arXiv:2601.18185v1 [math.OA] 26 Jan 2026

图-花环积冯·诺伊曼代数的相对双精确性与结构性结果

TAISUKE HOSHINO

Abstract. 我们研究图积群冯·诺伊曼代数和图-花环积群冯·诺伊曼代数的相对双精确性。特别地，在分量群精确的假设下，我们证明了图积冯·诺伊曼代数 $LH_\Gamma = *_{v,\ \Gamma} LH_v$ 以及图-花环积冯·诺伊曼代数 $L(H_\Gamma \rtimes G) = (*_{v,\ \Gamma} LH) \rtimes G$ 具有相对双精确性。证明采用了 Ozawa 的 C^*-代数方法。作为应用，对于某一类图-花环积，我们建立了商图 $G\backslash\Gamma$在稳定同构下的刚性结果。此外，我们还得到了一族新的素 II_1因子。

1. Introduction and main results

从历史上看，自冯·诺伊曼代数研究之初，人们有时会从群以及群在空间上的作用等较简单的对象构造重要例子；有时则会从较简单的代数出发，运用张量积和合并自由积等构造方法来构造这些例子。在这一背景下，刚性问题关注的是，构造这些代数的基本对象中有多少信息会保留在最终得到的冯·诺伊曼代数中。这些问题一直是冯·诺伊曼代数理论的核心课题。例如，从这一角度看，Connes 关于可 amenable 冯·诺伊曼代数的著名工作[Con76]表明，由可和无限共轭类群产生的代数完全不具有刚性。

在 21 世纪初，人们发展出两种强大的方法来分析相交换的冯·诺依曼子代数的相对位置。一种是 Popa 变形/刚性技术及其变体 [Pop06a, Pop06b], , 另一种是 Ozawa 提出的群的双精确性概念 [Oza04]。双精确性是一种可由若干等价条件刻画的性质，其中包括某种作用在其边界上的可和性；典型例子包括可和群和双曲群（详见第 2.2 节）。本文聚焦于双精确性方法。

这些方法推动了对（合并）自由积冯·诺依曼代数的研究取得重大进展 [IPP08, Oza04]。它们为自由群因子的素性提供了另一种证明；这一结果最初由 Ge [Ge98]借助自由熵确立。此外，这些方法还为张量积和自由积带来了刚性结果[IPP08, OP04, Oza06]。这些技术广泛研究的另一类冯·诺依曼代数是绕圈积冯·诺依曼代数。这一进展促成了首个 W^*-超刚性群的发现 [IPV13], , 它们是

Date: 2026年1月27日。

群 G，满足如下性质：任何与其群冯·诺依曼代数同构的群 H $LG \cong LH$ 都满足 $G \cong H$。

本文旨在为图积群和图-花环积群建立双精确性结果，并将这些结果应用于研究其群冯·诺伊曼代数的结构问题。我们的论证是对先前关于自由积和 wreath 积的论证的推广。给定一个图 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 和一个群族 $(G_v)_{v\in V\Gamma}$，图乘积群 G_Γ 定义为

$$G_\Gamma = \langle (G_v)_{v\in V\Gamma} \mid [G_v, G_w] = 1 \ ((v,w) \in E\Gamma)\rangle.$$

这也可视为一种迭代合并自由积构造。Green [Gre90], 最先在群论背景下引入了这一构造，随后 Caspers 和 Fima [CF17]将其引入算子代数背景。这一背景下的刚性问题关注的是，能否从所得群或冯·诺伊曼代数中恢复底层图或顶点群。尽管这一问题在群论中已得到广泛研究，图乘积冯·诺依曼代数直到近十年才引起广泛关注。目前已取得若干刚性类型的结果；近期进展可参见 [CDD25a、CDD25b、DV25、HI25] 。这些结果基于合并自由积的变形/刚性理论。

这些关于图积冯·诺伊曼代数的刚性类型结果促使我们聚焦于双精确性方法。在算子代数背景下，双精确性通常被理解为 (AO) 型条件。沿着这一思路，在 [Cas20] Caspers 为直角海克代数建立了 (AO) 型性质；直角海克代数是图积冯·诺伊曼代数的特例。最近，在 [BCC24 第 6 节中，2], Borst、Caspers 和 Chen 假设并利用每个顶点冯·诺依曼代数都具有 (AO) 型性质，得到了图积的一个刚性类型结果。另一个方向上，Oyakawa 通过几何方法，在 [Oya24b 的定理 4.9、5.7], 中，在某些技术性假设下，得到了图积的双精确性类型结果。

我们的第一个主要结果为图积建立了一个双精确性类型结果，去除了前述结果 [Oya24b 定理 4.9] 中的技术性限制。

定理 A. 设 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 是一个图，$(H_v)_{v\in V\Gamma}$ 是一族精确群。那么，图积 H_Γ 关于 $\{\langle H_w \mid v = w \text{ 或 } (v,w) \in E\Gamma\rangle\}_{v\in V\Gamma}$ 是双精确的。

此外，如果对所有 $v \in V\Gamma$，(H_v) 都是双精确的，那么 H_Γ 关于 $\{\langle H_w \mid (v,w) \in E\Gamma\rangle\}_{v\in V\Gamma}$ 是双精确的。

定理 A 的证明依赖于 C^*-代数技术，该技术由 [Oza06] 提出。此外， [Has19]，得到的约化摊余自由积核性的充分条件也发挥了作用。

接下来，我们考虑图-花环积冯·诺伊曼代数。给定一个群H 以及该群在图 $G \curvearrowright \Gamma$上的作用，记 H_Γ 为底层图是 Γ 、顶点群$(H_v)_{v\in V\Gamma}$ 均与 H同构的图积。于是，存在一个伯努利型作用 $\sigma : G \to \mathrm{Aut}(H_\Gamma)$，使得$\sigma_g$ 将 $h \in H_v$ 映至$h \in H_{gv}$。半直积 $H_\Gamma \rtimes_\sigma G$ 称为图 *wreath* 积群。与图积和 wreath 积不同，这种构造受到的关注相对较少。尽管如此，在双精确性的背景下，Oyakawa[Oya24b, Theorem 5.7] 最近采用几何方法证明，某一类图 wreath 积满足相对双精确性。我们

沿着 [HIK22]所发展的思路，采用解析方法强化这一结果。

定理 B. 设 H 是一个精确群， $\Gamma = (V\Gamma,\ E\Gamma)$ 是一个图，且 $G \curvearrowright \Gamma$ 是双精确群 G 在 Γ 上的作用。若 $G \curvearrowright V\Gamma$ 的各向同性群均为有限群，且 $G \curvearrowright V\Gamma$ 只有有限多个轨道，则图-花环积 $H_\Gamma \rtimes G$ 相对于 $\{\langle H_w \mid v = w \text{ 或 } (v,\ w) \in E\Gamma\rangle\}_{v\in V\Gamma}$ 是双精确的。

此外，若 H 是双精确的，则 $H_\Gamma \rtimes G$ 相对于 $\{\langle H_w \mid (v,\ w) \in E\Gamma\rangle\}_{v\in V\Gamma}$ 是双精确的。

注 1.1. (1) 鉴于 H 是一个一般的非 amenable 双精确群，定理 A 和定理 B 中证明的相对双精确性已达到可能的最强形式。事实上，若 H 是非 amenable 的，那么对于任意 $v \in V\Gamma,\ W^*\{LH_w \mid (v,\ w) \in E\Gamma\} \subseteq LH_\Gamma$ 的交换子都包含非 amenable 子代数 LH_v。

(2) 与 [Oya24b], 中的结果相比，定理 A 和定理 B 分别强于 [Oya24b] 中的定理 4.9 和定理 5.7 (2)，但定理 A 无法复现[Oya24b 定理 5.7 (1)], 的结果；该结果是在假设 H 有限且 Γ不含短回路的条件下证明真正的双精确性。

现在我们转向图-花环积冯·诺伊曼代数的刚性结果。对于图积，如今已知，在对图和顶点代数施加某些技术性假设的条件下，可以从所得的图积冯·诺伊曼代数中恢复底层图 [BCC24, HI25]。我们的动机是将这一结果推广到图-花环积。

为描述该结果，我们回顾图 $G \curvearrowright \Gamma$上一个作用的商图的定义；商图 $G\backslash\Gamma$ 由顶点集合 $G\backslash V\Gamma$和边集合 $G\backslash E\Gamma$构成，其中 $G(v,\ w) \in G\backslash E\Gamma$ 是一条连接 Gv和 Gw的边。请注意，这些图一般可能含有环和多重边。

最后，我们陈述关于图-花环积冯·诺依曼代数的刚性结果。若对每一对顶点 $v \neq w \in V\Gamma$，都存在一个与 v 相邻但与w不相邻的顶点 $u \neq w$ ，则称简单图 Γ 为不可换位。 Γ 的围长是其中最短回路的长度。树的围长定义为 ∞。精确定义见第 2.3 节。

定理 C。设 H_1 和 H_2 为无限精确群， $\Gamma_1 = (V\Gamma_1,\ E\Gamma_1)$和$\Gamma_2 = (V\Gamma_2,\ E\Gamma_2)$为无限连通、不可换位的局部有限图，且其围长至少为 5； $G_1 \curvearrowright \Gamma_1$ 和 $G_2 \curvearrowright \Gamma_2$ 分别为无限双精确群G_1、 G_2的作用。

假设 H_i 具有无限共轭类性质，且 $G_i \curvearrowright V\Gamma_i$ 是 $i = 1,\ 2$ 的自由作用，并且轨道数有限。

若图-花环积 II_1 因子 $L((H_1)_{\Gamma_1} \rtimes G_1)$ 和 $L((H_2)_{\Gamma_2} \rtimes G_2)$ 稳定同构，则 $|G_1\backslash V\Gamma_1| = |G_2\backslash V\Gamma_2|$。

此外，若 H_1 和 H_2 具有 Kazhdan 的 (T) 性质，则商图$G_1\backslash\Gamma_1$ 和 $G_2\backslash\Gamma_2$ 同构。

定理 C 的证明依赖于定理 B，以及类似于 [HI25, 第 6 节1] 中所用的论证。

这立即得到以下推论。

推论 D. 设 $\mathbb{F}_n$ 为秩为 n的自由群， $\mathbb{F}_n \curvearrowright T_n$ 为其在带有典范生成元的 $\mathbb{F}_n$ 的凯莱图上的左正则作用。设 $m, n \geq 2$为正整数， H 和 K 为具有 (T) 性质的无限精确群。若

图-花环积 II_1 的因子 $L(H_{T_m} \rtimes \mathbb{F}_m)$ 和 $L(K_{T_n} \rtimes \mathbb{F}_n)$ 稳定同构，则 $m = n$。

注意，尽管我们在定理 C 中得到了关于商图 $G_i \backslash \Gamma_i$ 的刚性结果，但作者不知道对于群 G_i 或图 Γ_i 是否还可能有其他刚性结果。

最后，结合定理 B 与 [IM22 第 7] 节中的方法，我们还得到了以下关于图-花环积的素性结果。这里，若一个 II_1 因子 M 不能写成两个 II_1 因子 P、Q 的张量积$M = P \otimes Q$，则称其为 素的 。

定理 E。设 H 是一个无限精确群，$\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 是一个无限局部有限图，且 $G \curvearrowright \Gamma$ 是无限双精确群 G 在 Γ 上的一个作用。若 $G \curvearrowright V\Gamma$ 的稳定子群均有限，且 $G \curvearrowright V\Gamma$ 有有限多个轨道，则图-花环积冯·诺伊曼代数 $L(H_\Gamma \rtimes G)$ 是素的。

致谢。作者谨向导师 Yasuyuki Kawahigashi 致以诚挚谢意，感谢他提出的许多宝贵意见。作者也感谢 Yusuke Isono 与作者进行了多次富有成效的讨论，尤其感谢他提醒作者关注 [HIK22]。本文是东京大学的硕士论文，作者受到 WINGS-FMSP 项目的资助。

2. 预备知识

在本文中，我们假设所有群都是可数离散群，所有图都是（不一定有限的）可数简单图，但定理 C 的陈述除外。

关于完全正映射和带迹冯·诺伊曼代数的基础知识，我们分别参见 [BO08]和 [AP18] 。

我们采用以下记号。

对于带迹冯·诺伊曼代数 (M, τ)，令 L^2M为其标准表示，并以 τ所诱导的范数记作 $\|\cdot\|_2$；$\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}$。我们将由 $M \ni x \mapsto x^* \in M$延拓得到的反线性等距映射记为$J\colon L^2M \to L^2M$。

我们分别用 $\otimes_{\mathrm{alg}}$、$\otimes_{\min}$ 和 $\otimes$ 表示代数张量积、最小张量积和冯·诺伊曼代数张量积。

对于冯·诺伊曼代数 M 及其子代数 B，我们用

$$\mathcal{N}_M(B) = \{u \in \mathcal{U}(M) \mid uBu^* = B\},$$

$$\mathcal{QN}_M(B) = \{x \in M \mid \text{there are } x_1, \dots x_n \in M \text{ such that } xB \subseteq \sum_{i=1}^n Bx_i, Bx \subseteq \sum_{i=1}^n x_iB\}$$

