arXiv:2601.18325v1 [math.SP] 26 Jan 2026

泄漏曲线局部扰动产生的离散谱

PAVEL EXNER

To Israel Sigal on the occasion of his 80th birthday

Abstract. 我们讨论一类称为泄漏曲线的奇异薛定谔算子模型的谱，并证明：如果相互作用支撑集具有周期形状，那么即使局部扰动是“零均值”的，也能在连续谱阈值以下产生离散谱。

1. Introduction

我知道，我们所庆贺之人的主要兴趣集中在多体系统上，因此选择本文的主题时，希望他能认同我多年前从伟大的物理学家 Mahito Kohmoto 那里听到的一句话：“令人惊讶的是，单体量子力学中仍然存在有趣的效应。”我将要讨论的系统确实很简单；其哈密顿量是定义在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中的奇异薛定谔算子，形式上可写为 ¨

$$H_{\alpha,\Gamma} = -\Delta - \alpha\delta(x-\Gamma), \quad \alpha > 0, \tag{1.1}$$

其中 Γ 是一条足够光滑的曲线。众所周知， Γ 的几何形状会诱发一种有效相互作用。例如，如果曲线在渐近意义下是直线，但并非处处如此，那么算子 (1.1) 通常至少有一个特征值，低于从 $-\frac{1}{4}\alpha^2$ [EI01] 开始的连续谱。

本文讨论周期 曲线的局部扰动。我们证明了它们产生谱底特征值的充分条件。不出所料，当扰动对应于局部收缩时，这种情况会发生；但我们将证明，即使在扰动零均值这一“临界”情形下，这也是可能的。

2. Preliminaries

现在让我们更精确地描述这个模型。我们假设曲线 $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 是利普希茨连续且分段 C^1；为避免繁琐的记号，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 81Q37, 35J10, 34L40.
Key words and phrases. 奇异薛定谔算子，几何诱导的离散谱。

我们对映射及其像使用相同的符号。于是，形式表达式 (1.1) 可以自然地借助二次型赋予意义

$$q_{\alpha,\Gamma} : q_{\alpha,\Gamma}[\psi] = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x - \alpha \int_{\mathbb{R}} |\psi(\Gamma(s))|^2 \,\mathrm{d}s, \tag{2.1}$$

其中 s是 Γ的弧长。式（2.1）的定义域为 $H^1(\mathbb{R}^2)$，其对应的二次型是闭的且有下界，参见 [BEKˇS94，第 2] 节，或 [Ex08，第 2.1],节。因此，它唯一对应于一个自伴算子，我们仍用符号$H_{\alpha,\Gamma}$表示该算子。

未扰动系统对应于一条周期曲线。为简单起见，我们仅考虑 Γ 为函数图像的情形；不失一般性，我们可以固定笛卡尔坐标，并假设

(i) $\Gamma_0(s) = (x_1, x_2 = \gamma(x_1))$，其中 γ 是一个利普希茨函数： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，分段 C^1 ，并满足对某个 $a > 0$， $\gamma(x_1 + a) = \gamma(x_1)$；其中$x_1 = x_1(s)$是 s： $s(x_1) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \gamma'(\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi$的反函数。我们排除 γ 为常数函数的平凡情形。

命题 2.1。 在假设 (i)下，算子 H_{α,Γ_0}的谱是纯本质谱，

$$\sigma\big(H_{\alpha,\Gamma_0}\big) = \sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\Gamma_0}\big) \supset \mathbb{R}_+$$

且 下确界$\sigma\big(H_{\alpha,\Gamma_0}\big) < 0$；负部分是绝对连续的。

证明。鉴于奇异势的周期性，可以使用 Floquet分解：为简化记号，记作

$$H_{\alpha,\Gamma_0} = \frac{a}{2\pi} \int_{|\pi\theta|\le a}^{\oplus} H_{\alpha,\Gamma_0}(\theta) \,\mathrm{d}\theta, \tag{2.2}$$

其中，右端应理解为$UH_{\alpha,\Gamma_0}U^{-1}$，其中酉 U： $L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(S_a) \times [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ 定义在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ 上，其定义为

$$(U\psi)(x,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-im\theta} \psi\Big(x_1 + ma, x_2\Big)$$

并通过连续性延拓；这里的基本胞元是条带

$$S_a = [-\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a] \times \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

(2.2) 中作用于 $L^2(S_a)$ 上的纤维算子作用为

$$H_{\alpha,\Gamma_0}(\theta) = -\Delta - \alpha\delta(x - \Gamma(s)), \tag{2.4}$$

其定义域由满足以下条件的 $H^2(S_a)$ 中的函数构成

$$\partial_1^j \psi\big(\tfrac{1}{2}a, x_2\big) = \mathrm{e}^{i\theta a}\, \partial_1^j \psi\big(-\tfrac{1}{2}a, x_2\big), \quad j = 0, 1\,; \tag{2.5}$$

相应二次型

$$q_{\alpha,\Gamma_0}[\psi,\theta] = \|\nabla\psi\|^2_{L^2(S_a)} - \alpha \int_{-a/2}^{a/2} \psi\big(\Gamma(s(\xi))\big) \,\mathrm{d}\xi \tag{2.6}$$

定义在来自 $H^1(S_a)$且满足条件(2.5)（其中 $j=0$）的函数上。或者，也可以考虑纤维算子

$$\tilde{H}_{\alpha,\Gamma_0}(\theta) = (-i\partial_1+\theta)^2 - \partial_2^2 - \alpha\delta(x-\Gamma(s)), \tag{2.7}$$

将拟周期条件 (2.5) 替换为周期条件后，可借助算子 V：$(V\psi) = \mathrm{e}^{-i\theta x_1}\psi(x)$，通过酉变换与 (2.4) 等价；相应二次型也类似。算子 (2.7) 的优点在于，其定义域与 θ 无关，因此按照 [Ka76 第 VII.2 节的意义，它们构成一个 A 类解析族1]；由此得到的谱性质可直接转化为算子 (2.4) 的谱性质。

引入与算子 $H_{0,\Gamma_0}(\theta)$ 的横向部分的特征值相对应的标准正交基是有用的，即

$$\mu_m(\theta) = \Big(\frac{2\pi m}{a}+\theta\Big)^2, \quad \eta_m^\theta(x_1) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{e}^{i(2\pi m+\theta a)x_1/a}$$

（或者也可以用 $\tilde{\eta}_m^\theta(x_1) = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{2\pi i m x_1/a}$，指代 $\tilde{\mu}_m(\theta) = \mu_m(\theta)$ 并采用周期边界条件），从而可以将 $H_{0,\Gamma_0}(\theta)$ 理解为一个矩阵微分算子，其矩阵元为 $\langle \eta_n^\theta, H_{0,\Gamma_0}(\theta)\eta_m^\theta\rangle = \big(-\partial_2^2+\mu_m(\theta)\big)\,\delta_{nm}$；其预解核为

$$(\eta_n^\theta, \big(H_{0,\Gamma_0}(\theta)+\kappa^2\big)^{-1}\eta_m^\theta)(x_1,x_1') = \frac{\mathrm{e}^{-\kappa|x_1-x_1'|}}{2\kappa}\,\delta_{nm}.$$

