arXiv:2601.18343v1 [math.AT] 26 Jan 2026

胞腔复形的分层莫尔斯理论

Vidit Nanda 和 Francesca Tombari

摘要。我们为配备辅助分层的有限正则 CW 复形建立了一种离散莫尔斯理论。其关键构造是胞腔的晕，它包含边界中所有恰在阈值达到该胞腔的取值时才进入闭次水平集的面。该晕在边界中的补集称为阴影，它始终是一个子复形。分层离散莫尔斯函数要求每个层上都满足 Forman 条件，并且配对胞腔的闭包能够经由滤过塌缩到其阴影上。我们确立了基本的莫尔斯引理：跨越正则区间的滤过塌缩，以及在临界值处的受控附着。对于仅满足逐层 Forman 条件的函数，我们在重心细分上构造了一个上包络，其局部莫尔斯数据可分解为水平分量和垂直分量。由此得到一种单纯复形类比，对应于 Goresky 和 MacPherson 意义下局部莫尔斯数据的标准切向—法向分解。

引言

Morse 理论提供了最精妙、最成功的方法之一，能够将局部解析信息转化为整体几何洞见。从 Morse 关于测地线计数的开创性工作 [21], 开始，其核心洞见——次水平集的拓扑只会在临界点处发生变化，且变化方式受到控制——在推广到等变 [2], 分段线性 [4], 辛 [11],动力系统 [7], 和物理 [31] 等背景时，也取得了令人瞩目的应用。在每种情形中，基本定理依然成立：正则区间不会引起拓扑变化，而临界值则会导致附柄，其性质可由底层函数在临界点附近的局部数据确定。本文关注其中两种推广——第一种是 Forman 针对有限 CW 复形提出的组合适配 [12], ，第二种是戈雷斯基-麦克弗森的分层空间 Morse 理论 [14]。

在 Forman 的理论中，离散莫尔斯函数 f 为 CW 复形 X 的胞腔赋予实数值，使得每个胞腔 σ 至多有一个例外上余胞腔 $\tau > \sigma$ 满足 $f(\tau) \leq f(\sigma)$，或至多有一个例外面 $\eta < \sigma$ 满足 $f(\eta) \geq f(\sigma)$。没有例外邻胞腔的胞腔被视为临界胞腔，而其余胞腔则组成自由面配对，可以将其坍缩消去。这一离散形式的 Morse 理论也已广泛应用于多个领域，包括拓扑组合学 [3], 交换代数 [15], 代数拓扑 [28, 10], 和几何群论 [1, 32]。它还沿着多个方向得到了推广——出现了滤过的 [20], 等变的 [13, 32], 层化的 [9], 非紧的 [17]乃至 2-范畴精化 [26, 24]。我们的目标是发展一种分层的 离散莫尔斯理论，将 Goresky 和 MacPherson 的开创性工作中的见解 [14]融入其中，同时保留 Forman 理论的组合本质与灵活性。

因此，全文所采用的设定是：一个配备滤过的有限正则 CW 复形 X

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_0 \supset X_{-1} = \varnothing$$

使得相邻差集$X_i - X_{i-1}$（其连通分支称为层）满足边界公理（见第1.1节）。这在各层之间诱导出一个偏序。除这一偏序之外，我们首先强调，我们不施加任何流形结构，也不施加任何正则性条件 `，例如惠特尼或汤姆–马瑟条件，也不要求各层具有锥形邻域。我们有意放弃这些假设，原因有二：第一，我们并不需要它们；第二，施加这些假设会阻止我们的理论在平凡分层$X \supset \varnothing$中恢复 Forman 的结果。

挑战。本文的首要目标是证明这两个**基本的 Morse 引理**。其中第一个断言，跨越正则区间时，任何具有拓扑重要性的性质都不会发生变化——次水平集彼此同伦等价，事实上，还能以保持滤过的方式彼此塌缩。第二个引理量化了跨越临界值时发生的变化：子水平集通过受控的把手附着而增长。在我们能够确立（甚至表述）这些结果的离散类比之前，必须面对两个障碍。

其中第一个是概念性的：我们究竟应该如何定义离散分层莫尔斯函数$f\colon X \to \mathbb{R}$？一种天真的做法可能是要求限制$f|_S : S \to \mathbb{R}$到每个层$S \subset X$上都满足 Forman 的公理。这种策略既违背了 Goresky-MacPherson 情形的精神，也违背了其字面要求，因为后者施加了一个至关重要的额外法向非退化性要求。分层莫尔斯函数f在临界点处的梯度不能湮灭该点处更高层的任何极限切空间。这一非退化性条件确保梯度流不会被困在分层边界处。这一条件的组合等价物是什么？我们没有切平面，没有微分几何意义下的梯度，也没有定义或检测横截性的明显方法。

第二个障碍是技术性的，我们称之为闭包问题。在 Goresky 和 MacPherson 的情形中，次水平集 $\mathrm{f}^{\leq c}$ 是明确无歧义的——它只是连续函数下半无限区间（$-\infty$，c] 的原像。与此形成鲜明对比的是，形如 $\mathrm{f}^{\leq c}$ 的次水平集未必构成环境 CW 复形 X 的子复形，原因恰恰在于我们允许胞腔 $\sigma < \tau$ 满足 f（σ） $\geq$ f（τ）。因此，按照 Forman 的做法，我们不得不使用闭包：相关对象是 cl（$\mathrm{f}^{\leq c}$），即包含所有 f 值不超过 c 的胞腔的最小子复形。问题在于，取闭包可能会引入具有任意大 f 值的胞腔——如果胞腔 σ 满足 f（σ） $= 10000$，而 σ 具有一个上余胞腔 $\tau > \sigma$ 满足 f（τ） ≤ 1，那么该胞腔就会出现在 cl（$\mathrm{f}^{\leq 1}$）中（见图1）。在连续情形中没有与之对应的现象；两者简直就像拿火山和蝴蝶相比。

本文。在此，我们通过引入给定胞腔 $\sigma \in$ X 沿单射 $\mathrm{f}: \mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{R}$ 的晕 $\mathrm{h}(\sigma; \mathrm{f})$，解决这两个障碍。它定义为所有满足以下条件的边界胞腔 $\eta < \sigma$ 的集合：$\mathrm{f}(\eta) \geq \mathrm{f}(\sigma)$，且 σ 是 η 的 f - 极小上余胞腔。非正式地说，晕由这样的面组成：当阈值 c 达到 $\mathrm{f}(\sigma)$ 时，它们恰好出现在闭次水平集 cl($\mathrm{f}^{\leq c}$) 中。我们称 σ 的边界中晕的补集为 σ 的阴影，记作 $\mathrm{sh}(\sigma; \mathrm{f})$；它构成闭包 $\mathrm{cl}(\sigma)$ 的一个子复形。借助晕，我们可以如下表述组合非退化条件。除了要求我们设想的 Morse函数是单射，并在每个层上满足 Forman公理之外，我们还要求，对于位于同一层中的每个胞腔对 $(\sigma > \tau)$,

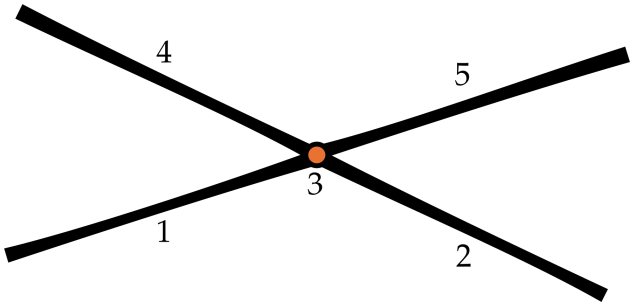

图1。一个包含一个顶点和四条边的胞腔复形片段，胞腔上的f值如图所示。注意，$f_{\le 1}$ 的闭包已经包含中心顶点，尽管该顶点的f值为 3。

$f(\sigma) < f(\tau)$，较小的胞腔 τ 位于 $\mathbf{h}(\sigma; f)$ 中，并且闭包 $\mathbf{cl}(\sigma)$ 可滤过塌缩到阴影 $\mathbf{sh}(\sigma; f)$。

这一新条件确保，当层内的胞腔 σ 被其配对胞腔 τ 取消时，晕中的所有关联面也可以一并塌缩，而不破坏分层。滤过塌缩尊重滤过$X_\bullet$，其含义是它在每一层级上都限制为同伦等价。因此，临界胞腔现在分为两类：标准意义上的临界胞腔是指，位于某一层S 中的胞腔 σ 若在S内未配对，则称其为临界。若一个胞腔是临界的，且不位于任何其他胞腔的晕中，则称其为s-临界。这种区分确实是全新的：一个胞腔可能是临界胞腔，并对其所在层的拓扑有实质贡献，却对X 的过滤拓扑不可见，因为它有一些位于更高层、且f值更小的上余胞腔。只有 s-临界胞腔会影响次水平集的滤过同伦型。

主要结果。 固定一个分层离散莫尔斯函数 $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ 并设 σ 是X的一个胞腔。我们的第一个主要结果表明，在不包含 s-临界值的区间内，f的次水平集不会发生实质性变化。以下是简述，详见定理4.1 。

定理 (A)。 设 $[c, d] \subset \mathbb{R}$ 为一个区间，其在 $f^{-1}([c, d])$ 下的原像是 $\{\sigma\}$。若 σ 不是 s-临界的，则 $\mathbf{闭包}(f_{\le d})$ 可通过保持滤过塌缩到 $\mathbf{闭包}(f_{\le c})$。

