arXiv:2601.18362v1 [cs.FL] 26 Jan 2026

对抗同步

ANTON E. LIPIN 和 MIKHAIL V. VOLKOV

摘要。我们研究有限确定性自动机上的一种同步博弈变体。在该博弈中，Alice 每次移动时选择自动机 $\mathscr{A}$ 的一个输入字母，而 Bob 可以用 $\mathscr{A}$ 的输入字母表上的任意有限词作出回应；如果 Alice 的字母与 Bob 的回应交错组成的词能够重置 $\mathscr{A}$，Alice 就获胜。我们证明，如果 Alice 在 $\mathscr{A}$ 上的这一博弈中有获胜策略，那么 $\mathscr{A}$ 存在一个重置词，其长度严格小于 $\mathscr{A}$ 的状态数。相反，对于任意 $k \geq 1$，我们给出一些自动机，其最短重置词的长度与状态数呈二次关系；尽管如此，在一种博弈变体中，Alice 仍能获胜，其中 Bob 的回应被限制为长度至多为 k 的任意词。我们提供了用于判定多种同步博弈胜者的多项式时间算法，并分析了固定规模自动机上各种同步博弈变体之间的关系。

1. 引言

1.1. 自动机。 本文中的所有自动机都是完备、确定且有限的。这样的自动机（即确定有限自动机）是由两个有限非空集合以及一个映射$Q \times \Sigma \to Q$构成的二元组（Q Σ）。我们称Q为状态集，称 Σ为输入字母表；Q和 Σ的元素分别称为状态和字母。映射 $Q \times \Sigma \to Q$称为字母对状态的作用。对于状态 $q \in Q$ 和字母 $a \in \Sigma$，文献中通常将a 对q的作用结果直接记作qa。本文默认将其记作$q \cdot a$，但在同一论证涉及多个自动机时，也可能使用 $\circ$ 表示这种作用。

任何确定有限自动机 $\mathscr{A} =$ （Q Σ）都可以表示为一个顶点集为Q 的标号有向图，其边的形式为$q \xrightarrow{a} q \cdot a$，其中$q \in Q$ 且$a \in \Sigma$。我们将宽泛地把图论概念应用于自动机；也就是说，例如，我们会谈到 $\mathscr{A}$的路径或强连通分量，指的是 $\mathscr{A}$对应有向图中的路径或强连通分量。

在本文中，我们会不时遇到由 Jan ˇCerný 发明的系列$\{\mathscr{C}_n\}_{n=2、3\ldots\ldots}$中的自动机 [6]，，因此现在就介绍它们，以 exemplify 上述概念。自动机 $\mathscr{C}_n$ 的状态集 $\mathbb{Z}_n$ 为模n 剩余类的集合，并具有两个输入字母a 和b，其作用如下：

$$0 \cdot a := 1, \quad m \cdot a := m \text{ for } 0 < m < n, \qquad m \cdot b := m + 1 \pmod{n}.$$

（此处及下文中，符号 := 表示按定义相等；也就是说，A:=B 表示A定义为B。）

(A.E. Lipin)克拉索夫斯基数学与力学研究所，620108叶卡捷琳堡，俄罗斯；乌拉尔联邦大学，620062 叶卡捷琳堡，俄罗斯（M. V. Volkov）620075 叶卡捷琳堡，俄罗斯电子邮箱：tony.lipin@yandex.ru，m.v.volkov@urfu.ru。日期：2026年1月22日版本。2020 数学学科分类。68Q45，91A05。关键词和短语。同步自动机、复位阈值、同步博弈。