由于 Γ_0 在 S_a 中的部分是有限的，可以按照[BEKˇS94，定理 4.2] 中的相同方法验证，(2.7) 中的奇异项相对于 $(-i\partial_1+\theta)^2-\partial_2^2$是相对紧的，因此，

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\Gamma_0}(\theta)\big) = \sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{0,\Gamma_0}(\theta)\big) = [\theta^2,\infty), \quad \theta\in\mathcal{B}_a := \big[-\tfrac{\pi}{a},\tfrac{\pi}{a}\big]. \tag{2.8}$$

与此同时，我们有 $\inf\sigma\big(H_{\alpha,\Gamma_0}(\theta)\big) < \theta^2$。事实上，取

$$\psi_\varepsilon(x) = \eta_0^\theta(x_1)\,g(\varepsilon x_2),$$

其中，函数 $g\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 在零点附近等于一。将其代入 (2.6)，得到

$$q_{\alpha,\Gamma_0}[\psi_\varepsilon] = \theta^2 + \varepsilon\|g'\|^2 - \frac{\alpha}{a}\int_{-a/2}^{a/2} |g(\varepsilon\Gamma_0(s(x_1))|^2\,\sqrt{1+\gamma'(x_1)^2}\,\mathrm{d}x_1.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 趋于极限时，右端的第二项趋于零，而第三项趋于 $-\alpha L(\Gamma_0\restriction_{S_a}) < -\alpha a < 0$，其中 $L(\Gamma_0\restriction_{S_a})$ 是曲线 Γ_0 在条带 (2.3) 中那段线段的长度，因此，对所有足够小的 ε，$q_{\alpha,\Gamma_0}[\psi_\varepsilon] < \theta^2$ 均成立。

$H_{\alpha,\,\Gamma_0}(\theta)$在 θ^2 以下的谱因此非空，并且根据（2.8），它由特征值组成，这些特征值是准动量 θ的实解析函数。此外，由于我们排除了常数 γ这一平凡情形，因此没有一条色散曲线是常数。为证明这一点，假设某条色散曲线满足 $\epsilon'(\theta) = 0$ 在 $\mathcal{B}_a$中。根据费曼–赫尔曼论证，我们得到

~ ~对于相应的本征函数（$\psi(\theta)$，$2(-i\partial_1+\theta)\psi(\theta))=0$，然而，~$\psi(\theta)$几乎处处非零，因此该本征函数必须满足

$$(-i\partial_1+\theta)\tilde\psi(x_1,x_2;\theta)=0$$

对于几乎处处的 $x_2\in\mathbb{R}$，这只有在 $\tilde\psi(\cdot,\ x_2;\theta)$ 是 $\tilde\eta_0^\theta(\cdot)$ 的倍数时才可能发生。不过，算子 (2.7) 中的相互作用项只有在 $\gamma'=0$ 时才使与 x_1 无关的函数构成的不变子空间保持不变，这与我们所作的假设相矛盾。

最后，根据 (2.2)，$H_{\alpha,\ \Gamma_0}$ 的谱是纤维算子 (2.4) 的谱在 θ 遍历 $\mathcal{B}_a$ 时的并集，由此证明得证。□

注释 2.2。 (a) $H_{\alpha,\ \Gamma_0}(0)$ 的最低特征值 ϵ_0 是单重的，且可以取为正值；其周期延拓是与谱阈值相关的 $H_{\alpha,\ \Gamma_0}$ 的广义特征函数。

(b) 实际上，整个谱预计是绝对连续的，但本文不需要这一性质。我们在此提及此事，仅仅是因为文献 [BDE03] 中已有的证明需要强得多的假设：C^4 的光滑性以及 Γ_0 足够大。

我们要探讨的问题涉及由相互作用支集缩放所引起的$H_{\alpha,\ \Gamma_0}$ 局部扰动对谱的影响。具体而言，我们要考察将 Γ_0 替换为曲线

$$\Gamma_\tau(s)=(x_1+\tau(x_1),\gamma(x_1)) \tag{2.9}$$

假设

(ii) $\tau:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个利普希茨函数，分段 C^1 且 τ' 紧支撑；我们同样排除平凡情形 $\tau=0$。

这里的变量 s 不再是扰动曲线 Γ_τ的弧长；后者由 $s_\tau(x_1)=\int_0^{x_1}\sqrt{(1+\tau'(x_1))^2+\gamma'(\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi$给出。不过，由于我们将通过曲线上各点在 $\mathbb{R}^2$中的欧几里得距离进行比较，这种参数化差异并无影响。

3. The singular version of Birman-Schwinger principle

自伴算子谱分析的核心内容，在我们的情形中是$H_{\alpha,\ \Gamma_\tau}$，是研究其预解式。Birman–Schwinger 原理是识别薛定谔算子离散谱的有效工具；关于这一主题的大量参考文献，参见 [BEG22] 。如果涉及的势是奇异的、属于测度型，则需要作出修改。

回顾一下，该结果来自将预解式$R^k_{\alpha,\ \Gamma}=(H_{\alpha,\ \Gamma}-k^2)^{-1}$ 在$k^2\in\rho(H_{\alpha,\ \Gamma})$时与自由预解式 R^k_0进行比较；在二维情形下，后者是一个积分算子，其核为

$$G_k(x-y)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|).$$

给定正的拉东测度 μ，ν 满足对任意 $x\in\mathbb{R}^2$，$\mu(x)=\nu(x)=0$，我们通过 $R^k_{\nu,\ \mu}$ 定义积分算子 $L^2(\mathbb{R}^2,\ \mu)=:L^2(\mu)\to L^2(\nu)$，其作用为

如下：$R^k_{\nu,\,\mu}\psi = G_k * \psi\mu$ 对所有 $\psi \in D(R^k_{\nu,\,\mu}) \subset L^2(\mu)$均成立。具体而言，我们处理测度 m_Γ：$m_\Gamma(M) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{M\cap\Gamma}(x_1)\sqrt{1+\gamma'(x_1)^2}\,\mathrm{d}x_1$（对任意博雷尔 $M \subset \mathbb{R}^2$均成立）与勒贝格测度 $\mathrm{d}x$的组合。广义 Birman-Schwinger 原理表述如下 [Ex08, 命题 2.3]:

命题 3.1. *(i)* 固定一个复数 k，满足 $\operatorname{Im} k > 0$。若 $I - \alpha R^k_{m_\Gamma,m_\Gamma}$ 可逆，且算子

$$R^k := R^k + \alpha R^k_{\mathrm{d}x,m_\Gamma}\big(I - \alpha R^k_{m_\Gamma,m_\Gamma}\big)^{-1} R^k_{m_\Gamma,\mathrm{d}x}$$

作用于 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 处处有定义，则 $k^2 \in \rho\big(H_{\alpha,\Gamma}\big)$ 和 $R^k = R^k_{\alpha,\Gamma}$。

(ii) 核的维数$\big(H_{\alpha,\Gamma} - k^2\big)$ = 核的维数$\big(I - \alpha R^k_{m_\Gamma,m_\Gamma}\big)$，对任意这样的 k 均成立。

