 (i) $\implies$ (iv) 由注 2.3(c) 得出。

根据 [22, 定理 4], , 我们知道，如果 I 是逐分次线性且不含线性形式，那么 S/I 是 Golod。由于具有线性分解的理想是逐分次线性的，故 (ii) $\implies$ (i) 成立。

当 $I = I_2(Y)$ 对某个 $2 \times l$ 阶或 $l \times 2$矩阵 Y成立时，Eagon–Northcott 复形给出 I 在 S上的线性最小自由分解。因此，(iii) $\implies$ (ii) 成立。

为完成证明，我们现在证明 (iv) $\implies$ (iii)。证明思路与推论 4.4的非常相似。首先注意，若 $\mu(I) \leq 1$，则无需证明。因此，假设 $\mu(I) \geq 2$。令l 为满足以下条件的最大整数：存在一个 $2 \times l$ 阶或 $l \times 2$ 子矩阵 Y，使得 X的每个 2×2 子式 Y 都是 I的极小生成元。不失一般性，必要时将 X 替换为 X^T，我们可以假设

$$Y = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1\ell} \\ x_{21} & \cdots & x_{2\ell} \end{bmatrix}.$$

我们考虑两种情形。

• 情形 *1*： $l = 2$.
根据我们对 l 的选择可知，若 M 是 X 的任意一个子式，且它是 I的生成元，那么 M 至多包含一个来自 Y中所出现变量的变量。若不存在与 Y中的变量有共同变量的 M，则 I具有如下形式： $I_2(Y) + J$，其中 J是某个非零理想，其生成集涉及的变量均未出现在 Y中。在这种情形下，由推论 3.4 可知 (iv) 不成立。因此，假设 M 与 Y之间有一个共同变量。不失一般性，设 $M = \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$。

接着对 X的前三列应用推论 4.4，可得 (iv) 不成立。

• 情形 *2*： $l \geq 3$。
根据上文情形 1 中的类似分析，对于任意 M，它与 Y 至多相交于 2 个变量。若没有 M 与 Y相交，或者交集仅包含一个变量，那么与情形 1 中一样，我们可知 (iv) 不成立。

若交集中包含 2 个变量，不失一般性地（更准确地说，如有必要，可通过置换列），我们可以假设 $M = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}$。再次将推论 4.4 应用于 X 的前 3 列，可知 (iv) 不成立。

这表明 I 必定等于 $I_2(Y)$，从而完成证明。 □

注 4.5. 一般而言，若 I 是由不定元组成的 $m \times n$ 矩阵 X 的 t-子式理想，其中 t、m、$n \geq 3$，那么 S/I 具有 Golod 性，并不意味着 I 在 S 上有线性分解。例如，正如下面的 `Macaulay2` [18] 计算所示，当 I 由一个不定元 3×4 矩阵 X 的四个 3×3 子式中的任意三个生成时，环 $\mathbb{k}[X]/I$ 是 Golod 的，但此时 I 没有线性分解。同一例子还告诉我们，对于 $t \geq 3$，S/I 具有 Golod 性，并不能保证 I 具有某个 $t \times$ 的 $I_t()$ 形式，其中 1 或 1 $\times t$ 子矩阵 Y 属于 X。

```
i1 : loadPackage "DGAlgebras";

i2 : m = 3;

i3 : n = 4;

i4 : S = QQ[x_(1,1)..x_(m,n)];

i5 : X = transpose genericMatrix(S, n, m);

o5 : Matrix S^3 <--- S^3

i6 : mins = flatten entries gens minors(3, X);

i7 : I = ideal(mins#0, mins#1, mins#2);

o7 : Ideal of S

i8 : betti res I

o8 =

            0 1 2 3
total:      1 3 3 1
    0:      1 . . .
    1:      . 3 . .
    2:      . . 3 1

o8 : BettiTally

i9 : R = S/I;

i10 : isGolod R

o10 = true
```

定理 1.1 以及上文的注记 4.5 促使我们提出以下问题。

问题 4.6。 设 $t, m, n \geq 3$, $X = (x_{ij})_{m \times n}$ 是一个不定元矩阵，且 $S = \mathbb{k}[X]$。假设 I 是 X 的一个 t-子行列式理想。那么，S/I 是 *Golod*，当且仅当 S/I 的 *Koszul* 同调上的乘积为零吗？

问题 4.7。 设 $t, m, n \geq 3$, $X = (x_{ij})_{m \times n}$ 是一个不定元矩阵，且 $S = \mathbb{k}[X]$。设 I 是 X 的一个 t-子行列式理想。何时 S/I 是 *Golod*？

（广义）二项式边理想是（广义）行列式簇面理想的一种特殊情形（参见[2, 14]）。近年来，对广义行列式簇面理想的研究与对广义二项式边理想的研究一样，受到了广泛关注。因此，上述问题可以重新表述为

询问哪些与维数为（$t-1$）的纯单纯复形相关联的广义行列式簇面理想是 Golod。

文献中也研究了由其他类型的不定元矩阵（如对称矩阵或 Hankel 矩阵）所生成的行列式理想。人们可以针对由这些理想定义的环的 Golod 性质提出类似的问题。另一个自然的研究方向是探讨永久式理想的类似问题。总体而言，与行列式理想相比，永久式理想表现出截然不同且不一致的行为。永久式理想的 Golod 性质会如何，值得进一步研究。

