arXiv:2601.18249v1 [math.AG] 26 Jan 2026

泊松代数的相对迪茨米耶性质

H.-D. HUANG、Z. NAZEMIAN、X. TANG、X.-T. WANG、Y.-H. WANG 和 J.J. ZHANG

Abstract. Dixmier 性质关注代数的端同态的双射性。我们引入了相对 Dixmier 性质，这是 Dixmier 性质的一种推广。这一新概念可用于证明若干泊松代数类具有 Dixmier 性质，也可应用于消去问题以及不存在霍普夫余作用等其他主题。

Introduction

近年来，泊松代数一直是一个活跃的研究领域。研究者探讨了与泊松代数相关的各种课题。尤其是，扭曲的庞加莱对偶与模导数、泊松迪茨米耶–莫伊格林等价性、Poisson 包络代数、泊松谱和泊松赋值等方面均取得了显著进展，参见论文 [5, 11, 13, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 26] 及其中的参考文献。

设 $\Bbbk$ 为一个基域，并假设所有对象都定义在 $\Bbbk$ 上。若每个单射泊松 $\Bbbk$-代数态射 $f\colon A \longrightarrow A$ 都是双射，则称泊松 $\Bbbk$-代数 A 满足迪克斯米耶性质（或简称 A 是 *Dixmier*）。这一性质与著名的 Dixmier 猜想 [8], 有关，该猜想断言，特征零域上的第 n 个 Weyl 代数的每个自同态都是双射。已证明，Dixmier 猜想与著名的 Jacobian 猜想[4, 6, 34, 35]稳定等价。根据 [1], ，这两个猜想还等价于泊松猜想；泊松猜想断言，特征零域上的泊松 Weyl 代数 W_n [（见例 1）1] 的每个泊松自同态都是双射。基本而言，泊松猜想断言 W_n 满足迪克斯米耶性质。

需要注意的是，Dixmier 猜想至今仍悬而未决。尽管某个给定代数满足迪克斯米耶性质的情况似乎并不常见，但研究这一性质仍然很重要。事实上，迪克斯米耶性质已在若干类具有“量子性质”的结合代数中得到广泛研究，参见论文 [3, 20, 21, 29, 31, 32, 33]。鉴于“量子代数”与其半经典极限 [12], 之间的密切关系，研究泊松代数的迪克斯米耶性质是很自然的。本文聚焦于泊松情形下的迪克斯米耶性质。从现在起，我们假设基域 $\Bbbk$ 的特征为零。

已有满足迪克斯米耶性质的泊松代数实例[7, 定理 3.7]。在 [17, 定理 0.9], 中还证明了以下泊松代数 $P_{\Omega-\xi}$ 是 Dixmier 的。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：17B63、17B40、16S36、16W20。*Key words and phrases.* 迪克斯米耶性质、泊松代数、 u-不变。

例 0.1。设 Ω 是 $A := \Bbbk[x,y,z]$ 中的一个齐次元素，其 Adams 分次定义为 $\deg x = \deg y = \deg z = 1$。我们在 A上定义泊松结构如下：$\{x,y\} = {}^{\partial_\Omega}{}_{\partial z} =: \Omega_z$，$\{y,z\} = {}^{\partial_\Omega}{}_{\partial x} =: \Omega_x$，以及 $\{z,x\} = {}^{\partial_\Omega}{}_{\partial y} =: \Omega_y$。等价地，$A$ 上的泊松括号定义为

$$\{f,g\} = \det \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \end{pmatrix} \quad \text{for all } f,g \in \Bbbk[x,y,z]. \tag{F0.1.1}$$

这个泊松代数记作 A_Ω，Ω 称为 A_Ω 的势。容易验证 Ω 是一个泊松中心元素。对于每个 $\xi \in \Bbbk$，我们定义一个泊松因子代数 $P_{\Omega-\xi} := A_\Omega/(\Omega - \xi)$。如果一个齐次元素 $\Omega \in A$在原点处有孤立奇点（或简称有孤立奇点），则称其如此，当且仅当 $A_{sing} := A/(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ 在 $\Bbbk$ 上有限维。根据交换代数，Ω 有孤立奇点，当且仅当 $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ 是多项式环 A中的一个正则序列。在这种情形下，我们称 Ω 为 *i.s.*势，其中 i.s. 是孤立奇点的缩写。注意，次数为 ≥ 2 的一般齐次元素有孤立奇点。根据 [17, 定理 0.9]，，若 Ω 是一个次数为 ≥ 5 的 i.s. 势，则对于每个 $\xi \in \Bbbk$，$P_{\Omega-\xi}$ 都是 Dixmier。

$P_{\Omega-\xi}$ 具有迪克斯米耶性质的证明相当复杂，并且运用了关于泊松赋值的一些深刻分析。另一方面，人们也在思考，$P_{\Omega-\xi}$ 的张量积是否也具有迪克斯米耶性质。在本文中，我们将探讨一些可能有助于我们更好地理解迪克斯米耶性质的其他思路。以下是主要结果之一。对于任意泊松 $\Bbbk$-代数 A，我们用 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A)$ 表示所有泊松 $\Bbbk$-代数自同构的群。

定理 0.2。设 Ω_1、$\cdots$、Ω_d 是一组具有不同 *Adams* 次数的 *i.s.* 势，且对所有 i 都有 $\deg \Omega_i \geq 5$。设 ξ_1、$\cdots$、ξ_d 是 $\Bbbk$ 中的一组标量。设 P 为泊松代数 $P_{\Omega_1-\xi_1} \otimes \cdots \otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$，设 Q 为P的分式泊松域。以下陈述成立。

(1) P 和 Q 都是 *Dixmier*。(2)群 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(P)$和 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(Q)$都是有限群。
(3) 泊松代数 P是单代数，当且仅当对所有 $i = 1$、$\cdots$、d，$\xi_i \neq 0$ 成立。

然而，我们不知道如何处理 $\deg\Omega_i$ 中有两个相同的情形；因此将其留作一个问题。

问题 0.3。设 $\Omega_1, \cdots, \Omega_d$ 是一组 Adams 次数为 ≥ 5 的 i.s. 势。设$\xi_1, \cdots, \xi_d$ 是 $\Bbbk$ 中的一组标量。设 P 为泊松代数 $P_{\Omega_1-\xi_1}\otimes\cdots\otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$。
(1) P 是 Dixmier 吗？(2) $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(P)$ 是有限群吗？

证明定理 0.2 的一个关键步骤涉及所谓的相对 *Dixmier* 性质这一概念，其灵感来源于 [14] 中提出的相对消去概念。定义如下。

定义 0.4. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{R}$ 是两族泊松 $\Bbbk$-代数。
(1) 我们称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{R}$-*Dixmier*，如果对于 $\mathcal{A}$ 中的任意两个泊松代数 A_1，A_2 以及 $\mathcal{R}$ 中的一个泊松代数 R，对于任意单射泊松 $\Bbbk$-代数态射 $f\colon A_1 \longrightarrow A_2 \otimes R$，都有 $\mathrm{im}(f) = A_2 \otimes \Bbbk$ 位于 $A_2 \otimes R$ 内部。(2) 设 A 和 R 为泊松代数。如果 $\mathcal{A}$ 对于 $\mathcal{A} = \{A\}$ 和 $\mathcal{R} = \{R\}$ 是 $\mathcal{R}$-Dixmier 的，我们称 A 是 R-*Dixmier*。

显然，如果泊松代数 A 对泊松代数 R 是 R-Dixmier 的，那么 A 是 Dixmier 的。然而，也存在这样的例子：泊松代数 A 是 Dixmier 的，但对于某个选定的泊松整环 R， R 不是 -Dixmier 的，参见例 1.6。

例 0.5. 对于任意 $n \geq 2$，令 $\Lambda = (\lambda_{ij}) = (\lambda m_{ij})$，其中 $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个斜对称整数矩阵，且 $\lambda \in \Bbbk^{\times}$。令 $L_\Lambda(\Bbbk)$，或简记为 L_Λ，表示泊松环面 $\Bbbk[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]$，其泊松括号如下:

$$\{x_i, x_j\} = \lambda_{ij} x_i x_j$$

对于 $1 \leq i \leq j \leq n$。假设 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 是泊松单的。根据定理 2.6， $L_\Lambda(\Bbbk)$ 满足迪克斯米耶性质。此外，利用定理 2.4，当 R 是一个连通分次泊松整环（作为交换代数时具有 Adams 分次）时， $L_\Lambda(\Bbbk)$ 也是 R-迪克斯米耶的。

本文的另一项主要结果是证明，定理 0.2 中的泊松代数对于某一类 $\mathcal{R}$ 泊松代数而言是 $\mathcal{R}$-迪克斯米耶的。对于任意整数 $w \in \mathbb{Z}$，令 $\mathcal{G}_w$ 表示由次数为 1 的元素生成且满足 $\{R_1, R_1\} \subseteq R_{w+2}$ 的 Adams 连通分次泊松整环 $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ 所构成的类。

定理 0.6. 设 $\Omega_1, \cdots, \Omega_d$ 是一组 *i.s.* 势，其 *Adams* 次数各不相同，且对每个 $i = 1, \cdots, d$，均有$\deg \Omega_i \geq 5$。设 $\xi_1, \cdots, \xi_d$ 是 $\Bbbk$ 中的一组标量。设P为泊松代数 $P_{\Omega_1 - \xi_1} \otimes \cdots \otimes P_{\Omega_d - \xi_d}$。设 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 为例 *0.5* 中定义的简单泊松环面。设 A 为 P 或 $L_\Lambda(\Bbbk) \otimes P$。假设 $w \leq \min_i\{\deg \Omega_i\} - 1$。则 A 是 $\mathcal{G}_w$*-Dixmier*。

作为直接推论，我们得到以下推论（相关概念见定义 2.16 和参考文献 [14, 27] ）。

推论 0.7. 设 A 和 w 如定理 *0.6* 中所述。

(1) A 是 $\mathcal{G}_w$消去的。(2) 如果 H 是一个作为泊松代数属于 $\mathcal{G}_w$ 的泊松 *Hopf* 代数，那么 H对 A 的每个余作用都是平凡的。

一般而言，证明一个泊松代数具有迪克斯米耶性质并不容易，但这并不一定意味着具有迪克斯米耶性质的泊松代数很少。在本文末尾，我们将考虑以下问题:

问题0.8。 设泊松代数 B 满足迪克斯米耶性质，且 A是 B的泊松子代数。在什么条件下， A 满足迪克斯米耶性质?

我们能够在一个特殊情形下回答这个问题:

定理 0.9。 设泊松整环 B 作为交换代数是整闭的，并且具有迪克斯米耶性质；设 A 是B 的余有限维泊松子代数，且 $B \subseteq Q(A)$。那么， A 也满足迪克斯米耶性质。

上述定理的一个相对版本是引理 4.8，其证明基于第4节中引入的补空间和补模概念。我们证明，这些概念是不变量，有助于我们更好地理解一大类代数的泊松自同构群。特别地，我们确定了一类其泊松代数自同构群是平凡群的代数。

1. Some examples of Poisson algebras

本节回顾若干与后续几节研究相关的重要泊松代数类。首先是泊松 Weyl 代数，它是泊松猜想中出现的研究对象。

例 1.1。 设 W_1 为由 x和 y 生成、且泊松括号由 $\{x,y\}=1$确定的泊松多项式代数 $\Bbbk[x,y]$ 。这称为第一泊松 *Weyl* 代数。对于 $n\geq 2$, 第 n 个泊松 Weyl 代数定义为$W_n := (W_1)^{\otimes n}$。众所周知，对于任意 $n\geq 1$, W_n 都是泊松单的。泊松猜想断言， W_n的每个非零泊松代数自同态都是双射。

例 1.2。 设 W_1 为由 x 和 y生成的第一泊松 Weyl 代数。将 W_1 中的 x 取逆所得的局部化是一个泊松代数，记为$W_1[x^{-1}]$。我们声称， $A:=W_1[x^{-1}]$ 不具有迪克斯米耶性质。为此，令 $X=x^2$和 $Y=\frac{1}{2}x^{-1}y$。容易验证， $\{X,Y\}=1$。定义$f:\ A\longrightarrow A$，使得 $f(x)=X$且 $f(y)=Y$。于是， f可扩张为 A 的一个单射泊松代数自同态，并满足 $x\notin f(A)$。因此， f 不是双射映射，结论得证。

例 1.3。 设 n 为一个整数，且 $\Lambda=(\lambda_{ij})\in M_n(\Bbbk)$ 是一个斜对称矩阵。与 Λ相关联的斜泊松多项式代数定义为多项式代数 $\Bbbk[x_1,\cdots,x_n]$，其泊松括号由下式确定:

$$\{x_i,x_j\}=\lambda_{ij}x_ix_j,\quad \forall\ 1\leq i,j\leq n.$$

这个泊松代数记作 $S_\Lambda(\Bbbk)$。

例 1.4。 设 $S_\Lambda(\Bbbk)$ 为例 1.3 中定义的泊松多项式代数。将 x_i 对所有 i 求逆得到的局部化称为泊松劳朗多项式代数（或泊松环面），记作 $L_\Lambda(\Bbbk)$。

注意， $L_\Lambda(\Bbbk)$ 不一定是 Dixmier 的，下面的例子说明了这一点。

例 1.5。 设 $n=3$，并令 $\lambda_{ij}=1$ 对于 $1\leq i<j\leq 3$，定义 ϕ 为 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 的一个代数自同态，使得

$$\phi(x_1)=x_1^3x_2^{-2}x_3^2,\qquad \phi(x_2)=x_1x_3,\qquad \phi(x_3)=x_3.$$

于是 x_2 不在 ϕ 的像中。现在考察 ϕ 是否为泊松态射。不难看出,

$$\phi(\{x_1,x_2\})=\phi(x_1x_2)=x_1^4x_2^{-2}x_3^3=\{\phi(x_1),\phi(x_2)\}$$

而且

$$\phi(\{x_1,x_3\})=\phi(x_1x_3)=x_1^3x_2^{-2}x_3^3=\{\phi(x_1),\phi(x_3)\}$$

而且显然， $\phi(\{x_2,x_3\})=x_1x_3^2=\{\phi(x_2)\ \phi(x_3)\}$。因此， ϕ是泊松代数的态射。注意， $\phi(x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3})=x_1^{3n_1+n_2}x_2^{-2n_2}x_3^{2n_1+n_2+n_3}$。于是， ϕ 是单射但不是满射。这表明对于 $n=3$, $L_\Lambda(\Bbbk)$ 不满足迪克斯米耶性质。注意，在这种情形下， $L_\Lambda(\Bbbk)$ 不是泊松单的；事实上， $x_1x_2^{-1}x_3$ 属于泊松中心。

接下来，我们给出一个例子：它具有迪克斯米耶性质，但对于某个泊松整环 R，它不具有 R-迪克斯米耶性质。

例 1.6. 令 $n=2$。正如我们将在例 2.5 中看到的，对于任意连通分次泊松整环 R，$L_\Lambda(\Bbbk)$ 确实同时具有迪克斯米耶性质和 R-迪克斯米耶性质。另一方面， $L_\Lambda(\Bbbk)$ 不具有 $\Bbbk[t^{\pm 1}]$-迪克斯米耶性质，因为存在一个泊松代数态射

$$\phi\colon L_\Lambda(\Bbbk) \longrightarrow L_\Lambda(\Bbbk)\otimes \Bbbk[t^{\pm 1}]$$