分别表示 B 在 M 中的正规化子集和拟正规化子集。

2.1. 双模交织技术。

Popa 关于两个冯·诺依曼子代数相对位置的以下定理，在过去十多年里一直是该领域的重要工具。

定理 2.1 ([Pop06a, Pop06b])。设 M 是一个带迹冯·诺依曼代数，$p_0 \in M$ 是一个投影，并设 $P \subseteq p_0Mp_0$、$Q \subseteq M$ 是其冯·诺伊曼子代数。则以下各条件等价。

(1) 不存在酉元网络 $(u_i)_i \in \mathcal{U}(P)$，使得 $\|E_Q(au_ib)\|_2 \to 0$对每个 a， $b \in M$均成立。(2) 存在一个 P-Q-子双模 p_0L^2M，其作为右Q-模是有限生成的。(3) 存在一个正整数 n、一个正规 $*$-同态 $\pi : P \to \mathbb{M}_n(Q)$，以及一个偏等距 $v \in \mathbb{M}_{1,\ n}(M)$，使得对每个 $x \in P$都有 $v\pi(x) = xv$。(4) 存在非零投影 $p \in P$、 $q \in Q$、一个正规 $*$-同态θ: $pPp \to qQq$，以及一个偏等距 $v \in pMq$，使得对每个$x \in pPp$都有 $v\theta(x) = xv$。

当上述条件之一（或等价地，全部条件）成立时，我们记作 $P \prec_M Q$ ；否则记作$P \not\prec_M Q$ 。当所讨论的代数显而易见时，我们通常省略下标 M 。

此外，即使子代数 $Q \subseteq q_0Mq_0$与 M不共享单位元，(1) 与 (4) 仍然等价。此时我们也将其记作 $P \prec_M Q$ 。

在上述情形下，当 $Pp' \prec_M Q$ 对每个.....都成立时，我们记作 $P \prec^s_M Q$ y 非零投影 $p' \in \mathcal{Z}$（$P' \cap pMp$）。

我们记录几个引理，以备后用。

引理 2.2 ([Vae08，引理 3.7])。设 M 是一个带迹冯·诺依曼代数， P， Q， $R \subseteq M$ 是其冯·诺依曼子代数。若 $P \prec_M Q$ 且 $Q \prec^s_M R$，则$P \prec_M R$。

引理 2.3（[Vae08，注 3.8]）。设 M 是一个带迹冯·诺依曼代数，$P \subseteq pMp$是一个冯·诺依曼子代数， Q、Q_1、.....、$Q_n \subseteq M$是冯·诺依曼子代数。若 $P \prec_M Q$且对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$都有 $P \not\prec_M Q_i$，则存在一个正整数 n、 $*$-同态 π： $P \to \mathbb{M}_n(Q)$以及一个偏等距 $v \in \mathbb{M}_{1,\ n}(M)$，使得对每个 $x \in P$都有 $v\pi(x) = xv$，并且对每个 i都有 $\pi(pPp) \not\prec_{\mathbb{M}_n(M)} Q_i$，如定理 2.1 (3) 所述。同样，存在非零投影 $p \in P$、$q \in Q$、一个正规 $*$-同态 θ: $pPp \to qQq$ 以及一个偏等距 $v \in pMq$，使得对每个 $x \in pPp$都有 $v\theta(x) = xv$，并且对每个 i都有 $\theta(pPp) \not\prec_M Q_i$。

引理 2.4 ([Vae08，注 3.3])。设 M是一个带迹冯·诺依曼代数， $P \subseteq pMp$是一个冯·诺依曼子代数，且 Q_1、$\cdots$、Q_n、$\cdots \subseteq M$是可数个冯·诺依曼子代数。若对每个 $i \in \mathbb{N}$， $P \not\prec_M Q_i$均成立，则存在一列酉元 $(u_j)_j \in \mathcal{U}(P)$，使得对每个 i以及 a、$b \in M$， $\|E_{Q_i}(au_jb)\|_2 \to 0$均成立。

2.2. **相对双精确性**。设 G是一个群，且 $\mathcal{G}$ 是 G 的一个子集族。首先，我们固定一些术语。

- 若存在有限多个元素 a_1、a_2、.....、a_m、b_1、b_2、.....、$b_m \in G$ 以及 S_1、S_2、.....、$S_m \in \mathcal{G}$ 使得$T \subseteq \bigcup_i a_iS_ib_i$，则称 G 的子集 T 相对于.....较小 $\mathcal{G}$ 。

- 复值函数 $f \in \ell^\infty(G)$ 在对每个 $\varepsilon > 0$ 而言，集合 $\{g \in G \mid |f(g)| > \varepsilon\}$ 相对于 $\mathcal{G}$ 较小时，满足 $f(g) \to 0$ ($g \to \infty/\mathcal{G}$)。由所有满足 $f \in \ell^\infty(G)$ 的函数 f 组成的 $\ell^\infty G$ 的理想记作 $c_0(G, \mathcal{G})$。我们通过 $\mathcal{K}(\mathcal{G}) := c_0(G, \mathcal{G})B(\ell^2(G))c_0(G, \mathcal{G})\|\cdot\|$ 定义一个 C^*-代数 $\mathcal{K}(\mathcal{G})$。注意，~~乘子代数 $\mathcal{M}(\mathcal{K}(G)) \subseteq \mathcal{B}(\ell^2G)$~~ of $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ 包含$\ell^\infty G$, $C^*_\lambda(G)$ 和 $C^*_\rho(G)$。

定义 2.5。我们称群 G 相对于 $\mathcal{G}$ 双精确，若存在映射$\mu: G \to \mathrm{Prob}(G)$，使得

$$\|\mu(gsh) - g.\mu(s)\|_1 \to 0 \ (s \to \infty/\mathcal{G})$$

对每个 $g,\ h \in G$ 都成立。

这一性质与 (AO) 型性质以及可 amenable 作用的概念有关。

命题 2.6 ([BO08，命题 15.1.4，15.2.3])。设 G 和 $\mathcal{G}$ 如上。则以下条件等价。

- 群 G 相对于 $\mathcal{G}$ 是双精确的。
- 存在一个含幺完全正（简称 u.c.p.）映射，使得 $\theta(a \otimes b) - ab \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$。 $\theta : C^*_\lambda(G) \otimes_{\min} C^*_\rho(G) \to B(\ell^2(G))$
- 该作用是可和的 $G \curvearrowright S_{\mathcal{G}}(G) := \{f \in \ell^\infty(G) \mid f(\bullet) - f(\bullet \cdot t) \in c_0(G, \mathcal{G})(\forall t \in G)\}$
- $G \times G$ 在 $\ell^\infty(G)/c_0(G,\ \mathcal{G})$上的左右正则作用是可和的 .

当 $\mathcal{G}$ 仅由有限子集组成时，我们将 $S_{\mathcal{G}}(G)$记作 $S(G)$，并且当上述条件之一成立时，就称 G 为双精确的。

对于两个子群族 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$，令 $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}'$ 为由形如 $F \cap F'$的子集构成的族，其中 F、F' 分别相对于 $\mathcal{G}$、 $\mathcal{G}'$较小。注意，根据定义， $\mathcal{K}(\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}') = \mathcal{K}(\mathcal{G}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{G}')$。

我们记录以下刚性类型结果:

定理 2.7 ([BO08], 定理 15.1.5)。设 G 是一个无限 i.c.c. 离散群，且 $\mathcal{G}$ 是 G的一个子群族。假设 G 相对于 $\mathcal{G}$是双精确的。记$M = LG$。

设 n 为正整数，且 $p \in \mathbb{M}_n(M) = \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes M$为一个投影。那么，对于 $p\mathbb{M}_n(M)p$ 的任意冯·诺依曼子代数 P，若满足 $P \not\prec_{\mathbb{M}_n(M)} 1 \otimes LH$ 对每个 $H \in \mathcal{G}$ 都成立，则相对交换子 $P' \cap L\Gamma$ 是可和的。

2.3. **群的图与图积**。首先，我们固定图的记号。

记号 2.8。（简单）图 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 由顶点集 $V\Gamma$ 和边集 $E\Gamma \subseteq V\Gamma \times V\Gamma$ 构成，并满足：对任意 $v, w \in V\Gamma$，有 $(v, v) \notin E\Gamma$ 且 $(v, w) \in E\Gamma \Longrightarrow (w, v) \in E\Gamma$。若两个顶点 $v, w \in V\Gamma$ 满足 $(v, w) \in E\Gamma$，则称它们相邻。

对于图 Γ 和 $v \in V\Gamma$，我们记作

$$\mathrm{Lk}_\Gamma v = \{w \in V\Gamma \mid (v, w) \in E\Gamma\},$$
$$\mathrm{St}_\Gamma v = \mathrm{Lk}_\Gamma v \cup \{v\}.$$

并称 $|\mathrm{Lk}_\Gamma v|$ 为 v的度 。如果每个顶点的度都有限，则称该图是局部有限 的。

对于每个子集 $E \subseteq V\Gamma$，我们将 $\mathrm{Lk}_\Gamma E = \cap_{v \in E} \mathrm{Lk}_\Gamma v$ 记作。若所讨论的图显而易见，我们通常省略下标 Γ 。

在 Γ 中，路径 是由 Γ 中的顶点组成的有限序列，其中相邻元素在 Γ中也相邻；路径的长度 定义为该序列的长度减一。若对于任意 v，$w \in V\Gamma$，都存在一条起点为 v 、终点为 w的路径，则称 Γ 为连通 的。

在 Γ 中，回路是长度至少为 3 的路径，其中除起点与终点重合外，其余顶点均互不相同。我们将 Γ 的围长（即 Γ 中最短回路的长度）记为 girthΓ。若 Γ 中不存在回路，则令 girth $\Gamma = \infty$ 。

若对每一对顶点 $v \neq w \in V\Gamma$，均有 $\mathrm{Lk}_\Gamma v \not\subseteq \mathrm{St}_\Gamma w$ 成立，则称图 Γ 为不可横截图图。容易看出，任何具有至少 3 个顶点的连通不可横截图图都没有度为 0 或 1 的顶点。

接下来我们定义群的图积。

定义 2.9。设 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 是一个图，且 $(G_v)_{v\in V\Gamma}$ 是由 $V\Gamma$ 索引的非平凡群族。则 $(G_v)_{v\in V\Gamma}$ 的图积 $G_\Gamma = *_{v,\Gamma} G_v$ 定义为

$$G_\Gamma := \langle (G_v)_{v\in V\Gamma} \mid [G_v, G_w] = 1 (\forall (v,w) \in E\Gamma) \rangle.$$

对于 $E \subseteq V\Gamma$，我们通常用 G_E 表示由 $\{G_v \mid v \in E\}$ 生成的 G_Γ 子群。

定义 2.10。设 Γ、$(G_v)_{v\in V\Gamma}$ 和 G_Γ 如上文定义所述。

- 设 $g_i \in G_{v_i} \backslash \{e_{G_{v_i}}\}$ 对于 $1 \leqq i \leqq n$。表示 $g = g_1 g_2 \cdots g_n \in G_\Gamma$ 称为标准形，当 n是 g 的所有此类可能表示中最小的。最小可能的 n 记作 $\|g\|$。
- 顶点序列 $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n \in V\Gamma$ 称为不可约，当对于任意一对 (i, j)，若 $1 \leqq i < j \leqq n$ 且 $v_i = v_j$，则存在 k，使得 $(v_i, v_k) \notin E\Gamma$。

Green [Gre90] 的以下定理对于处理图积中元素的表示很有用。

定理 2.11（Green 定理，另见 [Oya24a，定理 2.14]）。设 Γ、$(G_v)_{v\in V\Gamma}$ 和 G_Γ 如定义 2.9 所述。那么，$g = g_1 g_2 \cdots g_n \neq e \in G_\Gamma$是 G_Γ 中满足 $g_i \in G_{v_i} \backslash \{e\}$的元素 g 的一个表示，当且仅当序列$v_1, v_2, \ldots, v_n \in V\Gamma$ 是不可约的。此外，对于 g的任意两个标准形，都可以通过重新排列其中一个将其变为另一个。

特别地，对于每个 $g \in G_\Gamma$，集合 $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V\Gamma$ 与标准形 $g = g_1 g_2 \cdots g_n \in G_\Gamma$, $(g_i \in G_{v_i}, v_1, v_2, \ldots, v_n \in V\Gamma)$ 的选取无关。我们将此集合记为 $supp\, g \subseteq V\Gamma$。

稍后我们将用到下面这个简单引理的证明。

引理 2.12。设 Γ、$(G_v)_{v\in V\Gamma}$ 和 G_Γ 如上。对于 $v \in V\Gamma$、$g \in G_v$ 和$h \in G_\Gamma$，我们有

$$\|h\| - 1 \leqq \|gh\| \leqq \|h\| + 1.$$

证明. 第二个不等式显然。为证明第一个不等式，令 $h = h_1 h_2 \cdots h_n$为 h的一个标准形。若 $\|gh\| < \|h\|$，则根据定理 2.11，存在一个指标i，使得 $v_i = v$、$gh_i = e$且 $v_1, \ldots v_{i-1} \in \mathrm{Lk}_\Gamma v$。我们声称，在这种情况下，$gh = h_1 h_2 \cdots h_{i-1} h_{i+1} \cdots h_n$是 gh的一个标准形。事实上，当 $i = 1$或 $i = n$时，结论显然。否则，如果表示式中的两个音节可以约化，那么不失一般性，可设这两个音节为 h_{i-1} 和 h_{i+1}。于是可得 $v_{i+1} = v_{i-1} \in \mathrm{Lk}_\Gamma v$，因此 $[h_i, h_{i+1}] = e$。但再次根据定理