图1展示了一个来自Černý序列[1]的通用自动机。

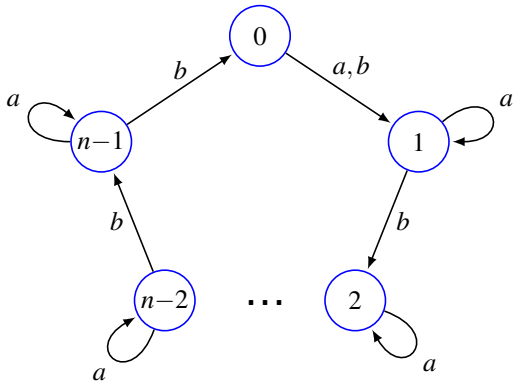


图1。自动机 $\mathscr{C}_n$

在 Σ 上的一个词 是由字母组成的有限序列。如果 $w = a_1 \cdots a_\ell$，其中$a1,\ldots a_\ell$是字母，则数值 ℓ称为词w 的长度，记作 $|w|$。我们允许存在空词，记作 ε，它是空序列，并令 $|\varepsilon| := 0$。

我们采用标准记号 Σ^* 表示所有由 Σ中的字母构成的词的集合。DFA（Q Σ）中字母对状态的作用自然扩展为由 Σ 中的字母构成的词对状态和状态集的作用。具体而言，对于$q \in Q$ 和$w \in \Sigma^*$，w 对q 的作用递归定义如下：

$$q \cdot w := \begin{cases} q & \text{if } w = \varepsilon, \\ (q \cdot w') \cdot a & \text{if } w = w'a \text{ for some } w' \in \Sigma^* \text{ and } a \in \Sigma, \end{cases}$$

而w 对一个子集$P \subseteq Q$ 的作用定义为$P \cdot w := \{p \cdot w : p \in P\}$。

1.2. **同步自动机**。如果存在一个词$w \in \Sigma^*$，使得将w 作用于Q 中的任意状态都会得到同一个状态，则称DFA（Q Σ）是同步的：

$$q \cdot w = q' \cdot w \quad \text{for all} \quad q, q' \in Q.$$

任何满足此条件的词都称为该自动机的复位词。同步自动机的复位词的最小长度称为其复位阈值，并记作 $\mathrm{rt}(\mathscr{A})$。

Černý序列中的确定有限自动机 $\mathscr{C}_n$ 是著名的同步自动机示例。Černý [6, 引理 1]证明，该自动机 $\mathscr{C}_n$ 的最短复位词为词 $(ab^{n-1})^{n-2}a$，长度为 $(n-1)^2$。因此，$\mathrm{rt}(\mathscr{C}_n) = (n-1)^2$。

同步自动机被广泛研究，因为它们是直观自然的抗错误系统模型，在计算机科学的不同领域有着诸多应用，包括编码理论、机器人学以及反应式系统测试。它们还揭示了与符号动力系统、替换系统、置换群及其他数学领域之间引人入胜的联系。就其本身而言，同步自动机也备受关注，这是因为 Černý 猜想可谓有限自动机组合理论中悬而未决时间最长的问题。（该猜想提出于20世纪60年代末，

[1]我们采用通常的约定：带有多个标签的边表示一组平行边。具体而言，图1中的边 $0 \xrightarrow{a,\ldots,b} 1$ 表示平行边 $0 \xrightarrow{a} 1$ 和 $0 \xrightarrow{b} 1$。

该猜想断言，任意具有n 个状态的同步自动机，其复位阈值都不超过 $\mathrm{rt}(\mathscr{C}_n) = (n-1)^2$。）关于自动机同步领域的入门介绍，请参阅《自动机理论手册》第 [14] 章及综述文章 [20]。围绕 Černý 猜想，持续更新的综述 [21] 提供了定期更新的参考资料。

1.3. 同步博弈。 Födor Fominykh 和第二位署名作者 [12]从博弈论视角开启了对同步自动机的研究。这项研究一方面受到 [5]提出的软件测试博弈论方法的启发，另一方面则受到 [3, 4] 中用于论证新的同步自动机实例的类孔明棋博弈的启发；这些自动机的复位阈值接近 Černý 猜想的界。在 [12], 引入的博弈中，两名玩家 Alice（同步者）和 Bob（非同步者）轮流从确定有限自动机 $\mathscr{A}$ 的输入字母表中选择字母。Alice 希望实现同步；当她和 Bob 所选字母按选择顺序组成的词能够重置 $\mathscr{A}$ 时，Alice 获胜。另一方面，Bob 力求阻止同步；若同步不可避免，他就尽可能拖延同步。在假设双方都采取最优策略的情况下，博弈结果完全取决于自动机。由此引出了一个问题：如何将同步自动机分类，区分 Alice 有获胜策略的自动机和 Bob 有获胜策略的自动机。 [8–12, 15] 取得了若干相关成果。