参考文献

[1] R. Ahangari Maleki. 理想的幂与 Koszul 理想的 Golod 性质。《纯粹与应用代数杂志》，223(2):605–618，2019。1[2] A. Almousa 和 K. VandeBogert. 较小阶子式的行列式簇面理想。《数学档案》（巴塞尔），118(3):247–256，2022。9[3] N. Altafi、N. Nemati、S. A. Seyed Fakhari 和 S. Yassemi. 单项式理想幂的自由分解与 Golod 环。《斯堪的纳维亚数学杂志》，120(1):59–67，2017。1[4] L. L. Avramov. 无限自由分解。载于《交换代数六讲》（Bellaterra，1996），《数学进展》第166卷，页码 1 118 1998 3 –。Birkhäuser，巴塞尔，。L. L. Avramov 和 E. S. Golod. 局部 Gorenstein 环的 Koszul 复形代数的同调。《数学札记》，9:53–58，1971。2，6 [5] [6] 515 344 359, 2018 1 H. Baskoroputro、V. Ene 和 C. [7] 315 1 249 273, 2007 Ion. 图对的 Koszul 二项式边理想。《代数杂志》，:–。A. Berglund 和 M. Jöllenbeck. 关于 Stanley-Reisner 环的 Golod 性质。《代数杂志》，( ):–。[8] 39 W. Bruns 和 J. Herzog. Cohen–Macaulay 环，《剑桥高等数学研究》第 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1993 3 。W. Bruns 和 U. Vetter. 行列式环，[9] 《数学讲义》第1327卷。Springer-Verlag，柏林，1988。2，7 [10] 1956 4 H. Cartan 和 S. Eilenberg. 同调代数。普林斯顿大 [11] 47 1 359 367, 2022 1 学出版社，普林斯顿，新泽西州，。H. Dao 和 A. De Stefani. 关于单项式 Golod 理想。《越南数学学报》，( ):–。[12] 220 6 2289 2306, 2016 1 A. De Stefani. 理想的乘积未必是 Golod。《纯粹 [13] 与应用代数杂志》，( ):–。J. A. Eagon 和 D. G. Northcott. 由矩阵定义的理想及与之相关的某个复形。《伦敦皇家学会会刊 A辑》，269:188–204，1962。5[14] 62 1 39 57, 2013 9 V. Ene、J. Herzog、T. [15] Hibi 和 F. Mohammadi. 行列式簇面理想。《密歇根数学杂志》，( ):–。V. Ene、J. Herzog、T. Hibi 和 A. A. Qureshi. 图对的二项式边理想。《名古屋数学杂志》，:105 125，2014 1 –。213 [16] A_∞ 18 6 3403 3424, 2018 1 R. Frankhuizen. 单项式环的 - [17] 分解与 Golod 性质。《代数几何与拓扑》，( ):–。E. S. Golod. 某些局部环的同调。《苏联科学院院刊》，:–。144 479 482, 1962 1 [18] 2, D. R. Grayson 和 M. E. Stillman. Macaulay: 用于代数几何研究的软件系统。可见于//www.math.uiuc.edu/Macaulay2/ http: 。2, 9 [19] J. Grbić、T. Panov、S. Theriault 和 J. Wu. 旗复形的矩-角复形的同伦类型。《美国数学会汇刊》，368(9):6663–6682，2016。1[20] 95 1 23 32, 2004 1 [21] J. Herzog、T. Hibi 和 X. Zheng. 幂具有线性分解的单项式理想。《斯堪的纳维亚数学杂志》，( ):–。246 89 99, 2013 J. Herzog 和 C. Huneke. 常规幂与符号幂都是 Golod 的。《数学进展》，:–。[22] J. Herzog、V. Reiner 和 V. Welker. 分次分量线性理想与 Golod 环。《密歇根数学杂志》，46(2):211–223，1999。1，5，8[23] K. Iriye 和 D. Kishimoto. 二维单纯复形的 Golod 性与多面体积。《数学论坛》，30(2):527–532，2018。1 [24] 3 23 5 2191 2212, 2023 1 K. Iriye 和 D. Kishimoto. Golod 性与紧 -流形。[25] 《代数几何与拓扑》，( ):–。K. Iriye 和 D. Kishimoto. 紧复形是 Golod 的。《国际数学研究通讯》（IMRN），( ):–。8 6471 6495, 2024 1 [26] A. Jayanthan 和 A. Kumar. （广义）二项式边理想及其正则度。arXiv 预印本 arXiv: *2508 12607*, 2025 1 。。D. A. Jorgensen. 关于环 [27] 的张量积与扩张猜想。《交换代数杂志》，( ):–。1 4 635 646, 2009 4 [28] 220 6 L. Katthän. 变化的特征下 Stanley-Reisner 环的 Golod 性质。《纯粹与应用代数杂志》，( ):2265 2276，2016 1 –。[29] 479 244 262, 2017 1 L. Katthän. 一个在 Koszul 同调上乘积平 [30] 凡的非 Golod 环。《代数杂志》，:–。A. LaClair、M. Mastroeni、J. McCullough 和 I. Peeva. Koszul 二项式边理想。《数学论坛 Sigma》，:论文编号 e3，2026 1。14

[31] J.-P. Serre. 局部代数。重数，载于第11卷 数学讲义。Springer-Verlag，柏林-纽约，1965年。法兰西公学院课程，
1957 1958，
1965 1 – Pierre Gabriel 笔录，第二版，。S. A. Seyed
[32]
Fakhari 和 V. Welker. 单项式理想的乘积与高次符号幂的 Golod 性质。《代数杂志》，400:290–298，2014。1
[33]
150 8 3345 3356, 2022 1 K. VandeBogert. 理想的乘积与
[34]
Golod 环。《美国数学会会刊》，( ): –。J. Zoromski. Koszul 同调中的单项式循环。*arXiv* 预印本 *arXiv:* 。。
2409 07583, 2024 1

印度泰米尔纳德邦 Siruseri 603103，金奈数学研究所电子邮箱地址：
omkarj@cmi.ac.in