(iii) 算子 $H_{\alpha,\Gamma}$ 的本征函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$，对应特征值 k^2，与算子 $R^k_{m_\Gamma,m_\Gamma}$ 的适当本征函数 $\phi \in L^2(m_\Gamma) \backsimeq L^2(\mathbb{R})$ 相对应，其特征值为一；二者满足关系 $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} R^k_{\mathrm{d}x,m_\Gamma}(x,s)\,\phi(s)\,\mathrm{d}s$；另一方面，$\phi(s) = \psi(\Gamma(s))$。

在奇异情形下，夹在势的平方根之间的拉普拉斯算子预解式由一个积分算子取代，其核是相互作用支撑集上各点处自由预解核的迹（乘以 α）。具体而言，我们关注与 $k = i\kappa$（其中 $\kappa > 0$）对应的 $H_{\alpha,\Gamma}$ 的负谱，因此要寻找使得作用在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的算子 $\mathcal{R}^\kappa_{\alpha,\Gamma}$ 的核满足下述条件的 κ 值

$$\mathcal{R}^\kappa_{\alpha,\Gamma}(s,s') = \frac{\alpha}{2\pi} K_0\big(\kappa|\Gamma(s) - \Gamma(s')|\big), \tag{3.1}$$

其中 K_0 是麦克唐纳函数，其特征值为 1。

命题 3.2. 算子 $\mathcal{R}^\kappa_{\alpha,\Gamma}$ 是正的，且随谱参数 $\mathcal{R}^\kappa_{\alpha,\Gamma} \geq \mathcal{R}^{\kappa'}_{\alpha,\Gamma}$ 增大而递减；当 $\kappa' > \kappa$ 时，$\lim_{\kappa\to\infty} \|\mathcal{R}^\kappa_{\alpha,\Gamma}\| = 0$。此外，对于 $-\kappa_0^2 = \inf\sup\,\sigma_{ess}(H_{\alpha,\Gamma})$，有 $\sup\sigma_{ess}(\mathcal{R}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma}) = 1$。

证明。正性源于$(-\Delta+\kappa^2)^{-1}$的正性；单调性以及当 $\kappa \to \infty$ 时趋于零，则源于 $K_0(\cdot)$的性质。最后一个结论是单调性与前一命题的第(ii)部分共同作用的结果[1]。□

Birman-Schwinger原理使我们能够通过$\mathcal{R}^\kappa_{\alpha,\,\Gamma}$的谱性质来研究$H_{\alpha,\,\Gamma}$的谱性质。为此，在我们的情形下，采用酉映射是有益的

$$U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (U\psi)(s) = \psi(s(x_1))\,\sqrt[4]{1+\gamma(x_1)^2},$$

并考察具有如下核的算子 $\tilde{\mathcal{R}}^\kappa_{\alpha,\Gamma} = U\mathcal{R}^\kappa_{\alpha,\Gamma}U^{-1}$

$$\tilde{\mathcal{R}}^\kappa_{\alpha,\Gamma}(x_1,x_1') = \mathcal{R}^\kappa_{\alpha,\Gamma}(s(x_1),s(x_1')). \tag{3.2}$$

[1]注意，利用谱移位函数 [Pu11]，可以直接将BS原理应用于本质谱。

4. The perturbed essential spectrum

我们的目标是探究扰动 (2.9) 对谱的影响，尤其是其在 $\epsilon_0 = \inf\sigma\big(H_{\alpha,\,\Gamma_0}\big)$ 以下的影响。根据命题 2.1，未扰动谱是纯本质谱，因此首先要确认，在目前的假设下，这个谱分量不会扩展到 ϵ_0 以下；请注意，命题 2.1 使用了关于未扰动曲线的假设 (i)，而假设 (ii) 则涉及扰动 (2.9)。

定理 4.1. 假设 (i) 和 (ii)成立，则有 下确界 $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\,\Gamma_\tau}\big) = \epsilon_0$。

证明。 容易看出，本质谱阈值不可能上移，即下确界 $\sigma\big(H_{\alpha,\,\Gamma_\tau}\big) \le \epsilon_0$。 为此，只需找到一个合适的 Weyl 序列，例如，取阈值处的广义特征函数并用适当的磨光函数处理，

$$f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{m}}\,\psi_0(x)\,g\big(\tfrac{x_1-b_m}{m}\big), \tag{4.1}$$

其中 g 是来自 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 的一个固定函数。选择平移量 b_m，使得 g 和 τ' 的支集互不相交，因此 $\Gamma_\tau = \Gamma_0$ 在 supp f_m 上成立（可能需要作纵向平移），我们便可表示

$$\begin{aligned}(H_{\alpha,\Gamma_\tau} f_m - \epsilon_0 f_m)(x) \\ = -2m^{-3/2}\,(\partial_1\psi_0)(x)\,g'\big(\tfrac{x_1-b_m}{m}\big) - m^{-5/2}\psi_0(x) g''\big(\tfrac{x_1-b_m}{m}\big).\end{aligned} \tag{4.2}$$

接下来注意到，根据注记 2.2(a)， ψ_0 是来自 $L^2(S_a)$ 的 Lipschitz 函数的周期延拓，它在 Γ_0 之外光滑，并且其沿曲线法线方向的导数有一个大小为 α 的跳跃；由此可知，ψ_0 和 $\partial_1\psi_0$ 都有一致的界，因此，(4.2) 右端两个项的范数分别为 $\mathcal{O}(m^{-1})$ 和 $\mathcal{O}(m^{-2})$，当 $m\to\infty$ 时成立。此外，可以选择序列 $\{b_m\}$，使函数 f_m 的支集互不相交；此时 $f_m \to 0$ 当 $m\to\infty$ 时弱收敛，由此可得 $\epsilon_0 \in \sigma\big(H_{\alpha,\,\Gamma_\tau}\big)$。

相反的不等式可通过 Neumann 括号法得到 [RS78, Sec. XIII.15]；只需找到一个由 H_{α,Γ_τ} 通过施加额外的 Neumann 条件得到的算子，使其本质谱的阈值为 ϵ_0。首先，我们将平面划分为五个互不相交的区域之并（忽略余维一的边界），即 $\Omega_1^{(\pm)} := \{x : \pm x_1 > (n+\frac{1}{2})a,\, x_2 \in \mathbb{R}\}$、$\Omega_2^{(\pm)} := \{x : |x_1| < (n+\frac{1}{2})a, \pm x_2 > \|\gamma\|_\infty\}$ 和 $\Omega_0 := \{x : |x_1| < (n_-+\frac{1}{2})a, |x_2| < \|\gamma\|_\infty\}$；数值 n 的选取使得 supp $\tau \subset \big(-(n+\frac{1}{2})a, (n+\frac{1}{2})a\big)$，在这种情况下，$\Gamma_\tau$在 $\Omega_1^{(\pm)}$ 中与 Γ_0 一致，至多相差一个平移。在定义域的公共边界上施加 Neumann 条件，可使我们从下方估计算子，

$$H_{\alpha,\Gamma_\tau} \ge H_{\alpha,\Gamma_\tau} = H_{\alpha,\Gamma_\tau}^{(1,+)} \oplus H_{\alpha,\Gamma_\tau}^{(1,-)} \oplus H_{\alpha,\Gamma_\tau}^{(1,-)} \oplus H_{\alpha,\Gamma_\tau}^{(2,+)} \oplus H_{\alpha,\Gamma_\tau}^{(2,-)} \oplus H_{\alpha,\Gamma_\tau}^{(0)}. \tag{4.3}$$