1.4. 新的同步博弈与我们的贡献。 人们在 [10,第5节4]中注意到， [8–12] 中确立的许多结果，在修改后的博弈中仍然成立；在这种博弈里，Bob 可以针对 Alice 的每次移动选择任意一个词。采用此类修改后规则的同步博弈，似乎能更好地模拟那些必须在自然干扰或人为干扰下执行任务、且需要可靠控制的系统。事实上，自然界或对手的行动节奏未必与我们相同，也不必对我们的每个动作都恰好以一个障碍或反制行动作为回应。

本文研究对手拥有不同“自由度”的同步博弈。我们主要关注同步速度。Alice 在与对手对弈时能够获胜的自动机，似乎更容易实现同步。因此，自然可以预期，在没有阻力的情况下，这些自动机应当能够快速同步——也就是说，它们应当具有较短的复位词。我们证明，对于一个确定有限自动机（Q Σ），如果 Alice 即使在 Bob 可以用 Σ^* 任意词回应的情况下也能获胜，那么其复位阈值总是小于 $|Q|$。由此，我们得到 Jorge Almeida 和 Benjamin Steinberg 关于满足某些代数限制的同步自动机复位阈值的一项结果的全新组合证明，并对该结果加以强化 [2] 。与此相反，对于任意 k，我们给出一些自动机，它们的复位阈值与状态数的平方成正比；在这些自动机上，只要 Bob 的回应词长度小于 k，Alice 就能获胜。对于$k = 2$，这解决了 [9]中遗留的一个开放问题。

我们还提供了多项式时间算法，用于判定在我们考虑的同步博弈变体中，给定一个确定有限自动机时，哪位玩家 Alice 或 Bob 拥有获胜策略；并分析了在固定规模的自动机上进行这些变体时，它们之间的关系。

1.5. 预备知识。 我们尽力使本文内容相对自足。本文仅使用图论和算法学中的少数常见概念；不要求读者具备博弈论或自动机理论的背景知识。

2. 对抗同步的变体 TION

2.1. 定义与图形表示。 $\mathbb{N}$ 是所有正整数的集合，而$\mathbb{N}$ 表示在 $\mathbb{N}$ 中加入符号 ω所得的集合。我们将 $\mathbb{N}$上的通常序关系扩展到 $\mathbb{N}$，规定对所有$k \in \mathbb{N}$，$k < \omega$。对于$k \in \mathbb{N}$ 和字母表$\overline{\Sigma}$，我们用 $\Sigma^{<k}$ 表示由 Σ 上的所有长度小于k的词组成的集合。特别地，$\Sigma^{<1} = \{\varepsilon\}$ 和 $\Sigma^{<\omega} = \Sigma^*$。

对于$k \in \mathbb{N}$ 以及确定有限自动机 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$，我们将以下博弈称为在 $\mathscr{A}$ 上的k-同步博弈。两位玩家 Alice（同步者）和 Bob（反同步者）轮流移动。在自己的回合中，Alice 从 Σ 中选择字母；在自己的回合中，Bob 从 $\Sigma^{<k}$ 中选择词（因此，当$k = \omega$时，Bob 可以选择任意有限词）。

截至t回合，Alice 所选的所有字母与 Bob 所选的所有词按照选取顺序连接而成的序列，称为截至t回合的博弈历史。如果在某一回合，这段历史是自动机 $\mathscr{A}$ 的复位词，那么 Alice 就赢得博弈。Bob 的目标是无限期地继续博弈；或者，如果同步不可避免，就尽可能延长博弈。