它将 $x_1^{\pm 1}$映射到 $x_1^{\pm 1}\otimes t^{\pm 1}$，并将 $x_2^{\pm 1}$映射到 $x_2^{\pm 1}\otimes t^{\pm 1}$，使得 $\mathrm{im}(\phi)\not\subseteq L_\Lambda(\Bbbk)\otimes\Bbbk$。

例 1.7. 设 A 是一个带有泊松括号 $\{-,-\}$的泊松多项式代数 $\Bbbk[x_1,\cdots,x_n]$。我们可以通过对所有 i设 $\deg x_i=1$，将 A 视为一个连通分次代数。对于任意 $d\geq 2$，令 $A_{\geq d}$ 为子空间 $\oplus_{i\geq d}A_i$。可以验证 $\{A_{\geq d},A_{\geq d}\}\subseteq A_{\geq 2d-2}\subseteq A_{\geq d}$，例如参见命题1.6.]。因此，$A(d):=\Bbbk\oplus A_{\geq d}$ 是 A的有限余维泊松子代数。

人们可能会想知道 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 是否存在真有限余维泊松子代数。我们有如下结果。

命题1.8。 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 在 $\Bbbk$ 上没有有限余维的真泊松子代数。

证明。我们给出 $n=2$ 情形的证明。 $n>2$ 的证明类似。将单项式 $x^m:=x_1^{m_1}x_2^{m_2}$ 记作 $m=(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2$。单项式上的括号为

$$\{x^u,x^v\}=\lambda_{12}\,(u_1v_2-u_2v_1)\,x^{u+v}\qquad (u,v\in\mathbb{Z}^2).$$

假设 $S\subseteq A$ 是一个有限余维泊松子代数，且 $S\neq A$。令

$$M:=\{m\in\mathbb{Z}^2:\ x^m\notin S\}.$$

有限余维意味着 M 是有限的。令

$$T:=\mathbb{Z}^2\setminus M=\{m\in\mathbb{Z}^2:\ x^m\in S\},$$

因此 T 是余有限的，并且对加法封闭（因为 S 是一个子代数）。

选取一个整数 $N>0$，使得 $(N,0)\in T$且 $(0,N)\in T$（这是可行的，因为 M 是有限的）。令

$$u:=(N,0),\qquad v:=(0,N).$$

任取 $m\in\mathbb{Z}^2$。由于 M 是有限的，使得 $nu\in M$或 $m-nu\in M$成立的整数 n 只有有限多个。因此，我们可以选取一个非零整数 n，使得 $nu\in T$且 $m-nu\in T$。由于 S是泊松闭的， x^{nu}， $x^{m-nu}\in S$推出

$$\{x^{nu},x^{m-nu}\}=\lambda_{12}\big((nN)(m_2)-0\cdot(m_1-nN)\big)\,x^m=\lambda_{12}nNm_2\,x^m\in S.$$

由于 $\mathrm{char}\ \Bbbk=0$且 $\lambda_{12}\neq 0$，标量 nNm_2为零当且仅当 $m_2=0$。因此，对于每个满足 $m_2\neq 0$ 的m，都有 $x^m\in S$。

若 $m_2=0$，交换 u 和 v的角色，重复同样的论证：选取满足 $nv\in T$且 $m-nv\in T$ 的 n，则

$$\{x^{nv},x^{m-nv}\}=\lambda_{12}\,nNm_1\,x^m\in S,$$

同样，除非 $m_1=0$，否则该系数非零。

最后，剩下的情形 $m=(0,0)$ 对应于单位元 $x^0=1\in S$，因为 S 是一个子代数。因此，每个单项式 x^m 都属于 S，于是 $M=\varnothing$ 和 $S=A$，这与 $S\neq A$ 矛盾。□

2. Preliminaries

本节将回顾本文后续部分会用到的一些不变量，并建立一些预备性结果。

2.1. u-不变量。 本小节将回顾 [14] 中引入的 u-不变量的定义。注意，在参考文献 [14], 中， u-不变量被称为普遍零次元集合。

令 A 为一个代数（不一定是交换代数）。A 的一个负$\mathbb{N}$-滤过是一个子空间的下降序列$\mathbf{F}: = \{F_{-i}(A) \subseteq A\}_{i\geq 0}$，满足

(F1) $F_{-i-1}(A) \supseteq F_{-i}(A) \supseteq \cdots \supseteq F_0(A) \supseteq \Bbbk$ 对所有 $i \geq 0$均成立,

（F2） $A = \bigcup_i F_{-i}(A)$, （F3） $F_{-i}(A)F_{-j}(A) \subseteq F_{-(i+j)}(A)$ 对所有 $i,\ j \geq 0$均成立。

注意，在 [14], 中，作者使用的是上升滤子，而不是下降滤子。但在将指标 $-i$ 切换为 i后，这两个概念是等价的。我们在此使用下降滤子的原因，是为了与 [17, 18] 中引入并研究的泊松赋值的定义相一致；我们很快将回顾该定义。

给定一个负$\mathbb{N}$滤过$\mathbf{F}$，相应的伴随分次环定义为

$$\mathrm{gr}_{\mathbf{F}} A: = \bigoplus_{i=0}^{-\infty} F_i(A)/F_{i+1}(A),$$

其中，按照约定， $F_i(A) = 0$ 对 $i \geq 1$ 成立。因此，$\mathbf{gr_F}\, A$ 是负$\mathbb{N}$分次的。我们称 $\mathbf{F}$ 是良滤子，如果 $\mathbf{gr_F}\, A$ 是整环（ A 本身必须是整环）。对于代数 A，我们令

(F2.1.1) $$\Phi_{good}(A) = \text{the set of all good negatively-}\mathbb{N}\text{-filtrations of } A.$$

根据 [14, 定义 0.2], 若对于每个整环 B， A 代数 A 都满足 $A\otimes B$ 是整环，则称其为 坚实 整环。若 $\mathbf{gr_F}\, A$ 是坚实整环，则称 $\mathbf{F}$ 为 坚实滤过 （必须要求 A 本身也是坚实整环）。对于任意坚实整环 A，令

(F2.1.2) $$\Phi_{firm}(A) = \text{the set of all firm negatively-}\mathbb{N}\text{-filtartions of } A.$$

接下来，我们回顾一些不变量的定义，这些不变量是根据 A上的良好滤过或坚实滤过的集合来定义的。

定义 2.1。 [14, 定义 0.3]设 A 为一个整环。 A的 u_{good}-不变量 定义为

$$u_{good}(A) := \bigcap_{\mathbf{F}\in\Phi_{good}(A)} F_0(A)$$

其中，交 $\bigcap$ 遍历 $\Phi_{good}(A)$ 中的所有滤过。在 [14] 中， $u_{good}(A)$ 称为 A的全次数 0 元素集 。类似地，当 A为坚实整环时， A 的 u_{firm}-不变量 定义为

$$u_{firm}(A) := \bigcap_{\mathbf{F}\in\Phi_{firm}(A)} F_0(A)$$

其中，交 $\bigcap$ 遍历 $\Phi_{firm}(A)$ 中的所有滤过。

显然， $u_{good}(A)$（分别地， $u_{firm}(A)$）是 A的子代数。若 $F_0(A) = A$，则称滤过 $\mathbf{F}$ 是平凡的。

定义 2.2. 设 A 是一个整环。

(1) 我们称 A 是 u_{good}-极大的，如果 $u_{good}(A) = A$；等价地， $\Phi_{good}(A)$ 仅由平凡滤过组成。(2) 如果 A 是 u_{good}-极小的，则称其为 u_{good}-极小的，如果 $u_{good}(A) = \Bbbk$。

如果 A 是一个 firm 整环，则 u_{firm}-极大和 u_{firm}-极小的概念以类似方式定义。

下面列出 u-不变量的一些基本性质，这些性质此前已在 [14] 中得到证明。

引理 2.3。 设 A 和 B 是两个整环。

(1) 如果 A 是 B 的子代数，则 $u_{good}(A) \subseteq u_{good}(B)$。*(2)* 假设 A 和 B 是交换整环，且 B 是一个 *firm* 整环。那么 $u_{good}(A) \otimes u_{good}(B) \subseteq u_{good}(A \otimes B) \subseteq u_{good}(A) \otimes u_{firm}(B)$。*(3)* 假设 A 和 B 是交换整环，且基域 $\Bbbk$ 是代数闭的。那么 $u_{good}(A \otimes B) = u_{good}(A) \otimes u_{good}(B)$。*(4)* 如果 B 是一个 *firm* 整环，则 $u_{good}(B) \subseteq u_{firm}(B)$。

证明。 (1) 这是因为，对 B 的每个良好的负 $\mathbb{N}$ 过滤，限制后都会在 A 上诱导出一个良好的负 $\mathbb{N}$ 过滤，见 [14, 引理 1.1(6)]。(2) 这是 [14,命题 2.3(1)]。

(3) 当 $\Bbbk$ 代数闭时， $A \otimes B$ 是整环，当且仅当 A 和 B 都是整环 [30, 引理 1.1]。于是 u_{firm} 与 u_{good} 一致。因此，结论由第 (2) 部分或 [14,命题 2.3(2)] 得出。

(4) 显然。 □

现在我们考虑泊松代数（作为代数，它们是交换的）。设 A 是泊松代数 B 的泊松子代数。我们定义

$$\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(B \mid A) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(B) \mid \sigma(a) = a,\ \forall\, a \in A\}.$$

定理 2.4。 设 A 是一个泊松整环， R 是一个泊松 *firm* 整环。假设 A 是 u_{good}-极大的，且 R 是 u_{firm}-极小的。

(1) 那么，对于每个单射泊松代数态射 $f\colon A \to A \otimes R$，$\mathrm{im}(f) \subseteq A \otimes \Bbbk \subseteq A \otimes R$。(2) 设 C 是 A 的泊松子代数。则存在群的短正合列$1 \to \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \otimes R \mid A) \to \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \otimes R \mid C) \to \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \mid C) \to 1$.(3) 若进一步 A 是 *Dixmier* 的，则 A 是 *R-Dixmier*。

证明。 (1) 设 $f\colon A \longrightarrow A \otimes R$ 是一个单射泊松代数态射，并设A 是 f 的像。那么 A 是 $A \otimes R$ 的泊松子代数。因此我们有

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= u_{good}(\overline{A}) && \text{as } A \cong \overline{A} \text{ is } u_{good}\text{-maximal} \\
&\subseteq u_{good}(A \otimes R) && \text{by Lemma 2.3(1)} \\
&\subseteq u_{good}(A) \otimes u_{firm}(R) && \text{by Lemma 2.3(2)} \\
&= u_{good}(A) \otimes \Bbbk && \text{as } R \text{ is } u_{firm}\text{-minimal} \\
&= A \otimes \Bbbk && \text{as } A \text{ is } u_{good}\text{-maximal.}
\end{aligned}$$

(2) 设 ϕ属于 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \otimes R \mid C)$，并设 $f = \phi\,|_{A \otimes \Bbbk}\colon A \otimes \Bbbk \longrightarrow A \otimes R$是 ϕ 到 $A \otimes \Bbbk$ 的限制，该限制被识别为 A。根据第 (1) 部分，$\mathrm{im}(f) \subseteq A \otimes \Bbbk$。因此

我们可以将 f 视为 A的泊松代数自同态。由于 ϕ 可逆，我们可以对 ϕ的逆应用第 (1) 部分。因此， f 是双射。这意味着，当 C被识别为 $C \otimes \Bbbk$时，存在一个从 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \otimes R \mid C) \to \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \mid C)$ 的映射。现在，只需例行验证该短正合序列是正合的。

(3) 由 (1) 的证明可知，每个单射泊松代数态射 $f : A \to A \otimes R$ 都诱导一个单射 π: $A \overset{f}{\cong} A \hookrightarrow A \otimes \Bbbk \cong A$。由于 A 具有迪克斯米耶性质， π是一个双射，这意味着 $\mathrm{im}(f) = A = A \otimes \Bbbk$ ，如所需。因此， A 具有R-迪克斯米耶性质。□

2.2. **单参数简单泊松环面的相对 Dixmier 性质**。本小节将建立关于某些单参数泊松环面 $L_\Lambda(\Bbbk)$的相对 Dixmier 性质的一些结果。首先，我们从一个例子开始。

例 2.5。 令 A 为泊松环面 $\Bbbk[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ ，其泊松括号由下式确定

$$\{x, y\} = qxy$$

对某个 $0 \neq q \in \Bbbk$。容易验证， A 是一个单泊松整环（例如，可以验证引理 2.7 的条件 (3)）。我们声称 A 具有迪克斯米耶性质。为此，设 ϕ: $A \longrightarrow A$ 是一个泊松代数态射。注意， ϕ 保持可逆元素不变，并且 A 中的所有可逆元素都具有 cx^iy^j 的形式，其中 $c \in \Bbbk^\times$ 和 i， $j \in \mathbb{Z}$。令 $\phi(x) = ax^iy^j$ 且 $\phi(y) = bx^fy^g$，其中 a, $b \in \Bbbk^\times$是非零标量，且 i， j， f， $g \in \mathbb{Z}$。然后将 ϕ 应用于 $\{x, y\} = qxy$，得到 $\{x^iy^j, x^fy^g\} = qx^{i+f}y^{j+g}$。经过简单计算，我们可得

$$\{x^iy^j, x^fy^g\} = (ig - jf)qx^{i+f}y^{j+g}$$

这意味着 $ig - jf = 1$。因此 ϕ 可逆，事实上我们有 $\phi(c_1x^gy^{-j}) = x$ 且 $\phi(c_2y^ix^{-f}) = y$，其中某些标量 c_1， $c_2 \in \Bbbk^\times$。因此，泊松代数A 具有迪克斯米耶性质。根据 [14, 推论 1.4]， A 也是 u_{good}-极大的。如果 R 是一个连通分次含幺泊松整环，那么根据定理 2.4， A 也具有 R-迪克斯米耶性质。注意， A 的迪克斯米耶性质也可由 [7, 定理 3.7] 得出

一般而言，当 $n \geq 3$ 时，上述对泊松环面 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 的直接验证并不奏效。幸运的是，我们能够改造 Richard [29] 关于简单单参数量子环面的迪克斯米耶性质的证明，从而建立以下泊松类比。

定理 2.6. 设 $\Lambda = \lambda M$ ，其中某个 $\lambda \in \Bbbk^\times$ 及一个反对称矩阵$M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ 的各项均为整数，且 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 是一个简单泊松环面。那么， $L_\Lambda(\Bbbk)$ 的每个泊松自同态都是自同构。也就是说，这样的简单泊松环面 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 具有迪克斯米耶性质，因而对于任意连通分次泊松强整环 R，它都是 R-迪克斯米耶的。

接下来，我们首先需要证明两个辅助引理。第一个是一个众所周知的观察，其证明可见 [13, 37]。我们给出一个略述的证明。

引理 2.7。 关于由 Λ 确定的泊松括号，以下各陈述对 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 等价。

(1) 泊松环面 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 作为泊松代数是单的；(2) $L_\Lambda(\Bbbk)$的泊松中心归约为基域 $\Bbbk$；

(3) 不存在一个元组 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0=(0,\cdots,0)\}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_{ij}=0,\quad \forall 1\leq j\leq n.$$

证明。(1) 与 (2) 的等价性归功于 Vancliff [37, 引理 1.2], 另见 [13, 推论 3.2]。由于 $\Bbbk[x_1^{\pm1},\cdots,x_n^{\pm1}]$ 是一个 $\mathbb{Z}^n$-分次泊松代数，且 $\deg(x_i)=e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$ 对于 $i=1,\cdots,n$，$L_\Lambda(\Bbbk)$ 中的每个泊松中心元都是 $x_1^{\pm1},\cdots,x_n^{\pm1}$ 中若干单项式的标量倍数之和，且这些单项式各自都是泊松中心元。不失一般性，我们可以假设 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 中的每个泊松中心元都具有如下形式：$x=\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$，其中 $a_i\in\mathbb{Z}$。那么，对于 $j=1,\cdots,n$，有 $\{x,x_j\}=0$。因此，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_{ij}=0$$