2.11，这与 $h_1\cdots h_{i-1}h_ih_{i+1}\cdots h_n$ 是一个标准形的假设矛盾。□

2.4. **算子代数的图积**。 固定一个图 Γ。我们考虑一族带有态的 C^*-代数（A_v,φ_v）$_{v\in V\Gamma}$，其指标由顶点集 $V\Gamma$给出。

我们按照 [CF17]定义（约化）图积（A_v,φ_v）$_v$。设（π_v,H_v,ξ_v）是（A_v,φ_v）的 GNS 表示。

首先，令 H 为（H_v）$_v$的图积希尔伯特空间。即

$$H=\mathbb{C}\Omega\oplus\bigoplus_{v_1v_2\cdots v_n:\text{irreducible}}H^o_{v_1}\otimes H^o_{v_2}\otimes\cdots\otimes H^o_{v_n},$$

其中 $H^o_v=H_v\ominus\mathbb{C}\xi_v$。

接下来，我们定义典范表示 $\lambda_v:\ \mathcal{B}$（H_v）$\to\mathcal{B}$（H），对每个 $v\in V\Gamma$均成立。令 H（v）为希尔伯特空间

$$H(v)=\mathbb{C}\Omega\oplus\bigoplus_{v_1v_2\cdots v_n,\ vv_1v_2\cdots v_n:\ \text{不可约}}H^o_{v_1}\otimes H^o_{v_2}\otimes\cdots\otimes H^o_{v_n}.$$

那么，可以定义一个酉映射 $U_v:\ H_v\otimes H(v)\to H$，使得 U_v 映射

$$\begin{aligned}\xi_v\otimes\Omega&\longmapsto\Omega,\\ \xi\otimes\Omega&\longmapsto\xi,\\ \xi_v\otimes\eta&\longmapsto\eta,\\ \xi\otimes\eta&\longmapsto\xi\otimes\eta\end{aligned}$$

对任意 $\xi\in H_v\ominus\mathbb{C}\xi_v$ 和 $\eta\in H(v)\ominus\mathbb{C}\Omega$。令 $\lambda_v=\mathrm{Ad}(U_v)\circ(\pi_v\otimes\mathrm{id})$。注意，当 $(v,\ w)\in E\Gamma$时，$[\lambda_v(\mathcal{B}(H_v))\ \lambda_w(\mathcal{B}(H_w))]=0$。

最后，我们将由 $(\lambda_v(\pi_v(A_v)))_v$生成的代数定义为约化图乘积 C^*-代数 $A_\Gamma\subseteq\mathcal{B}(H)$。该 C^*-代数 A_Γ 具有典范态 φ，即 $\Omega\in H$的向量态。对于子集 $F\subseteq V\Gamma$，我们用 A_F 表示由 $\{A_v\mid v\in F\}$生成的 A_Γ 的C^*-子代数。

根据定义，图积可以看作一系列如下形式的约化合并自由积:

$$(A_\Gamma,E)=(A_{\mathrm{St}v},E)*_{r,A_{\mathrm{Lk}v}}(A_{\Gamma\setminus\{v\}},E)$$

其中，记作 E 的映射是到 $A_{\mathrm{Lk}v}$上的适当条件期望。特别地，可以看出，对于每个子集 $F\subseteq V\Gamma$，都存在一个条件期望 $E:A_\Gamma\to A_F$，它保持典范态 φ。

对于冯·诺伊曼代数的情形，设（$B_v,\ \tau_v$）$_v$ 是一族带迹冯·诺伊曼代数。那么，沿用上述类似的记号，图积（带迹）冯·诺伊曼代数（$B_\Gamma\subseteq\mathcal{B}$（$H$）$\ \tau$）定义为由（$\lambda_v$（$B_v$））$_v$生成的代数。

对于子集 $F\subseteq V\Gamma$，我们类似地用 B_F 表示由 $\{B_v\mid v\in F\}$生成的 B_Γ 的冯·诺依曼子代数。关于这些代数在图积冯·诺伊曼代数中的位置，下面的引理很有用。

引理 2.13 ([BCC24, DV25, HI25])。 设 B_Γ 为上述图积冯·诺伊曼代数，$\ v\in V\Gamma$ 为一个顶点，且 $E,\ F\subseteq V\Gamma$ 为有限子集。若每个顶点代数 B_v 都是弥散的，则有如下结论;

(1) $B'_E\cap B_\Gamma=\mathcal{Z}(B_E)\overline{\otimes}B_{\mathrm{Lk}E}$。(2) 对每个满足 $\mathrm{St}_\Gamma v=V\Gamma$ 的 $v\in V\Gamma$，B_Γ 是因子当且仅当 B_v 也是因子。

(3) L^2B_Γ 的任意右 B_E-有限 B_E-B_E-子双模都包含于 $L^2B_{E\cup \mathrm{Lk}E}$中。特别地，$\mathcal{QN}_{B_\Gamma}(B_E)'' = B_{E\cup \mathrm{Lk}E}$。(4) $B_E \prec B_F$ 当且仅当 $E \subseteq F$。此外，(3) 和 (4) 的以下变体也成立；(3)' 对任意投影 $p \in B_E$ 和冯·诺依曼子代数 $P \subseteq pB_Ep$，若其满足：对于任意真子集 $E' \subsetneq E$，$P \not\prec_{B_E} B_{E'}$，且某个元素 $x \in pB_\Gamma$ 对某个 x_1、……、$x_k \in B_\Gamma$ 满足 $Px \subseteq \sum_{i=1}^k x_iB_E$，则 $x \in B_{E\cup \mathrm{Lk}E}$。特别地，$\mathcal{QN}_{pB_\Gamma p}(P)'' \subseteq B_{E\cup \mathrm{Lk}E}$。(4)' 对任意冯·诺依曼子代数 $P \subseteq pB_\Gamma p$，若对于任意真子集 $E' \subsetneq E$，$P \prec^s_{B_\Gamma} B_E$ 且$P \not\prec_{B_\Gamma} B_{E'}$，则 $P \prec_{B_\Gamma} B_F$ 当且仅当 $E \subseteq F$。

证明。(1)：参见 [HI25，引理 2.16]。(2)、(3)、(4)：参见 [DV25，引理 6.2]。(3)' 和 (4)' 分别由 [BCC24，命题 5.8] 和 [HI25，断言 3.6]的证明得出。□

特别是，本引理的 (4)' 在第 5 节中经常用到。

2.5. **图 wreath 积**。设 H 为一个群，Γ为一个图，且 $G \curvearrowright \Gamma$ 为群 G 在 Γ上的作用。那么，存在一个伯努利型作用 $\sigma : G \to \mathrm{Aut}(H_\Gamma)$，定义如下；

$$\sigma_g : H_v \ni h \longmapsto h \in H_{gv}$$

注意，此作用 σ 可扩张为其群冯·诺伊曼代数 $G \curvearrowright L(H_\Gamma)$上的保迹作用。下文中也将此作用记为 σ。

由此作用可以构造交叉积群 $H_\Gamma \rtimes_\sigma G$。我们将其简写为 $H_\Gamma \rtimes G$。

引理 2.14。在上述设定下，令 $M = L(H_\Gamma \rtimes G)$ 和 $B_E = L(H_E)$，其中$E \subseteq V\Gamma$。如果作用 $G \curvearrowright V\Gamma$ 的所有各向同性群都是有限的，则有以下结论。

(1) 保迹作用 $\sigma : G \curvearrowright B_\Gamma$ 具有混合性。(2) 冯·诺伊曼代数 M 是一个因子。(3) 如果 $|H| \geqq 3$，则 M 可和，当且仅当 G、H 可和且 Γ 是完备的。(4) 进一步假设 H 是无限的。如果 $E \subseteq V\Gamma$ 是一个有限子集，则 L^2M 的每个右 B_E-有限 B_E-B_E-子双模都包含于 $L^2(B_{E\cup \mathrm{Lk}E} \rtimes G^E)$ 中。这里我们将 E的稳定子群记作 $G^E = \{g \in G \mid gE = E\}$。特别地，$\mathcal{QN}_M(B_E) \subseteq B_{E\cup \mathrm{Lk}E} \rtimes G^E$。(5) 如果 $E \subseteq V\Gamma$ 是一个有限子集，则 $B'_E \cap M = \mathcal{Z}(B_E)\otimes(B_{\mathrm{Lk}E} \rtimes G^E_0)$，因此 $\mathcal{Z}(B'_E \cap M) = \mathcal{Z}(B_E)\otimes\mathcal{Z}(B_{\mathrm{Lk}E} \rtimes G^E_0)$，其中对每个 $v \in E\}$，都有 $G^E_0 = \{g \in G \mid gv = v\}$。

证明。(1) 只需证明：对于每个 h，$k \in H_\Gamma$, $\tau(u_hu_{\sigma_g(k)}) = 0$，除有限多个 $g \in G$ 外均成立。但除非 $supp\, k \cap g\, supp\, k \neq \emptyset$，上述结论总是成立；根据关于 $G \curvearrowright V\Gamma$ 的假设，满足该条件的 $g \in G$ 数量是有限的。(2) 直接由 (1) 得出。

(3) “仅当”部分的前半部分显然成立，因为 $L(H_\Gamma \rtimes G)$ 包含 LG 和 LH。对于后半部分，只需注意到 $H * H$ 是非 amenable 的。“如果”部分显然成立，因为可 amenability 在取直积和交叉积下保持不变。

(4) 设 $\mathcal{K}$ 为 L^2M 的一个右 B_E-有限 B_E-B_E-子双模。取一个元素 $\xi \in \mathcal{K}$ 和 ξ_1，ξ_2，……，$\xi_n \in \mathcal{K}$，使得 $B_E\xi \subseteq \sum_i \xi_iB_E$，并令 $\xi = \sum_{g\in G} \xi^g u_g$ 和

$\xi_i = \sum_{g\in G}\xi_i^g u_g$ ($\xi^g,\ \xi_i^g \in B_\Gamma$) 为它们的傅里叶展开。然后，通过比较 u_g 的系数可得，对每个 $g\in G$，都有 $B_E\xi^g \subseteq \sum_i \xi_i^g B_{gE}$。接着，由引理 2.13 (3) 和 (4)，若 $\xi^g\neq 0$，则 $E\subseteq gE$ 和 $E=gE$，因为 E 是有限的，并且 $\xi^g \in L^2B_{E\cup \mathrm{Lk}E}$。这就验证了该断言。

(5) 根据 (4)，可得 $B'_E\cap M \subseteq B_{E\cup \mathrm{Lk}E}\rtimes G^E$。取 $x=\sum_{g\in G^E}x^g u_g \in B'_E\cap M$。于是，由于 x 与 B_E 对易，x^g 对每个 $y\in B_E$ 和 $g\in G$ 都满足 $yx^g = x^g\sigma_g(y)$。若 $x^g\neq 0$，这意味着对每个 $v\in E$ 都有 $B_v x^g \subseteq x^g B_{gv}$ 成立，因此根据引理 2.13 (1) 和 (4)，$g\in G_0^E$ 和 $x^g\in B'_E\cap B_{E\cup\mathrm{Lk}E} = \mathcal{Z}(B_E)\otimes B_{\mathrm{Lk}E}$。□

2.6. **(T) 性质**。Kazhdan 的 (T) 性质在形变刚性理论中发挥着重要作用。本文将使用的关于 (T) 性质的事实包括以下定理，以及两个具有 (T) 性质的冯·诺伊曼代数的张量积仍具有该性质。

定理 2.15 ([IPP08，定理 4.3], 另见 [Hou09，定理 5.6])。设 $M_1,\dots,M_n$为带迹冯·诺伊曼代数，且 $B\subseteq M_i$ 是它们的公共冯·诺依曼子代数。

设 $M = p\mathbb{M}_m(M_1 *_B M_2 *_B \cdots *_B M_n)p$ 是该合并自由积的一个放大。若子因子 $Q\subseteq M$ 具有 (T) 性质，则存在一个指标$i\in\{1,2,\dots,n\}$ 使得 $Q\prec_M M_i$。

3. Bi-exactness for graph product von Neumann algebras

本节给出定理 A 的证明。证明利用了前文关于约化合并自由积 C^*代数 [的核性以及完全正收缩映射延拓的结果 Oza06，Has19]。

命题 3.1。对于任意图 Γ、正整数 $(n_v)_{v\in V\Gamma}$ 以及矩阵代数 $(\mathbb{M}_{n_v}(\mathbb{C}))_{v\in V\Gamma}$上的纯态 $(\phi_v)_{v\in V\Gamma}$，$(\mathbb{M}_{n_v}(\mathbb{C})\ \phi_v)_{v\in V\Gamma}$ 的约化图乘积 C^*- 代数 M_Γ 是核的。

证明。由于核性在极限下保持不变，我们可以假设 Γ是有限的。我们对 $|V\Gamma|$进行归纳。基例显然成立。假设 $|V\Gamma|\geqq 2$，任取一个顶点 $v\in V\Gamma$。

如果 v 与 $V\Gamma$中的每个其他顶点都相邻，那么 $M_\Gamma = \mathbb{M}_{n_v}(\mathbb{C})\otimes M_{\Gamma\setminus\{v\}}$，根据归纳假设即可得证。否则，我们有约化合并自由积分解

$$(M_\Gamma, E_{\mathrm{Lk}v}) = (M_{\mathrm{St}v}, E_1) *_{r, M_{\mathrm{Lk}v}} (M_{\Gamma\setminus\{v\}}, E_2).$$