读者可能已经注意到，我们尚未说明由谁先开始博弈：Alice 还是 Bob。这其实并不重要。给定一个确定有限自动机，如果 Alice 在由她先移动的k-同步博弈中有获胜策略，那么在由 Bob 先移动的博弈中她也能获胜，因为在复位词左侧乘以任意词后，它仍然是复位词。给定一个确定有限自动机，如果 Bob 在由 Alice 先开始的k-同步博弈中有获胜策略，那么他也能赢得由自己先移动的博弈：只需将第一个回合让给 Alice，也就是在初始移动时选择空词。

为简洁起见，本文将始终采用以下两项约定。首先，默认所讨论的确定有限自动机至少有三个状态，因为对于任何状态数不超过两个的同步自动机，Alice 都能轻而易举地获胜。其次，由于本文只讨论同步博弈，因此将“k-同步博弈”简称为“k-博弈”。

使用标准的图形表示，可以将确定有限自动机 $\mathscr{A}$上的k-博弈可视化为一种双人类孔明棋的博弈，其中（有向图）$\mathscr{A}$作为游戏棋盘。开始时，$\mathscr{A}$的每个状态上都放有一个令牌。令牌按以下方式移动和移除：如果 Alice 选择一个字母a，棋盘上所有尚未移除的令牌便同时沿标记为a的边滑动。同样，如果 Bob 选择一个词w，棋盘上所有尚未移除的令牌便同时沿着由连续边组成的路径滑动，这些边的标签依次构成w。之后，每当多个令牌到达同一状态时，除一个之外，其余令牌都会被移除；因此，移动结束后，每个状态上至多有一个令牌。

我们将某个回合t 结束后携带令牌的状态集合称为回合t时的位置 。由于令牌移动对应于字母和词的动作，确定有限自动机（Q Σ）上的k博弈在回合t 时的位置等于$Q{\cdot}u$，其中u 是截至回合t的博弈历史。

举例来说，图2上半部分展示了在来自Černý序列的自动机 $\mathscr{C}_5$ 上进行博弈时的一个典型中间位置。在此位置，状态0、1和3上有令牌（以灰色显示）。左下部分展示了在此位置执行移动b 的效果，右下部分则展示了执行移动ab的结果。请注意，在后一种情况下，一个令牌被移除了，因为起源于状态0和1的令牌移动到了同一个状态。

在图形表示中，当所有令牌只剩一个时，Alice 赢得博弈。如果 Bob 能无限期地在棋盘上至少保留两个令牌，他就获胜。

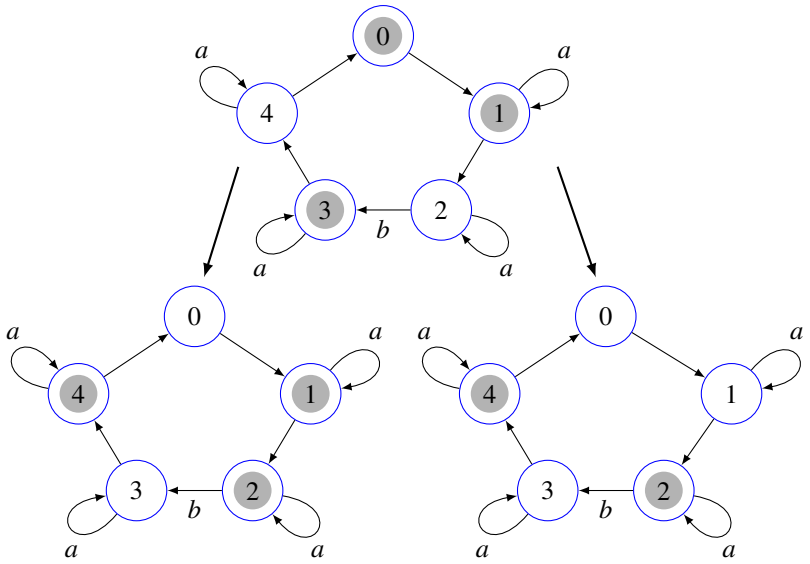


图2. $\mathscr{C}_5$ 上异步化游戏中的移动

2.2. **层级 A_k-自动机**。 假设 Alice 和 Bob 都采取最优策略，那么在确定有限自动机 $\mathscr{A}$ 上的k-博弈的结果仅取决于 $\mathscr{A}$。如果 Alice 在 $\mathscr{A}$ 上的k-博弈中拥有获胜策略，我们就称 $\mathscr{A}$ 为A_k-自动机。