我们再次强调，正如上文所述，即使 σ 是临界的，本结果所保证的塌缩也仍可能发生——如果 σ 位于另一个胞腔的晕中，那么它早已包含在 $\mathbf{闭包}(f_{\le c})$ 中，因此当我们将阈值从 c 提高到 d时，它不会带来实质性贡献。既然已确认只有跨过 s-临界值时次水平集才会发生变化，接下来就需要通过描述跨越此类临界值时精确的把手附着来构造 **局部莫尔斯数据** 。这正是下一个主要结果要处理的问题（见下文定理 4.2）。

定理 (B). 设 $\sigma \in X$ 是 f 的一个 s-临界胞腔，且 $c := f(\sigma)$。对于所有充分小的$\varepsilon > 0$，子水平集 $\mathbf{cl}(f_{\le c+\varepsilon})$ 是 $\mathbf{cl}(\sigma)$ 与$\mathbf{cl}(f_{\le c-\varepsilon})$ 沿其公共交集$\mathbf{sh}(\sigma; f)$的并集。

换言之，s-临界胞腔处的局部莫尔斯数据 σ 是这一对$\mathbf{sh}(\sigma; f) \hookrightarrow \mathbf{cl}(\sigma)$。我们应当指出，这些数据显然不同于 Goresky 和 MacPherson 的切向 $\times$ 法向分解 [14]；他们的切向数据T 沿着包含临界点S 的层p 分布，并且与通常的把手附着数据相同，适用于

限制 $f|_S$。他们的法向数据 N 由S的下降链生成，而该链位于严格高于S的层中。这种差异既是一个优点——我们的附着数据在组合意义上明确具体，无需进行链计算——也是一种局限，因为与光滑理论所提供的信息相比，我们得到的几何信息较少且不够清晰。因此，我们的第三项也是最后一项主要结果，是向读者作出的善意补偿：读者或许更希望有一种离散理论，能够忠实再现连续理论中局部莫尔斯数据的$T \times N$ 乘积分解。

事实上，我们在此考虑一种较弱的设定。我们仍要求 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 为单射，并且将其限制在每个层上时是一个离散莫尔斯函数，但不施加其他以光环为中心的约束。接着，我们对 X作重心细分；所得单纯复形 $\mathrm{Sd}(X)$ 的 k-单形是 X中胞腔构成的严格递增链 $\xi = [\sigma_0 < \cdots < \sigma_k]$。该细分从 X规范地继承其分层，其中每个层 $S \subset X$都会诱导出唯一的层 $\mathrm{Sd}(S) \subset \mathrm{Sd}(X)$。映射 f 通过其上包络$\mathbf{U}f$ 延拓至 $\mathrm{Sd}(X)$：$\mathrm{Sd}(X) \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$\mathbf{U}f(\xi) = \max\{f(\sigma_i) \mid 0 \le i \le k\}.$$

结果是，$\mathbf{U}f$ 的次水平集确实是子复形，因此无需取闭包。我们证明，对于$\mathbf{U}f$ 的次水平集，在 $\mathrm{Sd}(X)$ 中与每个胞腔 $\sigma \in X$ 相对应的顶点 $[\sigma]$处，局部莫尔斯数据具有如下形式的联结分解：$H_\sigma \star V_\sigma$，其中$H = H_\sigma$ 和$V = V_\sigma$ 是称为数据的水平部分和垂直部分的子复形。这些术语有以下观察作为依据：若 σ 是临界的，且S 是包含它的层，则H 包含于各层 $\mathrm{Sd}(S)$ 的并集中，而V 包含于各层 $\mathrm{Sd}(S)$的并集中 $>$。

定理(C)。 设 σ 是一个临界胞腔，满足 $c := f(\sigma)$。对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，$\mathbf{U}f^{\le c-\varepsilon} \hookrightarrow \mathbf{U}f^{\le c+\varepsilon}$ 的局部莫尔斯数据是一对

$$(H \star V) \hookrightarrow (\mathrm{cone}(H) \star V),$$

其中，H 属于层 $\le \mathrm{Sd}(S)$ 的并集，V 属于层 $> \mathrm{Sd}(S)$的并集。

(这是下面的定理 5.9 。)

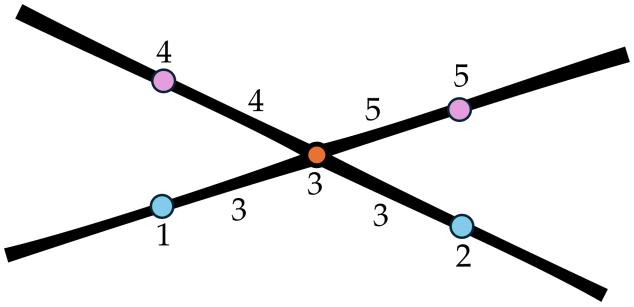

图2。图 1 中示例的细分版本$\mathbf{U}f$-值定义在单形上；此处，中心顶点确实会导致拓扑发生变化，因为它的下链接由两个顶点组成。这两个顶点位于原始边的重心处，因此其$\mathbf{U}f$-值为 1 和 2。

这种分解是切向—法向分解的单纯复形类比。水平部分 H 刻画沿层的莫尔斯数据，而垂直部分 V 记录高维层与 σ 相交时所对应的方向。在图2 中，我们考察图

1 的重心细分和上包络。中心顶点在原先通过取次水平集构造的模型中没有贡献，而现在其下链接的形式为 $H \star V$，其中 H 为空，但 V 有两个连通分支（它们是 f 值为 1 和 2 的边的重心）。由于该链接不可缩，穿过 $\mathbf{U}f = 3$ 必然会改变次水平集的拓扑。

相关工作。 本文可视为延续了三个大体上相互独立的研究计划，它们都旨在将 Forman 的原始理论从 [12] 推广开来。第一个是 Mischaikow 和 Nanda 提出的滤过变体 [20]。该框架与我们工作的主要区别在于，我们允许存在位于不同层中的胞腔 $\sigma < \tau$，且 $f(\sigma) > f(\tau)$ ——而 [20, 定义 4.1] 明确禁止这种情况。

第二个与之交叠的研究方向，是 Knudson 和 Wang [16], 近期的研究成果，他们同样旨在建立分层离散莫尔斯理论。他们只要求其函数在每个层上的限制是 Forman 风格的离散莫尔斯函数，不附加其他要求。因此，他们得到了将临界胞腔数与贝蒂数联系起来的弱莫尔斯不等式，却无法提取局部莫尔斯数据。定理（C）表明，即使在他们的框架中，只要具有单射性，就能在重心细分中得到切向-法向分解。

第三，我们注意到由 Mrozek 及其合作者发起的关于多向量场的大量研究 [22, 23, 18], 为离散康利指标理论提供了一个框架。多向量是面偏序集中的一个非空、凸且连通的子集；多向量场是将一个正则 CW 复形 X 划分为多个多向量所得到的划分。满足边界公理的分层会产生无环多向量场，而康利–莫尔斯谱序列则通过各层的 Conley 指标汇集 X 的同调。我们在附录中简要讨论这一联系，但要强调的是，多向量场理论并未施加与我们的晕可塌缩条件相类似的条件，因此无法得到我们在此建立的那类莫尔斯引理。

概要。 在第 1 节中，我们描述正则 CW 复形的分层。随后，第 2 节介绍晕与影，证明它们的基本性质。在第 3 节中，我们定义分层离散莫尔斯函数以及临界性的两种概念。第 4 节建立定理（A）和（B）。最后，第 5 节在重心细分上构造上包络，并证明定理C。附录 A 简要总结我们的分层与无环多向量场之间的关系。

1. 分层胞腔复形

设X 是一个正则 CW 复形。我们用$(X, \leq)$ 表示X的**面偏序集**，其中包含X 的所有胞腔，并按面关系排序[1]。给定X中任意非空的胞腔子集族S ， S 的闭包是定义为下集的子复形

$$\mathbf{cl}(S) := \{\tau \in X \mid \tau \leq \sigma \text{ for some } \sigma \in S\};$$

反过来， （开）星 S 是上集

$$\mathbf{st}(S) := \{\tau \in X \mid \tau \geq \sigma \text{ for some } \sigma \in S\}.$$

[1]明确而言，关系 $\sigma < \tau$ 成立，当且仅当 τ 的边界包含 σ。

当$S = \{\sigma\}$ 由单个胞腔组成时，我们写作$\mathbf{cl}(\sigma)$ 和$\mathbf{st}(\sigma)$ ，而不写$\mathbf{cl}(\{\sigma\})$ 和$\mathbf{st}(\{\sigma\})$。如果S 中任意两个胞腔 σ, τ 构成一条有限锯齿链的端点，我们就称S 是连通的：

$$\sigma \geq \eta_0 \leq \eta_1 \geq \cdots \geq \eta_{k-1} \leq \eta_k \geq \tau,$$

包含所有 $\eta_i \in S$。最后，我们用 $\dim S$ 表示S的组成胞腔中出现的最大维数。

1.1. 分层。有限正则 CW 复形X 的滤过是由子复形构成的有限序列

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_1 \supset X_0 \supset X_{-1} = \varnothing.$$

X 的分层是一种滤过，且其相邻项之差 $\Delta_i := (\mathrm{X}_i - \mathrm{X}_{i-1})$ 满足以下边界公理——给定连通的 $\mathrm{S} \subset \Delta_i$ 和 $\mathrm{T} \subset \Delta_j$，若 $\mathrm{cl(S)} \cap \mathrm{T}$ 非空，则 $\mathrm{T} \subset \mathrm{cl(S)}$。$\Delta_i$ 的连通分支称为 $\mathbf{X_\bullet}$分层的 i-分层。一个标准示例是骨架分层，其中 i-分层恰好是 i 维胞腔；这是 X 的最细分层。与之相对，X 还有最粗（或称典范、最小）的同调流形分层——参见 [25]。