这里 E_1 和 E_2 表示条件期望 $E_{\mathrm{Lk}v}: M_\Gamma \to M_{\mathrm{Lk}v}$ 在每个代数上的限制。

根据 [Has19，定理 5.2] 以及归纳假设，只需证明 E_1 的 GNS 表示包含琼斯投影，且 E_2 的表示是非退化的。但前者由以下事实可得：ϕ_v 是纯态，且 $(M_{\mathrm{St}v}, E_1) = (\mathbb{M}_{n_v}(\mathbb{C})\otimes M_{\mathrm{Lk}v},\ \phi_v\otimes \mathrm{id})$；后者则显然成立，因为 M_Γ 是含幺的。□

定理 ***A*** 的证明。我们首先在所有 $v\in V\Gamma$都满足双精确性的情形下证明该结论。令 $\mathcal{G} = \{H_{\mathrm{Lk}v} \mid v\in V\Gamma\}$。

对于每个 $v\in V\Gamma$，令 $A_v\subseteq \mathcal{B}(\ell^2 H_v)$ 为由 $C^*_\lambda(H_v)$ 和 $S(H_v)\subseteq \ell^\infty(H_v)$ 生成的 C^*-代数。于是，根据命题 2.6 和 [BO08，命题 5.1.3],

$A_v \cong S(H_v) \rtimes_r H_v$ 是核的。令 $A \subseteq B(\ell^2 H_\Gamma)$ 为由 $(A_v)_{v\in V\Gamma}$ 生成的 C^*-代数。我们按照 [Oza06，引理 2.4] 证明以下两个断言。

断言 3.2. The C^*-代数 A 是核的。

断言 ***3.2*** 的证明。 由于每个 A_v 都是核的，因此存在一族完全正收缩映射的网 $(\varphi_v^i\colon A_v \to \mathbb{M}_{n_v^i}(\mathbb{C}))_i$，$(\psi_v^i\colon \mathbb{M}_{n_v^i}(\mathbb{C}) \to A_v)_i$，使得对每个 $x \in A_v$，$\|\psi_v^i \circ \varphi_v^i(x) - x\| \to 0$ 均成立。

此外，根据 [DP23，引理 4.1], ，可以假设存在一个子空间网 $\delta_{e_v} \in K_v^i \subseteq \ell^2 H_v$ 以及一族完全正收缩映射的网 $(\phi_v^i\colon \mathcal{B}(K_v^i) \to \mathbb{M}_{n_v^i}(\mathbb{C}))_i$，使得对每个 $x \in A_v$，$\|\psi_v^i \circ \phi_v^i \circ \mathrm{Ad}(P_{K_v^i})(x) - x\| \to 0$ 均成立。

由于 $P_v := P_{\mathbb{C}\delta_{e_v}} \in \mathcal{K}(\ell^2 H_v) \subseteq A_v$，通过扰动 $\psi_v^i \circ \phi_v^i$，我们可以假设 $\psi_v^i \circ \phi_v^i(P_v) = P_v$。我们将 δ_{e_v} 的向量态记为 μ_v，并将 $(\mathcal{B}(K_v^i)\ \mu_v)_{v\in V\Gamma}$ 的约化图乘积记为 B^i。注意，由命题 3.1 B^i 可知，它是核的。

然后，由 [Atk19，推论 4.1], ，存在完全正收缩映射网 $(\phi^i : A \to B^i)_i$，$(\psi^i\colon B^i \to A)_i$，它们分别是 $(\phi_v^i)_v$，$(\psi_v^i)_v$ 的图积，并且满足 $\psi^i \circ \phi^i(x) \to x$，结论即得。□

断言 3.3。 对于每个 $a,\ b \in A$，我们有 $[a, JbJ] \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$。

断言 ***3.3*** 的证明。 只需证明 $a = f,\ b = u_h$ 的情形，其中某个 $v,\ w \in V\Gamma$ 满足条件，且 $f \in S(H_v)$ $h \in H_w$。固定取定的图上的一个不可约词 $v_1 v_2 \dots v_n$，从 $\ell^2(H_{v_1}) \otimes \ell^2(H_{v_2})^o \otimes \cdots \otimes \ell^2(H_{v_n})$ 中取一个元素 $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n$。（见第 2.4 节）。

经过简单计算，我们得到

$$[f, Ju_hJ](\xi) = \begin{cases} ([f, Ju_hJ](\xi_1)) \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n, & v = w = v_1 \text{ and } v_2, \dots, v_n \in \mathrm{Lk}(v), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

由于 $[f, Ju_hJ] \in \mathcal{K}(\ell^2 H_v)$，故断言成立。 □

由断言 3.2 和 3.3，映射

$$\theta : A \otimes_{\mathrm{alg}} JAJ \to \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathcal{G}))/\mathcal{K}(\mathcal{G})$$
$$x \otimes JyJ \mapsto [xJyJ]$$

是良定义的，并唯一延拓为从 Θ 到 $A \otimes_{\min} JAJ$ 上的完全正收缩映射。再次由断言 3.2，Θ 是一个核且可提升的完全正收缩映射。将 Θ 限制到 $C_\lambda^*(H_\Gamma) \otimes_{\min} C_\rho^*(H_\Gamma)$，我们便得到引理 2.6 中的映射，因此由该引理，H_Γ 相对于 $\mathcal{G}$ 是双精确的。

为了证明当所有 $v \in V\Gamma$ 都是精确的情形，只需在上述证明中将 $S(H_v)$ 替换为 $\ell^\infty(H_v)$。由于 H_v 都是精确的，C^*-代数 $A_v \cong \ell^\infty(H_v) \rtimes_r H_v$ 是核的，因此如同断言 3.2 中那样可知 $A = C^*\{A_v \mid v \in V\Gamma\}$ 是核的。对于断言 3.3，通过与上述相同的计算可知，对每个 $a,\ b \in A$，都有 $[a, JbJ] \in \mathcal{K}(\{H_{\mathrm{St}v}\}_{v\in V\Gamma})$。于是同理可得结论。□

4. Bi-exactness for graph-wreath products

本节将证明 H 为双精确群时的定理 B。要获得 H 为一般精确群时的证明，请在下文中用 $S(H_v)$ 替换

$\ell^\infty H_v$ 和 $H_{\mathrm{Lk}v}$，并将 $H_{\mathrm{St}v}$ 用于下文（尤其是命题 4.6 的证明），如上文定理 A 的证明所示。

设 H 是一个双精确群，Γ 是一个图，$G \curvearrowright \Gamma$ 是群 G 在 Γ 上的作用。我们用 H_Γ 表示顶点群均为 H 的 Γ 上的图积，其中每个顶点群为 H_v；用 $H_\Gamma \rtimes G$ 表示图-花环积。

定义 4.1。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和有限子集 $E \subseteq H$、$F \subseteq V\Gamma$，定义子集 $A(E, F, n) \subseteq H_\Gamma \rtimes G$ 为

$$A(E,F,n) = \{(h = h_1 h_2 \cdots h_m, g) \mid m \leqq n, h_i \in E, v_i \in F \cup gF\}$$

其中 $h_1 h_2 \cdots h_m$ 是 $h \in H_\Gamma$ 的标准形之一，且对每个 i 都有 $h_i \in H_{v_i}$。（注意，这一定义是良定义的。）

为证明定理 B，我们采用 [HIK22，定理 5.2] 中的方法。事实上，我们证明定理 B 的以下推广。令 $\mathcal{G}$ 为 $\{A(E, F, n) \mid E \subseteq V\Gamma, F \subseteq H, n\} \cup \{H_{\mathrm{Lk}v} \mid v \in V\Gamma\}$，这是 $H_\Gamma \rtimes G$ 的一个子集族。

定理 4.2。在上述设定下，进一步假设 G相对于某个子集族 $\mathcal{S}$是双精确的，作用 $G \curvearrowright V\Gamma$ 的所有稳定子群均为有限群，并且 $G \curvearrowright V\Gamma$ 有有限多个轨道。那么，$H_\Gamma \rtimes G$ 相对于$\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$是双精确的，其中 $\mathcal{F} = \{H_\Gamma \cdot S \mid S \in \mathcal{S}\}$。

我们将定理 4.2 的证明分为三个小节。

4.1. 具有良好渐近性质的映射。首先，我们构造一个具有良好渐近性质的映射$m : H_\Gamma \rtimes G \to \ell^1(V\Gamma)$。根据 [HIK22 引理 4.3]，有以下引理。

命题 4.3。在上述设定下，假设 $G \curvearrowright V\Gamma$ 具有有限稳定子群且有有限多个轨道。

那么，存在函数 $|\cdot|_G \colon G \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$, $|\cdot|_H \colon H \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$, $|\cdot|_\Gamma \colon V\Gamma \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$，使得对每个 $g, g' \in G$, $h, h' \in H$, $v \in V\Gamma$以及正整数 n，以下结论成立。

(1) $|gg'|_G \leqq |g|_G + |g'|_G$, $|hh'|_H \leqq |h|_H + |h'|_H$。
(2) $|gv|_\Gamma \leqq |g|_G + |v|_\Gamma$。(3) 这些集合

$$\{g \in G \mid |g|_G \leqq n\}, \{h \in H \mid |h|_H \leqq n\}, \{v \in V\Gamma \mid |v|_\Gamma \leqq n\}$$

是有限的。

我们按照命题 4.3，为 G、H、$V\Gamma$ 固定这样的长度函数。

定义 4.4。对于 $z = (h = h_1 h_2 \cdots h_m, g) \in H_\Gamma \rtimes G$，我们定义

$$m(z) := \sum_{v \in supp(h)} \min\{|v|_\Gamma, |g^{-1}v|_\Gamma\}\delta_v + \sum_{i=1}^{m} |h_i|_H \delta_{v_i},$$
$$|z|_f := \|m(z)\|_1$$

其中，$h_1 h_2 \cdots h_m$ 是 $h \in H_\Gamma, h_i \in H_{v_i}$ 的一个标准形，对每个 i 都成立。（再次注意，由于定理 2.11，此定义与标准形的选择无关。）

以下命题的证明与 [HIK22 引理 5.5, 5.6] 的证明相同。

命题 4.5。对于 $z=(h=h_1h_2\cdots h_m,\ g)\in H_\Gamma\rtimes G$ 和 $\mathcal{G}=\{A(E,\ F,\ n)\mid E\subseteq V\Gamma,\ F\subseteq H,\ n\}\cup\{H_{\mathrm{Lk}v}\mid v\in V\Gamma\}$，以下结论成立；

(1) $|z|_f\to\infty$ 当 $z\to\infty/\mathcal{G}$ 时。

(2) $\dfrac{|\,supp\,h|}{|z|_f}\to 0$ 当 $z\to\infty/\mathcal{G}$ 时。

(3) 对任意 $v\in V\Gamma$ 和 $x\in H_v$,

$$\|m(xz)-m(z)\|_1,\|m(zx)-m(z)\|_1\leqq|x|_f.$$

In particular, $\dfrac{\|m(xz)-m(z)\|_1}{|z|_f},\dfrac{\|m(zx)-m(z)\|_1}{|z|_f}\to 0$ when $z\to\infty/\mathcal{G}$.

(4) 对任意 $k\in$, G

$$\|m(kz)-k.m(z)\|_1,\|m(zk)-m(z)\|_1\leqq|k|_G|\,supp\,h|.$$

In particular, $\dfrac{\|m(kz)-k.m(z)\|_1}{|z|_f},\dfrac{\|m(zk)-m(z)\|_1}{|z|_f}\to 0$ when $z\to\infty/\mathcal{G}$.