对于 $j=1,\cdots,n$。现在，(2) 与 (3) 的等价性得证。 □

引理 2.8. 设 $A=L_\Lambda(\Bbbk)=\Bbbk_\Lambda[x_1^{\pm1},\cdots,x_n^{\pm1}]$ 是秩为 n 的简单泊松环面，其泊松括号由 Λ确定。以下陈述等价。

(1) A 的每个泊松自同态都是自同构；(2) 设 $\mathcal{Q}\subseteq A$ 是 A 的泊松子代数，且 $\mathcal{Q}$ 与 A 作为泊松代数同构。那么 $\mathcal{Q}=A$；(3) 对于任意反对称矩阵 $\Lambda'=(\lambda'_{ij})\in M_n(\Bbbk)$，若 $A=L_{\Lambda'}(\Bbbk)=\Bbbk_{\Lambda'}[z_1^{\pm1},\cdots,z_n^{\pm1}]$ 作为泊松环面，且存在可逆整数矩阵 $G=(g_{ij})\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 以及正整数 p_1、$\cdots$、p_n 使得

$$\lambda'_{ij}=\sum_{1\leq k,t\leq n}p_kp_tg_{ki}g_{tj}\lambda'_{kt},\quad \forall 1\leq i,j\leq n,$$

那么 $p_1=\cdots=p_n=1$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：设 $\mathcal{Q}\subseteq A$ 是简单泊松环面 $A=\Bbbk_\Lambda[x_1^{\pm1},\cdots,x_n^{\pm1}]$ 的一个泊松子代数，且 $A\overset{\phi}{\cong}\mathcal{Q}$ 作为泊松代数成立。将 $\mathcal{Q}$ 嵌入 A 的映射与同构 ϕ 复合，记为

$$\psi:A\xrightarrow{\phi}\mathcal{Q}\hookrightarrow A.$$

显然，ψ 是 A的一个（单射）泊松自同态。由 (1) 可知，ψ 是一个自同构，这意味着 $\mathcal{Q}=A$。

(2) $\Rightarrow$ (1)：设 ϕ: $A\longrightarrow A$ 是 A的一个泊松自同态。由于 A 是一个简单泊松环面，我们知道 ϕ 是单射。因此，A 作为泊松代数同构于$\mathcal{Q}$: $=\phi(A)$，且 $\mathcal{Q}\subseteq A$ 是 A的一个泊松子代数。由 (2) 可知，$\mathcal{Q}=A$，这意味着 ϕ 是一个自同构。

(2) $\Rightarrow$(3)：假设 $\Lambda'=(\lambda'_{ij})\in M_n(\Bbbk)$ 是一个反对称矩阵，使得 $A=\Bbbk_{\Lambda'}[z_1^{\pm1},\cdots,z_n^{\pm1}]$，并且存在一个可逆整数矩阵 $G=(g_{ij})\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，以及正整数 $p_1,\cdots,p_n$，使得

$$\lambda'_{ij}=\sum_{1\leq k,t\leq n}p_kp_tg_{ki}g_{tj}\lambda'_{kt},\quad \forall 1\leq i,j\leq n.$$

注意，对于 $1 \leq i, j \leq n$，我们有 $\{z_i, z_j\} = \lambda'_{ij} z_i z_j$。令 $\mathcal{Q}$ 为由 $y_1^{\pm 1}$ 生成的 A 的泊松子代数：$= z_1^{\pm p_1}, \cdots, y_n^{\pm 1}: = z_n^{\pm p_n}$。由于 $z_1, \cdots, z_n$ 在代数上独立，且 $p_i \geq 1$，我们知道 $\mathcal{Q}$ 确实是一个秩为 n 的泊松环面，由 $y_1^{\pm 1}, \cdots, y_n^{\pm 1}$ 生成，并满足以下泊松括号：

$$\{y_i, y_j\} = \{z_i^{p_i}, z_j^{p_j}\} = p_i p_j \lambda'_{ij} y_i y_j$$

对于 $1 \leq i, j \leq n$。定义一个代数态射

$$\phi \colon A = \Bbbk[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_n^{\pm 1}] \longrightarrow \mathcal{Q} = \Bbbk[y_1^{\pm 1}, \cdots, y_n^{\pm 1}]$$

令其为

$$\phi(z_i) = \prod_{k=1}^{n} y_k^{g_{ki}}$$

对于 $i = 1, \cdots, n$。容易验证

$$\begin{aligned}
\{\phi(z_i), \phi(z_j)\} &= \{\prod_{k=1}^{n} y_k^{g_{ki}}, \prod_{t=1}^{n} y_t^{g_{tj}}\} \\
&= (\sum_{k,t=1}^{n} p_k p_t g_{ki} g_{tj} \lambda'_{kt})(\prod_{k=1}^{n} y_k^{g_{ki}})(\prod_{t=1}^{n} y_t^{g_{tj}}) \\
&= \lambda'_{ij}(\prod_{k=1}^{n} y_k^{g_{ki}})(\prod_{t=1}^{n} y_t^{g_{tj}}) \\
&= \lambda'_{ij} \phi(z_i)\phi(z_j) \\
&= \phi(\lambda'_{ij} z_i z_j) \\
&= \phi(\{z_i, z_j\})
\end{aligned}$$

对于任意 $1 \leq i, j \leq n$。因此，ϕ 是一个泊松代数态射。由于 $G = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 是一个可逆整数矩阵，ϕ 确实是一个泊松同构。由 (2) 可知，

$$\Bbbk[z_1^{\pm p_1}, \cdots, z_n^{\pm p_n}] = \mathcal{Q} = A = \Bbbk[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_n^{\pm 1}].$$

A因此，我们必有 $p_1 = \cdots = p_n = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (2)：假设 $\mathcal{Q} \subseteq A = L_\Lambda(\Bbbk) = \Bbbk_\Lambda[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]$ 是 A 的一个泊松子代数，且 A 与 $\mathcal{Q}$ 作为泊松代数同构。因此，存在一个泊松代数同构：

$$\phi \colon A = \Bbbk[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}] \longrightarrow \mathcal{Q} \subseteq A.$$

由于 $A = \Bbbk[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]$ 由 $x_1^{\pm 1}$、$\cdots$、$x_n^{\pm 1}$ 和 ϕ 生成，并且对于每个 $i = 1$、$\cdots$、n，x_i（$\Bbbk[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]$）是 $\Bbbk[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}]$ 中的一个单项式，因此我们知道 $\mathcal{Q}$ 由单项式 $y_i^{\pm 1}$ 生成：对于某个 $b_i = (b_{1i}, \cdots, b_{ni})$，$= [\phi(x_i)]^{\pm 1} = x^{\pm b_i} = (\prod_{k=1}^{n} x_k^{b_{ki}})^{\pm 1} \in \mathbb{Z}^n$，其中 $i = 1, \cdots, n$。因此，子集 $\mathbb{S} = \{b \in \mathbb{Z}^n \mid x^b \in \mathcal{Q}\}$ 实际上是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个子群。由于 ϕ 是代数的同构，我们必有 $\mathbb{S}$ 是一个与 $\mathbb{Z}^n$ 秩相同的自由阿贝尔群。现在我们可以选取 $\mathbb{Z}^n$ 的一个基 $\{c_1, \cdots, c_n\}$，使得对于某些正整数 $p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n$，$\{p_1 c_1, \cdots, p_n c_n\}$ 是 $\mathbb{S}$ 的一个基（其秩等于 n）。令 $z_i^{\pm 1}$：对于 $i = 1, \cdots, n$，$= x^{\pm c_i} = (\prod_{k=1}^{n} x_k^{c_{ki}})^{\pm 1}$，我们知道 A 与泊松环面 $L_{\Lambda'}(\Bbbk) = \Bbbk_{\Lambda'}[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_n^{\pm 1}]$ 相同；该泊松环面由 $z_1^{\pm 1}$、$\cdots$、$z_n^{\pm 1}$ 生成，并满足以下泊松括号

$$\{z_i, z_j\} = \lambda'_{ij} z_i z_j$$

其中 $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$ 且 $\lambda'_{ij} := \sum_{1\le k,\ t\le n} c_{ki}c_{tj}\lambda_{kt}$ 对于 $1 \le i,\ j \le n$。因此，$\mathcal{Q}$ 确实是泊松环面 $\Bbbk[(z_1^{p_1})^{\pm 1},\ \cdots,\ (z_n^{p_n})^{\pm 1}]$，由 $z_1^{\pm p_1},\ \cdots,\ z_n^{\pm p_n}$ 生成，并满足以下泊松括号：

$$\{z_i^{p_i}, z_j^{p_j}\} = p_i p_j \lambda'_{ij} z_i^{p_i} z_j^{p_j}, \quad \forall 1 \le i, j \le n.$$

由于泊松环面 $L_{\Lambda'}(\Bbbk) = \Bbbk_{\Lambda'}[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_n^{\pm 1}]$（与 A 相同）也可通过 ϕ: $A \longrightarrow \mathcal{Q}$ 作为泊松代数同构于泊松环面 $\mathcal{Q} = \Bbbk[z_1^{\pm p_1}, \cdots, z_n^{\pm p_n}]$，因此存在一个可逆整数矩阵 $G = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，使得 $\phi(z_i) = \alpha_i \prod_{k=1}^n z_k^{p_k g_{ki}}$，其中 $\alpha_i \in \Bbbk^\times$ 对于 $i = 1,\ \cdots,\ n$。因此，我们有

$$\lambda'_{ij} = \sum_{k,t=1}^{n} p_k p_t g_{ki} g_{tj} \lambda'_{kt}$$

对于任意 $1 \le i,\ j \le n$。由于 $A = L_\Lambda(\Bbbk) = \Bbbk_{\Lambda'}[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_n^{\pm 1}]$ 且 G 属于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，根据（3）式，我们必有 $p_1 = \cdots = p_n = 1$。因此，我们有 $\mathbb{S} = \mathbb{Z}^n$，这意味着 $\mathcal{Q} = \Bbbk[x^{\pm c_1}, \cdots, x^{\pm c_n}] = \Bbbk[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}] = A$。□

定理 *2.6* 的证明。注意，$\Lambda = \lambda M$ 对于某个 $\lambda \in \Bbbk^\times$ 以及一个反对称矩阵 $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$，其矩阵项均为整数。回想一下，$L_\Lambda(\Bbbk)$ 是由 $x_1^{\pm 1}$、$\cdots$、$x_n^{\pm 1}$生成的泊松环面，并满足以下泊松括号：

$$\{x_i, x_j\} = \lambda_{ij} x_i x_j = \lambda m_{ij} x_i x_j$$

其中 $1 \le i \le j \le n$。由于泊松环面 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 是泊松单的，根据引理 2.7，我们知道矩阵 Λ 是非奇异的，这等价于矩阵 $M = (m_{ij})$ 是非奇异的。也就是说，$\det(M) \ne 0$。

为了证明 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 是 Dixmier 的，我们证明引理 2.8 的条件 (3) 成立。假设存在一个反对称矩阵 $\Lambda' = (\lambda'_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$，使得$L_\Lambda(\Bbbk) = \Bbbk_{\Lambda'}[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_n^{\pm 1}]$，以及一个可逆整数矩阵 $G = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，连同正整数 p_1、$\cdots$、p_n，使得

$$\lambda'_{ij} = \sum_{k,t=1}^{n} p_k p_t g_{ki} g_{tj} \lambda'_{kt} \tag{F2.2.1}$$

对于 $1 \le i,\ j \le n$。我们将证明 $p_1 = \cdots = p_n = 1$。

由于 $\Bbbk_\Lambda[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_n^{\pm 1}] = \Bbbk_{\Lambda'}[z_1^{\pm 1}, \cdots, z_n^{\pm 1}]$ 作为泊松代数，存在一个可逆整数矩阵 $T = (t_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，使得

$$z_i = \prod_{k=1}^{n} x_k^{t_{ki}},$$

对于 $i = 1,\ \cdots,\ n$，因此由 $\{z_i, z_j\} = \{\prod_{k=1}^n x_k^{t_{ki}}, \prod_{l=1}^n x_l^{t_{lj}}\}$ 可得 $\Lambda' = T^t \Lambda T$，其中 T^t 表示 T的矩阵转置。因此，我们有 $\Lambda' = T^t(\lambda M)T = \lambda(T^t M T)$。令 $M' = (m'_{ij}) = T^t M T$，则有 $\Lambda' = \lambda M'$，或等价地，对于 $1 \le i,\ j \le n$，有 $\lambda'_{ij} = \lambda m'_{ij}$。由于 $\det(M) \ne 0$，我们有 $\det(M') = \det(T^t M T) = (\det(T))^2 \det(M) \ne 0$。这也意味着 $\det(\Lambda') \ne 0$。现在由公式 (F2.2.1)可得

$$\Lambda' = G^t D \Lambda' D G, \quad \text{where } D = \mathrm{Diag}[p_1, \ldots, p_n].$$

因此 $1 = \det(G)^2(\prod_{i=1}^n p_i)^2$。由于 G 的元素属于 $\mathbb{Z}$，我们得出 $\prod_{i=1}^n p_i = 1$，因此

$$p_1 = \cdots = p_n = 1.$$

根据引理 2.8，我们知道 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 的每个泊松自同态都是自同态。因此，我们证明了 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 是 Dixmier。由于 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 是 $u_{\rm good}$-极大的（见 [14, 推论 1.4]），且 R 是 $u_{\rm firm}$-极小的，由定理 2.4(3)可知，$L_\Lambda(\Bbbk)$ 是 R-Dixmier。□

2.3. **泊松 u-不变量**。在本小节中，我们定义与 u-不变量相关联的一些次级不变量。

设 A 是一个带有泊松括号 $\{-,-\}$ 的泊松代数（作为结合代数，它是交换的）。设 w 为一个整数。根据 [17, 定义 2.2]，回顾可知，A 的 w-滤链是子空间的一个下降序列 $\mathbf{F}: = \{F_i(A) \subseteq A\}_{i\in\mathbb{Z}}$，满足

(F1) $F_i(A) \supseteq F_{i+1}(A)$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $1 \in F_0(A) \setminus F_1(A)$ 均成立，
(F2) $A = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} F_i(A)$ 和 $0 = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} F_i(A)$，(F3) $F_i(A)F_j(A) \subseteq F_{i+j}(A)$ 对所有 i，$j \in \mathbb{Z}$ 均成立，(F4) $\{F_i(A)\ F_j(A)\} \subseteq F_{i+j-w}(A)$ 对所有 i，$j \in \mathbb{Z}$ 均成立。

称 w-滤子 $\mathbf{F}$ 为负$\mathbb{N}$-w-滤子，若对所有 $i \geq 1$，$F_i = 0$。显然，负$\mathbb{N}$-w-滤子是前一小节定义的负$\mathbb{N}$-滤子的一种特殊形式。

给定一个 w-滤子$\mathbf{F}$，伴随分次环定义为

$$\mathrm{gr}_{\mathbf{F}} A: = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} F_i(A)/F_{i+1}(A).$$