注 1.1. 正如我们在引言中已经提到的，定义分层空间时，通常会对各层施加额外的正则性条件。例如，人们常要求i维层是维数为i [30, 19, 29, 25]的（光滑、分段线性或同调）流形。**我们在此不作此类假设**。同样，人们通常假定各层在X中具有锥形邻域。具体而言，对于每个层S ，都存在一个分层空间LS，称为S的**链接**，使得S 的任意充分小的开邻域$US \subset X$ 都具有$US \twoheadrightarrow S$ 的纤维丛结构，其纤维为 $\mathrm{Cone}(LS)$。我们的分层限制较少，因为我们不要求各层具有定义良好的链接或齐性邻域。

尽管如此，我们仍施加边界公理，以获得两项直接益处。首先，各层上存在一个广受认可且常用的偏序。

命题 1.2. 在 X 的任意分层 $X_\bullet$ 中，关系

$$T \leq S \text{ if and only if } T \cap \mathbf{cl}(S) \neq \varnothing$$

是层集合上的偏序。

证明。所述关系的自反性显而易见。若 $\mathrm{T} \leq \mathrm{S}$ 且 $\mathrm{S} \leq \mathrm{R}$，根据该关系的定义和边界公理，我们有 $\mathrm{T} \subset \mathrm{cl(S)}$ 且 $\mathrm{S} \subset \mathrm{cl(R)}$。这意味着 $\mathrm{T} \subset \mathrm{cl(S)} \subset \mathrm{cl(R)}$，因此 $\mathrm{T} \leq \mathrm{R}$，说明该关系具有传递性。接下来需证明反对称性。反设存在层 $\mathrm{S} \neq \mathrm{T}$，使得 $\mathrm{S} \cap \mathrm{cl(T)}$ 和 $\mathrm{T} \cap \mathrm{cl(S)}$ 均非空。设 $\mathrm{S} \subset \Delta_i$ 且 $\mathrm{T} \subset \Delta_j$，其中 $\Delta_i = (\mathrm{X}_i - \mathrm{X}_{i-1})$，对 Δ_j 也同样如此。现在我们有如下包含关系

$$T \subset \mathbf{cl}(S) \subset X_i,$$

其中，第一个包含关系由边界公理得出，而第二个包含关系则是因为X_i是一个子复形，因此在X中是闭的。因此，T 属于 $\Delta_j \cap X_i$，这迫使$i \geq j$。交换S 和T的角色，同样的论证可得$j \geq i$ ，由此$i = j$。因此，S 和T 必定是同一个 Δ_i的连通分支。最后，由于$T \subset \mathbf{cl}(S)$，存在胞腔 $\tau \in T$ 和 $\sigma \in S$ ，满足 $\tau \leq \sigma$。这迫使S 和T 属于Δ_i的同一个连通分支，因此$S = T$ ，如所愿。□

对于骨架分层，边界偏序显然简化为胞腔之间熟知的面关系。边界公理的第二个优点是，它保证所有层都是凸的，如下所述。

命题 1.3. 在正则 *CW* 复形 X 中，给定任意三个胞腔 $\sigma \le \tau \le \sigma'$，如果 σ 和 σ'都属于分层 $X_\bullet$的同一层 S，那么 τ也属于该层。

证明。唯一非平凡的情形是胞腔之间的两个不等式都为严格不等式，否则 $\tau \in S$ 显然成立。根据构造，$X_\bullet$ 的各层将X的胞腔划分开来；因此，为了导出矛盾，我们可以假设 τ 属于与$T \neq S$不同的另一层。现在，由于 $\tau < \sigma'$，T 与$\mathbf{cl}(S)$ 相交；而由于 $\sigma < \tau$，S 与 $\mathbf{cl}(T)$ 相交。由边界公理可得$S \le T$ 以及$T \le S$，这立即导出所需的矛盾$S = T$。□

1.2. 滤过塌缩。 在正则 CW 复形X 中，如果两个不同的胞腔(σ, τ) 满足以下条件，我们就称它们构成一个自由面配对

$$\mathbf{st}(\tau) = \{\sigma, \tau\}.$$

在这种情况下，X 的正则性迫使 $\dim \tau = \dim \sigma - 1$，并且众所周知（例如参见 [6]），从 σ 和 τ 中同时移除它们会将 X 变为一个仍与 X同伦等价的子复形。移除这一自由面配对的操作称为**初等坍缩**；如果存在有限个中间子复形 X 坍缩至子复形Y，使得 Z^i

$$X = Z^1 \supset Z^2 \supset \cdots \supset Z^k = Y$$

其中，每个 Z^i 都是通过执行一次初等坍缩，由前一个 Z^{i-1} 得到的。我们用 X 与Y 之间的 $X \searrow Y$ 表示这种关系。

注记 1.4。 对于不熟悉这一机制的读者，需要注意，将 X 坍缩到Y并不仅仅是在 X 中找出一组互不相交的自由面配对。当从 X 中移除一个自由面配对 (σ, τ) 以生成第一个子复形 Z^1，时，对 σ 的切除可能会在 Z^1 中产生一个新的自由面配对 (σ', τ')，其中 $\tau' < \tau$。关键在于，这个新的 (σ', τ') 并不是X 中的自由面配对，因为 $\mathbf{st}(\tau') \supset \{\sigma', \sigma, \tau'\}$ 包含多于两个元素。

现在假设X 配备了一个分层$X_\bullet$；每个子复形$Y \subset X$都通过$Y_i := Y \cap X_i$ 继承此分层，对所有i皆如此。现在，我们要寻求一种从X 到Y 的更精细的坍缩机制，以产生滤过同伦等价。因此，目标不仅是在每个层级i上获得一个同伦等价 $\phi_i : X_i \xrightarrow{\sim} Y_i$，还要要求其与关联相邻层级的自然包含映射相容。具体而言，该图表

$$\begin{array}{ccc} X_i & \hookrightarrow & X_{i+1} \\ {\scriptstyle \phi_1}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & {\scriptstyle \sim}\downarrow{\scriptstyle \phi_{i+1}} \\ Y_i & \hookrightarrow & Y_{i+1} \end{array}$$

对所有i都应交换。为此，我们允许分层数据限制可接受的初等坍缩类别——只有当自由面配对(σ, τ) 中的 σ 和 τ 都属于同一层S时，才允许将其移除。我们将此类**滤过塌缩** 的存在记作$X \; Y$，以便将其与上文所述的普通未滤过塌缩区分开来。

注 1.5. 假设正则 CW 子复形 $Y \subset X$ 是通过一次过滤初等塌缩得到的。将被剔除对记为 (σ, τ)，令 $S \subset (X^j - X^{j-1})$ 表示包含这两个胞腔的层。对于每个维数 i，我们希望将 $Y_i := Y \cap X_i$ 的诱导分层与 X 的原始分层联系起来，以说明为何存在滤过同伦等价 $\phi_i : X_i \to Y_i$。为此，首先注意到，当 $i < j$ 时，$Y_i = X_i$ 成立，因为在任何这样的 X^j 中都不包含 σ 或 τ，所以对于这样的 i，令 ϕ_i 为恒等映射。其次，注意到对于所有 $i \geq j$，(σ, τ) 都是 X_i 中的自由面配对——在 X 中有 $st(\tau) = \{\sigma, \tau\}$，并且由于 σ 和 τ 都属于 X^j，此配对在所有 $i \geq j$ 时仍是 X_i 中的自由面配对。因此，可以选择整体同伦等价 $\phi : X \to Y$，使其限制为同伦等价 $X_i \to Y_i$，正如预期，从而自然交换图交换。

2. 光环与影子

设 X 是一个有限正则 CW 复形。在本节中，我们考虑一个函数 $f : X \to \mathbb{R}$，它将 X 中的每个胞腔 σ 映射到一个实数 $f(\sigma)$。沿 f 的 σ 的下星 为

$$\mathbf{st}^-(\sigma; f) := \{\tau \in X \mid \tau > \sigma \text{ and } f(\tau) \leq f(\sigma)\}; \tag{1}$$

显然，这是 $\mathbf{st}(\sigma)$ 的子集，但与通常的星不同，它不包含 σ 自身。我们在此特别关注 f 为单射的情形。对于胞腔集合 $S \subset X$，令 $\operatorname{argmin}[f/S]$ 表示 S 中所有在其像 $f(S) \subset \mathbb{R}$ 上取得最小 f 值的胞腔 $\tau \in$ 所组成的子集，并明确约定 $\operatorname{argmin}[f/\varnothing] = \varnothing$。对于单射 f 和非空 S，集合 $\operatorname{argmin}[f/S]$ 必定是单元素集合。

定义 2.1。 沿 f 的胞腔 $\sigma \in X$ 的**晕** 定义为

$$\mathbf{h}(\sigma; f) := \left\{\tau \in X \mid \sigma \in \operatorname{argmin}\left[f / \mathbf{st}^-(\tau; f)\right]\right\},$$

而 *aug* $\widehat{\ }$的 晕 $\mathbf{h}(\sigma; f)$ 是 $\mathbf{h}(\sigma; f)$ 与 $\{\sigma$ 的（必然不相交）并集 $\}$.