证明。(1) 只需证明，对于任意正整数 C，集合 $\{z\in H_\Gamma\rtimes G\mid|z|_f\leqq C\}$ 相对于 $\mathcal{G}$ 较小。但根据 $m(z)$ 的定义，容易推出：若 $|(h_1h_2\cdots h_m,g)|_f\leqq C$，则量 $|\,supp\,h|$、$\min\{|v|_\Gamma,|g^{-1}v|_\Gamma\}$ 和 $|h_i|_H$ 均小于 C。

因此我们得到

$$\{z\in H_\Gamma\rtimes G\mid|z|_f\leqq C\}\subseteq A(\{|\cdot|_H\leqq C\},\{|\cdot|_\Gamma\leqq C\},C)$$

根据关于 $|\cdot|_\Gamma$ 和 $|\cdot|_H$ 的假设，结论得证。

(2) 只需证明：对于任意正整数 C，所有满足 $|z|_f\leqq C|\,supp\,h|$ 的 $z=(h,g)$ 的集合相对于 $\mathcal{G}$ 较小。我们声称，若 $|z|_f\leqq C|\,supp\,h|$，则

$$|\,supp\,h|\leqq 4|B(\Gamma,2C)|,$$

由此结合假设和 (1)，即可得出结论。这里，$B(\Gamma,R)=\{v\in V\Gamma\mid|v|_\Gamma\leqq R\}$，其中 R 为正整数。

反设不然。则对于每个 $g\in G$，都有

$$|B(\Gamma,2C)\cup gB(\Gamma,2C)|<\frac{1}{2}|\,supp\,h|.$$

利用该不等式以及对每个 $v\notin B(\Gamma,2C)\cup gB(\Gamma,2C)$ 均成立的 $\min\{|v|_\Gamma,|g^{-1}v|_\Gamma\}>2C$ 这一事实，可得以下不等式；

$$\begin{aligned}|\,supp\,h|&\leqq|B(\Gamma,2C)\cup gB(\Gamma,2C)|+|\,supp\,h\backslash(B(\Gamma,2C)\cup gB(\Gamma,2C))|\\&<\frac{1}{2}|\,supp\,h|+\frac{1}{2C}\sum_{v\in supp\,h\backslash B(\Gamma,2C)\cup gB(\Gamma,2C)}\min\{|v|_\Gamma,|g^{-1}v|_\Gamma\}\\&\leqq\frac{1}{2}|\,supp\,h|+\frac{1}{2C}|(h,g)|_f\\&\leqq|\,supp\,h|.\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。

（3）首先注意到，根据引理 2.12 的证明，xh 的标准形应为以下形式之一。

- $xh_1h_2\cdots h_m$，当 $\|xh\|=\|h\|+1$ 时
- $h_1\cdots h_{i-1}\ (xh_i)\ \cdots h_n$，当 $\|xh\|=\|h\|$ 时
- $h_1\cdots h_{i-1}h_{i+1}\cdots h_n$，当 $\|xh\|=\|h\|-1$

特别地， $supp(xh)$ 必须是 $\{v\} \cup supp(h)$、 $supp(h)$ 或 $supp(h)\backslash\{v\}$。于是，根据定义 4.4,

$$m(xz) = \begin{cases} \sum_{w \in supp(h)\cup\{v\}} \min\{|w|_\Gamma, |g^{-1}w|_\Gamma\}\delta_w + \sum_{j=1}^{m} |h_i|_H \delta_{v_i} + |x|_H \delta_v, & (\|xh\| = \|h\| + 1), \\ \sum_{w \in supp(h)} \min\{|w|_\Gamma, |g^{-1}w|_\Gamma\}\delta_w + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} |h_i|_H \delta_{v_i} + |xh_i|_H \delta_v, & (\|xh\| = \|h\|), \\ \sum_{w \in supp(h)\backslash\{v\}} \min\{|w|_\Gamma, |g^{-1}w|_\Gamma\}\delta_w + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} |h_i|_H \delta_{v_i}, & (\|xh\| = \|h\| - 1). \end{cases}$$

在每种情况下，通过简单计算可推出 $\|m(xz) - m(z)\|_1$ 小于 $\min\{|v|_\Gamma, |g^{-1}v|_\Gamma\} + |x|_H = |x|_f$。右侧版本同理可得。

(4) 注意到 $kz = (\sigma_k(h)\ kg)$。根据 $m(z)$ 的定义，我们得到

$$m(kz) = \sum_{v \in k\ supp(h)} \min\{|v|_\Gamma, |g^{-1}k^{-1}v|_\Gamma\}\delta_v + \sum_{i=1}^{m} |h_i|_H \delta_{kv_i}, \text{and}$$

$$k.m(z) = \sum_{v \in supp(h)} \min\{|v|_\Gamma, |g^{-1}v|_\Gamma\}\delta_{kv} + \sum_{i=1}^{m} |h_i|_H \delta_{kv_i}.$$

取差可得

$$\begin{aligned} &\|m(kz) - k.m(z)\|_1 \\ \leqq &\| \sum_{v \in supp(h)} (\min\{|kv|_\Gamma, |g^{-1}v|_\Gamma\} - \min\{|v|_\Gamma, |g^{-1}v|_\Gamma\})\delta_{kv}\|_1 \\ \leqq &\sum_{v \in supp(h)} ||kv|_\Gamma - |v|_\Gamma| \\ \leqq &|k|_G|\ supp\, h| \end{aligned}$$

于是第一个不等式得证。第二个不等式可类似地利用$zk = (h, gk)$证明。□

4.2. **相对于 $\mathcal{G}$ 的 (AO) 性质**。 我们沿用上一小节中的相同记号。

命题 4.6. 设 $C = C^*_\lambda(H_\Gamma \rtimes G)$。那么，映射

$$\begin{aligned} \theta : C \otimes_{\text{alg}} JCJ &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathcal{G}))/\mathcal{K}(\mathcal{G}) \\ x \otimes JyJ &\longmapsto [xJyJ] \end{aligned}$$

关于最小张量范数是良定义且连续的。此外，其延拓 Θ 到 $C \otimes_{\min} JCJ$ 是核的，并且存在完全正且保单位提升。

证明。与定理 A 的证明一样，设 $D_v \subseteq \mathcal{B}(\ell^2 H_v)$ 是由 $C^*_\lambda(H_v)$ 和 $S(H_v) \subseteq \ell^\infty(H_v)$（对每个 $v \in V\Gamma$）生成的 C^*-代数，并设 $D \subseteq B(\ell^2 H_\Gamma) \subseteq B(\ell^2(H_\Gamma \rtimes G))$ 是由 $(D_v)_{v\in V\Gamma}$ 生成的 C^*-代数。

注意，根据断言 3.2， D 是核。此外，根据断言 3.3 的证明，对于任意 v， $w \in V\Gamma$, $f \in S(H_v)$ $h \in H_w$, $g \in G$ 以及来自

$\ell^2(H_{v_1}) \otimes \ell^2(H_{v_2})^o \otimes \cdots \otimes \ell^2(H_{v_n})$，对于 Γ 上固定的不可约词 $v_1 v_2 \dots v_n$，可得

$$\begin{aligned}
&[f, Ju_h J](\xi \otimes \delta_g) = ([f, Ju_{\sigma_g(h)} J]\xi) \otimes \delta_g \\
&= \begin{cases} ([f, Ju_h J](\xi_1)) \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n, & v = gw = v_1 \text{ and } v_2, \dots, v_n \in \mathrm{Lk}(v), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

由于作用 $G \curvearrowright \Gamma$ 具有有限稳定子群，对于每个 v、w、f、h 和 ξ 的元组，上述表达式的值仅对有限多个 $g \in G$ 非零。因此，在这种情况下，当我们令 $\mathcal{G}' = \{H_{\mathrm{Lk}v} \mid v \in V\Gamma\} \subseteq \mathcal{G}$ 时，对于任意 a，$b \in D$ 也有 $[a, JbJ] \in \mathcal{K}(\mathcal{G}')$。

因此，映射

$$\begin{aligned}
\Psi : D \otimes_{\mathrm{alg}} JDJ &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathcal{G}'))/\mathcal{K}(\mathcal{G}') \\
x \otimes JyJ &\longmapsto [xJyJ]
\end{aligned}$$

关于最小张量范数，该映射是定义良好且连续的。注意，当将 $\mathcal{G}'$ 替换为任意满足 $\mathcal{K}(\mathcal{G}') \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{E})$ 的子集族 $\mathcal{E}$ 时，这里的结论仍然成立，尤其是对 $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ 而言。

现在我们转而处理交叉积。定义映射 μ： $H_\Gamma \rtimes G \to \ell^1(V\Gamma)$，其定义为 $\mu(z) = m(z)/|z|_f$，并令 q： $\ell^\infty(H_\Gamma \rtimes G) \to \ell^\infty(H_\Gamma \rtimes G)/c_0(H_\Gamma \rtimes G, \mathcal{G})$ 为商映射。此外，我们如下定义三个交换 C^*-代数；

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\mathcal{G} = \{f \in \ell^\infty(H_\Gamma \rtimes G) \mid f - {}^x f, f - f^x \in c_0(H_\Gamma \rtimes G, \mathcal{G}) \text{ for every } x \in H_\Gamma\}, \\
&\mathcal{S}_\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{L}_\mathcal{G} \mid f - f^g \in c_0(H_\Gamma \rtimes G, \mathcal{G}) \text{ for every } g \in G\}, \\
&\mathcal{C}_\mathcal{G} = \mathcal{S}_\mathcal{G}/c_0(H_\Gamma \rtimes G, \mathcal{G}).
\end{aligned}$$

这里，${}^x f$、f^x 分别表示左、右正则表示。注意，左正则作用 $G \curvearrowright \ell^\infty(H_\Gamma \rtimes G)/c_0(H_\Gamma \rtimes G, \mathcal{G})$ 限制为作用 $\alpha : G \curvearrowright \mathcal{C}_\mathcal{G}$。我们断言此作用是可和的。

令 μ^*： $\ell^\infty(V\Gamma) \to \ell^\infty(H_\Gamma \rtimes G)$ 为伴随 u.c.p. 映射，即 $\mu^*(f)(g) = \int f d\mu(g)$。于是，根据命题 4.5，完全正收缩映射 $q \circ \mu^* : \ell^\infty(V\Gamma) \to \ell^\infty(H_\Gamma \rtimes G)/c_0(H_\Gamma \rtimes G, \mathcal{G})$ 的像包含于 $\mathcal{C}_\mathcal{G}$ 中，且此映射是左G-等变的。由于 G 是一个精确群，可知作用 $G \curvearrowright \ell^\infty(V\Gamma)$ 是可和的，因此 α： $G \curvearrowright \mathcal{C}_\mathcal{G}$ 也是如此。

由于 $\ell^\infty(H_\Gamma \rtimes G) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathcal{G}))$ 且 $c_0(H_\Gamma \rtimes G, \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{G})$，我们得到一个定义良好的 $*$-同态

$$\begin{aligned}
\Psi' : \mathcal{C}_\mathcal{G} \otimes_{\min} D \otimes_{\min} JDJ &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathcal{G}))/\mathcal{K}(\mathcal{G}) \\
f \otimes x \otimes JyJ &\longmapsto [fxJyJ]
\end{aligned}$$

它仍然是核的。

最后，可以定义 $G \times G$ 在 C^*-代数 $\mathcal{C}_\mathcal{G} \otimes_{\min} D \otimes_{\min} JDJ$ 上的作用：

$$G \times G \ni (g_1, g_2) \longmapsto \alpha(g_1) \otimes \mathrm{Ad}\lambda(g_1) \otimes \mathrm{Ad}\rho(g_2)$$

（这里 λ 和 ρ 分别表示左正则表示和右正则表示）。那么，由于 α 是一个可和作用，该作用也再次可和，而全交叉积 C^*代数 $(\mathcal{C}_\mathcal{G} \otimes_{\min} D \otimes_{\min} JDJ) \rtimes_f (G \times G)$是核的，并且与

约化交叉积相同。因此，映射 Ψ' 可延拓为核的 $*$-同态

$$\begin{aligned}\Theta' : (\mathcal{C}_{\mathcal{G}} \otimes_{\min} D \otimes_{\min} JDJ) \rtimes_r (G \times G) &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathcal{G}))/\mathcal{K}(\mathcal{G}) \\ (f \otimes x \otimes JyJ, (g_1, g_2)) &\longmapsto [fxJyJu_{g_1}Ju_{g_2}J].\end{aligned}$$

将此映射限制到 $C \otimes_{\mathrm{alg}} JCJ \subseteq (D \otimes_{\min} JDJ) \rtimes_r (G \times G)$，便得到所需的映射。□

4.3. **结合相对双精确性**。这里的论证与 [HIK22 引理 3.13] 的证明完全相同。不过，为求完整起见，我们仍将其列出。

定理 *4.2* 的证明。回顾一下，G 相对于 $\mathcal{S}$ 是双精确的，并且 $\mathcal{F} = \{H_\Gamma \cdot S \mid S \in \mathcal{S}\}$。我们令 $G = G \times G$。

设 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) = \mathcal{K}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{G})$。我们定义 $\mathcal{B}(\ell^2(H_\Gamma \rtimes G))$ 的三个 C^*-代数 $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$ 如下：

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= C^*\{C^*(H_\Gamma), JC^*(H_\Gamma)J, 1 \otimes \ell^\infty G\}, \\ \mathscr{A} &= C^*\{C^*(H_\Gamma), JC^*(H_\Gamma)J, \mathcal{L}_{\mathcal{G}}\}, \\ \mathscr{M} &= C^*\{C^*(H_\Gamma), JC^*(H_\Gamma)J, \ell^\infty(H_\Gamma \rtimes G)\}.\end{aligned}$$

这些代数各自都有一个 G 的作用：

$$\tilde{G} \ni (g_1, g_2) \longmapsto \mathrm{Ad}(u_{g_1}Ju_{g_2}J).$$

我们通常将 $\mathscr{A}/(\mathcal{K} \cap \mathscr{A})$ 简写为 $\mathscr{A}/\mathcal{K}$（同样，将 $\mathscr{B}, \mathscr{M}$ 简写为 $\mathscr{A}$，将 $\mathcal{K}(\mathcal{F}), \mathcal{K}(\mathcal{G})$ 简写为 $\mathcal{K}$）。

我们断言

$$\begin{aligned}\Phi : C \otimes_{\mathrm{alg}} JCJ &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K})/\mathcal{K} \\ x \otimes JyJ &\longmapsto [xJyJ]\end{aligned}$$

是关于最小张量积连续的、核的，并且其扩张存在一个完全正且保单位提升 $C \otimes_{\min} JCJ \to \mathcal{M}(\mathcal{K})$，由命题 2.6 可得结论。我们通过证明以下三个断言来证明这一点。我们将 $\rtimes_r$ 记作约化交叉积 C^*代数，将$\rtimes_f$ 记作全交叉积 C^*代数。