根据 [17, 定义 2.1], ，称泊松代数 P 为泊松 w-分次的，若 $P = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} P_i$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次交换代数，且对所有i，$j \in \mathbb{Z}$，$\{P_i, P_j\} \subseteq P_{i+j-w}$。显然，当$\mathbf{F}$ 是一个 w-滤子时，$\mathrm{gr}_{\mathbf{F}} A$ 是一个 w-分次泊松代数。回忆一下，若 $\mathrm{gr}_{\mathbf{F}} A$ 是一个整环，则称$\mathbf{F}$ 为良滤子。对于泊松代数 A 和一个整数 w，定义

(F2.3.1) $\Phi_{good,w}(A) = $ the set of all good negatively-$\mathbb{N}$-w-filtartions of A,

and

(F2.3.2) $\Phi_{firm,\ w}(A) = A$.的所有强负-$\mathbb{N}$-w-滤过的集合

类似于定义 2.1，我们有如下定义。

定义 2.9。设 A 是一个泊松整环。A 的 $u_{good,\ w}$-不变量 定义为

$$u_{good,w}(A) := \bigcap_{\mathbf{F}\in\Phi_{good,w}(A)} F_0(A)$$

其中，交 $\bigcap$ 遍历 $\Phi_{good,\ w}(A)$ 中的所有滤过。类似地，当 A 是一个泊松强整环时，A 的 $u_{firm,\ w}$-不变量 定义为

$$u_{firm,w}(A) := \bigcap_{\mathbf{F}\in\Phi_{firm,w}(A)} F_0(A)$$

其中，交 $\bigcap$ 遍历$\Phi_{firm,\ w}(A)$中的所有滤过。

显然，$u_{good,\ w}(A)$（分别地，$u_{firm,\ w}(A)$）是 A的子代数。由于$\Phi_{good,\ w}(A) \subseteq \Phi_{good,\ w+1}(A) \subseteq \Phi_{good}(A)$，因此我们有$u_{good,\ w}(A) \supseteq u_{good,\ w+1}(A) \supseteq u_{good}(A)$。我们不清楚 $u_{good}(A)$是否$= \bigcap_{w\in\mathbb{Z}} u_{good,\ w}(A)$。

定义 2.10。设 A 是一个泊松整环，w 是一个整数。

(1) 若 A 满足 $u_{good,\ w}$-极大，则称其为此性质；也就是说，$u_{good,\ w}(A) = A$，或者等价地，$\Phi_{good,\ w}(A)$ 仅由平凡滤过组成。(2) 若 A 满足 $u_{good,\ w}$-极小，则称其为此性质，即 $u_{good,\ w}(A) = \Bbbk$。

如果 A 是一个坚实泊松整环，那么 $u_{firm,\ w}$-极大 和 $u_{firm,\ w}$-极小 的概念以类似方式定义。

设 B 是例 0.1 中的泊松整环 $P_{\Omega-\xi}$，其中 Ω 是一个次数为 $d \geq 5$ 的 i.s. 势，那么正如我们将在引理 2.14 中看到的，B 是 $u_{good,\ (d-4)}$-极大且 $u_{good,\ (d-3)}$-极小。

类似于引理 2.3，我们有：

引理 2.11. 设 A 和 B 是两个泊松整环，w 是一个整数。

(1) 若 A 是 B的子代数，则 $u_{good,w}(A) \subseteq u_{good,w}(B)$。*(2)* 设 B 是一个 *firm* 整环。则$u_{good,w}(A) \otimes u_{good,w}(B) \subseteq u_{good,w}(A \otimes B) \subseteq u_{good,w}(A) \otimes u_{firm,w}(B)$。

(3) 设 $\Bbbk$ 是代数闭的。则 $u_{good,w}(A \otimes B) = u_{good,w}(A) \otimes u_{good,w}(B)$。*(4)* 若 B 是一个 *firm* 整环，则 $u_{good,w}(B) \subseteq u_{firm,w}(B)$。

证明。(1,3,4) 参见引理 2.3 的证明。

(2) 我们对 [14, 命题 2.3(1)] 的证明作如下修改。由于 $A \otimes \Bbbk$ 是 $A \otimes B$的泊松子代数，根据第 (1) 部分，我们有 $u_{good,w}(A) \otimes \Bbbk \subseteq u_{good,w}(A \otimes B)$。类似地，$\Bbbk \otimes u_{good,w}(B) \subseteq u_{good,w}(A \otimes B)$。因此 $u_{good,w}(A) \otimes u_{good,w}(B) \subseteq u_{good,w}(A \otimes B)$。

对于 $u_{good,\ w}(A \otimes B) \subseteq u_{good,\ w}(A) \otimes u_{firm,\ w}(B)$，令 $\mathbf{F}$ 为 A 的良好负-$\mathbb{N}$-w-滤链，令$\mathbf{G}$ 为 B的严格负-$\mathbb{N}$-w-滤链。根据 [14, 引理 1.2(3)], $\mathbf{H} := \mathbf{F} \otimes \mathbf{G}$ 是 $A \otimes B$ 的良好负-$\mathbb{N}$-滤链，且 $H_0 = F_0(A) \otimes G_0(B)$。根据泊松代数的乘积的定义，$\{A_i \otimes B_j, A_l \otimes B_k\} \subseteq \{A_i, A_l\} \otimes B_j B_k + A_i A_l \otimes \{B_j, B_k\} \subseteq A_{i+l-w} \otimes B_{j+k} + A_{i+l} \otimes B_{j+k-w}$ 这意味着$\mathbf{H}$ 是一个 w-滤链。因此

$$\begin{aligned} u_{good,w}(A \otimes B) &= \bigcap_{\mathbf{H}\in\Phi_{good,w}(A\otimes B)} H_0 \\ &\subseteq \bigcap_{\mathbf{H}=\mathbf{F}\otimes\mathbf{G}, \mathbf{F}\in\Phi_{good,w}(A), \mathbf{G}\in\Phi_{firm,w}(B)} F_0(A) \otimes G_0(B) \\ &= [\bigcap_{\mathbf{F}\in\Phi_{good,w}(A)} F_0(A)] \otimes [\bigcap_{\mathbf{G}\in\Phi_{firm,w}(B)} G_0(B)] \\ &= u_{good,w}(A) \otimes u_{firm,w}(B). \end{aligned}$$

□

根据引理 2.11和定理 2.4的证明，我们得到如下结论。

定理 2.12。设 A 是一个泊松整环，R 是一个泊松强整环。设w 是一个整数。假设 A 是 $u_{good,w}$-极大的，且 R 是 $u_{firm,w}$-极小的。

(1) 那么，对于每个单射泊松代数态射 $f\colon A \longrightarrow A\otimes R$，$\mathrm{im}(f) \subseteq A \otimes \Bbbk \subseteq A \otimes R$。(2) 设 C 是 A的一个泊松子代数。那么存在一个群的短正合列$1 \to \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \otimes R \mid A) \to \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \otimes R \mid C) \to \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \mid C) \to 1.$ (3) 进一步地，若 A 是 *Dixmier*，则 A 是 R-*Dixmier*。我们将频繁使用定理 2

.12 在下一小节中 .

2.4. 泊松赋值与相对 Dixmier 性质。 在本小节中，我们将把定理 2.12 应用于一些泊松代数。首先，我们回顾一个在 [17] 中证明的引理以及泊松 w赋值的定义，它实际上等价于前一小节中给出的 w滤过的定义。我们从一个定义开始。

定义 2.13。 [17, 定义 1.1]设 A 是一个泊松整环， w 是一个整数。映射

$$\nu\colon A \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

称为 w-赋值 在 A 上，若对于所有 a， $b \in A$,

(1) $\nu(a) = \infty$ 当且仅当 $a = 0$, (2) 对所有 $a \in \Bbbk^{\times} := \Bbbk \setminus \{0\}$, $\nu(a) = 0$, (3) $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$, (4) $\nu(a + b) \geq \min\{\nu(a)\ \nu(b)\}$, (5) $\nu(\{a, b\}) \geq \nu(a) + \nu(b) - w$。

根据 [17, 引理 2.6], , A 的良好 w-滤过集合与 A的 w-赋值集合之间存在一一对应。

对于非负整数 n ，我们用 $\mathcal{A}_n$ 表示满足以下条件的泊松代数 A_Ω的类：$\Omega \in \Bbbk[x, y, z]$ 是一个次数为 $3 + n$ 且具有孤立奇点的齐次元素。关于 A_Ω 和 $P_{\Omega-\xi}$的定义，见例 0.1。类似地，对于$\xi \in \Bbbk$，令$\mathcal{P}_{n,\ \xi}$ 表示满足以下条件的泊松代数 $P_{\Omega-\xi}$ 的类：$\Omega \in \Bbbk[x, y, z]$是一个次数为 $3 + n$ 且具有孤立奇点的齐次元素。下一个命题基本上是 [17, 引理 4.8] 与 [17, 引理 7.6(2)]的结合。

将 $\Bbbk[x, y, z]$ 视为带有 Adams 分次的 $\mathbb{Z}$-分次代数，也就是说，在这种分次下， x、 y和 z 的次数均为 1，我们得到以下结论。

对于 $\xi = 0$，理想 (Ω) 是一个分次理想，因此 P_Ω 继承了一个$\mathbb{Z}$分次结构：

$$P_\Omega = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} P_i.$$

注意，对于每个 $i < 0$ ， P_Ω 的 $Adams^{-Id}$ 滤子 记为$\mathbf{F}^{-Id}$，其定义为

$$F_i^{-Id}(P) := \bigoplus_{n\leq -i} P_n \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}.$$

当 $\xi \neq 0$ 时， $\Bbbk[x, y, z]$ 上的 Adams 分次在 $P_{\Omega-\xi}$ 上诱导出一个自然滤子，记为 $\mathbf{F}^c$。也就是说，对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，都有

$$F_i^c := \{f + (\Omega - \xi) \mid f \in \Bbbk[x, y, z] \text{ and } \deg(f) \leq -i\}.$$

可以验证 $\mathrm{gr}_{\mathbf{F}^c} P_{\Omega-\xi} \cong P_\Omega$。

引理 2.14。 令 B 属于 $\mathcal{A}_n$ 或 $\mathcal{P}_{n,\ \xi}$ 其中 $\xi \in \Bbbk$。

(1) 假设 $w < n$。那么 B 的每个负 $\mathbb{N}$-w过滤都是平凡的，或等价地，$u_{good,w}(B) = B$。*(2)* 假设 $n > 0$ 且 $B \in \mathcal{P}_n, \xi$。那么 $u_{good,0}(B) = B$。*(3)* 令 B 属于 $\mathcal{P}_n, \xi$，其中 $\xi \in \Bbbk$。假设 $w = n > 0$。那么 B 存在唯一的非平凡负 $\mathbb{N}$-w过滤 F，即当 $B \in \mathcal{P}_n$时 $F = F^{-Id}$，或当 $B \in \mathcal{P}_n$时 $F = F^c$，而当 $\xi \neq 0$ 时 ξ，如 [17, 引理 *4.8(4)*]所述。因此，$u_{good,n}(B) = \Bbbk$。*(4)* 令 $n \geq 1$，并令 B和 B' 属于 $\bigcup_{\xi\in\Bbbk} \mathcal{P}_n, \xi$。假设 $\phi\colon B \longrightarrow B'$ 是一个单射泊松代数态射。那么 ϕ 是一个双射。

证明。 断言 (4) 是 [17, 引理 7.6 (2)], ，其中我们取 $\epsilon = 1$。断言 (1)–(3) 基本上由 [17, 引理 4.8], 得出，但我们来解释一下 (1)。

令 K 为 B 的分式域。根据 [17, 定义 4.1(1)],

$$ {}^w\Gamma(K) := \bigcap_\nu F_0^\nu(K) $$

其中 ν 遍历 K 上所有 w-赋值，且 $F_0^\nu(K) = \{a \in K | v(a) \geq 0\}$。根据 [17,引理 4.8(1)], ${}^w\Gamma(K) \supseteq B$。对于 B 的任意负向-$\mathbb{N}$-w-滤过，例如$\mathbf{F}$，由 [17, 引理 2.6] 可定义一个 B 的 w-赋值。根据 [17, 引理 2.7], ，它可延拓为 K 的 w-赋值。于是，等式 ${}^w\Gamma(K) \supseteq B$ 推出 $F_0(B) = B$。因此$\mathbf{F}$ 是平凡的。因此，$u_{good,w}(B) = B$。□

接下来，我们将为某些泊松代数类建立相对 Dixmier 性质。令 $n \geq 1$，并令 $\mathcal{P}_n$ 表示满足 $\bigcup_{\xi\in\Bbbk} \mathcal{P}_{n,\ \xi}$ 的泊松代数类。

假设 $\mathcal{G}_{n-1}$ 是由 R_1 生成的亚当斯连通分次泊松整环 $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ 的类，且满足 $\{R_1, R_1\} \subseteq R_{n+1}$。（注意，此处 $R_0 = \Bbbk$，每个 R_i 都是 R 的子空间，并且 $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$。）现在，我们通过令 $F_{-i}(R) := \sum_{j\leq i} R_j$，在 R 上定义一个负 $\mathbb{N}$ 过滤。

令 $\mathcal{F}_{n-1}$ 表示满足 $u_{\mathrm{firm},\ n-1}(S) = \Bbbk$ 的泊松强整环 S 的类。注意，当 $\Bbbk$ 代数闭时，每个交换整环都是强整环。因此，根据定义，我们有 $\mathcal{G}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$。

定理 2.15. 保留上述记号，并假设 $\Bbbk$ 是代数闭的。那么，按照定义 0.4(1) 的意义，$\mathcal{P}_n$ 是 $\mathcal{F}_{n-1}$-*Dixmier*。

证明。 由于 $\Bbbk$ 是代数闭的，我们有 $u_{good,w} = u_{firm,w}$。设 A 和 A' 属于 $\mathcal{P}_n$，且 $f\colon A \longrightarrow A' \otimes R$ 是一个单射泊松代数态射，其中$R \in \mathcal{F}_{n-1}$。我们有：

$$\begin{aligned} A &= u_{good,n-1}(A) && \text{by Lemma 2.14(1)} \\ &\xrightarrow{f} u_{good,n-1}(A' \otimes R) && \text{by Lemma 2.11(1)} \\ &= u_{good,n-1}(A') \otimes u_{good,n-1}(R) && \text{by Lemma 2.11(3)} \\ &= A' \otimes \Bbbk. \end{aligned}$$

因此，f 可视为从 A 到 $A' \otimes \Bbbk \cong A'$ 的单射。根据引理 2.14(4)，f 的像是 $A' \otimes \Bbbk$。故断言得证。□

2.5. **其他应用：相对消去与霍普夫余作用的不存在性**。我们简要介绍另外两种应用。第一种涉及 [14]中引入的相对消去。关于消去问题的更多信息，请读者参阅

[9, 10] 以及综述论文 [16]，其中还列有其他相关参考文献。

定义 2.16. 设 $\mathcal{R}$ 是一个泊松代数族。

(1) 若泊松代数 A 满足：对于任意泊松代数B 以及任意两个 Gelfand-Kirillov 维数相同的泊松代数 $R, R' \in \mathcal{R}$，若它们之间存在泊松代数同构 $A \otimes R \cong B \otimes R'$，则$A \cong B$，则称 A 为 $\mathcal{R}$-可消去的。(2) 若泊松代数 A 满足：对于任意泊松代数B 以及任意两个 Gelfand-Kirillov 维数相同的泊松代数 $R, R' \in \mathcal{R}$，若它们之间存在泊松代数同构 $A \otimes R \cong B \otimes R'$，则$A \cong B$ 且 $R \cong R'$，则称 A 为 $\mathcal{R}$-双可消去的。(3) 设 $\mathcal{C}$ 是另一个泊松代数族。对于任意两个泊松代数 $C, C' \in \mathcal{C}$ 以及任意两个泊松代数 $R, R' \in \mathcal{R}$，若存在泊松代数同构 $C \otimes R \cong C' \otimes R'$，则 $C \cong C'$ 且 $R \cong R'$。若满足这一条件，则称这一对 $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ 是双可消去的。