注意，如果 τ 属于 $h(\sigma; f)$，那么必有 $\sigma \in st^-(\tau; f)$。因此，$h(\sigma; f)$ 和 $\widehat{\ }h(\sigma; f)$ 始终是闭包 $cl(\sigma)$ 的子集（但通常不是子复形）。对于单射 f，当且仅当 σ 是 $st^-(\tau; f)$ 中 f 值最小的唯一胞腔时，胞腔 τ 才属于 $h(\sigma; f)$。这意味着沿着单射 f 的不同胞腔的晕彼此不相交。

命题 2.2。 设 $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ 是一个单射函数。若 $\sigma \neq \sigma'$ 是 X 中两个不同的胞腔，则有 $\mathbf{h}(\sigma; f) \cap \mathbf{h}(\sigma'; f) = \varnothing$。

证明。如果胞腔 τ 包含于交集 $\mathbf{h}(\sigma; f) \cap \mathbf{h}(\sigma'; f)$ 中，那么根据定义，σ 和 σ' 都必须位于 $\mathbf{st}^-(\tau; f)$ 中，并在该下星上取得 f 的最小值。这违背了 f 的单射性。□

沿单射 f 的胞腔 σ 的晕作为 $\mathbf{cl}(\sigma)$ 的子偏序集，同样具有良好的性质。

$\widehat{\ }$**命题 2.3**。 假设 $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ 是单射。对于 X 中的每个胞腔 σ，增广光环 $\mathbf{h}(\sigma; f)$ 是 $\mathbf{cl}(\sigma)$ 的上集。

$\widehat{\ }$证明。我们希望证明：给定 $\mathbf{cl}(\sigma)$ 中的两个胞腔 $\beta \geq \alpha$，且 α 包含于 $\mathbf{h}(\sigma; f)$ 中，则同样有 $\beta \in \widehat{\ }\mathbf{h}(\sigma; f)$。如果 $\sigma \geq \beta \geq \alpha$ 中的任一不等式为等式，那么结论立即成立。因此，我们可以放心地假设 $\sigma > \beta > \alpha$。现在我们断言 $f(\beta) > f(\sigma)$；要理解这一点，请注意，根据 f 的单射性，我们必有

- $f(\beta) > f(\alpha)$，在这种情况下，$f(\beta) > f(\sigma)$ 成立，因为 $\sigma \in \mathbf{st}^-(\alpha; f)$；或者，
- $f(\beta) < f(\alpha)$，因此 $\beta \in \mathbf{st}^-(\alpha; f)$，所以根据最小值自变量的定义，$f(\beta) > f(\sigma)$。

因此，在这两种情况下，我们都得到 $\sigma \in \mathrm{st}^-(\beta; \mathrm{f})$。反设$\beta \notin \mathrm{h}(\sigma; \mathrm{f})$；那么必定存在另一个胞腔 $\sigma' \neq \sigma$，属于 $\mathrm{st}^-(\beta; \mathrm{f})$，且满足 $\mathrm{f}(\sigma') < \mathrm{f}(\sigma)$。但是，任何这样的 σ' 都会自动落在 α 的下星中，这与 σ 在 α 的所有下星上余胞腔中具有最小 f 值这一事实相矛盾。这就得到了所需的包含关系$\beta \in \mathrm{h}(\sigma; \mathrm{f})$，并证明了增广光环具有向上闭包性质。□

由于从正则 CW 复形中移除任意胞腔上集后，剩下的仍是一个子复形，因此前述结果保证

$$\mathbf{sh}(\sigma; f) := \mathbf{cl}(\sigma) - \widehat{\mathbf{h}}(\sigma; f), \tag{2}$$

是$\mathbf{cl}(\sigma)$的一个（可能为空的）子复形，因此，当f 为单射时，它也是X 的子复形。我们将此子复形称为沿f的 σ **阴影**。对于每个实数c，将f 在c 处的次水平集和超水平集定义为

$$f_{\leq c} := \{\sigma \in X \mid f(\sigma) \leq c\},$$
$$f_{\geq c} := \{\sigma \in X \mid f(\sigma) \geq c\}.$$

我们关注晕，是因为它完全决定了某些次水平集闭包之间的差异。

引理 2.4。设 $f\colon X \hookrightarrow \mathbb{R}$ 是一个单射函数，且 $[c, d] \subset \mathbb{R}$ 是一个区间，使得 $f_{\geq c} \cap f_{\leq d}$ 仅由 X 中的一个胞腔 $\sigma \in$ 构成。对于任何这样的区间，差集

$$\Delta := \mathbf{cl}(f_{\leq d}) - \mathbf{cl}(f_{\leq c})$$

具有如下结构：

(1) 若 $\sigma \in \mathbf{cl}(f_{\leq c})$，则 $\Delta = \varnothing$；*(2)* 若 $\sigma \notin \mathbf{cl}(f_{\leq c})$，则 $\Delta = \widehat{\mathbf{h}}(\sigma; f)$。

证明。胞腔 γ 位于 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}_{\leq c})$ 之外，当且仅当对于每个上余胞腔 $\tau \geq \gamma$，$\mathrm{f}(\tau) > \mathrm{c}$ 都成立。反之，γ 位于 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}_{\leq d})$ 之内，当且仅当存在某个上余胞腔 $\tau_* \geq \gamma$，使得 $\mathrm{f}(\tau_*) \leq \mathrm{d}$。因此，要使 γ 位于 Δ 中，必须同时满足两个性质。首先，必须存在某个 $\tau_* \geq \gamma$，使得 $\mathrm{f}(\tau_*) \in (\mathrm{c}, \mathrm{d}]$。其次，对于 $\mathrm{st}(\gamma)$ 中所有其他的 $\tau \neq \tau_*$，必须有 $\mathrm{f}(\tau) > \mathrm{c}$。要求 $\mathrm{f}_{\geq c} \cap \mathrm{f}_{\leq d}$ 等于 $\{\sigma\}$ 的假设会影响这两个性质，并由此得出所需结论。具体而言，

(1) 第一性质简化为要求 $\sigma = \tau_*$ 属于 $\mathrm{st}(\gamma)$，且 $\mathrm{f}(\sigma) \neq \mathrm{c}$。现在，如果 $\sigma \in \mathrm{cl}(\mathrm{f}_{\leq c})$，那么根据子复形性质，它的所有面也都属于 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}_{\leq c})$。但由于 Δ 只能包含 σ 的面，因此在这种情况下它必为空。(2) 第二性质加强为：对于所有属于 $\mathrm{st}(\gamma)$ 的 $\tau \neq \sigma$，都有 $\mathrm{f}(\tau) > \mathrm{d}$。因此，当且仅当 $\{\sigma\} = \mathrm{argmin}[\mathrm{f}/\mathrm{st}(\gamma)]$ 时，胞腔 γ 属于 Δ。现在需要考虑两种情况：要么 $\gamma = \sigma$，要么 $\gamma < \sigma$ 且 $\mathrm{f}(\gamma) > \mathrm{d} \geq \mathrm{f}(\sigma)$。对于后一种情况，注意 σ 属于 $\mathrm{st}^-(\gamma; \mathrm{f})$，并且是 f 在这个下星上的最小值自变量。

最后，为了完成证明，我们注意到，根据上述第二性质的加强版本，当且仅当 γ 属于 $\{\sigma\} \sqcup \mathbf{h}(\sigma; f)$ 时，$\gamma \in \Delta$ 成立，正如所需。□

3. 分层离散莫尔斯函数

固定一个有限正则 CW 复形 X 和一个函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$。沿 f，每个胞腔 σ 的上闭包定义如下：

$$\mathbf{cl}^+(\sigma; f) := \{\tau \in X \mid \tau < \sigma \text{ and } f(\tau) \geq f(\sigma)\}. \tag{3}$$

上闭包与（1）中的下星互为对偶，即当且仅当 $\tau \in \mathbf{cl}^+(\sigma; f)$ 成立时， $\sigma \in \mathbf{st}^-(\tau; f)$ 也成立。若满足以下不等式，我们就称 f 是 X 上的离散莫尔斯函数（按 Forman 的定义）：

$$\left|\mathbf{cl}^+(\sigma; f)\right| + \left|\mathbf{st}^-(\sigma; f)\right| \leq 1$$

对每个胞腔都成立 $\sigma \in X$，其中 $|\cdot|$ 表示基数——详情请参见 [12] 中的定义 2.2 和引理 2.5。由于 X 是有限的，我们总可以对 f 作微小扰动，使其成为单射，同时保留所有相关基数。现在，按照第 *1.1.* 节中的做法，在 X上施加一个分层。

定义 3.1。 称定义在 X 上的**分层离散莫尔斯函数** 为任意单射$f: X \hookrightarrow \mathbb{R}$，使得对于每个 σ 位于层$S \subset X$中的胞腔，都有

(1) $\left|\mathbf{cl}^+(\sigma; f) \cap S\right| + \left|\mathbf{st}^-(\sigma; f) \cap S\right| \leq 1$, and
(2) if $\mathbf{cl}^+(\sigma; f) \cap S = \{\tau\}$, then $\tau \in \mathbf{h}(\sigma; f)$ and $\mathbf{cl}(\sigma) \quad \mathbf{sh}(\sigma; f)$.