断言 4.7. 存在 $*$-同态 φ, π, ψ，连接以下短正合列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & ((\mathcal{K}(\mathcal{F}) \cap \mathscr{A})/\mathcal{K}) \rtimes_r \tilde{G} & \longrightarrow & (\mathscr{A}/\mathcal{K}) \rtimes_r \tilde{G} & \longrightarrow & (\mathscr{A}/\mathcal{K}(\mathcal{F})) \rtimes_r \tilde{G} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ 0 & \longrightarrow & ((\mathcal{K}(\mathcal{F}) \cap \mathscr{M})/\mathcal{K}) \rtimes_f \tilde{G} & \longrightarrow & (\mathscr{M}/\mathcal{K}) \rtimes_f \tilde{G} & \longrightarrow & (\mathscr{M}/\mathcal{K}(\mathcal{F})) \rtimes_f \tilde{G} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

它们由包含映射 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$ 诱导。

断言 *4.7* 的证明。首先注意，根据命题 2.6，左右正则作用 $G \curvearrowright \ell^\infty G/c_0(G; \mathcal{S})$ 是可和的。然后，ψ 的存在性可由G-等变包含推出

$$1 \otimes \ell^\infty G/c_0(G; \mathcal{S}) \subseteq \ell^\infty(H_\Gamma \rtimes G/c_0(H_\Gamma \rtimes G; \mathcal{F}) \subseteq \mathscr{B}/\mathcal{K}(\mathcal{F}) \subseteq \mathscr{A}/\mathcal{K}(\mathcal{F}).$$

˜为了证明 φ的存在性，我们利用以下 G-等变包含

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}(\mathcal{F})\cap\mathscr{A})/\mathcal{K} &= \mathcal{I}(\mathcal{F})/(\mathcal{I}(\mathcal{F})\cap\mathcal{I}(\mathcal{G}))\\ &\cong (\mathcal{I}(\mathcal{F})+\mathcal{I}(\mathcal{G}))/\mathcal{I}(\mathcal{G})\\ &\lhd \mathscr{A}/\mathcal{I}(\mathcal{G}),\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \mathcal{K}(\mathcal{F})\cap\mathscr{A}\lhd\mathscr{A}$。注意，最后一个典范地包含$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}/c_0(H_\Gamma\rtimes G;\mathcal{G})$，其中 $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ 与前一个命题的证明中相同。由于˜存在一个 G-等变的完全正收缩映射

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{G}}\otimes\overline{\mathcal{C}_{\mathcal{G}}} &\longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{G}}/c_0(H_\Gamma\rtimes G;\mathcal{G})\\ f\otimes g &\longmapsto fg\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ 赋予平凡的右 G-作用，而 $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ 是 C^*-代数 $\overline{\mathcal{C}_{\mathcal{G}}}$，其左右 $\tilde{G}$-作用互换；$g\cdot f\cdot h = h^{-1}fg^{-1}$ 对于 $f\in\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$。鉴于˜作用 $G\curvearrowright\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ 是可和的，¯可知 $G\curvearrowright\mathscr{A}/\mathcal{I}(\mathcal{G})$ 是一个可和作用，因此其约化交叉积与全交叉积相同。取由 $(\mathcal{K}(\mathcal{F})\cap\mathscr{A})/\mathcal{K}$ 和 G生成的闭˜理想，也可得出 $G\curvearrowright(\mathcal{K}(\mathcal{F})\cap\mathscr{A})/\mathcal{K}$ 的约化交叉积与全交叉积相同。这验证了 φ的存在。

最后， π 的存在性由五引理得出。 □

断言 4.8。 在上述设定中， φ 和 $\psi|_{(\mathscr{B}/\mathcal{K})\rtimes_r\tilde{G}}$ 是核映射。

˜断言 *4.8* 的证明。 再次注意，由于 G 在$\mathcal{L}_{\mathcal{G}}/c_0(H_\Gamma\rtimes G;\mathcal{G})$和 $\ell^\infty G/c_0(G;\mathcal{S})$上的左右正则作用是可和的，约化交叉积˜ ˜$(\mathscr{A}/\mathcal{I}(\mathcal{G}))\rtimes_r G$和$(\mathscr{B}/\mathcal{K})\rtimes_r G$是核的。第二个断言直接由此得出。对于第一个断言，只需回忆 C^*-代数$((\mathcal{K}(\mathcal{F})\cap\mathscr{A})/\mathcal{K})\rtimes_r$ ˜G 与$(\mathscr{A}/\mathcal{I}(\mathcal{G}))\rtimes_r G$ 中的一个闭理想 $*$-同构，因此是核的。□

断言 4.9。 包含映射 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{M}$ 可扩张为一个核完全正收缩映射

$$\pi' : (\mathscr{B}/\mathcal{K})\rtimes_r\tilde{G}\longrightarrow(\mathscr{M}/\mathcal{K})\rtimes_f\tilde{G}.$$

˜断言 *4.9* 的证明。 只需证明，将 π 限制到 $(\mathscr{B}/\mathcal{K})\rtimes_r G$ 后是核的。

由于理想 $\mathcal{K}(\mathcal{F})\cap\mathscr{B}\lhd\mathcal{K}(\mathcal{F})\cap\mathscr{M}$ 具有一个相对于 $\mathcal{S}\}$ 较小的近似单位 $\{1_{H_\Gamma S} = 1\otimes 1_S \mid S$，由下面的引理 4.10 可知结论成立。 □

回顾一下，根据命题 4.6 的证明，存在一个核的 $*$-同态，并且有一个完全正且保单位提升

$$\begin{aligned}\Psi : C^*_\lambda(H_\Gamma)\otimes_{\min}JC^*_\lambda(H_\Gamma)J &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{G}))/\mathcal{K}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{G})\\ x\otimes JyJ &\longmapsto [xJyJ]\end{aligned}$$

因为 $\mathcal{K}(\mathcal{G}')\subseteq\mathcal{K}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{G})$。根据断言 4.7，我们得到一系列完全正收缩映射

$$\begin{aligned}C\otimes_{\min}JCJ &\xrightarrow{\cong} (C^*_\lambda(H_\Gamma)\otimes_{\min}JC^*_\lambda(H_\Gamma)J)\rtimes_r\tilde{G}\\ &\xrightarrow{\Psi} (\mathscr{B}/\mathcal{K})\rtimes_r\tilde{G}\\ &\xrightarrow{\pi} (\mathscr{M}/\mathcal{K})\rtimes_f\tilde{G}\\ &\xrightarrow{f} \mathcal{M}(\mathcal{K})/\mathcal{K}\end{aligned}$$

其中 f 是由 $f|_{\mathscr{M}/\mathcal{K}} = \mathrm{id}_{\mathscr{M}/\mathcal{K}}$ 定义的 $*$-同态，且 $f(u_{(g_1,g_2)}) = u_{g_1}Ju_{g_2}J$。然后，所有映射的复合延拓了上面的映射 Φ，由于 π 是核的，故断言成立。□

引理 4.10. 设有两个由 C^*-代数和完全正收缩映射组成的短正合列 $\varphi\colon I \to J$, $\pi\colon A \to B$ 和 $\psi\colon A/I \to B/J$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B/J & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 A 是精确的，φ, ψ 是核的。若在 I 中存在一个近似单位 $(a_i)_i$，使得 $(\varphi(a_i))_i$ 也是 J中的近似单位，那么 π 也是核的。

证明。转到双对偶后，只需证明 $\pi^{**}\colon A^{**} \to B^{**}$ 是弱核的。注意，根据假设，φ^{**} 是含幺的。于是，由于我们有分解 $A^{**} \cong I^{**} \oplus (A/I)^{**}$ 和 $B^{**} \cong J^{**} \oplus (B/J)^{**}$，且 π^{**} 在第一个分量上的限制与 φ^{**}一致，可得$\pi^{**} = \varphi^{**} \oplus \psi^{**}$。由于 φ^{**} 和 ψ^{**} 都是弱核的，因此结论成立。□

5. 刚性与图-花环积的素性

本节研究冯·诺伊曼代数的图-花环积的性质。接下来我们考虑以下情形。

记号 5.1。(1) 设 G 是一个无限双精确群，H 是一个无限精确群。(2) 设 $B = LH$ 是 H 的群冯·诺伊曼代数。(3) 设 Γ 是一个无限局部有限图，并假设存在一个作用 $G \curvearrowright \Gamma$，其轨道有限，且所有顶点的稳定子群均有限。(4) 记 B_Γ 为每个顶点代数均为 B 的图乘积代数，记 $M = B_\Gamma \rtimes G$ 为与作用 $\sigma\colon G \curvearrowright B_\Gamma$ 相关联的交叉积。

我们首先证明引理 2.13 (4)' 的以下等变版本。

引理 5.2。设 $P \subseteq pMp$ 是一个冯·诺伊曼子代数，且存在一个有限子集 $E \subseteq V\Gamma$，使得对于任意 $E' \subsetneq E$，都有 $P \prec^s_M B_E$ 和 $P \not\prec_M B_{E'}$。

如果存在一个有限子集 $F \subseteq V\Gamma$ 使得 $P \prec_M B_F$，那么就存在一个元素$g \in G$ 使得 $gE \subseteq F$。

证明。我们先证明 $p \in B_E$ 且 $P \subseteq pB_Ep$ 的情形。假设结论不成立。那么，由引理 2.4 和 2.13 (4)'，存在一个酉元网 $u_i \in \mathcal{U}(P)$，使得对于任意 $g \in G$ 和 $a, b \in B_\Gamma$, $\|E_{B_{gF}}(a^*u_ib)\|_2$ 收敛到 0。

我们断言，对于每个 $a, b \in M$，都有 $\|E_{B_F}(a^*u_ib)\|_2 \to 0$，这立即与假设矛盾。只需证明 $a^* = u_gx, b = yu_h$ 的情形，其中 $x, y \in B_\Gamma$。于是

$$\begin{aligned} \|E_{B_F}(a^*u_ib)\|_2 &= \|E_{B_F}(\sigma_g(xu_iy)u_{gh})\|_2 \\ &= \delta_{gh,e}\|\sigma_g(E_{B_{g^{-1}F}}(xu_iy))\|_2 \to 0 \end{aligned}$$

断言得证。

对于一般情形，我们按照 [HI25 中的断言 3.6] 进行。由于 $P \prec_M B_F$，存在非零投影 $r \in P$、$q \in B_F$，一个正规 $*$-同态 $\theta\colon rPr \to qB_Fq$，以及一个偏等距 $v \in rMq$，使得对每个 $x \in rPr$，都有 $v\theta(x) = xv$。由于 $vv^* \in (rPr)' \cap rMr = (P' \cap pMp)r$，存在一个投影 $r' \in P' \cap pMp$，使得 $vv^* = rr'$。根据假设和引理 2.3，存在非零投影 $s \in rPrr'$、$q' \in B_E$，一个正规 $*$-同态 $\varphi\colon sPs \to q'B_Eq'$，以及一个偏等距 $w \in sMq'$，使得对每个 $x \in sPs$，都有 $w\varphi(x) = xw$；并且对每个 $E' \subsetneq E$，都有 $Q := \varphi(sPs) \not\prec B_{E'}$。

综合起来，我们得到 $w^*vv^*w = w^*rr'w = w^*w \neq 0$ 并且，对每个 $x \in sPs$，

$$v^*w\varphi(x) = v^*xw = \theta(x)v^*w.$$

因此 $Q \prec_M B_F$。现在我们可以应用前半部分。 □

下面的引理是 [IM22，引理 7.2] 的一个变体。

引理 5.3。设 $P \subseteq pMp$ 是一个冯·诺依曼子代数，且存在一个有限子集 $E \subseteq V\Gamma$，使得 $P \prec^s_M B_E$，并且对任意 $E' \subsetneq E$，都有 $P \not\prec_M B_{E'}$。

那么，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个投影 $q \in P' \cap pMp$，满足 $\tau(q) > 1 - \varepsilon$，且使得 $\mathcal{QN}_{qMq}(Pq)'' \prec^s B_{E\cup \mathrm{Lk}E} \rtimes G^E$，其中 $G^E = \{g \in G \mid gE = E\}$ 是 E 的稳定子群。

证明。与前一个引理的证明一样，我们首先证明$p \in B_E$和 $P \subseteq pB_Ep$的情形。取 $x \in \mathcal{QN}_{pMp}(P)$ 和 x_1、……、$x_k \in pMp$，使得$Px \subseteq \sum_i x_iP$。令 $x = \sum_{g\in G} x^g u_g$ 和 $x_i = \sum_{g\in G} x_i^g u_g$ 为它们的傅里叶展开。那么，对于任意 $g \in G$，通过简单计算可得 $Px^g \subseteq \sum_i x_i^g \sigma_g(P) \subseteq \sum x_i^g B_{gE}$。若 $x^g \neq 0$，这表明存在一个右 B_{gE}- 有限的 P-B_{gE}- 双模$span Px^g B_{gE} \subseteq L^2(B_\Gamma)$，因此有 $P \prec_{B_\Gamma} B_{gE}$。由引理 2.13 (4)'可知，$E \subseteq gE$；由于 E 是有限的，故 $E = gE$ 和 $g \in G^E$。此外，由引理 2.13 (3)'，x^g属于 $B_{E\cup \mathrm{Lk}E}$。最后得到 $\mathcal{QN}_{pMp}(P) \subseteq B_{E\cup \mathrm{Lk}E} \rtimes G^E$。