定理 2.17。 沿用之前的记号。

(1) 每个 A *in* $\mathcal{P}_n$ 中的泊松代数都是 $\mathcal{F}_{n-1}$-可消去的。(2) 每个 A *in* $\mathcal{A}_n$ 中的泊松代数都是 $\mathcal{F}_{n-1}$-可消去的。(3) $(\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{P}_{n,\ 0})$ 是双可消去的。(4) $(\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{A}_n)$ 是双可消去的。

证明。 这四部分的证明都与 [14, 定理 2.4(1)],的证明类似，因此我们只证明第 (1) 部分。第 (3) 和第 (4) 部分也可由 [14, 定理 2.4(2)]推出。

(1) 设 A 属于 $\mathcal{P}_n$，且 R_1，R_2 属于 $\mathcal{F}_{n-1}$，二者的 Gelfand-Kirillov 维数相同。假设 $A \otimes R_1 \cong B \otimes R_2$，其中 B是另一个泊松代数。由于 $A \otimes R_1$是整环，因此 B也是整环。将 $u_{good,\ n-1}$应用于同构 $A \otimes R_1 \cong B \otimes R_2$，并利用引理 2.11 以及事实 $u_{firm,\ n-1}(R_1) = u_{firm,\ n-1}(R_2) = \Bbbk$，我们得到

$$A \cong A \otimes \Bbbk \subseteq u_{good,n-1}(A \otimes R_1) \cong u_{good,n-1}(B \otimes R_2) \subseteq B \otimes \Bbbk \cong B.$$

现在， [14,定理 2.4(1)] 的证明适用。 □

第二个应用涉及 Hopf 代数余作用。关于泊松 Hopf 代数的定义，请参阅 [2]；关于 Hopf 代数余作用及其相关性质的定义，请参阅 [27] 。

定理 2.18。 设 A 属于 $\mathcal{P}_n$。假设 H 是一个泊松 *Hopf* 代数，且作为泊松代数属于 $\mathcal{F}_{n-1}$ 。那么， A 上的每个泊松 H-余作用都是平凡的。

证明。 假设 ρ: $A \to A \otimes H$是 A上的 H的泊松 Hopf 余作用。根据余单位公理， ρ 是单射。根据定理 2.15 的证明， ρ 的像位于 $A \otimes H$内的$A \otimes \Bbbk$ 中。这意味着余作用 ρ 是平凡的。□

3. Tensor products of Poisson algebras

本节中，为简便起见，我们假设 $\Bbbk$ 是代数闭的。在此假设下，两个交换整环的张量积仍是整环[14, 引理 1.1(1)]。本节的主要目标是证明 $P_{\Omega_i - \xi_i}$ 的张量积的迪克斯米耶性质，其中 Ω_i 是次数各不相同的 i.s. 势 ≥ 5。我们先给出一些引理。

引理 3.1。 设 A 和 B 是两个 *Poisson* 整环。假设 $Q(A)$ 的泊松中心为 $\Bbbk$。那么，每个非零 *Poisson* 理想 $A \otimes B$ 都包含形如 $a \otimes b$ 的元素，其中 $0 \neq a \in A$ 和 $0 \neq b \in B$。

证明。设 I 是 $A \otimes B$的一个非零 Poisson 理想。令 $0 \neq c \in I$，并将 c 写作 $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$，其中 $a_i \in A$ 且 $b_i \in B$。假设在 I 中所有可能的非零 c 里，n 是极小的。我们断言 $n = 1$。反设 $n > 1$。那么我们可以假设 $\{a_1, \cdots, a_n\}$（分别为 $\{b_1, \cdots, b_n\}$）线性无关。

情形 1: $\{a_1, a_2\} \neq 0$。那么 I 包含元素 $\{c, a_1 \otimes 1\} = \sum_{i=1}^{n} \{a_i, a_1\} \otimes b_i = \sum_{i=2}^{n} \{a_i, a_1\} \otimes b_i$，它非零，因为 $\{b_1, \cdots, b_n\}$ 线性无关，并且 $\{a_2, a_1\} \neq 0$。这与 n 的极小性矛盾。

还需考虑以下情形:

情形 2: $\{a_1, a_2\} = 0$。注意，对于每个 $f \in A$，任意非零的 f 都有 $(f \otimes 1)c = \sum_{i=1}^{n} a_i f \otimes b_i \in I$，且其非零。根据情形 1，我们还可以假设 $\{a_1 f, a_2 f\} = 0$。因此

$$0 = \{a_1 f, a_2 f\} = \{a_1, f\} a_2 f + \{f, a_2\} a_1 f + \{a_1, a_2\} f^2 = \{a_1, f\} a_2 f + \{f, a_2\} a_1 f.$$

因此 $\{a_1, f\} a_2 = \{a_2, f\} a_1$。这意味着

$$\{a_1 a_2^{-1}, f\} = \{a_1, f\} a_2^{-1} - \{a_2, f\} a_2^{-2} a_1 = (\{a_1, f\} a_2 - \{a_2, f\} a_1) a_2^{-2} = 0.$$

由于 f 是任意的，$a_1 a_2^{-1}$ 属于 $Q(A)$ 的中心；根据假设，该中心为 $\Bbbk$。因此，a_1 和 a_2 线性相关，这与假设矛盾。□

设 w 为一个固定的非负整数。回顾一下，若一个 Poisson w-分次代数 $P = \bigoplus_{i \geq 0} P_i$（具有连通的 Adams 分次）满足以下条件，则称其为 射影简单

(a) $\bar{P}_{\geq h} := \sum_{i > h} P_i \neq 0$ for all $h \gg 0$, and

(b) 每个非零分次泊松理想都包含某个 $P_{\geq h}$，其中 $h > 0$。

注意，由于我们使用 Adams 分次，每个 P_i 都是有限维的。因此，条件 (a) 等价于 P 是无限维的，而条件 (b) 等价于说，P 的每个非零分次泊松理想都是余有限维的。关于射影简单环的更多结果和讨论，请参阅 [28] 。

引理 3.2. 设 S 和 A 是整环，并假设 S 是泊松单代数。设 A 是一个泊松代数，使得 $Q(A)$ 具有平凡泊松中心。

（1）若 A 是泊松单的，则 $S \otimes A$也是泊松单的。（2）设 A 是一个射影简单的连通 w-分次泊松代数。那么 $S \otimes A$ 的每个分次非零泊松理想都包含某个 $S \otimes A_{\geq h}$，其中 $h > 0$。

在第 (2) 部分中，我们使用 A 的分次，并为所有 $s \in S$ 定义 $\deg s = 0$。

引理 *3.2* 的证明。设 I 是 $S \otimes A$的一个非零 Poisson 理想。根据引理 3.1，存在一个元素 $0 \neq s \otimes a \in I$，其中 $s \in S$ 且 $a \in A$。考虑 $J_a := \{s \in S \mid s \otimes a \in I\}$。利用等式 $\{s' \otimes 1, s \otimes a\} = \{s', s\} \otimes a$，对于每个 s，$s' \in S$，容易看出 J_a 是 S 的一个非零 Poisson 理想。由于 S 是泊松单的，$J_a = S$ 且 $1 \otimes a \in I$。

(1) 根据上述结果，我们可以假设 $1 \otimes a \in I$。因此，$I \cap (\Bbbk \otimes A)$ 不为零。由于 A 是泊松单的，$\Bbbk \otimes A$ 也泊松单，因此 $1 \otimes 1 \in \Bbbk \otimes A = I \cap (\Bbbk \otimes A) \subseteq I$。所以 $I = S \otimes A$。

(2) 设 I 是 $S \otimes A$ 的一个非零分次泊松理想。根据第一段，对于某个 $0 \neq a \in A$，有 $1 \otimes a \in I$。由于 $I \cap (\Bbbk \otimes A)$ 不为零，且 A 是射影简单的，因此 $I \cap (\Bbbk \otimes A)$ 包含某个 $1 \otimes A_{\geq h}$，其中 $h > 0$。所以断言得证。□

引理 3.3. 设 A 是一个泊松整环，使得 $u_{\mathrm{good},w}(A) = A$。设 P 是一个满足以下条件的泊松整环：

(i) $u_{\mathrm{good},w}(P) = \Bbbk$；(ii) P 有唯一的非平凡负向-$\mathbb{N}$-w-滤过$\mathbf{G}'$；(iii) $\mathrm{gr}_{\mathbf{G}'} P$ 是射影简单整环；(iv) $Q(\mathrm{gr}_{\mathbf{G}'} P)$ 具有平凡泊松中心。

那么 $A \otimes P$ 有唯一的非平凡负向-$\mathbb{N}$-w-滤过。

证明。令 $\mathbf{G}'$ 为 (ii) 所给出的 P 的唯一非平凡负-$\mathbb{N}$-w-滤过。定义 $A \otimes P$ 的滤过 $\mathbf{H}'$：$H'_i(A \otimes P) := A \otimes G'_i(P)$，对所有 i 均成立。于是它是 $A \otimes P$ 的一个非平凡负-$\mathbb{N}$-w-滤过。接下来只需证明其唯一性。

设 H 是 $A \otimes P$ 的任意一个非平凡负-$\mathbb{N}$-w-滤过。通过限制，它在 A 上诱导出一个负-$\mathbb{N}$-w-滤过，记为 F（而在 P 上诱导出的负-$\mathbb{N}$-w-滤过记为 G）。由于 $u_{good,w}(A) = A$，F 是平凡的，也就是说，对所有 $i \leq 0$，$F_i(A) = A$，且对所有 $i > 0$，$F_i(A) = 0$。由于 P 具有唯一的非平凡负-$\mathbb{N}$-w-滤过，G 要么是平凡的，要么等于 G′。若 G 是平凡的，则可得 $H_0(A \otimes P) = A \otimes P$，这意味着 H 是平凡的，与假设矛盾。因此必有 G = G′。由于 $A \otimes \Bbbk \subseteq H_0(A \otimes P)$，将 $A \setminus \{0\}$ 中的元素局部化后，滤过 H 在 $K \otimes P$ 上诱导出一个负-$\mathbb{N}$-w-滤过，其中 $K = Q(A)$，仍记为 H。类似地，H′ 在 $K \otimes P$ 上诱导出一个负-$\mathbb{N}$-w-滤过，仍记为 H′。对于每个 $i \leq 0$，$H'_i(K \otimes P) = K \otimes G'_i(P) \subseteq H_i(K \otimes P)$。根据 [17, 引理 2.8(1)], ，存在一个自然的分次泊松代数态射

$$\phi : \mathrm{gr}_{\mathbf{H}'} K \otimes P (\cong K \otimes \mathrm{gr}_{\mathbf{G}'} P) \to \mathrm{gr}_{\mathbf{H}} K \otimes P.$$

ϕ 的核是一个分次泊松理想，因此根据引理 3.2(2)，若 $\ker(\phi)$ 非零，则存在一个整数 $m \leq 0$，使得 $\ker(\phi)$ 包含所有元素$1 \otimes p$，对每个 $p + \mathrm{G}'_{i+1}(P) \in \mathrm{G}'_i(P)/\mathrm{G}'_{i+1}(P)$，其中 $i \leq m$。由于 ϕ对所有 $p + \mathrm{G}'_{i+1}(P) \in \mathrm{G}'_i(P)/\mathrm{G}'_{i+1}(P)$ 及 $i < 0$，都将 $1 \otimes p$映射为$1 \otimes p$，这意味着对所有 $i \leq m$，$\mathrm{G}'_i(P) = \mathrm{G}'_{i+1}(P)$，这与 $\mathrm{gr}_{\mathbf{G}'} P$是射影简单因而是无限维的矛盾。因此 $\ker(\phi) = 0$，且 ϕ 是单射。根据[17, 引理 2.8(2)], ，H = H′ 在 $K \otimes P$上成立。限制到 $A \otimes P$上，我们得到所需的 H = H′。

□

引理 3.4。设Ω 是一个次数至少为4的齐次 *i.s.* 势。设 K 是一个作为泊松 $\Bbbk$-代数的域，且 $\xi \in \Bbbk$。那么，$K \otimes P_{\Omega - \xi}$ 的每个既是单射 K-代数自同态、又是泊松 $\Bbbk$-代数态射的映射都是双射。

证明。设 $w = \deg \Omega - 3$。由于 $\deg(\Omega)$ 至少为 4，w 大于或等于 1。由引理 2.14(3)，$P_{\Omega - \xi}$ 有唯一的非平凡负向-$\mathbb{N}$-w-滤过，使得其伴随分次环同构于 P_Ω。由于 Ω 有一个孤立奇点，P_Ω 是射影简单的，见 [17, 引理 1.6]。因此，$P := P_{\Omega - \xi}$ 满足引理 3.3 的假设 (i-iv)。由此，$K \otimes P_{\Omega - \xi}$（作为泊松 $\Bbbk$-代数）有唯一的非平凡负向-$\mathbb{N}$-w-滤过，记作 $\mathbf{F}$，使得其伴随分次环同构于 $K \otimes P_\Omega$。现在令

$$\phi : K \otimes P_{\Omega - \xi} \longrightarrow K \otimes P_{\Omega - \xi}$$

是一个单射泊松 K-代数自同态。那么显然

$$\phi(\mathbf{F}) := \{\, F_i + \phi(F_i(K \otimes P_{\Omega-\xi})) \,\}$$

是 $K \otimes P_{\Omega-\xi}$ 的一个非平凡负向 $\mathbb{N}$–w–滤过。这意味着

$$\mathbf{F} = \phi(\mathbf{F}).$$

也就是说，对于每个 i,

$$F_i + \phi(F_i(K \otimes P_{\Omega-\xi})) = F_i,$$

因此

$$\phi(F_i(K \otimes P_{\Omega-\xi})) \subseteq F_i.$$

这表明我们得到了一个 w-分次的泊松 $\Bbbk$-代数态射

$$\operatorname{gr}\phi : \operatorname{gr}_{\mathbf{F}}(K \otimes P_{\Omega-\xi}) \longrightarrow \operatorname{gr}_{\mathbf{F}}(K \otimes P_{\Omega-\xi})$$

将 $x + F_{i+1} \in F_i/F_{i+1}$ 映射到 $\phi(x) + F_{i+1}$。

注意，$\operatorname{gr}\phi$ 是单射。事实上，若

$$G_i := \{\, x \in F_i \mid \phi(x) \in F_{i+1} \,\},$$

则集合 $\{\, G_i + F_{i+1} \,\}$ 是一个负向–$\mathbb{N}$–w–滤过，由于 $K \otimes P_{\Omega-\xi}$ 不是有限维的，该滤过不可能是平凡的。根据$\mathbf{F}$的唯一性，我们必有

$$G_i = F_{i+1},$$

这表明 $\operatorname{gr}\phi$ 是单射。

回顾一下，每个 F_i 都具有如下形式

$$F_i = K \otimes G_i'(P_{\Omega-\xi}),$$

其中 G' 是 $P_{\Omega-\xi}$上唯一的非平凡负向–$\mathbb{N}$–w–滤过。这意味着每个 F_i/F_{i+1} 都是有限维的 K-模。由于 ϕ 是一个 K-代数态射，对于每个 i以及所有 $k \in K$ 和 $x + F_{i+1} \in F_i/F_{i+1}$,

$$\operatorname{gr}\phi(k(x+F_{i+1})) = \operatorname{gr}\phi(kx+F_{i+1}) = \phi(kx)+F_{i+1} = (k\phi(x))+F_{i+1} = k(\operatorname{gr}\phi(x+F_{i+1})).$$