就本质谱阈值而言，这一分解中的最后三项无关紧要，因为 $H_\alpha^{(2,\pm)}$, $_{\Gamma_\tau} \geq 0$，并且我们知道 $\epsilon_0 < 0$；而 Ω_0 有界，因此 $H_\alpha^{(0)}$ $_{,\Gamma_\tau}$ 的谱纯为离散谱。

若函数 γ 关于镜面对称，则估计 (4.3) 可得出所需结果；不失一般性，我们可以假设对称点位于原点，$\gamma(x_1) = \gamma(-x_1)$。事实上，在这种情况下，对于任意 $x_2 \in \mathbb{R}$，我们有 $\partial_1\psi_0(0, x_2) = 0$，且 $\inf\sigma\big(H_{\alpha,\ \Gamma_0}\big) = \inf \sigma\big(H^{\mathrm{N}}_{\alpha,\ \Gamma_0}\big)$；其中，最后一个算子额外施加了沿直线 $x_1 = 0$ 的 Neumann 条件，但所述算子与 $H_\alpha^{(1,+)}$ $_{,\ \Gamma_\tau} \oplus H^{(1,-)}_{\alpha\ \Gamma_\tau}$，酉等价。

若没有这种对称性，这一论证便不再适用，我们必须更仔细地考察算子 $H^{(1,\pm)}_{\alpha\ \Gamma_\tau}$，的谱阈值。为明确起见，我们考虑正号，另一种情况的论证类似。按照上文的思路，

$$H^{(1,+)}_{\alpha,\Gamma_\tau} \geq \sum_{m\in\mathbb{N}_0}{}^{\oplus} H^{(1,m)}_{\alpha,\Gamma_\tau},$$

其中，正交和各项指将 $H^{(1,m)}_{\alpha\ \Gamma_\tau}$ 限制在区域 $\Omega 1,_m := \{x\colon (n+m(2j+1)+\frac{1}{2})$ $a < x_1 < (n+(m+1)(2j+1) +\frac{1}{2})a,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$上，并施加诺伊曼边界条件。这些项通过沿 x_1 方向平移 $(2j+1)a$ 的整数倍而彼此酉等价，因此我们只需考虑其中一项；而该项又与将 H_{α,Γ_0} 限制到 $\tilde{\Omega}j := \{x\colon\ |x_1| < (j+\frac{1}{2})a,$ $x_2 \in \mathbb{R}\}$ 上的诺伊曼限制 $H^{[j]}_{\alpha\ ,\Gamma_0}$ 酉等价，其中 $j \in \mathbb{N}_0$ 任意固定。利用 Neumann 括号法进行归纳，容易验证 $\epsilon[j] := \inf \sigma\big(H^{[j]}_{\alpha\ ,\Gamma_0}\big)$ 关于 j 单调不减，且有上界 ϵ_0，因此极限 $\epsilon_\infty = \lim_{j\to\infty} \epsilon[j]$ 存在，并且 $\epsilon_\infty < \epsilon_0$。接下来考虑定义域为 $H^1(\mathbb{R}^2)$ 的一族二次型

$$q^{(j)}_{\alpha,\Gamma_0}[\psi] = \int_{\tilde{\Omega}_j} |\nabla\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x - \alpha\int_{\mathbb{R}} |\psi(\Gamma_0(s))|^2\,\mathrm{d}s,$$

显然，这与算子的正交和 $H^{[j]}_{\alpha\ ,\Gamma_0} \oplus(-\alpha I)$ on$L^2(\tilde{\Omega}j) \oplus L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\Omega}j)$ 相关。鉴于勒贝格积分的绝对连续性，对于任意 $\psi \in H^1(\mathbb{R}^2)$，我们有 $\lim_{j\to\infty} q^{(j)}_{\alpha\ ,\Gamma_0}[\psi] = q_{\alpha,\Gamma_0}[\psi]$，而这结合型族单调性意味着 $H^{[j]}_{\alpha\ ,\Gamma_0} \oplus(-\alpha I) \to H_{\alpha,\Gamma_0}$在强预解式意义下成立，参见 [Ka76，第 VIII.3 节，4]或 [Si18，定理 10.12]。由此，我们得到 $\epsilon_\infty = \epsilon_0$，证明得证。□

定理 4.1 是我们下一节所需要的结果。可以预期，在上述定理的假设下，整个本质谱都将保持不变。对于一类可以称为“临界”的局部扰动，若附加要求为

(iii) $\int_{\mathbb{R}} \tau'(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = 0,$

证明不变性有一些简单的方法：

命题 4.2。 在 (i)–(iii) 下，有 $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\ \Gamma_\tau}\big) = \sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\ \Gamma_0}\big)$。

证明。 很容易看出，$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\Gamma_\tau}\big) \supset \sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\Gamma_0}\big)$ 可以使用合适的 Weyl 序列。对于非负的 $k^2 \in \sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\Gamma_0}\big)$ 其元素可以是动量为 k 的平面波，并乘以紧支撑的磨光函数；对于能量 $0 > \epsilon_0 + \kappa^2 \in \sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\Gamma_0}\big)$ 我们重复前一个证明中的论证，将 (4.1) 中的 ψ_0 替换为函数 ψ_κ的周期延拓，该函数满足 $H_{\alpha,\Gamma_0}(\theta)\psi_\kappa = (\epsilon_0 + \kappa^2)\psi_\kappa$。

为证明反向包含关系，我们再次使用 Weyl 判据；如前所述，只需考虑 $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\ \Gamma_\tau}\big)$ 的负部。对于其中任意元素$\epsilon_0 + \kappa^2$，存在一个序列 $\{\psi_m\} \subset H^2(\mathbb{R}^2)$，使得 $\psi_m \to 0$ 弱收敛，并且 $\|(H_{\alpha,\ \Gamma_\tau} - \epsilon_0 - \kappa^2)\psi_m\| \to 0$ 当 $m \to \infty$时。关键在于，在 (iii) 下，$\{\psi_m\}$ 也是 $H_{\alpha,\ \Gamma_0}$ 的 Weyl 序列。事实上，我们有

$$\|(H_{\alpha,\Gamma_0} - \epsilon_0 - \kappa^2)\psi_m\| \le \|(H_{\alpha,\Gamma_\tau} - \epsilon_0 - \kappa^2)\psi_n\| + \|(H_{\alpha,\Gamma_0} - H_{\alpha,\Gamma_\tau})\psi_n\|.$$

右端第一项根据假设当 $m \to \infty$ 时趋于零，第二项可明确写为 $\big(\int_{\mathbb{R}} |\psi_m(\Gamma_0(s)) - \psi_m(\Gamma_\tau(s))|^2\,\mathrm{d}s\big)^{1/2}$，其中被积函数是连续且紧支撑的。于是，弱收敛意味着 ψ_m 逐点收敛到零，并且一致有界于 [Se71，命题 19.3。1]，因此，这一项在极限中也消失，从而得到所要求的包含关系。