一般情形可按照 [IM22，] 引理 7.2 (ii)] 得出。取正整数 n、正规 $*$-同态 $\pi\colon P \to \mathbb{M}_n(B_E)$，以及偏等距 $v \in \mathbb{M}_{1,n}(M)$，使得 $v\pi(x) = xv$对每个 $x \in P$ 都成立，且 $\tau(vv^*) > 1 - \varepsilon$如定理 2.1 所述。利用引理 2.3，还可以进一步假设，对任意真子集 $E' \subsetneq E$，都有 $\pi(P) \not\prec_{\mathbb{M}_n(M)} \mathbb{M}_n(B_{E'})$。于是，通过与本证明前半部分类似的论证，可得

$$\mathcal{QN}_{r\mathbb{M}_n(M)r}(\pi(P)r) \subseteq \mathcal{QN}_{\pi(p)\mathbb{M}_n(M)\pi(p)}(\pi(P)) \subseteq \mathbb{M}_n(B_{E\cup \mathrm{Lk}E} \rtimes G^E),$$

其中 $r = v^*v \in \pi(P)' \cap \pi(p)\mathbb{M}_n(M)\pi(p)$。令 $q = vv^* \in P' \cap pMp$，得到

$$v^*\mathcal{QN}_{qMq}(Pq)v = \mathcal{QN}_{r\mathbb{M}_n(M)r}(\pi(P)r)$$

从而得到结论。

□

5.1. 图 wreath 积的素性。现在我们证明图 wreath 积的素性结果。

定理 E 的证明。假设存在 II_1 因子 $M = B_\Gamma \rtimes G = P \bar{\otimes} Q$ 的一个张量积分解。由引理 2.14 (3)，不妨设 P 是非 amenable 的，且 Q 是弥散的。

于是，由定理 B，存在一个投影 $p \in Q' \cap M = P$ 和一个顶点 v，使得 $Qp \prec_M^s B_E$，其中 $E = \mathrm{St}v$ 根据假设是一个有限集。如有必要，缩小p 和 E，便可取一个投影 p 和一个非空有限子集$E \subseteq V\Gamma$，使得 $Qp \prec_M^s B_E$，且对所有真子集 $E' \subsetneq E$，都有 $Qp \not\prec_M B_{E'}$。

但是，根据引理 5.3，存在一个投影 $q \in pPp$，使得 $qMq = \mathcal{N}_{qMq}(Qq)''$ $\prec_M B_{E \cup \mathrm{Lk}E} \subseteq B_\Gamma$，因为 G^E 是有限的。这与 G是无限的相矛盾。□

5.2. **图-花环积的图的刚性**。设 $(H_1,\ G_1 \curvearrowright \Gamma_1)$ 和 $(H_2,\ G_2 \curvearrowright \Gamma_2)$ 是满足记号 5.1 中条件的元组。

为清晰起见，除非另有说明，我们将用 v 表示 $V\Gamma_1$ 中的一个元素，并用 w 表示 $V\Gamma_2$中的一个元素，必要时附加下标。

我们采用记号 $B = LH_1$、 $C = LH_2$、 $M = B_{\Gamma_1} \rtimes G_1 = L((H_1)_{\Gamma_1} \rtimes G_1)$、$N = C_{\Gamma_2} \rtimes G_2 = L((H_2)_{\Gamma_2} \rtimes G_2)$，这不同于记号 5.1，以避免过度使用下标。此外，令 S 和 T 分别为 $G_1 \backslash V\Gamma_1$和 $T = G_2 \backslash V\Gamma_2$ 的（有限）代表元集。还要回顾一下，图 Γ 是不可横截图的，当且仅当对每一对顶点 $v \neq v' \in V\Gamma$ 都有 $\mathrm{Lk}_\Gamma v \not\subseteq \mathrm{St}_\Gamma v'$，并注意到一个无限连通的不可横截图没有度小于 2 的顶点。

最后，假设存在一个 II_1 因子 P，并且存在投影 $p, q \in P$，使得存在同构 $M \cong pPp$, $N \cong qPq$。通过这些同构，我们将 M与 pPp以及 N 与 qPq 视为相同。

我们采用 [HI25, Proposition 6.4] 的方法来证明以下结论;

定理 5.4。 在上述设定中，进一步假设

- Γ_i 是一个围长为$\Gamma_i \geqq 5$的不可横截图,
- 作用 $G_i \curvearrowright V\Gamma_i$ 满足以下条件；对于每个顶点$v \in V\Gamma_i$ 和 $g \in G_i$，如果任意 $v' \in \mathrm{St}_{\Gamma_i} v$都满足 $gv' = v'$，那么 $g = e$,

对于 $i = 1,2$。于是，存在投影 $(p_{v,w})_{v \in S, w \in T}$ 和 $(q_{w,v})_{v \in S, w \in T}$，使得对每个 $v \in S$ 和 $w \in T$，以下结论成立。

(1) $p_{v,w} \in \mathcal{Z}(B'_{\mathrm{St}v} \cap pPp)$, $q_{w,v} \in \mathcal{Z}(C'_{\mathrm{St}w} \cap qPq)$.

(2) $\sum_{w' \in T} p_{v,w'} = p$, $\sum_{v' \in S} q_{w,v'} = q$

(3) $B_{\mathrm{St}v} p_{v,w} \prec_P^s C_{\mathrm{St}w} q_{w,v}$,$C_{\mathrm{St}w} q_{w,v} \prec_P^s B_{\mathrm{St}v} p_{v,w}$

证明。 首先请注意，对于任意 $v \in \Gamma_i$，$\mathrm{Lk}_{\Gamma_i}(\mathrm{St}_{\Gamma_i} v) = \emptyset$ and $B_{\mathrm{Lk}v}$ 是一个非 amenable II_1 因子，因为 Γ_i 不可换位。

对于每一对 $(v,\ w) \in S \times T$，令 $p_{v,\ w} \in \mathcal{Z}(B'_{\mathrm{St}v} \cap pPp)$ 和 $q_{w,\ v} \in \mathcal{Z}(C'_{\mathrm{St}w} \cap qPq)$ 为满足$B_{\mathrm{St}v} p_{v,\ w} \prec^s C_{\mathrm{St}w}$ 及 $C_{\mathrm{St}w} q_{w,\ v} \prec^s B_{\mathrm{St}v}$的极大投影。（这些投影可以为零。）

我们首先断言，对于每个 v 和 w，$\bigvee_{w' \in T} p_{v,\ w'} = p$ and $\bigvee_{v' \in S} q_{w,\ v'} = q$。任取一个顶点 $v \in S$ 和一个投影 $r \in \mathcal{Z}(B'_{\mathrm{St}v} \cap pPp)$。由于根据引理 2.14 (5)，$r \in \mathcal{Z}(B_v \rtimes G_0^{\mathrm{St}v}) = \mathcal{Z}(B_v)$，因此 $B_v r$ 和 $B_{\mathrm{Lk}v} r$ 是两个彼此交换的子代数，且后者非 amenable。于是，根据定理 B 中的相对双精确性，存在一个顶点 $w \in V\Gamma_2$ 使得 $B_v r \prec C_{\mathrm{St}w}$。必要时，可通过典范酉元进行共轭，从而令 $w \in T$。

令 $E = \mathrm{St}w$。如有必要，缩小 r和 E，我们可以取 $r \in \mathcal{Z}(B'_v \cap pPp)$ 和 $E \subseteq \mathrm{St}w$，使得对于任意真子集 $E' \subsetneq E$，$B_v r \prec^s C_E$ 和 $B_v r \not\prec C_{E'}$ 均成立。由引理 5.3，存在一个投影 $p_0 \in (B_v r)' \cap rMr = r((\mathcal{Z}(B_v) \otimes B_{\mathrm{Lk}v}) \rtimes$

$G^v)r$ 使得 $\mathcal{QN}_{p_0Mp_0}(B_vp_0)'' \prec C_{E\cup \mathrm{Lk}E}$。但是，由于根据 [Pop06b, $p_0\mathcal{QN}_M(B_v)''p_0$ 包含于 $\mathcal{QN}_{p_0Mp_0}(B_vp_0)''$ 中，依照引理 3.5], ，可推出 $p_0(B_{\mathrm{St}v} \rtimes G^v)p_0 \prec C_{E\cup \mathrm{Lk}E}$，再结合引理 2.14 (4)。

取一个投影 $p' \in (B_{\mathrm{St}v} \rtimes G^v)' \cap M \subseteq B_{\mathrm{St}v} \rtimes G^v$ 使得 $p_0(B_{\mathrm{St}v} \rtimes G^v)p_0p' \prec^s C_{E\cup \mathrm{Lk}E}$，并且 $z \in \mathcal{Z}(B_{\mathrm{St}v} \rtimes G^v) = \mathcal{Z}(B_v)$ 是p_0p'的中心支撑。注意，这里我们再次用到了引理 2.14 (5)。于是可得 $B_{\mathrm{St}v}z \subseteq (B_{\mathrm{St}v} \rtimes G^v)z \prec C_{E\cup \mathrm{Lk}E}$。此外，由于 $E \subseteq \mathrm{St}w$ 对某个 $w \in T$ 和围长$\Gamma_2 \geqq 5$成立，因此 E 或 $\mathrm{Lk}E$ 是单元素集，从而存在一个 $w' \in V\Gamma_2$ 使得 $E \cup \mathrm{Lk}E \subseteq \mathrm{St}w'$。这就验证了我们的断言。

接下来，很容易看出 $B_{\mathrm{St}v}p_{v,w} \prec^s C_{\mathrm{St}w}q_{w,v}$。事实上，若不然，根据本证明的第一部分，存在一个 $v \neq v' \in S$，使得 $B_{\mathrm{St}v}p_{v,w} \prec C_{\mathrm{St}w}q_{w,v'}$。但由于 $C_{\mathrm{St}w}q_{w,v'} \prec^s B_{\mathrm{St}v'}$，由引理 2.2 可得 $B_{\mathrm{St}v} \prec_P B_{\mathrm{St}v'}$，并且由引理 5.2，对于某个 $g \in G_1$，有 $\mathrm{St}_{\Gamma_1}(gv) \subseteq \mathrm{St}_{\Gamma_1}v'$。但这与假设 Γ_1 不可换位相矛盾。类似地可得 $C_{\mathrm{St}w}q_{w,v} \prec^s B_{\mathrm{St}v}p_{v,w}$。

最后，我们证明条件 (2) 成立。假设存在顶点$v \in S$ 和 $w \neq w' \in T$，使得 $p' = p_{v,w}p_{v,w'} \neq 0$。若 $C_{\mathrm{St}w}q_{w,v} \prec B_{\mathrm{St}v}p'$，则结合 $B_{\mathrm{St}v}p' \prec^s C_{\mathrm{St}w'}q_{w',v}$ 可得 $C_{\mathrm{St}w}q_{w,v} \prec C_{\mathrm{St}w'}q_{w',v}$，但这再次与 Γ_2 不可换位相矛盾。若 $C_{\mathrm{St}w}q_{w,v} \not\prec B_{\mathrm{St}v}p'$，则根据本证明的第一个断言，$C_{\mathrm{St}w}q_{w,v} \prec^s B_{\mathrm{St}v}(p_{v,w} - p')$，因此 $B_{\mathrm{St}v}p' \prec^s B_{\mathrm{St}v}(p_{v,w} - p')$。但是，由引理 2.14 (5)，$\mathcal{Z}(B'_{\mathrm{St}v} \cap pPp) = \mathcal{Z}(B_{\mathrm{St}v}) \otimes \mathcal{Z}(LG_0^{\mathrm{St}v}) = \mathcal{Z}(B_v)$，这与 $p', p_v, w - p' \in \mathcal{Z}(B'_{\mathrm{St}v} \cap pPp)$ 以及引理 2.14 (4) 相矛盾；该引理指出，每个 L^2M 中右 $B_{\mathrm{Lk}v}$-有限的 $B_{\mathrm{St}v}$-$B_{\mathrm{St}v}$-双模都包含于 $L^2(B_{\mathrm{St}v} \rtimes G^{\mathrm{St}v}) = L^2(B_{\mathrm{St}v} \rtimes G^v)$。□

现在我们可以证明定理 C 了。

定理 *C* 的证明。在定理 5.4 的设定下，进一步假设 H_1、H_2具有无限共轭类性质，且 $G_1 \curvearrowright V\Gamma_1$、$G_2 \curvearrowright V\Gamma_2$ 是自由的。

由于顶点代数 B_v 和 C_w 是因子，根据引理 2.14 (5)，可得 $\mathcal{Z}(B'_{\mathrm{St}v} \cap pPp) = \mathbb{C}p$和 $\mathcal{Z}(C'_{\mathrm{St}w} \cap qPq) = \mathbb{C}q$，对每个 $v \in S$和 $w \in T$均成立。

取 $v \in V\Gamma$。于是，根据定理 5.4，对每个 $v \in S$，存在唯一的 $w \in T$ 使得 $B_{\mathrm{St}v} \prec^s C_{\mathrm{St}w}$，反之亦然。这就在 $G_1\backslash V\Gamma_1$ 与 $G_2\backslash V\Gamma_2$ 之间建立了一个双射，从而验证了定理的前半部分。