该定义的第一个条件要求限制映射$f|_S: S \to \mathbb{R}$ 在每个层S 上都是标准的（尽管是单射）离散莫尔斯函数，意义与 [12]中的相同。据我们所知，第二个条件是新的。每当一个胞腔 $\sigma \in S$ 存在唯一的 τ in$\mathbf{cl}^+(\sigma;\ f) \cap S$时，该条件要求 σ 的闭包坍缩到式（2）中的阴影子复形上。换言之，增广光环 $\widehat{\ }\mathbf{h}(\sigma;\ f)$ 中的所有胞腔都必须沿着一系列初等塌缩而消失[2]。该定义带来的另一项新特点是，临界胞腔分为两种类型。

定义 3.2。 设$f: X \hookrightarrow \mathbb{R}$ 是满足定义 3.1的单射函数。1. 设胞腔 σ位于层 $S \subset X$ 中，称其为

- **临界** 当且仅当对于f，$\mathbf{cl}^+(\sigma; f) \cap S$ 和 $\mathbf{st}^-(\sigma; f) \cap S$ 均为空；并且，
- **s-临界** 当且仅当它按上述意义对于f 是临界的，且 $\mathbf{st}^-(\sigma; f)$ 为空。

（要求 $\mathbf{st}^-(\sigma; f) = \varnothing$ 等价于对于任意胞腔 $\tau \in X$， $\sigma \not\in \mathbf{h}(\tau; f)$。）

由 [12, 定义 2.2] 可知， σ 是临界的，当且仅当其对于限制函数$f|_S : S \to \mathbb{R}$按 Forman 的意义是临界的。如果分层是平凡的，那么所涉及的唯一层就是 $S = X$；在这种情况下，s-临界性与临界性一致，因为上述定义的第一个要求已经迫使 $\mathbf{st}^-(\sigma; f)$ 为空。

4. 局部莫尔斯数据

现在我们转而着手建立有关分层离散莫尔斯函数$f: X \hookrightarrow \mathbb{R}$ 的子水平集的基本结果。首先讨论区间 $[c,d] \subset \mathbb{R}$ 中不含 s-临界值的情形。如引理 2.4 的引言中所述，目标是建立 $\mathbf{cl}(f^{\leq c})$ 与 $\mathbf{cl}(f^{\leq d})$ 之间的关系。

定理 4.1. 设$f: X \hookrightarrow \mathbb{R}$ 是一个分层离散莫尔斯函数，并考虑区间$[c,d] \subset \mathbb{R}$，其中 $f_{\geq c} \cap f^{\leq d}$ 仅包含一个胞腔 σ，且该胞腔不是 s-临界的。则存在一个滤过塌缩 $\mathbf{cl}(f^{\leq d})$ $\mathbf{cl}(f^{\leq c})$。

证明。若 $f(\sigma) = c$，那么根据 σ 的唯一性，我们得到 $f^{\leq c} = f^{\leq d}$，无需再证明；因此我们假设 $f(\sigma) \in (c, d]$。现在论证分为两种情况：下星 $\mathbf{st}^-(\sigma; f)$ 为空，或不为空。其中，非空的情况要简单得多。

[2]此外，任何此类序列中的第一对必定是(τ, σ)，因为 σ 属于$\mathbf{cl}(\sigma)$ 中每个胞腔的开星，而在 S 中，它可能配对的唯一另一个胞腔是 τ。

情形 1：若 $\mathrm{st}^-(\sigma;\mathrm{f})$ 含有某个胞腔 τ，则由 (1) 可知，$\sigma<\tau$ 和 $\mathrm{f}(\sigma)\geq\mathrm{f}(\tau)$ 均成立。由 f 的单射性以及 σ 在 $\mathrm{f}_{\geq c}\cap\mathrm{f}^{\leq d}$ 中的唯一性，我们得到 $\mathrm{f}(\tau)<\mathrm{c}$，这迫使 $\sigma\in\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq c})$。由引理 2.4(1)，可得 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq d})=\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq c})$，因此平凡塌缩已足够。

情况 2： 若 $\mathbf{st}^-(\sigma;\ f)$ 为空，则由于 $f(\sigma)>c$，我们有 $\sigma\not\in\mathbf{cl}(f^{\leq c})$。因此，引理2.4(2) 得出

$$\mathbf{cl}(f_{\leq d})-\mathbf{cl}(f_{\leq c})=\widehat{\mathbf{h}}(\sigma;f).$$

由于 σ 不是 s-临界，且 $\mathrm{st}^-(\sigma;\mathrm{f})$ 为空，定义 3.1(2) 迫使 $\mathrm{cl}(\sigma)\ \mathrm{sh}(\sigma;\mathrm{f})$。现在我们声称，将 $\mathrm{cl}(\sigma)$ 化约为 $\mathrm{sh}(\sigma;\mathrm{f})$ 的同一列初等坍缩，也会将 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq d})$ 化约为 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq c})$。首先，由 (2) 可知

$$\mathbf{cl}(\sigma)-\mathbf{sh}(\sigma;f)=\widehat{\mathbf{h}}(\sigma;f),$$

因此，在这两种情形下，都只能剔除位于 σ 的增广光环中的胞腔。接下来需要确认，从 $\mathbf{cl}(\sigma)$ 中移除的自由面配对，在$\mathbf{cl}(f^{\leq d})$中也仍是自由面配对。这需要检查开星，如第 1.2 节所述。具体而言，对于每个$\widehat{}$胞腔 $\gamma\in\mathbf{h}(\sigma;\ f)$，我们必须证明

$$\big[\mathbf{st}(\gamma)\cap\mathbf{cl}(\sigma)\big]\supset\big[\mathbf{st}(\gamma)\cap\mathbf{cl}(f_{\leq d})\big],$$

因为反向包含关系由事实 $\mathrm{f}(\sigma)\leq\mathrm{d}$ 保证。我们将采用反证法，假设存在某个 $\rho>\gamma$，属于 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq d})-\mathrm{cl}(\sigma)$。根据 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq d})$ 的定义，存在一个上余胞腔 $\rho'\geq\rho$，使得 $\mathrm{f}(\rho')\leq\mathrm{d}$。现在，$\rho\not\in\mathrm{cl}(\sigma)$ 蕴含 $\rho'\neq\sigma$；又因为 σ 是取值为 $[\mathrm{c}$ 的唯一胞腔，$\mathrm{d}],$，我们得到 $\mathrm{f}(\rho')<\mathrm{c}\leq\mathrm{f}(\sigma)$。这违反了 $\gamma\in\widehat{}\,\mathrm{h}(\sigma;\mathrm{f})$ 所要求的取最小值性质，从而证明得证。□

上述结果的一个奇特推论是，只有当临界胞腔同时也是 s-临界时，它们才会影响函数 f 的子水平集的过滤拓扑。现在，我们量化当内点区间 (c,d) 包含一个 s-临界值时，从 $\mathbf{cl}(f^{\leq d})$ 到 $\mathbf{cl}(f^{\leq c})$ 的拓扑变化。这属于莫尔斯理论第二基本定理的范畴。由于我们的 f 是单射，我们可以放心地将注意力限制在 $f_{\geq c}\cap f^{\leq d}$ 为单元素集的情况。

定理 4.2. 设 $f\colon\ K\hookrightarrow\mathbb{R}$ 是一个分层离散莫尔斯函数，$\sigma\in X$ 是一个 s-临界胞腔，满足 $c:=f(\sigma)$。对于所有充分小的 $\varepsilon>0$，子复形 $\mathbf{cl}(f^{\leq c+\varepsilon})$ 是 $\mathbf{cl}(\sigma)$与 $\mathbf{cl}(f^{\leq c-\varepsilon})$ 的并，它们沿交集 $\mathbf{sh}(\sigma;f)$相接。

证明。由于 X 有限且 f 是单射，我们可以自由地选择 $\varepsilon>0$，使得 σ 是 X 中唯一落在 $\mathrm{f}_{\geq c-\varepsilon}\cap\mathrm{f}^{\leq c+\varepsilon}$ 内的胞腔。又因为 σ 是 s-临界的，由定义 3.2 可知，$\mathrm{st}^-(\sigma;\mathrm{f})$ 为空。因此，σ 不在 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq c-\varepsilon})$ 中，所以引理 2.4(2)推出$\widehat{}\qquad\qquad\widehat{}\,\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq c+\varepsilon})$ 等于 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}^{\leq c-\varepsilon})$ 与 $\mathrm{h}(\sigma;\mathrm{f})$ 的并。根据定义 2.1，$\mathrm{h}(\sigma;\mathrm{f})\subset\mathrm{cl}(\sigma)$ 成立，因此得到包含关系

$$\mathbf{cl}(f_{\leq c+\varepsilon})\subset\big[\mathbf{cl}(f_{\leq c-\varepsilon})\cup\mathbf{cl}(\sigma)\big].$$

反过来，$\mathbf{闭包}(\sigma)\subset\mathbf{闭包}(f^{\leq c+\varepsilon})$，因为 $f(\sigma)=$包含关系 $\leq$包含关系 $+\varepsilon$，所以反向的包含关系也成立。这证明 $\mathbf{闭包}(f^{\leq c+\varepsilon})$ 等于上面展示的并集。接下来需要通过证明以下内容来确立推出性质：

$$\mathbf{sh}(\sigma;f)=\mathbf{cl}(f_{\leq c-\varepsilon})\cap\mathbf{cl}(\sigma).$$

下面我们 将证明左侧包含于右侧，反之亦然。 a.