还有一种替代方法[2]，可以利用以下“抽象废话”论证来证明该结论。设 B 相对于自伴 A_0 相对有界，且界小于一，从而 $A = A_0 + B$ 也是自伴的。此外，设 $\{P_m\}$ 是一族投影，使得当 $m \to \infty$时$\|BP_m^\perp\| \to 0$。如果对所有 $m \ge 1$， $P_m(A_0 + i)^{-1}$都是紧的，那么$(A + i)^{-1} - (A_0 + i)^{-1}$ 也是紧的，这可以由恒等式看出

$$(A+i)^{-1} - (A_0+i)^{-1} = (A+i)^{-1}BP_m^\perp(A_0+i)^{-1} + (A+i)^{-1}BP_m(A_0+i)^{-1}. \tag{4.4}$$

事实上，算子 $(A + i)^{-1}B$ 是有界的，因为根据假设其伴随算子是有界的，这意味着对于所有 m，(4.4)右端的第二项都是紧的。另一方面，第一项在算子范数下收敛于零；对于任意 m，第二个因子都是紧的，因此其在 $m \to \infty$ 时的范数极限仍然是紧算子。该结果可应用于我们的情形，其中 $A_0 = H_{\alpha,\Gamma_0}$，而 B 是分别对应于 Γ_τ 和 Γ_0的奇异项之差。例如，取投影 P_m，使得 Ran $P_m = L^2(B_m(0))$，则对于所有足够大的 m，都有 $BP_m^\perp = 0$。与此同时，我们知道 $D(H_{\alpha,\Gamma_0}) = H^2(\mathbb{R}^2)$，因此，算子 $P_m(H_{\alpha,\Gamma_0} + i)^{-1}$ 所需的紧性是 Rellich-Kondrashov 定理 [AF03，定理 6.3]的结果。□

[2]这个想法源自该论文 [ES25]的匿名审稿人。

5. Discrete spectrum due to local perturbations

为了确定扰动是否能够在本质谱的阈值以下产生谱，我们将比较分别对应于 Γ_0 和 Γ_τ的 Birman–Schwinger算子。我们遵循 [EI01]中提出的思想：根据命题 3.2，$\sup\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{R}^{\kappa}_{\alpha,\Gamma}\big)$ 以及其上方可能存在的特征值，都会在 $\kappa\to\infty$时连续地下降到零。因此，我们需要验证不等式

$$\sup\sigma\big(\mathcal{R}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_\tau}\big) > \sup\sigma_{\mathrm{ess}}\big(\mathcal{R}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_0}\big) \tag{5.1}$$

对于 $\kappa_0 := \big(-\inf\sigma\big(H_{\alpha,\,\Gamma_0}\big)\big)^{1/2}$，因为若其成立，则 $\mathcal{R}^{\kappa}_{\alpha,\,\Gamma_\tau}$ 至少有一个本征值$\mu(\kappa)$ 位于本质谱阈值之上，并且该本征值在点 κ_0 右侧穿过数值 1。因此，根据命题 3.1(ii)，该算子的离散谱非空。

正如预期的那样，当扰动导致相互作用支撑集局部收缩时，这种情况便会发生:

定理 5.1。 在 (i) 和 (ii) 条件下，$\sigma_{\mathrm{disc}}\big(H_{\alpha,\,\Gamma_\tau}\big)\neq\emptyset$ 当 $\tau'\le 0$ 时成立。

证明。 为验证不等式 (5.1)，只需找到一个合适的试探函数。自然的起点是对应于 $\inf\sigma\big(H_{\alpha,\,\Gamma_0}\big)$ 的广义特征函数 ψ_0 ；根据注记2.2(a)，它是单重的，可取为正函数。根据命题 3.1(iii)，$\mathcal{R}^{\kappa}_{\alpha,\,\Gamma_0}$ 对应的广义特征函数是 $\phi_0(s) = \psi_0(\Gamma_0(s))$，或者也可取 $\phi_0 = U\phi_0$ ，此时考虑的是具有核 (3.2) 的算子。

当然，这样的函数不属于 L^2，因此我们必须用合适的磨光函数对其进行修正，并确保后者的影响可以任意小。具体而言，我们要证明可以选取一个序列 $\{g_n\}\subset L^1(\mathbb{R})$，使其满足

$$\big(g_n\tilde\phi_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_0} g_n\tilde\phi_0\big) - \|g_n\tilde\phi_0\|^2 = \mathcal{O}(n^{-2}) \tag{5.2}$$

当 $n\to\infty$ 时成立。我们将 (5.2) 的左端记为 M_n；利用命题 3.2 得到的事实$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$: $\mathcal{R}^{\kappa_0}_{\alpha\,,\,\Gamma_0}\phi_0 = \phi_0$，我们可以将第二项改写为 $\big(g_n\tilde\phi_0,\ g_n\tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha\,,\,\Gamma_0}\tilde\phi_0\big)$ 于是

$$M_n = \big(g_n\tilde\phi_0, \big[\tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_0}, g_n\big]\tilde\phi_0\big),$$

或明确地

$$\begin{aligned} M_n =& \frac{\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g_n(x_1)\tilde\phi_0(x_1)\, K_0\big(\kappa_0|\Gamma_0(s(x_1)) - \Gamma_0(s(x_1'))|\big) \\ & \times \big(g_n(x_1') - g_n(x_1)\big)\,\tilde\phi_0(x_1')\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_1'. \end{aligned} \tag{5.3}$$

˜为了估计 (5.3) 的右端，我们注意到函数 ϕ_0 有界，而且不等式

$$|\Gamma_0(s(x_1)) - \Gamma_0(s(x_1'))| = \sqrt{(x_1-x_1')^2 + (\gamma(x_1)-\gamma(x_1')^2} \ge |x_1 - x_1'|$$

意味着

$$K_0\big(\kappa_0|\Gamma_0(s(x_1)) - \Gamma_0(s(x_1'))|\big) \le K_0(\kappa_0|x_1-x_1'|)$$

鉴于 $K_0(\cdot)$的单调性。然后选择

$$g_n(x_1) = \frac{n^2}{n^2 + x_1^2} \tag{5.4}$$

我们得到估计

$$M_n \le \frac{\alpha}{2\pi}\, n^2\, \|\tilde\phi_0\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|x_1 + x_1'||x_1 - x_1'|}{(n^2 + x_1^2)(n^2 + {x_1'}^2)}\, K_0(\kappa_0|x_1 - x_1'|)\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_1'$$

接下来换用变量 $u = x_1 - x_1'$ 和 $u = x_1 - x_1'$，我们得到

$$M_n \le \frac{\alpha}{2\pi}\, n^2\, \|\tilde\phi_0\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u||v|}{\big(n^2 + \frac{1}{4}(u+v)^2\big)^2 \big(n^2 + \frac{1}{4}(u-v)^2\big)}\, K_0(\kappa_0|u|)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}\, n^2\, \|\tilde\phi_0\|_\infty^2 \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{u^2 v^2}{\big(n^2 + \frac{1}{4}(u+v)^2\big)^2 \big(n^2 + \frac{1}{4}(u-v)^2\big)^2}\, K_0(\kappa_0|u|)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