因此，$\operatorname{gr}\phi$ 到 F_i/F_{i+1} 的限制是一个 K-线性单射；由于 F_i/F_{i+1}在 K上是有限维的，对每个 i，这个限制也是满射。

假设 ϕ 不是满射。那么我们可以选取一个极大的 $i \leq 0$ ，使得存在

$$x \in F_i \setminus F_{i+1}$$

其中 x 不在 ϕ的像中。由于$\operatorname{gr}\phi$ 到 F_i/F_{i+1} 的限制是满射，我们有

$$F_{i+1} + \phi(F_i) = F_i.$$

因此，存在 $y \in F_{i+1}$ 和 $t \in\in \operatorname{im}(\phi)$，使得

$$x = y + t.$$

现在， y 必定属于$\operatorname{im}(\phi)$；否则就与 i的选取矛盾。但这样一来， $x = y+t$也属于$\operatorname{im}(\phi)$，这就产生了矛盾。

因此， ϕ 是满射。 □

注意，上述引理给出的结论比单纯的基变换结果更强，因为 K 上的泊松结构并非平凡。 [17, 定理 0.9]

引理 3.5。 设 Ω 是次数为 $d \geq 5$ 的齐次 *i.s.* 势。设 K 是一个泊松域。对于任意 $\xi \in \Bbbk$，$\operatorname{Aut}_{Poi.alg}(K \otimes P_{\Omega-\xi} \mid K)$ 的阶不超过 $42d(d-3)^2$。

证明。我们的证明分为三个步骤。在前两个步骤中，我们考虑 $\xi = 0$ 的情形，最后一步则处理 $\xi \neq 0$ 的情形。

步骤 1： 回顾一下， P_Ω 具有标准分次

$$P_\Omega = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} P_i,$$

如引理 2.14 之前所述。另一方面，

$$K \otimes P_\Omega = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} K \otimes P_i$$

也是一个分次泊松代数。本步骤的目标是证明，$\mathsf{Aut}_{\mathrm{gr.Poi.alg}}(K \otimes P_\Omega \mid K)$，即由保分次自同构组成的 $\mathsf{Aut}_{\mathrm{Poi.alg}}(K \otimes P_\Omega \mid K)$ 的子群，其基数上界为 $42\, d(d-3)^2$。

首先，我们证明该基数受 $\mathsf{Aut}_{\mathrm{gr.Poi.alg}}(P'_\Omega)$ 的基数所界，其中 $P'_\Omega := \Bbbk'[x,y,z]/(\Omega)$，且 $\Bbbk'$ 表示 K 的泊松中心。注意到$\Bbbk \subseteq \Bbbk' \subseteq K$，并且 $\Bbbk'$ 是一个具有平凡泊松括号的域。

现在令

$$\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.Poi.alg}}(K \otimes P_\Omega \mid K).$$

由于 $\{\lambda \otimes 1,\ \lambda' \otimes x\} = 0$，对于任意 $\lambda \in K$、 $\lambda' \in \Bbbk'$ 和 $x \in P_\Omega$，并且由于 ϕ 逐点固定 K，因此可得 $\{\lambda \otimes 1,\ \phi(\lambda' \otimes x)\} = 0$. 记

$$\phi(\lambda' \otimes x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \otimes x_i,$$

其中 n 是有限整数，每个 $\mu_i \in K$ 以及元素 $x_i \in P_\Omega$ 都是线性无关的，我们得出每个 μ_i 都属于 $\Bbbk'$。因此， $\phi(\lambda' \otimes x) \in \Bbbk' \otimes P_\Omega$.

因此，限制诱导出一个单射群同态

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.Poi.alg}}(K \otimes P_\Omega \mid K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.Poi.alg}}(\Bbbk' \otimes P_\Omega \mid \Bbbk').$$

注意到

$$\Bbbk' \otimes P_\Omega \cong \Bbbk'[x,y,z]/(\Omega) = P'_\Omega,$$

并且显然

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.Poi.alg}}(\Bbbk' \otimes P_\Omega \mid \Bbbk') = \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.Poi.alg}}(P'_\Omega).$$

根据 [17, 定理 8.2], 证明的最后一部分，该群的阶

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Poi.alg}}(P'_\Omega)$$

被 $42\, d(d-3)^2$ 从上方界定。因此，.....的基数

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr.Poi.alg}}(K \otimes P_\Omega \mid K)$$

也不超过 $42\, d(d-3)^2$, ，由此证明了这一步中的结论。

步骤 2：现在考虑 $\mathsf{Aut}_{Poi.alg}(K \otimes P_\Omega \mid K)$。令 $\sigma \in \mathsf{Aut}_{Poi.alg}(K \otimes P_\Omega \mid K)$。由于 $K \otimes P_\Omega$ 具有唯一的负向-$\mathbb{N}$-w-滤过 F， σ 保持 F。因此， σ诱导出一个保次数的泊松自同构 $\sigma' : \mathsf{gr}_{\mathbf{F}}\, K \otimes P_\Omega \to \mathsf{gr}_{\mathbf{F}}\, K \otimes P_\Omega$。记住 $\mathsf{gr}_{\mathbf{F}}\, K \otimes P_\Omega = K \otimes P_\Omega$，可知 σ' 属于 $\mathsf{Aut}_{gr.Poi.alg}(K \otimes P_\Omega \mid K)$。将 σ 替换为 $\sigma(\sigma')^{-1}$ 后，不妨设 σ' 为恒等映射。我们断言，在这种情形下， σ 为恒等映射。由于 σ' 为恒等映射，$\sigma(x) = x + a$， $\sigma(y) = y + b$，且 $\sigma(z) = z + c$，其中 a、 b、 $c \in K$。（注意，在 $K \otimes P_\Omega$中，我们将 K 与 $K \otimes \Bbbk$等同，并将 $\Bbbk \otimes P_\Omega$与 P_Ω等同。）注意，在 $K \otimes \Bbbk[x,y,z]$中，

$$\Omega(x+a, y+b, z+c) = \Omega(x,y,z) + a\Omega_x + b\Omega_y + c\Omega_z + ldt$$

其中 ltd 是 Adams 次数小于或等于 $d-2$的项之和。因此，在 $K\otimes P_\Omega$中，

$$\begin{aligned}0=\sigma(0)=\sigma(\Omega)&=\Omega(x+a,y+b,z+c)\\&=\Omega(x,y,z)+a\Omega_x+b\Omega_y+c\Omega_z+ldt=a\Omega_x+b\Omega_y+c\Omega_z+ldt\end{aligned}$$

这意味着，当限制在次数 $d-1$ 上时， $a\Omega_x+b\Omega_y+c\Omega_z=0$。由于 Ω 具有 i.s.，$\Omega_x$，$\Omega_y$，$\Omega_z$ 是 $\Bbbk$-线性无关的。将它们视为 $K\otimes P_\Omega$ 中的元素，它们是 K-线性无关的，这意味着 $a=b=c=0$ ，正如所需。因此，$\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(K\otimes P_\Omega \mid K)$ 中的每个泊松代数自同构都保持分次。于是， $\xi=0$ 的断言由步骤 1 得出。

步骤 3： 设 $\xi\neq 0$。我们将构造一个从 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(K\otimes P_{\Omega-\xi}\mid K)$ 到 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(K\otimes P_\Omega\mid K)$ 的群同态。设 $\sigma\in\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(K\otimes P_{\Omega-\xi}\mid K)$。由于$K\otimes P_{\Omega-\xi}$ 具有唯一的负向-$\mathbb{N}$-w-滤过 $\mathbf{F}$ [引理 3.3]， σ 保持 $\mathbf{F}$。因此， σ 诱导出一个保持次数的泊松自同构 $\sigma':\mathrm{gr}_{\mathbf{F}}K\otimes P_{\Omega-\xi}\to\mathrm{gr}_{\mathbf{F}}K\otimes P_{\Omega-\xi}$。注意到 $\mathrm{gr}_{\mathbf{F}}K\otimes P_{\Omega-\xi}=K\otimes P_\Omega$，可知$\sigma'$ 属于 $\mathrm{Aut}_{gr.Poi.alg}(K\otimes P_\Omega\mid K)$。

利用$\mathbf{F}$ 的唯一性，可以很容易地证明 $\sigma\to\sigma'$ 是一个群同态。我们声称这是一个单射。假设 σ' 是恒等映射，利用滤过$\mathbf{F}$，可得 $\sigma(x)=x+a$, $\sigma(y)=y+b$ 以及 $\sigma(z)=z+c$，其中 $a,b,c\in K$。注意，在 $K\otimes\Bbbk[x,y,z]$中，

$$\Omega(x+a,y+b,z+c)-\xi=\Omega(x,y,z)-\xi+a\Omega_x+b\Omega_y+c\Omega_z+ldt$$

其中 ltd 是次数小于或等于 $d-2$的项之和。因此，在 $K\otimes P_\Omega$中，

$$\begin{aligned}0=\sigma(0)=\sigma(\Omega-\xi)&=\Omega(x+a,y+b,z+c)\\&=\Omega(x,y,z)-\xi+a\Omega_x+b\Omega_y+c\Omega_z+ldt=a\Omega_x+b\Omega_y+c\Omega_z+ldt\end{aligned}$$

这意味着 $a\Omega_x+b\Omega_y+c\Omega_z=0$在伴随分次环 $\mathrm{gr}_{\mathbf{F}}(K\otimes P_{\Omega-\xi})$ 中。由于 Ω 具有 i.s.，Ω_x,Ω_y,Ω_z 是 $\Bbbk$-线性无关的。将它们视为 $K\otimes P_\Omega$中的元素，它们是 K-线性无关的，这意味着 $a=b=c=0$。因此，σ 是恒等映射，且映射 $\sigma\to\sigma'$ 是单射。结论由步骤 1 得出。□

现在我们可以证明主要结果了。

定理 0.2 的证明。 (1) 我们对 d 使用归纳法。若 $d=1$，则由 [17, 定理 0.9] 得出结论。现在假设 $d\geq 2$。不失一般性，可设 $\deg\Omega_1>\deg\Omega_2>\cdots>\deg\Omega_d=:m$。令 A 为泊松整环$\bigotimes_{i=1}^{d-1}P_{\Omega_i-\xi_i}$。于是 $P=A\otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$。由引理 2.14(1)，$u_{good,\ m-3}(P_{\Omega_i-\xi_i})=P_{\Omega_i-\xi_i}$ 对所有 $i\leq d-1$ 均成立。由引理 2.11 (3)，$u_{good,\ m-3}(A)=A$。由引理 2.14(3)，$u_{good,\ m-3}(P_{\Omega_d-\xi_d})=\Bbbk$。令 ϕ 为$P=A\otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$的单射泊松代数自同态。将 $u_{good,\ m-3}$ 应用于 ϕ，并利用引理 2.14(2)，得到一个单射泊松代数态射

$$f:=u_{good,m-3}(\phi):A\otimes\Bbbk\longrightarrow A\otimes\Bbbk.$$

根据归纳假设， f是一个双射态射。将 ϕ替换为$(f^{-1}\otimes Id)\phi$后，我们可以假设 f 是恒等映射，即 ϕ 在 A 上的限制是恒等映射。将 $A\backslash\{0\}$中的元素局部化后，我们得到一个单射泊松代数自同态

$$\psi:K\otimes P_{\Omega_d-\xi_d}\longrightarrow K\otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$$

使得 ψ 在 $A\otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$ 上的限制是 ϕ。由于 f 是恒等映射， ψ 是 K-态射，因此由引理 3.4 可知， ψ 是双射。由于 ψ 在 K上是恒等映射，根据

引理 3.5，存在一个整数 m，使得 ψ^m 是恒等映射。这意味着 ϕ^m 是恒等映射。因此，ϕ 是所需的双射。

(2) 这由下一个推论得出。(3) 这由归纳法、引理 3.2、[36, 定理 1 和推论2]得出。□

推论 3.6. 设$\Omega_1, \cdots, \Omega_d$是一组 *Adams* 次数各不相同的 *i.s.* 势，其中$\deg \Omega_i \geq 5$对所有 i均成立。设 $\xi_1, \cdots, \xi_d$是 $\Bbbk$中的一组标量。设 P为泊松代数 $P_{\Omega_1-\xi_1} \otimes \cdots \otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$。

(1) 设 C 是一个泊松整环。那么 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(C \otimes P \mid C)$ 的上界为 $\prod_{i=1}^{d}\{42 \deg \Omega_i(\deg \Omega_i - 3)^2\}$.(2) 设 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 是例 0.5 中定义的一个简单泊松环面。那么存在一个短正合列

$$1 \to \text{自同构}_{Poi.alg}(L_\Lambda(\Bbbk) \otimes P \mid L_\Lambda(\Bbbk)) \to \text{自同构}_{Poi.alg}(L_\Lambda(\Bbbk) \otimes P) \to \text{自同构}_{Poi.alg}(P) \to 1.$$

证明。(1) 不失一般性，我们可以假设 C 是一个泊松域。特别地，由 [14, 推论 1.4], ，我们可以假设对所有 $w \geq 0$，C 都是 $u_{\mathrm{good},\, w}$-极大的。我们对 d 使用归纳法。若 $d = 0$，则无需证明。若 $d = 1$，则结论由引理 3.5 得出。现在假设 $d \geq 2$。类似于定理 0.2 的证明，并假设 $\deg \Omega_1 > \deg \Omega_2 > \cdots > \deg \Omega_d =: m$。令 A 为泊松整环 $C \otimes \bigotimes_{i=1}^{d-1} P_{\Omega_i-\xi_i}$。那么 $C \otimes P = A \otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$。因此 A 是 $u_{good,m-3}$-极大的，而 $P_{\Omega_d-\xi_d}$ 是 $u_{good,m-3}$-极小的。由定理 2.12(2)，存在一个群的短正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \otimes P_{\Omega_d-\xi_d} \mid A) \longrightarrow \mathrm{Aut}(A \otimes P_{\Omega_d-\xi_d} \mid C) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \mid C) \to 1.$$

令 K 为 A 的分式域，则 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A \otimes P_{\Omega_d-\xi_d} \mid A)$ 是 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(K \otimes P_{\Omega_d-\xi_d} \mid K)$ 的子群，而后者由引理 3.5 可知不超过 $42 \deg \Omega_d(\deg \Omega_d - 3)^2$。现在由归纳法和上述正合列可得结论。

(2) 注意到 $L_\Lambda(\Bbbk)$ 是 u_{good}-极大的（见 [14, 推论 1.4]），且 P 是 u_{firm}-极小的（由定理 2.15 得出）。取 $C = \Bbbk$，由定理 2.4(2) 即可得到结论。□