⋆ **左侧** $\subset$ **右侧**：由（2）和定义 2.1，若一个胞腔 γ 属于 $\mathbf{sh}(\sigma;f)$，则 $\gamma<\sigma$ 且

$$\sigma\neq\mathrm{argmin}[f/\mathbf{st}^-(\gamma;f)].$$

我们断言，这个不等式迫使 $\gamma \in \mathrm{cl}(\mathrm{f}_{\leq c-\varepsilon})$。如果 $\mathrm{st}^-(\gamma;\mathrm{f})$ 为空，那么 $\mathrm{f}(\gamma) < \mathrm{f}(\sigma)$，因此 $\mathrm{f}(\gamma) \leq \mathrm{c} - \varepsilon$，从而得到所需的 $\gamma \in \mathrm{f}_{\leq c-\varepsilon} \subset \mathrm{cl}(\mathrm{f}_{\leq c-\varepsilon})$。或者，如果某个$\rho \in \mathrm{st}^-(\gamma;\mathrm{f})$ 满足 $\mathrm{f}(\rho) < \mathrm{f}(\sigma)$，那么 $\mathrm{f}(\rho) \leq \mathrm{c} - \varepsilon$，因此 $\gamma \in \mathrm{cl}(\mathrm{f}_{\leq c-\varepsilon})$。

$\star$**右 $\subset$ 左**：我们证明，任意胞腔 γ 都必须位于$\mathbf{cl}(\sigma) \cap \mathbf{cl}(f_{\leq c-\varepsilon})$之外 $\widehat{\mathbf{h}}(\sigma;\mathrm{f})$。如果它$\gamma$属于 $\mathrm{f}_{\leq c-\varepsilon}$，那么由于 σ 的 f 值更高，我们有 $\sigma \not\in \mathrm{st}^-(\gamma;\mathrm{f})$。因此，$\sigma$ 不可能是 f 在 γ 的下星上的最小值自变量，这意味着 γ 位于 σ 的增广光环之外。另一方面，如果 γ 属于 $\mathrm{cl}(\mathrm{f}_{\leq c-\varepsilon})$，因为某个胞腔 $\rho > \gamma$ 满足 $\mathrm{f}(\rho) \leq \mathrm{c} - \varepsilon$，那么这个 ρ 的存在再次排除了 $\sigma = \mathrm{argmin}[\mathrm{f}/\mathrm{st}^-(\sigma;\mathrm{f})]$ 的可能性，因为我们有

$$f(\rho) \leq c - \varepsilon < c = f(\sigma).$$

因此 $\widehat{\mathbf{h}}$地，我们看到 γ 必须属于$\mathbf{cl}(\sigma) - \mathbf{h}(\sigma;\ f)$ 因此属于$\mathbf{sh}(\sigma;\ f)$ 根据（2）. □

5. 通过上包络获得局部 Morse 数据

有限正则 CW 复形 X 的**重心细分**是单纯复形 $\mathrm{Sd}(X)$，其k-单形（对所有$k \geq 0$）均为如下形式的严格递增链：

$$\xi := [\sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_k]$$

位于面偏序集 $(\mathrm{X}, \leq)$ 中。通过从底层链 $\sigma_0 < \cdots < \sigma_k$ 中删去一个或多个胞腔，可得到面 $\eta < \xi$。存在一个自然的保序末胞腔映射 $\omega : \mathrm{Sd(X)} \twoheadrightarrow \mathrm{X}$，它将每个这样的 ξ 映射到其末端胞腔 σ_k。不难验证，Sd(X) 通过 ω 从 X 自然继承分层——也就是说，对于 X 中的每个层 $\mathrm{S} \subset$，都存在 Sd(X) 中唯一的层 $\mathrm{S}' \subset$，使得单形 ξ 属于 S'，当且仅当其末胞腔 $\omega(\xi)$ 属于 S。显然，S' 仅由经过重心细分的 S-胞腔构成，因此我们将其记作 Sd(S)，而非 S'。在本节中，我们始终假设 X——因此 Sd(X) 也——是分层的。

定义 5.1。单射函数**上包络**$f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ 是函数$\mathbf{U}f : \mathrm{Sd}(X) \to \mathbb{R}$，定义为

$$\mathbf{U}f\left([\sigma_0 < \cdots < \sigma_k]\right) := \max\left\{f(\sigma_i) \mid 0 \leq i \leq k\right\}.$$

（可以放心地对任意$X \to \mathbb{R}$定义上包络，但我们这里唯一感兴趣的情况是f为单射。）

请注意，尽管原函数f 是单射，$\mathbf{U}f$ 几乎从来不是单射。因此，X 上的分层离散莫尔斯函数的上包络很少会在 $\mathrm{Sd}(X)$上给出分层离散莫尔斯函数。取上包络的优点在于$\mathbf{U}f$是保序的——给定 $\mathrm{Sd}(X)$中的 $\xi \leq \eta$，总有$\mathbf{U}f(\xi) \leq \mathbf{U}f(\eta)$ 属于 $\mathbb{R}$。这一单调性引出了下面这个初等结果。

命题 5.2。给定任意函数$f : X \to \mathbb{R}$及值 $c \in \mathbb{R}$，其子水平集

$$\mathbf{U}f_{\leq c} := \{\xi \in \mathrm{Sd}(X) \mid \mathbf{U}f(\xi) \leq c\}$$

是$\mathrm{Sd}(X)$的一个子复形。

证明。假设单形 $\xi \in \mathrm{Sd}(X)$ 属于 $\mathbf{U}f_{\leq c}$，并考虑一个面 $\eta < \xi$。根据定义 5.1，我们看到 $\mathbf{U}f(\eta)$ 是f在较小集合上的最大值，因此得到 $\mathbf{U}f(\eta) \leq \mathbf{U}f(\xi) \leq c$。因此，我们得到 $\eta \in \mathbf{U}f_{\leq c}$，证毕。□

现在，我们希望明确描述分层莫尔斯函数$f: X \hookrightarrow \mathbb{R}$ 在胞腔 $\sigma \in X$ 处的局部莫尔斯数据，用 $\mathrm{Sd}(X)$ 中$\mathbf{U}f$ 的次水平集来刻画，而不使用f 在X中的（闭包的）次水平集。为此，最好进一步了解对应顶点 $[\sigma] \in \mathrm{Sd}(X)$的邻域。显然， $[\sigma]$ 的开星由所有重心单形组成，这些单形所对应的链在某个位置包含 σ：

$$\mathbf{st}[\sigma] = \{[\sigma_0 < \cdots < \sigma_k] \in \mathrm{Sd}(X) \mid \sigma_i = \sigma \text{ for some } 0 \le i \le k\}.$$

因此， $[\sigma]$的**链接** 为

$$\mathbf{lk}[\sigma] := \mathbf{cl}(\mathbf{st}[\sigma]) - \mathbf{st}[\sigma],$$

是 $\mathrm{Sd}(X)$ 的子复形，它由所有这样的 ξ组成：其底层链 $\sigma_0 < \cdots < \sigma_k$可以通过 σ扩充。

注 5.3. 具体来说，给定$\mathbf{lk}[\sigma]$中的任意 $\xi = [\sigma_0 < \cdots < \sigma_k]$，我们必有以下情况之一：
(1) $\sigma < \sigma_0$，因此 σ 适合放在链的开头；或 (2) $\sigma_k < \sigma$，
因此 σ 适合放在链的末尾；或 (3) 对于 $\{0, 1, \ldots, k-1\}$
中的某个i， $\sigma_i < \sigma < \sigma_{i+1}$。
在每种情 这些不等式都是严格的，因此对于任意 i，所以 $\sigma \neq \sigma_i \not\in \mathbf{st}[\sigma]$.

为确认 $\mathbf{lk}[\sigma]$ 是 $\mathrm{Sd}(X)$ 的子复形，如上所述，我们可以利用 $\mathbf{st}[\sigma]$ 是其闭包中的一个上集这一事实，也可以直接注意到，移除任意一个 σ_i 不会影响$\sigma_0 < \cdots < \sigma_k$ 的 σ可增广性。设 $c := f(\sigma)$，并将沿着 $\mathbf{U}f$ 的 $[\sigma]$ 的**下链接** 定义为

$$\mathbf{lk}_f^-[\sigma] := \mathbf{lk}[\sigma] \cap \mathbf{U}f_{<c}, \tag{4}$$

其中 $\mathbf{U}f_{<c}$的定义与 $\mathbf{U}f_{\le c}$类似。由于 X是有限的，存在 $\varepsilon > 0$使得$\mathbf{U}f_{<c}$与 $\mathbf{U}f_{\le c-\varepsilon}$重合，因此根据命题 (X) 5.2，它构成 Sd的一个子复形。由此可知，下链接是若干子复形的交集，因而是 $\mathrm{Sd}(X)$的子复形。下链接在研究定义于单纯复形顶点上的单射实值映射的次水平集时发挥着关键作用。这一现象最突出的例子见于 Bestvina 和 Brady 的分片线性莫尔斯理论 [4]。

定义 5.4。 我们用K_i 表示单纯复形K中i维单形的集合。给定另一个单纯复形L，回顾一下，**联结** $K \star L$ 是一个新的复形，其n维单形为

$$(K \star L)_n = K_n \sqcup L_n \sqcup \coprod_{i+j=n-1} K_i \times L_j.$$

锥 在L 上是这一构造的特例，其中K 由单个顶点组成。

锥 $[\sigma] \star \mathbf{lk}^-{}_f\,[\sigma]$ 显然是 $\mathrm{Sd}(X)$ 的一个子复形；与下链接本身结合起来，它完全刻画了当f在X上为单射时，子水平集$\mathbf{U}f_{\le c-\varepsilon} \hookrightarrow \mathbf{U}f_{\le c+\varepsilon}$的包含关系。

命题 5.5. 令$\mathbf{U}f: \mathrm{Sd}(X) \to \mathbb{R}$ 为单射 $f: X \hookrightarrow \mathbb{R}$的上包络。对于每个满足 $c := f(\sigma)$的胞腔 $\sigma \in X$，存在足够小的 $\varepsilon > 0$，使得$\mathbf{U}f_{\le c+\varepsilon}$是$\mathbf{U}f_{\le c-\varepsilon}$与 $[\sigma] \star \mathbf{lk}^- f\,[\sigma]$ 沿其交集$\mathbf{lk}^- f\,[\sigma]$的并集。