又由于分母有下界 $\frac{1}{16}(1+v^2)^2\, n^4$，对任意$n \ge 1$ 均成立，且函数 $u \mapsto u^2\, K_0(\kappa_0|u|)$ 有界，并在 $u \to \infty$ 时指数衰减，因此最终得到不等式

$$M_n \le \frac{32\alpha}{\pi}\, n^{-2}\, \|\tilde\phi_0\|_\infty^2 \int_0^\infty \frac{v^2}{(1+v^2)^2}\, \mathrm{d}v \int_0^\infty u^2\, K_0(\kappa_0|u|)\, \mathrm{d}u$$

由此得到所需的关系式 (5.2)。

为证明在定理的假设下 (5.1) 成立，我们需要验证

$$\big(g_n\tilde\phi_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_\tau} g_n\tilde\phi_0\big) - \|g_n\tilde\phi_0\|^2 \ge \big(g_n\tilde\phi_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_0} g_n\tilde\phi_0\big)$$

对某个 n 成立。在左侧加上并减去 $\big(g_n\tilde\phi_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_0} g_n\tilde\phi_0\big)$，可知只要满足以下条件，这一结论便成立

$$\lim_{n\to\infty} \big[\big(g_n\tilde\phi_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_\tau} g_n\tilde\phi_0\big) - \big(g_n\tilde\phi_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_0} g_n\tilde\phi_0\big)\big] > 0 \tag{5.5}$$

因为这样一来，对于所有足够大的 n，差值都会超过磨光函数的影响。利用 (3.1) 和 (3.2)，可以将 (5.5) 中的两项显式写出；再利用 (5.4) 和控制收敛定理，条件可化为

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde\phi_0(x_1) \big[K_0\big(\kappa_0|\Gamma_\tau(s(x_1)) - \Gamma_\tau(s(x_1'))|\big) - K_0\big(\kappa_0|\Gamma_0(s(x_1)) - \Gamma_0(s(x_1'))|\big)\big]\, \tilde\phi_0(x_1')\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_1' > 0. \tag{5.6}$$

现在很容易看出，(5.6) 不仅对 κ_0 成立，实际上对所有 $\kappa > 0$ 都成立。事实上，核的自变量包含

$$|\Gamma_\tau(s(x_1)) - \Gamma_\tau(s(x_1'))| = \sqrt{(x_1 + \tau(x_1) - x_1' - \tau(x_1'))^2 + (\gamma(x_1) - \gamma(x_1'))^2}$$

因此，$|\Gamma_\tau(s(x_1)) - \Gamma_\tau(s(x_1'))| < |\Gamma_0(s(x_1)) - \Gamma_0(s(x_1'))|$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的一个开子集上成立，而在该子集之外，这两个表达式相等；请回想我们已排除平凡情形 $\tau = 0$。由此，所述结论便可根据 $K_0(\cdot)$的单调性以及函数 ϕ_0的正性得出。□

如果 τ' 变号，情况会更加复杂；不过，当 Γ_0 的波动和扰动都足够平缓且规则时，仍可得到一个存在性结果。具体而言，对于给定的 τ 和 γ，我们考虑以下曲线族，

$$\Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\tau}(s) = (x_1 + \varepsilon\tau(x_1), \varepsilon\gamma(x_1)), \ \varepsilon > 0.$$

在这样的假设下，我们甚至可以考虑扰动具有零均值的“临界”情形：

定理 5.2。 除上述假设 (i)–(iii) 外，设 $\tau, \gamma \in C^2$ 和 $\tau'(0) = 0$；则在本质谱底部以下至少存在一个特征值，因此对于所有足够小的 ε，有 $\sigma_{\mathrm{disc}}\big(H_{\alpha,\Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\tau}}\big) \neq \emptyset$。

证明。 前一个证明中的论证再次自然适用，因此需要检验

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\phi}_0(x_1) \left[K_0\big(\kappa_0|\Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\tau}(s(x_1)) - \Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\tau}(s(x_1'))|\big) \right.$$
$$\left. - K_0\big(\kappa_0|\Gamma_0(s(x_1)) - \Gamma_0(s(x_1'))|\big) \right] \tilde{\phi}_0(x_1') \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_1' > 0.$$

是否成立。现在，两个距离之差作为 x_1 的函数会改变符号，但只要所涉及的函数是凸函数，仍可利用詹森不等式的积分形式验证积分的正性。问题在于这未必成立，因为函数 R_κ： $R_\kappa(x_1) = K_0(\kappa z(x_1))$ 是由具有凸性的麦克唐纳函数与 $z(x_1) = \sqrt{(x_1 + \tau(x_1))^2 + \gamma(x_1)^2}$ 复合而成的映射，而后者通常并不具有凸性。为检验 R_κ 在什么条件下是（严格）凸的，我们按照引理 4.5 中对[ES25]的处理进行：计算 $\mathrm{d}^2 \, \mathrm{d}x_1^2 R_\kappa(x_1)$，并利用麦克唐纳函数之间的递推关系 [AS, 9.6.26]，可得到条件

$$\frac{z''}{(z')^2} < \frac{1}{z} + \kappa \frac{K_0(\kappa z)}{K_1(\kappa z)}; \tag{5.7}$$

右端的第二项为正，因此只要满足 $zz'' < (z')^2$，就能保证严格凸性。不过，一般情况下未必如此；然而，利用 $z_\varepsilon(x_1) = \sqrt{(x_1 + \tau_\varepsilon(x_1))^2 + \gamma_\varepsilon(x_1)^2}$，并保留关于 ε 的一阶项，可得不等式

$$x_1^2 + 2\varepsilon\big(\tau(x_1) + \tau'(x_1)\big) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) > 0$$

对于所有足够小的 ε，该式显然成立，且与 x_1 无关；请回想，根据假设，τ 的支集是紧的。□

推论 5.3。 定理 *5.2* 的结论仍然成立，只需将假设 (iii) 替换为 $\int_{\mathbb{R}} \tau'(x_1) \, \mathrm{d}x_1 < 0$。

证明。 对于这样的 τ，可以找到一个 $\upsilon \geq \tau$ 零均值函数，使得当 ε 足够小时，$\sigma_{\mathrm{disc}}\big(H_{\alpha,\Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\upsilon}}\big)$ 非空。我们使用同一个试探函数 $g_n\phi_0$，并令 n 足够大。对于所讨论的差值，

$$\big(g_n\tilde{\phi}_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\tau}} g_n\tilde{\phi}_0\big) - \big(g_n\tilde{\phi}_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma_0} g_n\tilde{\phi}_0\big) \tag{5.8}$$

我们加上并减去 $\big(g_n\tilde\phi_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma^\varepsilon_{\tilde\varepsilon\upsilon}} g_n\tilde\phi_0\big)$。根据前面的证明，当 ε 较小时，得到的两个差值之一为正，而另一个

$$\big(g_n\tilde\phi_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma^\varepsilon_{\tilde\varepsilon\tau}} g_n\tilde\phi_0\big) - \big(g_n\tilde\phi_0, \tilde{\mathcal{R}}^{\kappa_0}_{\alpha,\Gamma^\varepsilon_{\tilde\varepsilon\upsilon}} g_n\tilde\phi_0\big),$$

可按照定理 5.1 的证明处理；鉴于不等式 $\upsilon \geq \tau$，无论 ε 如何，它都是非负的，因此当 ε 足够小时，差值 (5.8) 为正。□