定理 *0.6* 的证明。设 A 是泊松代数 $L_\Lambda(\Bbbk) \otimes P$，其中 $P = \bigotimes_{i=1}^{d} P_{\Omega_i-\xi_i}$。首先，我们证明 A 是 Dixmier。我们对 d 使用归纳法。若 $d = 0$，则由定理 2.6 可得结论；这里注意到 $\Bbbk$ 是代数闭的，且每个交换整环都是 firm 整环。现在假设 $d \geq 1$。不失一般性，可设 $\deg \Omega_1 > \deg \Omega_2 > \cdots > \deg \Omega_d =: m$。令 A' 为泊松整环 $L_\Lambda(\Bbbk) \otimes \prod_{i=1}^{d-1} P_{\Omega_i-\xi_i}$。则 $A = A' \otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$。由引理 2.14(1)，对所有 $i \leq d-1$，$u_{good,\, m-3}(P_{\Omega_i-\xi_i}) = P_{\Omega_i-\xi_i}$。因此，利用引理 2.11(2) 和 [14, 推论 1.4]，可得 $u_{good,\, m-3}(A') = A'$。我们还利用引理 2.14(3) 得到 $u_{\mathrm{good},\, m-3}(P_{\Omega_d-\xi_d}) = \Bbbk$。

设 ϕ 是 $A = A' \otimes P_{\Omega_d-\xi_d}$ 的单射泊松代数自同态。将 $u_{good,\, m-3}$ 应用于 ϕ，并利用引理 2.11(2)，我们得到一个单射泊松代数态射

$$f := u_{good,m-3}(\phi) \colon A' \otimes \Bbbk \longrightarrow A' \otimes \Bbbk.$$

由归纳假设，f是一个双射态射。将 ϕ替换为$(f^{-1} \otimes Id)\phi$后，我们可以假设 f 是恒等映射，即 ϕ 在 A' 上的限制是

恒等映射。将 $A' \setminus \{0\}$中的所有元素取逆后，我们得到一个单射泊松代数自同态

$$\psi : K \otimes P_{\Omega_d - \xi_d} \longrightarrow K \otimes P_{\Omega_d - \xi_d}$$

使得 ψ 在 $A' \otimes P_{\Omega_d - \xi_d}$ 上的限制是 ϕ。由于 ψ 是 K上的恒等映射，根据引理 3.4， ψ 是双射，因此根据引理 3.5，存在一个整数 m，使得 ψ^m 是恒等映射。这意味着 ϕ^m 是恒等映射。因此， ϕ 是所需的双射。

现在，为了证明定理 0.6，只需证明 A 和 P都是 $\mathcal{F}_w$-迪克斯米耶的，其中

$$w \leq \min\{\deg \Omega_i\} - 1.$$

事实上，正如前面所定义的， $\mathcal{F}_w$ 是满足以下条件的泊松强整环 S 的类:

$$u_{\mathrm{firm},\, w}(S) = \Bbbk.$$

由于 $\Bbbk$ 是代数闭的，每个交换整环都是 firm 整环。因此，根据定义，我们有 $\mathcal{G}_w \subseteq \mathcal{F}_w$. 。所以让我们证明，当 $w \leq \min\{\deg \Omega_i\} - 1 = m - 4$时， A 是 $\mathcal{F}_w$-迪克斯米耶的。由上述证明可知， A 是 $u_{good,w}$-极大的。于是， $\mathcal{F}_w$ 中的每个 R 都是 $u_{good,w}$-极小的。该断言由定理 2.12(3)得出。因此，这就处理了 $A = L_\Lambda(\Bbbk) \otimes \bigotimes_{i=1}^d P_{\Omega_i - \xi_i}$的情形。

当 $P = \bigotimes_{i=1}^d P_{\Omega_i - \xi_i}$ 时，根据定理 0.2， P 是 Dixmier。注意， P 是 $u_{good,\ w}$-极大的，而 $R \in \mathcal{F}_w$ 是 $u_{good,\ w}$-极小的。根据定理 2.12(3)， P 是 R-Dixmier。□

4. Integral closure and complementary space

在本节中，我们引入补空间和补模的概念，这有助于我们更好地理解 Dixmier 和 R-Dixmier 性质。在其他结果中，我们给出了定理 0.9 的证明。

4.1. 的闭包。 首先，我们回顾交换代数中的一些引理。

引理 4.1。 设 $\{A_i\}$ 是域 K中的一组整闭子代数。则交 $A := \bigcap_i A_i$ 是整闭的。

证明。 设 $x \in Q(A) \setminus A$ ，即它在 A上是整的。则 x 是首一多项式 $f(t)$ 的一个根，其系数属于 A。因此，对于每个 i， $x \in Q(A_i)$ 都是同一个首一多项式 $f(t)$ 的根，其系数属于 $A \subseteq A_i$。由于每个 A_i 都是整闭的，所以对所有 i都有 $x \in A_i$ 。因此 $x \in A$ ，证毕。□

若泊松整环 A 作为交换代数在其分式域 $Q(A)$ 中是整闭的，则称其为整闭。令 $\mathcal{K}$ 表示 $\Bbbk$ 上所有泊松域构成的范畴。对于每个 $K \in \mathcal{K}$，定义

$$\Phi(K) = \{\text{all Poisson subalgebras of } K \text{ that are integrally closed}\}.$$

首先，我们需要定义一种闭包运算，它为每个泊松整环 A 赋予其在分式域 $Q(A)$ 中的闭包。

定义 4.2。 设 A 是一个泊松整环。

(1) 设 $K \in \mathcal{K}$ and f: $A \longrightarrow K$ 是一个单射泊松态射，其到 $Q(A)$ 的扩张也记作 f。 A 在 f 上的闭包 定义为

$$\mathrm{c}_f(A) = \bigcap_{f(A) \subseteq B \in \Phi(K)} B.$$

Since $f(Q(A)) \in \Phi(K)$, we have $A \subseteq f^{-1}(\mathrm{c}_f(A)) \subseteq Q(A)$.

(2) 闭包 c 定义为f A fi

$$\mathrm{c}(A) = \bigcap_{f\colon A\hookrightarrow K, K\in\mathcal{K}} f^{-1}(\mathrm{c}_f(A)).$$

以下是我们的主要定义。

定义 4.3. 设 A 是一个泊松整环，且 c(A) $\subseteq Q(A)$ 是其闭包。

(1) 子空间 $V \subseteq \mathrm{c}(A)$ 称为 A 的补空间，若 $A \oplus V = \mathrm{c}(A)$。任何这样的空间都记作$\mathrm{CompS}(A)$。(2) A 的补模为

$$\mathrm{CompM}(A) := \mathrm{c}(A)/A,$$

视为一个 A-模。

显然，作为向量空间，CompS(A) $\cong$ CompM(A)。注意，CompM(A) 是唯一确定的，但 CompS(A) 不是。我们将探讨补空间的一些应用。

引理 4.4. 设 A 是一个泊松整环。那么，对于每个单射泊松代数映射 $f\colon A \to K$，都有 $\mathrm{c}(A) = f^{-1}(\mathrm{c}f(A))$，其中 K 是一个泊松域。

证明。取一个单射泊松代数映射 $f\colon A \to K$，其中 K 是一个泊松域。根据定义，cf(A) 是一族整闭泊松整环的交。由于泊松子代数的交仍是泊松代数，由引理 4.1 可知，cf(A) 是一个整闭泊松整环。因此，利用定义 4.2 的第 (1) 部分，我们有 f^{-1}(cf(A)) $\in \Phi(Q(A))$；此外，f^{-1}(cf(A)) 包含 A。

类似地，若 $g\colon A \to K'$ 是另一个单射泊松代数同态，其中 K' 是泊松域，则 g^{-1}(cg(A)) $\in \Phi(Q(A))$，且 g^{-1}(cg(A)) 包含A。我们有

$$f(A) \subseteq f\big(g^{-1}(\mathrm{c}_g(A))\big) \subseteq f(Q(A)) \subseteq K.$$

由于 g^{-1}(cg(A)) 是泊松代数，因此 $f\big(g^{-1}$(cg(A))$\big)$ 也是泊松代数。因此，根据 cf(A) 的定义，我们得到

$$\mathrm{c}_f(A) \subseteq f\big(g^{-1}(\mathrm{c}_g(A))\big).$$

这意味着

$$f^{-1}(\mathrm{c}_f(A)) \subseteq g^{-1}(\mathrm{c}_g(A)).$$

最后，利用定义 4.2 第 (2) 部分中 c(A) 的定义，以及 $g\colon A \to K'$ 是到泊松域中的任意单射泊松代数同态这一事实，我们得出

$$\mathrm{c}(A) = f^{-1}(\mathrm{c}_f(A)).$$

□

引理 4.5。设 A 是一个泊松整环，B 是 Q（A）的一个泊松子代数，且包含 A。若 B 是整闭的，且整于 A，则 c(A) $= B$。

证明。由引理 4.4，c(A) = cf(A)，其中 f 是 $A \to Q(A)$ 的包含映射。由于B 是整闭的，$B \in \Phi(Q(A))$。因此，c(A) $\subseteq B$。现在，设 C 是 $\Phi(Q(A))$ 中任意一个包含 A 的元素。由于 B 在 A 上整，$B \subseteq C$。因此，B 是 $\Phi(Q(A))$ 中包含 A 的最小元素。所以 c(A) $= B$。□

4.2. **补空间与补模**。

引理 4.6。 设 A 是一个泊松整环。

(1) $c(A)$是一个代数不变量。(2) 补模M(A) （相应地，补模S(A)）是一个代数不变量。(3) 存在群的包含关系

$$\mathrm{Aut}(A) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathrm{c}(A)) \subseteq \mathrm{Aut}(Q(A)).$$

证明。 (1) 设 $\phi\colon A \longrightarrow A'$ 是一个泊松代数同构。泊松代数映射 $f\colon A \longrightarrow K$，其中 K是一个泊松域，当且仅当 $f'\colon = f \circ \phi^{-1}\colon A' \longrightarrow K$是单射时，才是单射。根据定义，c$f$($A$) = c$f'$($A'$)。因此， ϕ诱导出一个从 f^{-1}(cf(A)) 到 $\to(f')^{-1}$(cf'(A)) 的同构。由引理 4.4， ϕ诱导出一个从 c(A) 到 c(A') 的同构。

(2) 该断言可由以下图表得出

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \mathrm{c}(A) & \longrightarrow & \mathrm{CompM}(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\downarrow\phi & & \downarrow\wr\phi & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & \mathrm{c}(A') & \longrightarrow & \mathrm{CompM}(A') & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

(3) 结论由第 (1) 部分得出。 □

引理 4.7. 设 A 是 B 的一个泊松子代数，且 B 是一个泊松整环；设 ∂ 是一个弱维数函数。则存在一个自然的泊松代数包含映射$\mathrm{c}(A) \longrightarrow \mathrm{c}(B)$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \mathrm{c}(A) & \longrightarrow & \mathrm{CompM}(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \mathrm{c}(B) & \longrightarrow & \mathrm{CompM}(B) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{E4.7.1}$$

其中映射 $\mathrm{CompM}(A) \longrightarrow \mathrm{CompM}(B)$ 由左侧交换方块诱导。

证明。 我们有一个包含映射 $f\colon A \hookrightarrow B \hookrightarrow Q(B) =: K$。设 f'是 B 到 K的包含映射。根据定义，cf(A) 和 cf'(B) 都是 K 的泊松子代数。同样根据定义，cf(A) 是 cf'(B) 的泊松子代数，而二者都视为 K 的泊松子代数。由引理 4.4，c(A) = f^{-1}(cf(A)) = cf(A)，因为 f是包含映射。同理，c(B) = $(f')^{-1}$(cf'(B)) = cf'(B)。因此，我们得到图表 (E4.7.1) 左侧的交换方块。根据定义，顶行和底行都是短正合列。因此，我们得到一个诱导映射 CompM(A) $\longrightarrow$ CompM(B)，使右侧方块交换。

□

4.3. **迪克斯米耶性质与补空间**。 设 $n \geq 0$ 为一个非负整数。若泊松代数 A 具有 n-迪克斯米耶性质，则称其为 A 是$\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$-迪克斯米耶。显然，0-迪克斯米耶性质就是迪克斯米耶性质。 $\Bbbk$-代数 A 的一个增广是一个 $\Bbbk$-代数同态

$$\pi\colon A \longrightarrow \Bbbk$$

其在 $\Bbbk \subseteq A$ 上的限制是恒等映射。 π的核记为 ker(π)，称为增广理想。若 A 是一个泊松代数，我们还要求 π 是泊松同态。

我们称 A 是增广 R-*Dixmier*，如果对于任意泊松态射

$$\phi\colon A \longrightarrow A \otimes R$$

以及任意增广 $\pi\colon R \to \Bbbk$，只要复合

$$A \xrightarrow{\phi} A \otimes R \xrightarrow{\mathrm{Id}_A \otimes \pi} A \otimes \Bbbk \cong A$$

是恒等映射，就有

$$\mathrm{im}(\phi) = A \otimes \Bbbk.$$

引理 4.8. 设 B 是一个整闭泊松整环。设 A 是 B 的一个泊松子代数，使得 $B \subseteq Q(A)$ 且维数 $_{\Bbbk} B/A < \infty$。

(1) 假设 B 具有迪克斯米耶性质。那么 A也具有该性质。(2) 设 R 是一个泊松整环，且 $B \otimes R$ 是一个整闭整环。若 B 满足 R-迪克斯米耶性质，则 A也满足该性质。(3) 设 n 是一个正整数。假设 B 具有 n-迪克斯米耶性质。那么 A也具有该性质。(4) 假设 B 是一个增广的 R-*Dixmier*，且 $B \otimes R$ 是整闭的。那么 A 是增广的 R-*Dixmier*。

证明。 (1) 设 $\sigma\colon A \longrightarrow A$ 是 A的一个单射泊松自同态。由引理 4.7(1)，我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B = \mathrm{c}(A) & \longrightarrow & \mathrm{CompM}(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \sigma\downarrow & & \sigma'\downarrow & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B = \mathrm{c}(A) & \xrightarrow{f} & \mathrm{CompM}(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 σ' 表示 B的诱导泊松自同态。由于 σ' 和 f 都是满射， g 也是满射。根据假设，CompM(A) 是有限维的。因此 g 是双射。由五引理可知， σ 是所需的自同构。因此，定理 0.9 成立。

(2) 设 $f\colon A \longrightarrow A \otimes R$ 是单射泊松代数态射。由引理 4.7(1)，存在一个诱导的泊松代数态射 $f'\colon \mathrm{c}(A) \longrightarrow \mathrm{c}(A \otimes R)$。由于 B 和 $B \otimes R$ 都是整闭的，且满足 $A \subseteq B \subseteq Q(A)$ 和 $A \otimes R \subseteq B \otimes R \subseteq Q(A \otimes R)$，由引理 4.5 可得 $B = \mathrm{c}(A)$ 且 $B \otimes R = \mathrm{c}(A \otimes R)$。因此， f'是诱导的单射泊松代数态射 $f'\colon \mathrm{c}(A) = B \longrightarrow \mathrm{c}(A \otimes R) = B \otimes R$。由于 B是 R-Dixmier，我们有 $\mathrm{im}(f') = B \otimes \Bbbk$。这意味着 $\mathrm{im}(f) \subseteq (A \otimes R) \cap (B \otimes \Bbbk) = A \otimes \Bbbk$。由第 (1) 部分可知， A 是 Dixmier。因此 $\mathrm{im}(f) = A \otimes \Bbbk$。

（3）这是第（2）部分的特殊情形，事实上， $B \otimes \Bbbk[x_1, \cdots, x_n] \cong B[x_1, \cdots, x_n[$ 是整闭整环。

(4) 令 $\pi\colon R \to \Bbbk$ 为 R的一个增广。假设 $A \xrightarrow{\phi} A \otimes R \xrightarrow{Id_A \otimes \pi} A$ 是恒等映射。利用引理 4.7 以及 $\mathrm{c}(A) = B$和 $\mathrm{c}(A \otimes R) = B \otimes R$这一事实，映射 ϕ 诱导出一个泊松代数态射 $\sigma\colon B \to B \otimes R$。因此我们得到一个