对于后半部分，我们利用合并自由积表示$B_{\mathrm{St}v} = *_{v' \in \mathrm{Lk}v, B_v}(B_v \otimes B_{v'})$，这归因于围长$\Gamma_i \geqq 5$的假设。假设 $v \in S$ 和 $w \in T$ 满足 $B_{\mathrm{St}v} \prec^s C_{\mathrm{St}w}$ 和 $C_{\mathrm{St}w} \prec^s B_{\mathrm{St}v}$。那么，存在一个正整数 n、一个正规 $*$-同态 $\pi: B_{\mathrm{St}v} \to \mathbb{M}_n(C_{\mathrm{St}w})$，以及一个偏等距 $u \in \mathbb{M}_{1,n}(P)$，使得对每个 $x \in B_{\mathrm{St}v}$，都有 $u\pi(x) = xu$。如有必要，通过缩小 u 的定义域，还可以进一步假设 $f := \pi(p) = E_{\mathbb{M}_n(C_{\mathrm{St}w})}(u^*u)$。

由于对每个 $v' \in \mathrm{Lk}v$，$\pi(B_v \otimes B_{v'})$ 都具有 (T) 性质，根据定理 2.15，存在 $w' \in \mathrm{Lk}w$，使得 $\pi(B_v \otimes B_{v'}) \prec_{\mathbb{M}_n(C_{\mathrm{St}w})} C_w \otimes C_{w'}$。于是，存在一个正整数 m、一个正规 $*$-同态 $\varphi: \pi(B_v \otimes B_{v'}) \to \mathbb{M}_{mn}(C_w \otimes C_{w'})$，以及一个偏等距 $u' \in f\mathbb{M}_{n,mn}(C_{\mathrm{St}w})$，使得对每个$y \in \pi(B_v \otimes B_{v'})$，都有 $u'\varphi(y) = yu'$。综合起来可知，根据关于 f 和 u的假设，有 $uu' \neq 0$；并且，$*$-同态 $\varphi \circ \pi: B_v \otimes B_{v'} \to \mathbb{M}_{mn}(C_w \otimes C_{w'})$ 满足 $\varphi u'(\pi(x)) = u\pi(x)u' = xuu'$。

因此，对于每条边 $(v, v') \in E\Gamma_1$，都存在一条边 $(w, w') \in E\Gamma_2$ 使得 $B_v \otimes B_{v'} \prec^s_P C_w \otimes C_{w'}$（由于引理 2.14 (5)，关系 $\prec^s$ 再次成立）。

剩下需要证明的是，这一对应关系给出了商图之间的一个同构。

假设 $v \in S$, $w \in T$, $v' \in \mathrm{Lk}v$，且 $w' \neq w'' \in \mathrm{Lk}w$ 满足 $B_{\mathrm{Lk}v} \prec^s C_{\mathrm{Lk}w}$、$B_v \otimes B_{v'} \prec_P^s C_w \otimes C_{w'}$ 和 $C_w \otimes C_{w''} \prec_P^s B_v \otimes B_{v'}$。但这立即推出 $C_w \otimes C_{w''} \prec^s C_w \otimes C_{w'}$，并且由引理 5.2，存在一个元素 $g \in G_2$ 使得 $g\{w, w'\} = \{w, w''\}$。由于 $w' \neq w''$ 且该作用是自由的，因此可得 $(gw, gw') = (w'', w)$，所以两条边 $(w, w'), (w, w'') \in E\Gamma_2$ 在作用下共轭。这就验证了该断言。□

顺带一提，在假设 H_1、H_2 是双精确的情况下，我们可以断言能够在子代数 $B_{\mathrm{Lk}v}$ 和 $C_{\mathrm{Lk}w}$ 之间建立对应关系，而不必采用定理 5.4。

定理 5.5。假设用以下条件替代定理 5.4 中的假设：

- H_i 是非 amenable 且双精确的，
- Γ_i 是一张刚性图，即对于每个 $v \in V\Gamma_i$，$\mathrm{Lk}_{\Gamma_i}(\mathrm{Lk}_{\Gamma_i} v) = \{v\}$，
- 作用 $G_i \curvearrowright V\Gamma_i$ 满足以下条件：对于每个顶点 $v \in V\Gamma_i$ 和 $g \in G_i$，若对某个 $v' \in \mathrm{St}_{\Gamma_i} v$ 有 $gv' = v'$ 成立，则 $g = e$,

对于 $i = 1, 2$。因此，存在投影 $(p_{v,\ w})_{v \in S,\ w \in T}$ 和 $(q_{w,\ v})_{v \in S,\ w \in T}$，使得对于每个 $v \in S$ 和 $w \in T$，以下结论成立。

(1) $p_{v,\ w} \in \mathcal{Z}(B'_{\mathrm{Lk}v} \cap pPp)$，$q_{w,\ v} \in \mathcal{Z}(C'_{\mathrm{Lk}w} \cap qPq)$。

(2) $\sum_{w' \in T} p_{v,w'} = p$, $\sum_{v' \in S} q_{w,v'} = q$

(3) $B_{\mathrm{Lk}v} p_{v,w} \prec_P^s C_{\mathrm{Lk}w} q_{w,v}$, $C_{\mathrm{Lk}w} q_{w,v} \prec_P^s B_{\mathrm{Lk}v} p_{v,w}$

证明。对于每一对 $(v,\ w) \in S \times T$，令 $p_{v,\ w} \in \mathcal{Z}(B'_{\mathrm{Lk}v} \cap pPp)$ 和 $q_{w,\ v} \in \mathcal{Z}(C'_{\mathrm{Lk}w} \cap qPq)$ 为满足 $B_{\mathrm{Lk}v} p_{v,\ w} \prec^s C_{\mathrm{Lk}w}$ 且 $C_{\mathrm{Lk}w} q_{w,\ v} \prec^s B_{\mathrm{Lk}v}$ 的极大投影。（这些投影可以为零。）

我们断言，对于每个 v 和 w，$\bigvee_{w \in T} p_{v,\ w} = p$ 且 $\bigvee_{v \in S} q_{w,\ v} = q$。注意，在此情形下，$B$ 没有可积直和项，因为它是一个非 amenable 群的群冯·诺伊曼代数。

任取一个顶点 $v \in S$ 和一个投影 $r \in \mathcal{Z}(B'_{\mathrm{Lk}v} \cap pPp)$。于是，由引理 2.14 (5)，$r$ 与 $B_{\mathrm{St}v}$ 交换，且 $B_{\mathrm{Lk}v} r$ 的相对交换子包含非 amenable 子代数 $B_v r$。由定理 B 中的相对双精确性，存在一个顶点 $w \in V\Gamma_2$ 使得 $B_{\mathrm{Lk}v} r \prec C_{\mathrm{Lk}w}$。如有必要，通过典范酉元进行共轭，可取 $w \in T$，断言得证。

对于证明的其余部分，只需注意到，与定理 5.4 的证明一样，很容易看出，对于任意 $v \in S$ 和$w \neq w' \in T$，$B_{\mathrm{Lk}v} p_{v,\ w} \prec^s C_{\mathrm{Lk}w} q_{w,\ v}$ 以及 $p_{v,\ w} p_{v,\ w'} = 0$。□

本文最后就图积和图-花环积的刚性问题作几点评论。

注 5.6。(1) 在定理 5.5 的证明中用定理 A 替代定理 B，并接着沿用 [BCC24 定理 6.18], 的证明，可以像 [BCC24 定理 6.18] 那样，在顶点群为双精确且具有无限共轭类性质时，完整恢复刚性图上图积的底层图信息。

(2) 如第 1 节末尾所述，作者不知道能否从所得的冯·诺伊曼代数中恢复底层图 Γ 或群 G 本身。实现这些全局刚性结果的一大障碍，是难以

建立形如 $B_E \prec C_F$ 的关系，其中 $E \nsubseteq \mathrm{St}v$ 对任意 $v \in V\Gamma_1$ 均成立。例如，若得到 $B_{\Gamma_1} \prec C_{\Gamma_2}$，则根据 IM22，引理 7.6]，很容易得到$G_1$ 和 G_2 在有限正规子群意义下的同构。

References

[AP18] Claire Anantharaman 和 Sorin Popa, *An introduction to* II_1 *factors*, 书籍预印本, https://www.math.ucla.edu/ popa/Books/IIunV15.pdf, 2018。[Atk19] Scott Atkinson, *Graph products of completely positive maps*, 《算子理论杂志》81（2019），第1期，133–156。MR 3920691[BCC 24] Matthijs Borst、Martijn Caspers 和 Enli Chen, *rigid graph products*, 预印本，arXiv:2408.06171，2024。[BO08] Nathanial Patrick Brown 和 Narutaka Ozawa, *C*-algebras and Finite-Dimensional Approximations* 88, 2008 , 第卷。美国数学会，。[Cas 20] Martijn Caspers, *algebras* **13** 2020 1, 1 28 4047640 , 《分析与偏微分方程》（），第–期。MR [CDD25a] Ionut *Absence of Cartan subalgebras for right-angled Hecke von Neumann* ̧ *Rigidity for von Neumann algebras* Chifan、Michael Davis 和 *of graph product groups I: Structure of automorphisms* **18** 2025 Daniel Drimbe, , 《分析与偏微分方程》（），第5期，1119 1146 4904384 –。MR [CDD25b] , *Rigidity for von Neumann algebras of graph product groups II. Superrigidity* , 《筑波大学数学研究所杂志》 *results* **24** 2025 1, 117 156 4847116 （），第–期。~~MR[~~ 17] *Graph products of operator algebras* CF Martijn Caspers 和 Pierre Fima, , 《非交换几何杂志》 **11** 2017 1, 367 411 3626564 （），第– [76] 期。MR Con Alain Connes, *Classification of injective factors. Cases* $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_\infty$, III_λ, $\lambda \neq 1$, 《数学年刊》（2） 104（1976），第1期，73–115。MR 454659[DP23] Changying Ding 和 Jesse Peterson, *Biexact von neumann algebras*, 预印本，arXiv:2309.10161，2023。[DV25] Daniel Drimbe 和 Stefaan Vaes, *W*-correlations of* $_1$ *factors and rigidity of tensor* II, 预印本，arXiv:。。[Ge98] *products and graph products* 2507 04691, 2025 Liming Ge, *Applications of free entropy to finite von Neumann algebras. II*, 《数学年刊》（ 2 **147** 1998 1, 143 157 1609522 ）（），第–期。MR Gre E. R. Green, , 博士论文，利 [90] *Graph products of groups* 兹大学，1990。[Has19] Kei Hasegawa, *Bass-Serre trees of amalgamated free product C*-algebras*, 《国际数学研究通知》（2019），第21期，6529–6553。MR 4027559[HI25] Camille Horbez 和 Adrian Ioana, *Rigidity for graph product von neumann algebras*, 预印本，arXiv:2508.03662，2025。[HIK22] Kei Hasegawa、Yusuke Isono 和 Tomohiro Kanda, *Note on bi-exactness for creation operators on Fock spaces* **74** 2022 3, 903 944 4484235 , 《日本数学会杂志》（）， 第–期。MR [Hou09] Cyril Houdayer, *Construction of type* $_1$ *factors with prescribed countable fundamental* II, 《纯粹与应用数学杂志》 *group* **634** 2009 169 207 2560409 （），–。MR [IM22] Yusuke Isono 和 Amine Marrakchi, *Tensor product decompositions and rigidity of full factors*, 《高等师范学校科学年刊》 ´Ec. Norm. Sup´er.（4）55（2022），第1期，109–139。MR 4411859[IPP08] Adrian Ioana、Jesse Peterson 和 Sorin Popa, *Amalgamated free products of weakly rigid factors and calculation of their symmetry groups* **200** 2008 , 《数学学报》（），第1期， 85 153 2386109 –。MR [IPV13] Adrian Ioana、Sorin Popa 和 Stefaan Vaes, *A class of superrigid group von Neumann algebras* 2 **178** 2013 1, 231 286 3043581 , 《数学年刊》（）（），第– 期。MR [OP04] Narutaka Ozawa 和 Sorin Popa, *Some prime factorization results for type* II_1 *factors*, 《数学发明》 156（2004），第2期，223–234。MR 2052608[Oya24a] Koichi Oyakawa, *Infinite graph product of groups I: Geometry of the extension graph*, 预印本，arXiv:2409.09527，即将在《代数与几何拓扑》发表，2024。[Oya24b] , *Infinite graph product of groups II: Analytic properties*, 预印本， arXiv:2412.18313，2024。[Oza04] Narutaka Ozawa, *Solid von Neumann algebras*, 《数学学报》192（2004），第 1期，111–117。MR 2079600[Oza06] , *A Kurosh-type theorem for type* II_1 *factors*, 《国际数学研究通知》（2006）， 文章编号97560, 共21页。MR 2211141

[Pop06a] Sorin Popa, *On a class of type* II_1 *factors with Betti numbers invariants*, 《数学年刊》（ 2 **163** 2006 3, 809 899 2215135 ）（），第–期。MR Pop b, II [06] *Strong rigidity of* $_1$ *factors arising from malleable actions of w-rigid groups.* , 《数学发明》（），第2期, *I* **165** 2006 408 2231961 369–。MR [Vae08] Stefaan Vaes, *Explicit computations of all finite index bimodules for a family of* II_1*factors*, 《高等师范学校科学年刊》 ´Ec. Norm. Sup´er.（4）**41** （2008），第5期，743–788。MR 2504433