注记 5.4. 这些结果显然远非最优。其中一个原因是，我们在 (5.7) 中使用了粗略的估计，忽略了右端的第二个正项。后者不大于 κ，正如 [ES25，注记 4.6] 中误示的那样；但当 $\kappa z \to \infty$ 时，它会趋近于该值，因此其中所作的断言——相互作用越强，几何限制越弱——依然成立。这里也可以预期同样的情况，不过我们不打算详细展开这一论证，而是给出一个例子，说明即使变形并不微弱，'临界'变形也能产生非空离散谱，且 Γ 的波动也并非微弱。

6. The perturbation may not be gentle

在讨论本节标题所提出的主题之前，我们先给出一个可能具有独立意义的辅助结果。首先说明问题的设定。考虑一个正的紧支撑函数 $V \in L^2(\mathbb{R})$，其支集满足 $\operatorname{supp} V \subset \Sigma_b := [-\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b]$，其中 $b > 0$。此外，设 $X_0 = \{na\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 为一个周期阵列，满足 $a > b$，并设 $X_\delta = \{na + \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 为将有限个阵列点平移后得到的序列；我们记作 $x_n = na + \delta_n$。我们不对各个 δ_n 施加限制，但要求 $\delta_{n+1} - \delta_n > -b$，从而扰动不会改变这些点的顺序；此外，还有 $x_{n+1} - x_n > a - b$。我们感兴趣的对象是一维 Schrödinger 算子

$$H_{V,X_\delta} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - V_\delta(x), \quad V_\delta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V(x - x_n),$$

描述势阱阵列中的运动，这些势阱按假设互不重叠；它是一个下有界的自伴算子，其定义域为 $H^2(\mathbb{R})$，因为势属于 Kato 类 K_1 [Si82，定理 A.2.7]。众所周知，H_{V,X_0} 的谱是纯本质谱，而紧支集扰动 $V_\delta - V_0$ 不会改变其本质谱部分，并且会在 $\sigma\big(H_{V,X_0}\big)$ [的每个谱隙中至多产生有限个特征值，RB73, GS93]。我们的问题是，最低的谱隙中，即在 H_{V,X_0} 的谱阈值 ϵ_0 以下，是否确实存在这样的特征值；答案是肯定的：

定理 6.1. 在所描述的情形下，下确界 $\sigma\big(H_{V,\ X_\delta}\big) < \epsilon_0$ 除非 $\delta_n = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 均成立；换言之，任何所述类型的非平凡扰动都会在下确界 $\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{V,\ X_\delta}\big)$ 以下产生至少一个特征值。

证明。 论证思路与多维情形相同[ES25，定理 4.2] 但为了使本文自成一体，我们在略去少数细节后给出证明。根据 Birman-Schwinger原理，这个问题可转化为对算子 $K_{V,\,X_\delta}(-\kappa^2) := V_\delta^{1/2}\big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\kappa^2\big)^{-1}V_\delta^{1/2}$ 的分析；类似于命题 3.2，可以验证它是一个有界正算子，关于 κ 单调，并且满足 $\lim_{\kappa\to\infty}\|K_{V,\,X_\delta}(-\kappa^2)\| = 0$。由于各势阱的支集互不重叠，我们可以将 $K_{V,\,X_\delta}(-\kappa^2)$ 视为一个无穷矩阵积分算子，其各项将 $L^2(\Sigma_b+x_j)$ 映射到 $L^2(\Sigma_b + x_i)$，核为

$$K^{(i,j)}_{V,X_\delta}(-\kappa^2;x,x') = \frac{1}{2\kappa}\,V_\delta(x)^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\kappa|x-x'|}\,V_\delta(x')^{1/2},\quad i,j\in\mathbb{Z}, \tag{6.1}$$

其中 $\Sigma_b + y := \{\xi + y:\ \xi\in\Sigma_b\}$。与定理 5.1 的证明一样，要验证这一结论，必须证明 $\sup\sigma\big(K_{V,\,X_\delta}(-\kappa_0^2)\big) > 1$ 对$\kappa_0 := \sqrt{-\epsilon_0}$成立。我们所需的试探函数由与 $\sup\sigma\big(K_{V,\,X_0}(-\kappa_0^2)\big)$ 相关联的广义特征函数 ϕ_0 构造而成，它实际上就是$V_0^{1/2}\psi_0$，其中 ψ_0 是 $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-V_0(x)$ 的（正）广义特征函数。函数 ϕ_0 是 a-周期的；这里略微滥用记号，对函数

$$\{\phi_{0,j}\}\in\sum_{j\in\mathbb{Z}}^{\oplus}L^2(\Sigma_b+x_j),\quad \phi_{0,j}(\xi+x_j) := \phi_0(\xi)\ \text{ for }\ \xi\in\Sigma_b$$

（在算子 $K_{V,\,X_\delta}(-\kappa^2)$作用于它的表达式中，它局部不是周期函数！）。为了使它成为一个 $L^2(\mathbb{R})$元素，我们仍需要磨光函数；一组合适的函数由阶跃函数构成，

$$h_n(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} h_{n,i}\chi_{\Sigma_b+x_i}(x),\quad h_{n,i} = \frac{n^2}{n^2+i^2},\quad i\in\mathbb{Z}\,. \tag{6.2}$$

由于根据 (6.2) $\big|\big(\phi_{0,i},K_{V,X_0}(-\kappa_0^2)\phi_{0,j}\big)\big| \le c\mathrm{e}^{-\kappa a|i-j|}$ 对某个$c>0$成立，因此可以仿照 [ES25] 中引理 4.3 的证明，得出

$$(h_n\phi_0, K_{V,X_0}(-\kappa_0^2)h_n\phi_0) - \|h_n\phi_0\|^2 = \mathcal{O}(n^{-2})\ \text{ as }\ n\to\infty\,;$$

接着，按照定理 5.1 证明中的望远镜估计，我们看到，要得到该结论，必须验证

$$\lim_{n\to\infty}(h_n\phi_0, K_{V,X}(-\kappa^2)h_n\phi_0) - (h_n\phi_0, K_{V,X_0}(-\kappa^2)h_n\phi_0) > 0$$

对 $\kappa=\kappa_0$ （甚至对任意 $\kappa>0$）成立。与多维情形一样，可以通过控制收敛定理证明其适用性，从而将问题归结为检验该级数的正性。

$$\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\big(\phi_0,\big[K^{(i,j)}_{V,X}(-\kappa^2) - K^{(i,j)}_{V,X_0}(-\kappa^2)\big]\phi_0\big),$$

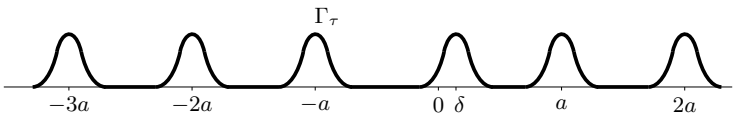

FIGURE 1. 相互作用支撑集 Γ_τ 在一个曲线段发生位移的例子中

利用（6.2），我们可以将其明确地改写为

$$\int_{\Sigma_b\times\Sigma_b} \phi_0(\xi)V^{1/2}(\xi)\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\big[R_\kappa(x_i-x_j+\xi-\xi')-R_\kappa((i-j)a+\xi-\xi')\big] \\ \times V^{1/2}(\xi')\phi_0(\xi')\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\xi', \tag{6.3}$$