以下结论显而易见：

(O1) 一个确定有限自动机是 A_1-自动机，当且仅当它是同步的；(O2) 对每个 $k \in \mathbb{N}$，每个 A_{k+1}-自动机都是 A_k-自动机；(O3) 对每个 $k \in \mathbb{N}$，一个确定有限自动机是 A_ω-自动机，当且仅当它是 A_k-自动机。

对于 $k \in \mathbb{N}$，用 $\mathbf{A}_k$ 表示所有 A_k-自动机构成的类。由 (O2) 和 (O3) 可知，类 $\mathbf{A}_k$ 构成一个递减层级：

$$\mathbf{A}_1 \supseteq \mathbf{A}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{A}_k \supseteq \ldots \mathbf{A}_\omega. \tag{1}$$

事实上，(1) 中的所有包含关系都是严格的。为证明这一点，对每个 $n \geq 3$，考虑确定有限自动机$\mathscr{E}_n = (\mathbb{Z}_n, \{b, c, d\})$，其字母作用如下：

$$m{\cdot}b := m+1 \pmod n; \qquad m{\cdot}c := \begin{cases} 0 & \text{if } m = 0, \\ 1 & \text{if } m \neq 0; \end{cases} \qquad m{\cdot}d := \begin{cases} 1 & \text{if } m = n-1, \\ 0 & \text{if } m \neq n-1. \end{cases} \tag{2}$$

图3展示了自动机 $\mathscr{E}_3$ 和 $\mathscr{E}_4$。

引理2.1。 对于每个 $n \geq 3$，自动机 $\mathscr{E}_n$ 属于 $\mathbf{A}_{n-1} \setminus \mathbf{A}_n$。

证明。 我们需要证明，Alice 在 $\mathscr{E}_n$ 上的（$n-1$）-博弈中拥有获胜策略，而 Bob 可以在该自动机上赢得 n-博弈。

规则 (2) 对于每个字母 $x \in \{b, c, d\}$给出 $\{0, n-1\}{\cdot}x = \{0,1\}$。因此

$$\{0,n-1\}{\cdot}xb^{n-1} = \{0,1\}{\cdot}b^{n-1} = \{0+(n-1) \pmod n,\ 1+(n-1) \pmod n\} = \{0,n-1\}.$$

因此，如果在 $\mathscr{E}_n$ 上的n-博弈中，Bob 每个回合都下词b^{n-1}，那么在他每次移动之后，状态 0 和$n-1$ 都带有令牌。因此，Bob 阻止了同步并赢得了博弈。

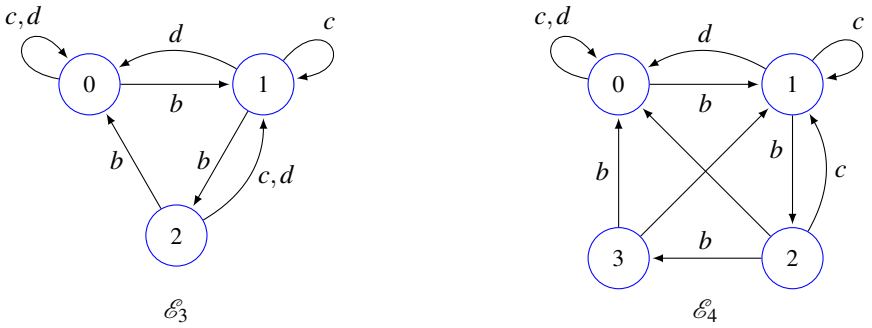


图3. 自动机 $\mathscr{E}_3 \in \mathbf{A}_2 \setminus \mathbf{A}_3$ 和 $\mathscr{E}_4 \in \mathbf{A}_3 \setminus \mathbf{A}_4$