P证明。由于 f 是单射且 X 是有限的，我们可以放心地选取一个 $\varepsilon > 0$，使得 σ是位于交集 X 中的唯一胞腔 $f_{\geq c-\varepsilon} \cap f_{\leq c+\varepsilon}$。根据定义 5.1，上包络 $\mathbf{U}f$ 在 $\mathbb{R}$中取值与 f 相同。因此，任何胞腔

$$\eta = [\sigma_0 < \cdots < \sigma_k] \text{ lying in } \left(\mathbf{U}f_{\leq c+\varepsilon} - \mathbf{U}f_{\leq c-\varepsilon}\right)$$

满足 $\mathrm{U\,f}\,(\eta) = \mathrm{c}$。现在根据定义 5.1 以及 f 的单射性可知，$\sigma = \sigma_i$对于某个 $0 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{k}$ 成立，而对于所有其他的 $\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$，$\mathrm{f}\,(\sigma_j) < \mathrm{c}$。因此，利用我们选择 ε时所保证的σ 唯一性，我们知道，从底层链中移除 σ_i 后得到的面 $\xi < \eta$ 满足 $\mathrm{f}\,(\xi) \leq \mathrm{c} - \varepsilon$，因此 $\xi \in \mathrm{lk}^{-}\,\mathrm{f}\ [\sigma]$。由此，我们的 η 具有如下形式：$\xi \cup [\sigma]$，其中某个 $\xi \in \mathrm{lk}^{-}\,\mathrm{f}\ [\sigma]$，如所期望。□

对于寻求以 Goresky 和 MacPherson [14] 的方式，更忠实地离散化 f 在 $[\sigma]$ 、处局部莫尔斯数据的读者而言，前述结果或许令人失望。这里的核心差异在于，沿着 f 的 $[\sigma]$ 的下链接 L 无法明显地分解为 TL × N L，其中 TL 是一个完全位于包含 $[\sigma]$ 的唯一层 Sd(S) ⊂ X 内的切向分量，而 N L 是一个位于严格更高层 Sd(T) > Sd(S) 中的法向分量。这里有两个显而易见的障碍——首先，单纯复形对乘积运算不封闭，因此不应期待所需的 TL 和 NL 会构成 Sd(X) 的子复形。其次，单纯复形的情形使得所有试图在 $[\sigma]$ 周围取任意小邻域的朴素做法都难以奏效——可用的最小选择是 cl(st$[\sigma]$)；只要存在一个位于 T 中的面 $\tau < \sigma$，它就必然与较低层 Sd(T) < Sd(S) 相交。

尽管如此，我们仍继续。考虑一个（不一定是临界的）胞腔 σ，它属于 X，并固定一个单射函数 $f\colon X \hookrightarrow \mathbb{R}$。为简便起见，我们用 L 表示下链接 $\mathbf{lk}^{-}{}_{f}\ [\sigma]$，它来自（4）。第一步是从 L 中分离出两个相关的子复形，它们分别对应注记 5.3 中的前两种情况。

定义 5.6。若单形 $\xi = [\sigma_0 < \cdots < \sigma_k]$ 属于L，则称它位于
(1) 若满足 $\sigma_k < \sigma$，则属于**水平部分** $H\,L$；(2) 若满足 $\sigma < \sigma_0$，则属于**垂直部分** $V\,L$。
（这两个定义性质在取 ξ 的面时均保持不变，因此H 和V 构成L的子复形。）

We 列举H 和V的以下基本且实用的性质 .

命题 5.7。设 H 和 V 分别是沿着 f 的 σ 的下链接 L 的水平部分和垂直部分。那么，

(1) 交集 $H \cap V$ 为空；*(2)* 联结 $H \star V$ 为 L。

证明。对于（1），注意如果单形 $\xi = [\sigma_0 < \cdots < \sigma_k]$ 属于 H ∩V，就会得出矛盾 $\sigma < \sigma_0 < \sigma_k < \sigma$；第一个不等式来自 V 的定义，最后一个不等式来自 H 的定义。转到（2），假设 ξ 属于差集 $\mathrm{L} - (\mathrm{H} \cup \mathrm{V})$。由注 5.3，存在某个 i 属于 $\{0, 1, \ldots\ldots, \mathrm{k} - 1\}$，使得 $\sigma_i < \sigma < \sigma_{i+1}$。但是现在，$\xi$的前面 $[\sigma_0 < \cdots < \sigma_i]$ 属于 H，而后面 $(\sigma_{i+1} < \cdots < \sigma_k)$ 属于 V，因此 ξ 确实是 H 中的一个单形与 V 中的一个单形的不交并，正如定义 5.4 所要求的那样。□

结合前面的结果与命题 5.5，我们看到，$\mathbf{U}f$ 在 σ 处的局部莫尔斯数据为 $(H \star V) \hookrightarrow ([\sigma] \star (H \star V))$。由于连接运算在单纯复形上显然满足结合律，我们可以放心地将其改写为

$$(H \star V) \hookrightarrow ((\lbrack\sigma\rbrack \star H) \star V). \tag{5}$$

我们接下来的任务是考察 H 和 V 如何与从 (X) 继承而来的 X 对 Sd 的分层发生相互作用$(\hookrightarrow \mathbb{R})$。从现在起，我们假设 $\mathrm{f} : \mathrm{X}\,\sigma$ 满足定义 3.1，并且σ 是 f 的临界胞腔，但不要求其具有 s-临界性。

命题 5.8。 设 H 和 V 分别为 $[\sigma] \in \mathrm{Sd}(X)$ 的链接 L 的水平部分和垂直部分。若 $S \subset X$ 是包含 σ 的层，则

> *(1)* H 位于并集 $\bigcup_{T \leq S} \mathrm{Sd}(T)$ 中，该并集由在边界偏序中处于 S 的层级或低于 S 的（经细分）层组成；而 *(2)* V 位于并集 $\bigcup_{T > S} \mathrm{Sd}(T)$ 中，该并集由相对于边界偏序严格高于 S 的（经细分）层组成。

（事实上，第一个断言对所有 σ 都成立，而第二个断言要求 σ 为临界胞腔）。

证明。为证明 (1)，由定义 5.6 可知，单形 $\xi = [\sigma_0 < \cdots < \sigma_k]$of L 属于 H，当且仅当最后一个胞腔 $\omega(\xi) = \sigma_k$ 是 X 中 σ 的真面。因此，若 T $\subset$ X 是包含 σ_k 的层，则 cl(S) $\cap$ T 非空，从而 T $\leq$ S。细分后，ξ 必须属于 Sd(T)，如所需。对于 (2)，给定 $\xi \in$ V，根据 V 的定义，我们知道 σ 是第一个胞腔 σ_0 的真面；又因为 ξ 位于 σ 的下链接 L 中，所以 f (σ_0) < f (σ) 成立。因此，我们有 $\sigma_0 \in \mathrm{st}^{-}(\sigma; \mathrm{f})$，而 σ 是临界的这一事实现在迫使 σ_0 / $\in$ S（根据定义 3.2）。于是，σ_0 位于沿前沿序的某个 $\mathrm{T}_0 >$ S 中。类似地，沿着链 $\sigma_0 < \cdots < \sigma_k = \omega(\xi)$ 从左向右进行，我们看到，包含 σ_i 的层 T_i 必须满足对所有 i > 0 均有 $\mathrm{T}_i \geq \mathrm{T}_{i-1}$。特别地，由此可知，其细分包含 ξ 的层 T_k 满足 $\mathrm{T}_k \geq \mathrm{T}_0 >$ S，如所需。□

最后，我们将（5）与命题5.5 和5.8结合起来，得出本节的主要结果。

定理 5.9. 设 σ 是单射函数 f 的一个临界胞腔： $X \hookrightarrow \mathbb{R}$，且满足定义3.1的第一项要求。令 $c := f(\sigma)$，并任取 $\varepsilon > 0$，使得 σ 是 X 中唯一满足 $f(\sigma) \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$的胞腔。令 H 和 V 分别为沿着$\mathbf{U}f$ 的$[\sigma]$ 下链接的水平部分和垂直部分。那么，

> *(1)* $\mathbf{U}f^{\leq c+\varepsilon}$是$\mathbf{U}f^{\leq c-\varepsilon}$与$([\sigma] \star H) \star V$ 的并，它们沿交集 $H \star V$ 相接；并且，*(2)* 若 $S \subset X$ 是包含 σ的层，则 $[\sigma] \star H$ 位于层 $\leq \mathrm{Sd}(S)$ 的并集中，而 V 位于层 $> \mathrm{Sd}(S)$的并集中。

证明。先前结果中唯一尚未明确论证的断言，是 $[\sigma] \star H$ 属于层U 的并集 $\leq \mathrm{Sd}(S)$。根据命题 $\xi \in H$ 中的每个单形都属于U，这一点我们已经知道5.8，所以只需验证 $[\sigma] \cup \xi$ 也属于 U。根据定义5.6，可知 σ 必定是 $[\sigma] \cup \xi$底层链中的最后一个胞腔，因此 $[\sigma] \cup \xi$ 总是属于S，因而也属于U，证毕。□

参考文献

[1] K. Adiprasito 和 B. Benedetti。CAT(0) 空间的可塌缩性。*Geometriae Dedicata*，206：181–199，2020。[2] M. F. Atiyah 和 R. Bott。黎曼曲面上的杨–米尔斯方程。*Philosophical Transactionsof theRoyal Society of London. Series A*，308(1505)：523–615，1983。