其中 $R_\kappa(z) = \frac{1}{2\kappa}\mathrm{e}^{-\kappa|z|}$。方括号中的第一项自变量为 $(i-j)a+\delta_i-\delta_j+\xi-\xi'$，其中关于指标$i$，$j$ 的位移项之和显然为零；又由于 $R_\kappa(\cdot)$ 严格凸，除非所有的 δ_i 均为零，否则方括号内的值为正；证明至此完成。□

注6.2。请注意，该结果比其多维类比 [ES25, 定理 4.2] 更强，因为位移变量直接进入 (6.3) 的自变量，而不是通过与表示欧几里得距离的凹函数复合后进入。

完成这项准备工作后，我们来谈谈本节要传达的要点：

例6.3。记 $\Sigma_a := [-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]$，并考虑一条曲线 Γ_0，使得 $|\operatorname{supp}\gamma\restriction_{\Sigma_a}| < a$，换言之，其曲线部分由直线段隔开。进一步考虑一条扰动曲线 Γ_τ，满足 $\operatorname{supp}\tau\cap\operatorname{supp}\gamma=\emptyset$，这意味着曲线部分的形状保持不变，但它们之间的距离在局部发生改变，参见图1；不失一般性，可以假设 $\tau(\cdot)$ 是一个紧支撑阶梯函数，在 $\operatorname{supp}\gamma$ 之外仅取有限个非零值。

除 (i)–(iii) 外，现在还假设 $\gamma\in C^6(\mathbb{R})$，且 (2.1) 中的耦合参数 α 足够大。在这种情况下，可以利用由二次型 (2.1) 定义的奇异 Schr¨odinger 算子 (1.1) 的强耦合渐近结果，参见 [Ex08，第 4] 节。该处针对若干类曲线（包括周期曲线）推导了上述渐近结果；其中虽未涉及局部扰动，但其结果所依据的技巧——将夹逼法与极小极大原理相结合——同样可用于我们当前的问题，即本质谱底端以下的特征值问题：结论是，$H_{\alpha,\,\Gamma}$ 的低能谱与一维 Schr¨odinger 算子的谱相差至多 $\mathcal{O}(\alpha^{-1}\ln\alpha)$ 阶误差

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}-\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{1}{4}k^2(s), \tag{6.4}$$

其中 $k(\cdot)$ 是 Γ 的带符号曲率。除整体谱平移 $-\frac{1}{4}\alpha^2$ 外，算子 (6.4) 属于上述定理 6.1 所考虑的类型；请注意，其中的势修正是紧支撑的，这一要求等价于假设 (iii)。此外，曲率诱导势很容易计算得到，

$$-\frac{1}{4}k^2(s) = -\frac{\gamma''(x)^2}{4(1+\gamma'(x)^2)^3},$$

从而满足 C^4，因此具备 [Ex08]中回顾的括号方法所需的正则性。这使我们得以断定，在本例中，对于足够大的所有耦合强度 α，阈值$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\alpha,\Gamma}\big)$ 以下的离散谱$H_{\alpha,\Gamma}$ 非空。

7. Concluding remarks

通常，问题得到解决后会引出更多问题，当然，不只是将紧支撑扰动替换为具有适当衰减的扰动这类技术问题。例如，$\sigma\big(H_{\alpha,\Gamma_0}\big)$ 可能存在谱隙——事实上，对于所有充分大的 α，情况皆如此，参见 [Yo98] ——人们也会关注这些谱隙中的扰动诱导的离散谱。

另一个自然的问题是关于离散谱不存在性的充分条件——在谱底处，这可能是与定理 5.1 所述相反的扰动，即曲线的局部膨胀——或者是当前问题的三维类比，其中相互作用项不再是可加型的 [Ex08，第 2 节4]。不过目前我们就此打住，将这些及其他问题留待未来研究。

致谢。 感谢审稿人提出的宝贵意见。

References

[AS] M.S. Abramowitz，I.A. Stegun，编： *Handbook of Mathematical Functions*，Dover，纽约，1965年。[AF03] R.A. Adams，J.J.F. Fournier： *Sobolev Spaces*，第2版，Academic Press，纽约，2003年。[BEG22] J. Behrndt，A.F.M. ter Elst，F. Gesztesy：广义 Birman-Schwinger 原理，*Trans. Am. Math. Soc.* **375** （2022），799–845。[BDE03] F. Bentosela，P. Duclos，P. Exner：周期性细管和强耦合泄漏线中的绝对连续性， *Lett. Math. Phys.* **65** （2003），75-82。[BEKˇS94] J.F. Brasche，P. Exner，Yu.A. Kuperin，P. ˇSeba：具有奇异相互作用的 Schr¨odinger 算子，*J. Math. Anal. Appl.* **184** （1994），112-139。[Ex08] P. Exner：泄漏量子图：综述，载于“图上的分析及其应用” *AMS “Proceedings of Symposia in Pure Mathematics” Series*，第77卷，普罗维登斯，罗得岛州，2008年；第523–564页。[EI01] P. Exner，T. Ichinose：弯曲泄漏线中的几何诱导谱，*J.* （），–。[*Phys. A: Math. Gen.* **34** 2001 1439 1450
ES25] P. Exner，D. Spitzkopf：势阱阵列的局部扰动，*J. Spect.*，即将出版。*Theory* 2504 04080 [ ]
arXiv：。math.SP[93] GS F. Gesztesy，B. Simon：Zheludev定理的一个简短证明，*Trans. Am. Math.* （），–。*Soc.* **335** 1991 329 340

[Ka76] T. Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators*, 第2版, Springer, 柏林, 1976年。[Pu11] A. Pushnitski: 本质谱上的 Birman-Schwinger 原理, *J.* ( ), –。[RS78] *Funct. Anal.* **261** 2011 2053 2081
M. Reed, B. Simon:
Methods of Modern Mathematical Physics IV. Analysis of , , Academic *Operators* 1978
Press, 纽约。[RB73] F.S. Rofe-Beketov: 具有一阶矩和非零积分的 Hill 算子的扰动在远处谱隙中产生一个离散能级, *Mat. Fizika i* ( ), – *Funkts. Analiz. (Khar'kov)* **19** 1973 158 159
（俄文）。[Se71] Z. Semadeni: *Banach Spaces of Continuous Function*, 《数学专著》, 第55卷, PWN, 华沙, 1971年。[Si82] B. Simon: Schr¨odinger 半群, *Bull. Am. Math. Soc.* **7** (1982), 447–526。[Si18] B. Simon: Tosio Kato 关于非相对论量子力学的工作: 第 1 *Bull.* 部分, ( ), –。[*Math. Sci.* **8** 2018 121 232
Yo98] K. Yoshitomi: 周期性弯曲量子波导中的谱带隙, *J. Diff. Eqs* **142** (1998), 123-166。

(P. Exner) Doppler Institute for Mathematical Physics and Applied Mathematics, Czech Technical University, Břehová 7, 11519 Prague, Czechia, and Department of Theoretical Physics, NPI, Academy of Sciences, 25068 Řež near Prague, Czechia*Email address*: exner@ujf.cas.cz