交换图

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\phi} & A\otimes R & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\sigma} & B\otimes R & \longrightarrow & B. \end{array}$$

由于顶行的复合是恒等映射，底行的复合也同样是恒等映射。由于 B 是增广的 R-Dixmier，$\mathrm{im}(\sigma) = B\otimes\Bbbk$。限制到 A，我们有$\mathrm{im}(\phi) \subseteq A\otimes\Bbbk$。由于根据第 (1) 部分， A 是Dixmier的，我们得到$\mathrm{im}(\phi) = A\otimes\Bbbk$，如所要求。□

4.4. 域扩张。研究域扩张下的迪克斯米耶性质是很自然的问题，在本小节中，我们将通过以下命题讨论这一问题。

命题 4.9。设 A 和 R 是基域 $\Bbbk$上的泊松整环。设$B = A\otimes K$，其中 K 是带有平凡泊松括号的交换域。因此， B 可以被视为 K上的泊松代数。

(1) 如果 B 作为泊松 K-代数是*Dixmier*的，那么 A 作为泊松$\Bbbk$-代数也是*Dixmier*的。(2) 如果 B 作为泊松 K-代数是 $R\otimes K$-*Dixmier*的，那么 A 作为泊松 $\Bbbk$-代数是 R-*Dixmier*的。(3) 设$\mathrm{Aut}_\Bbbk(A) = \mathrm{Aut}_K(B)$，且 B 作为泊松 K-代数是*Dixmier*的。那么 A 作为泊松 $\Bbbk$-代数是 K-*Dixmier*的。

证明。(1) 设 $\phi\colon A\longrightarrow A$ 是一个单射泊松 $\Bbbk$-代数自同态，并设$\sigma = \phi\otimes K$。那么 σ是 B的一个单射泊松 K-代数自同态。由于 B作为泊松 K-代数具有 Dixmier 性质， σ 是满射。这迫使 ϕ 为满射。

(2) 设 $\phi\colon A\longrightarrow A\otimes R$ 是一个单射泊松 $\Bbbk$-代数态射，并设$\sigma = \phi\otimes K$。我们将 σ 视为从 B 到 $(A\otimes R)\otimes K = (A\otimes K)\otimes_K (R\otimes K) = B\otimes_K S$的泊松 K-代数态射，其中 $S = R\otimes K$。由于 B作为泊松K-代数具有 S-Dixmier 性质，我们有 $\mathrm{im}(\sigma) = B = A\otimes K$。这迫使 $\mathrm{im}(\phi)$ 在 $A\otimes R$中 $= A\otimes\Bbbk$。因此， A 作为泊松 $\Bbbk$-代数具有 R-Dixmier 性质。

(3) 根据第 (1) 部分， A是泊松 $\Bbbk$-代数中的 Dixmier。设 $\phi\colon A\longrightarrow A\otimes K$是一个单射泊松 $\Bbbk$-代数态射。定义 σ 为以下复合

$$B := A\otimes K \xrightarrow{\phi\otimes\mathrm{Id}_K} (A\otimes K)\otimes K \cong A\otimes(K\otimes K) \xrightarrow{\mathrm{Id}_A\otimes m_K} A\otimes K =: B.$$

下面证明 σ 是单射。由于典范结合律同构

$$\iota\colon (A\otimes K)\otimes K \xrightarrow{\cong} A\otimes(K\otimes K)$$

是双射，因此复合 $\iota\circ(\phi\otimes\mathrm{Id}_K)$ 是单射。

接下来，考虑乘法映射 $m_K\colon K\otimes K\to K$。它存在一个 $\Bbbk$-线性截面

$$s\colon K\longrightarrow K\otimes_\Bbbk K, \qquad s(\lambda) = \lambda\otimes 1,$$

因为 $m_K(\lambda\otimes 1) = \lambda$。与 A 进行张量化后，得到一个 $\Bbbk$-线性映射

$$\mathrm{Id}_A\otimes s\colon A\otimes K\longrightarrow A\otimes(K\otimes K),$$

对于 m 属于 $\iota\circ(\phi\otimes\mathrm{Id}_K)$ 的像中的每一个元素，均满足

$$(\mathrm{Id}_A\otimes s)\circ(\mathrm{Id}_A\otimes m_K)(m) = m.$$

因此， σ 是单射。由于 B 是 Poisson K-代数中的 Dixmier， σ 是一个自同构。根据假设，$\mathrm{Aut}_{\Bbbk}(A) = \mathrm{Aut}_K(B)$，存在一个 $\pi \in \mathrm{Aut}_{\Bbbk}(A)$ 使得$\sigma = \pi \otimes K$。对于每个 $a \in A$,

$$\pi(a)\otimes 1 = \sigma(a\otimes 1) = (Id_A \otimes m_K)\circ(\phi\otimes Id_K)(a\otimes 1) = (Id_A\otimes m_K)(\phi(a)\otimes 1) = \phi(a)$$

这意味着 $\mathrm{im}(\phi) \subseteq A \otimes \Bbbk$。由于 A 作为泊松 $\Bbbk$-代数是 Dixmier 的，$\mathrm{im}(\phi) = A \otimes \Bbbk$，符合要求。□

4.5. **自同构群平凡的泊松代数**。在本小节中，我们利用本节的一些结果，介绍若干具有平凡泊松自同构群的泊松代数。设 A 是一个分次交换整环，且为泊松代数。例如， $A = \Bbbk[x_1, \cdots, x_n]$ 如例 1.7 中所述。接下来，我们将定义一类无限的泊松代数，它们介于 A 和 $A(d)$ 之间，其中 $d \geq 4$。

例 4.10。设 $d \geq 4$，并设 $\zeta \in A$ 具有如下形式： $\zeta = \sum_{i=2}^{d-1} \zeta_i$，其中 ζ_i 要么为零，要么为次数 i的齐次元。假设 $\zeta^2 \in A(d)$。则$A(d, \zeta) := A(d) + \Bbbk\zeta$ 是 A 的泊松子代数，且包含 $A(d)$。

定理 4.11。设 $A(d, \zeta)$ 如例 *4.10* 中所定义。假设

(a) A 的每个自同构都是分次的。(b) 对于每个自同构 $Id_A \neq \sigma \in \mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A)$， $\sigma(\zeta) \notin \Bbbk\zeta$。则 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A(d, \zeta))$ 是平凡的。

证明。设 σ 是 $A(d, \zeta)$ 的一个非恒等映射自同构。根据引理 4.6(3)， σ 可延拓为 A的一个自同构。由于 σ 是分次的，而 $\sigma(\zeta) \notin \Bbbk\zeta$，它不可能是 $A(d, \zeta)$ 的自同构，矛盾。断言得证。□

存在许多这样的 A和 $\zeta \in A$，使得 $\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A(d, \zeta))$ 是平凡的。基本上，任意一般的 ζ 都应当可行。下面给出一个具体例子。

例 4.12. 令 $\Omega = x^n + y^n + z^n$，其中 $n \geq 5$。令 $A = A_\Omega$ 如例 0.1 中所定义。根据 [17, 定理 8.2], ， A 的每个自同构都是分次的，因此定理 4.11 的条件 (a) 成立。现在令 $d \geq 8$，并令 $\zeta = x^{d-1}+y^{d-1}+y^{d-2}+z^{d-2} + z^{d-3} + x^{d-3} + x^{d-4} + y^{d-4}$。事实上，$\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A)$ 在 [17, 定理 8.2 和命题 8.4] 中有明确描述。因此，很容易验证 $\sigma(\zeta) \notin \Bbbk\zeta$。根据定理 4.11，$\mathrm{Aut}_{Poi.alg}(A(d, \zeta))$ 是平凡的。

致谢。作者谨向“泊松几何与 Artin–Schelter 正则代数——杭州”研讨班的组织者致谢，本合作研究正是在该研讨班期间启动的。Nazemian 得到了奥地利科学基金（FWF）项目 P 36742 的资助；Y.-H. Wang 得到了中国国家自然科学基金（编号：11971289）的资助；Zhang 则得到了美国国家科学基金会（编号：DMS-2302087）的部分资助。

References

[1] P.K. Adjamagbo 和 A. van den Essen，《Dixmier 猜想、Jacobian 猜想与泊松猜想等价性的一种证明》，*Acta Math. Vietnam.* **32** (2007)，第 2–3 期，205–214。[2] A.L. Agore，《普适余作用泊松 Hopf 代数》，*Manuscripta Math.* **165** (2021)，第 1–2 期，255–268。[3] V. Artamonov 和 R. Wisbauer，《量子多项式的同调性质》，

Algebr. () (), - 。

Represent. Theory **4 3** 2001 219 247

[4] H. Bass、E. Connell 和 D. Wright，《Jacobian 猜想：次数约化与逆的形式展开》，*Bull. Amer. Math. Soc.*第 7 卷，第 2 期，（1982），第 287–330 页。[5] J. Bell、S. Launois、O. S`anchez 和 R. Moosa，《通过模型论与微分代数几何研究泊松代数》，*J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **19** (2017)，第 7 期，2019–2049。[6] A. Belov-Kanel 和 M. Kontsevich，《Jacobian 猜想与 Dixmier 猜想在稳定意义下等价》，*Mosc. Math. J.* **7** (2007)，第 2 期，209–218。[7] E.-H. Cho 和 S.-Q. Oh，《Ore 扩张的半经典极限与泊松广义 Weyl 代数》，*Lett. Math. Phys.* **106** (2016)，第 7 期，997–1009。[8] J. Dixmier，《论 Weyl 代数》，*Bull. Soc. Math. France* **96** (1968) 209–242。[9] J. Gaddis 和 X.-T. Wang，《泊松代数的 Zariski 消去问题》，*J. Lond.* ( )，*Math. Soc. (2)* **101** 2020 3, 1250 1279 第 – 期。[10] J. Gaddis、X.-T. Wang 和 D. Yee，《泊松代数的消去与斜消去》，*Math. Z.* **301** (4) (2022) 3503–3523。[11] K.R. Goodearl，《具有环面作用的泊松代数的 Dixmier-Moeglin 等价》，载于《代数及其应用》，*Contemp. Math.* 第 419 卷，第 131–154 页，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2006。[12] K.R. Goodearl，《量子化坐标环的半经典极限》，*Advances in ring theory*，165 ¨ 2010 – 204，Trends Math.，Birkhauser/Springer Basel AG，巴塞尔，。[13] K.R. Goodearl 和 S. Launois，《泊松多项式代数的 Dixmier-Moeglin 等价与一个 Gel'fand-Kirillov 问题》，*Bull. Soc. Math. France* **139** (2011)，第 1 期，1–39。[14] H.-D. Huang、Z. Nazemian、Y.-H. Wang 和 J.J. ZHANG，《相对消去》，即将发表于 *Proc. Amer. Math. Soc.*，arXiv:2503.10083。[15] H.-D. Huang、Z. Nazemian、Y.-H. Wang 和 J.J. ZHANG，《泛齐性》，进行中。[16] H.-D. Huang、X. Tang 和 X.-T. Wang，《非交换代数与泊松代数的 Zariski 消去问题综述》，*Contemp. Math.* 第 801 卷（2024），美国数学学会，[普罗维登斯], 罗德岛州，第 125–141 页。[17] H.-D. Huang、X. Tang、X.-T. Wang 和 J.J. ZHANG，《泊松赋值》，*J. Algebra* **683** (2025)，1–59。[18] H.-D. Huang、X. Tang、X.-T. Wang 和 J.J. ZHANG，《Nambu-Poisson 代数的赋值方法》，预印本（2023），arXiv:2312.00958。[19] D.A. Jordan 和 S.-Q. Oh，《多项式代数中的 Poisson 谱》，*J. Algebra* **400** (2014)，56–71。[20] A.P. Kitchin 和 S. Launois，《量子广义 Weyl 代数的端同态》，*Lett.* ( )，*Math. Phys.* **104** 2014 7, 837 848 第 – 期。[21] A.P. Kitchin 和 S. Launois，《关于量子 Weyl 代数的自同构》，*J. Pure Appl.* ( )，*Algebra* **223** 2019 4, 1514 1530 第 – 期。[22] S. Launois 和 O. S`anchez，《关于泊松-Hopf 代数的 Dixmier-Moeglin 等价》，*Adv. Math.* **346** (2019)，48–69。[23] C. Laurent-Gengoux、A. Pichereau 和 P. Vanhaecke，《》，Universitext，Springer，2013。 *Poisson Structures*J. Luo、S.-Q. Wang 和 Q.-S. Wu，《泊松同调与 Poisson 上同调之间的扭曲 Poincaré 对偶》，*J. Algebra* **442** (2015 484 505) – J. Luo、X.-T. Wang 和 Q.-S. Wu，《从 [25] 拓扑观点看泊松迪茨米耶–莫伊格林等价性》，*Israel J. Math.* **243** (2021)，第 1 期，103–139。[26] J.-F. L¨u、X.-T. Wang 和 G.-B. Zhuang，《泊松 Ore 扩张的泛包络代数》，*Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015)，第 11 期，4633–4645。[27] S. Montgomery，《》，CBMS 数学区域会议系列，82。由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学学会出版，普罗维登斯，罗德岛州，1993。 *Hopf Algebras and their Actions on Rings*Z. Reichstein、D. Rogalski 和 J.J. ZHANG，《》，Adv. Math. 203（2006），第 2 期，365–407。 *Projectively simple rings*L. Richard，《量子环面的端同态》，[29] (11)（2002）5283–5306。 *Comm. Algebra* **30** L. Rowen 和 D.J. Saltman，《除代数与域的张量积》，[30] (2013)，296–309。 *J. Algebra* **394** X. Tang，《某些局部化 down-up 代数的代数自同态与导子》，[31] ( )，第 pp. 期。

[32] X. Tang，关于某些对称多参数量子化 Weyl 代数及其局部化的自同构， *Algebra Colloq.* **24** (2017)，第 3 期，419–438。[33] X. Tang，某族广义 Weyl 代数的自同构群，

J. Algebra ( )，第 期，

Appl. **17** 2018 8, 1850142, 20
第 pp. 页。[34] Y. Tsuchimoto，Dixmier 猜想预备知识， *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ.*，Ser. A Math. **24** (2003)，43–59。[35] Y. Tsuchimoto，Weyl 代数的端同态与 p–曲率， *Osaka J. Math.* **42(2)** (2005)，435–452。[36] U. Umirbaev 和 V. Zhelyabin，Poisson 包络代数的 Dixmier 定理，J. Alge- bra **568** (2021)，576–600。[37] M. Vancliff，多项式环的扭曲的本原谱与 Poisson 谱，

Algebr. Represent. ( )，第 期，

Theory **2** 1999 3, 269 285
第 – 页。

Hongdi Huang: Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai, 20244,China*Email address*: hdhuang@shu.edu.cn

Zahra Nazemian: University of Graz, Heinrichstrasse 36, 8010 Graz, Austria
Email address: zahra.nazemian@uni-graz.at

Xin Tang: Department of Mathematics & Computer Science, Fayetteville State University, Fayetteville, NC 28301, USA*Email address*: xtang@uncfsu.edu

Xingting Wang: Department of Mathematics, Louisiana State University, BatonRouge, Louisiana 70803, USA*Email address*: xingtingwang@math.lsu.edu

Yanhua Wang: School of Mathematics, Shanghai Key Laboratory of Financial Information Technology, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433,China

Email address: yhw@mail.shufe.edu.cn

James J. Zhang: Department of Mathematics, Box 354350, University of Washington, Seattle, Washington 98195, USA*Email address*: zhang@math.washington.edu