[3] E. Babson 和 P. Hersh。由字典序产生的离散莫尔斯函数。《美国数学学会汇刊》，357(2)：509–534，2005。[4] M. Bestvina 和 N. Brady。群的 Morse 理论与有限性性质。《数学发明》，129：445–470，1997。[5]M. K. Chari。关于离散莫尔斯函数与组合分解。《离散数学》，217(1)：101–113，2000。[6] M. M. Cohen。简单同伦理论教程。施普林格出版社，1973。[7] C. C. Conley。孤立不变集与 Morse 指标，《CBMS 数学区域会议丛书》第 38 卷。美国数学学会，1978。[8] O. Cornea、K. A. De Rezende 和 M. R. Da Silveira。Conley 理论中的谱序列。《遍历理论与动力系统》，30(4)：1009–1054，2010。[9] J. Curry、R. Ghrist 和 V. Nanda。用于计算胞腔层上同调的离散莫尔斯理论。《计算数学基础》，16(4)：875–897，2016。[10] D. Farley 和 L. Sabalka。离散莫尔斯理论与图辫群。《代数与几何拓扑学》，5：1075–1109，2005。[11] A. Floer。拉格朗日交的 Morse 理论。《微分几何杂志》，28(3)：513–547，1988。[12] R. Forman。胞腔复形的 Morse 理论。《数学进展》，134(1)：90–145，1998。[13] R. Freij。等变离散 Morse 理论。《离散数学》，309(12)：3821–3829，2009。[14] M. Goresky 和 R. MacPherson。分层莫尔斯理论。施普林格出版社，1988。[15] M. J¨ollenbeck 和 V. Welker。通过代数离散 Morse 理论得到的极小分解，《美国数学学会回忆录》第 197 卷。AMS，2009。[16] K. Knudson 和 B. Wang。离散分层 Morse 理论：算法与使用指南。《离散与计算几何》，67(4)：1023–1052，2022。[17] M. Kukiela。具有有限条射线的 Morse 匹配的离散 Morse 理论主定理。《拓扑学及其应用》，160(9)：1074–1082。[18] M. Lipi´nski、J. Kubica、M. Mrozek 和 T. Wanner。有限拓扑空间上广义组合多向量场的 Conley–Morse–Forman 理论。《应用与计算拓扑学杂志》，7：139–184，2023。[19] J. N. Mather。拓扑稳定性札记。《美国数学学会通报》，49(4)：475–506，2012。[20] K. Mischaikow 和 V. Nanda。滤过的 Morse 理论与持久同调的高效计算。《离散与计算几何》，50(2)：330–353，2013。[21] M. Morse。整体变分法。《数学年刊》，26(3)：213–234，1925。[22] M. Mrozek。Lefschetz 复形上组合多向量场的 Conley–Morse–Forman 理论。《计算数学基础》，17：1585–1633，2017。[23] M. Mrozek 和 T. Wanner。组合多向量场的动力学。载于《组合拓扑动力学中的连接矩阵》，《数学施普林格简明丛书》，第 105–118 页。施普林格出版社，Cham，2015。[24] V. Nanda。离散 Morse 理论与局部化。《纯粹与应用代数杂志》，223(2)：459–488，2019。[25] V. Nanda。局部上同调与分层。《计算数学基础》，20(2)：195–222，2020。[26] V. Nanda、D. Tamaki 和 K. Tanaka。离散 Morse 理论与分类空间。《数学进展》，340：723–790，2018。[27] D. Salamon。连通简单系统与孤立不变集的 Conley 指标。《美国数学学会通报》，291：1–41，1985。[28] M. Salvetti。n 中实超平面补集的拓扑。《数学发明》，88(3)：603–618，1987。[29] S. Weinberger。分层空间的拓扑刻画。芝加哥大学出版社，1994。[30] H. Whitney。解析簇的切向。《数学年刊》，81(3)：496–549，1965。[31] E. Witten。超对称与 Morse 理论。《微分几何杂志》，17(4)：661–692，1982。[32] N. Yerolemou 和 V. Nanda。群复形的 Morse 理论。《纯粹与应用代数杂志》，228(6)：107606，2024。

附录 A. 多向量场与 Conley 指数

设 X 是一个有限正则 CW 复形。X 的**多向量** 是X 的任意非空、凸且连通的子集 M，其中 $(X,\leq)$。将 $X = \coprod_i M_i$ 划分为多向量，称为**多向量场**；它们已广泛用于动力系统的组合研究 [22, 23, 18]。以下给出多向量场的四个例子，其一般性大致依次递增：

(1) 最简单的情形是每个多向量都由 X 的单个胞腔构成，因此该多向量场就是将 X 划分为其组成胞腔的给定划分。(2) 给定一个按照 Forman 意义定义的离散莫尔斯函数 $f: X \to \mathbb{R}$，每个多向量要么是一个 f-临界胞腔，要么是由 $\{\sigma,\tau\}$ 个胞腔组成的一对，其中 $\sigma<\tau$，$\dim\tau=\dim\sigma+1$ 且 $f(\sigma)\geq f(\tau)$。由此得到的多向量场称为无圈部分匹配，是离散莫尔斯理论中的基本概念 [5]。(3) 在 [13, 第 3.2], 节中，Freij 考虑将 X 划分为区间；每个区间 I_σ^τ 由 X 中所有形如 $\sigma\leq\gamma\leq\tau$ 的胞腔 $\gamma\in$ 构成，其中某个固定的 $\sigma\leq\tau$ 属于 X，这些胞腔不一定具有余维 ≤ 1。这类区间划分也是多向量场。(4) 设 $X_\bullet$ 是如上文第 1.1 节所述的 X 的一个分层。各层构成 X 上的一个多向量场 —— 根据定义，各层连通；而凸性则由命题 1.3 得出。

反过来，并非每个多向量场都能按我们的定义产生一个分层，因为边界公理可能不成立。

多向量 的退出集 $\mathbf{M}\subset X$ 定义为 $\mathbf{ex}(M):=\mathbf{cl}(M)-M$；由于 M 是凸的，因此它在其闭包中构成一个上集，从而$\mathbf{ex}(M)$ 总是 $\mathbf{cl}(M)$的一个（可能为空的）子复形。以下定义构成了离散版本的 Conley 著名拓扑研究的起点，该研究关注 [7] 孤立不变集——例如参见 [23, 式 (7.4)]。

定义 A.1。 多向量 $M\subset X$ 的**同调康利指标** 定义为相对同调群

$$\mathbf{Con}_k(M):=\mathrm{H}_k(\mathbf{cl}(M),\mathbf{ex}(M);\mathbb{Z})$$

对每个维数 $k\geq 0$。若存在某个 k，使得M 是**临界的**，我们就称其为$\mathbf{Con}_k(M)\neq 0$。

容易验证（写出相关链复形即可），当 $M=\{\sigma\}$ 是一个单独的胞腔时，$\mathbf{Con}_k(M)$ 非平凡当且仅当$k=\dim\sigma$。另一方面，若$M=\{\sigma,\tau\}$包含两个胞腔，且 $\sigma<\tau$，$\dim\tau=\dim\sigma+1$，则对所有$k\geq 0$，$\mathbf{Con}_k(M)$ 均为平凡。

考虑多向量场 $\mathscr{M}=\{M_i\subset X\}$ 上的二元关系 $\blacktriangleright$，其定义为

$$M_i\blacktriangleright M_j \text{ if there exist } \sigma_i\in M_i \text{ and } \sigma_j\in M_j \text{ with } \sigma_i\geq\sigma_j,$$

（这显然是自反的。）我们称 $\mathscr{M}$ 为 **无环的**，当传递闭包 $\triangleright$ 的 $\blacktriangleright$在多向量集合上构成偏序时。因而，无环多向量场推广了由离散莫尔斯函数诱导的无圈部分匹配 [5]。事实上，很容易验证，无环多向量场也涵盖第 1.1节中的分层。

命题 A.2. *X 的任意分层中的层构成一个无环多向量场，并且 $\triangleright$与层上的前沿偏序一致。*

证明。根据定义，$S\blacktriangleright T$ 对一对层 $S\neq T$ 成立，当且仅当存在胞腔$\sigma\in S$ 和 $\tau\in T$，使得 $\sigma\geq\tau$；而这又当且仅当 $\mathbf{cl}(S)\cap T$ 非空。由命题1.2，所需结论即可得出。 □

提醒读者，前述结果并不意味着无环多向量场的多向量之间满足边界公理；我们只能通过命题 1.2，恢复边界公理所蕴含的偏序。另一方面，无环性确实使我们能够从 X 的多向量的 Conley 指标中恢复其整体同调。具体而言，由于 $\triangleright$ 是一个偏序，我们可以将多向量枚举为 $\{M_1,\dots,M_n\}$，使得 $M_i \triangleright M^j$ 蕴含 $i \geq j$。因此，

$$F_q := \bigcup_{i\leq q} M_i$$

构成一个滤过X 的子复形。现在我们可以考察该滤过**的 Conley-Morse 谱序列** [27, 8], 其中的项由相对同调群构成

$$E^1_{p,q} := \mathrm{H}_{p+q}(F_q, F_{q-1}; \mathbb{Z}),$$

并收敛到$E^\infty_{p,\,q} \simeq \mathrm{H}^{p+q}(X)$。关键的是，由切除可知，$E^1_{p,\,q}$ 与 Conley 指标同构$\mathbf{Con}^{p+q}(M^q)$。命题A.2 保证了类似的机制，可由 X 的各层的 Conley 指标组装出其整体同调。X 。