要赢得 $\mathscr{E}_n$ 上的 $(n-1)$-博弈，Alice 在第一个回合选择字母 c 或 d。此后，只有状态 0 和 1 持有令牌。Bob 则任意选择一个长度为$<n-1$的词 w，使令牌移动到 $\{0,1\}\cdot w$ 中的状态。如果 $n-1 \notin \{0,1\}\cdot w$，Alice 就下字母 d 获胜。规则 (2) 确保，对于每个 $m \neq n-1$ 和每个 $x \in \{b, c, d\}$，都有 $m\cdot x \leq m+1$。由此可知，只有当 $w = b^{n-2}$ 时，才可能有 $n-1 \in \{0,1\}\cdot w$。在这种情况下，$\{0,1\}\cdot w = \{n-2, n-1\}$，Alice 下字母 c 获胜。□

推论2.2. *(1)* 中的所有包含关系都是严格的。

证明。 对于 $k > 1$，严格包含关系 $\mathbf{A}_k \supsetneqq \mathbf{A}_{k+1}$ 由引理2.1见证。根据 (O1)，$\mathbf{A}_1 \supsetneqq \mathbf{A}_2$ 的严格性意味着 Bob 能在同步自动机上赢得 2-同步博弈。任意一个满足 $\mathscr{C}_n$ $n \geq 3$ 的 Černý 自动机都能见证这一点。事实上，根据 [11, 示例 1], , 即使不允许 Bob 跳过移动，也就是使用空词，他在 $\mathscr{C}_n$ 上对任意 $n \geq 3$ 都能获胜。□

关于层级 (1)，自然会产生两个问题。第一个问题是如何高效地确定给定同步自动机 $\mathscr{A}$ 所达到的层级 (1)，也就是计算满足 $\mathscr{A} \in \mathbf{A}_k$ 的最大 $k \in \mathbb{N}$。第二个问题是 $\mathscr{A}$ 的复位阈值如何取决于其层级。我们分别在第4节和第3节讨论这些问题。

另一个值得关注的问题，是层级（1）限制在状态数固定的确定有限自动机上的表现。这将在第5节中研究。

2.3. **局部化**。 有时，我们需要一个局部化结果，它是对 [11, 引理 2]的轻微改动。为方便读者，我们附上其证明。

引理 2.3. *Alice* 在确定有限自动机上的 k-博弈中有获胜策略，当且仅当她从每个仅有两个状态持有令牌的位置出发时，都有获胜策略。

证明。 如果 Alice 从一个有两个令牌的位置出发没有获胜策略，设这两个令牌为T 和 T'，那么 Bob 从这个位置出发就有获胜策略。如果 Bob 从初始位置开始按照这一策略行动，也就是说，只根据令牌T 和T'所在的位置来选择移动，仿佛没有其他令牌存在，那么这两个令牌就会永远留在场上，而 Alice 将输掉博弈。（这里我们假设，在博弈过程中，当令牌T 和T'之一在某个状态上遇到第三个令牌时，被移除的是这个第三个令牌。）

反过来，如果 Alice 能在仅有两个状态中持有令牌的每个位置获胜，她可以按以下方式进行。在初始位置，她选取一对令牌，比如 T 和

T'，并假装没有其他令牌，按此进行博弈；也就是说，她采用在这样一个位置上的获胜策略：T 和 T' 所处的状态与它们在初始位置时相同，而所有其他令牌都已移除。这样，博弈就会到达一个位置，其中 T 或 T' 被移除。然后 Alice 选取一对新的令牌，并假装只有这些令牌存在来进行博弈，如此反复。由于每一轮至少会移除一个令牌，Alice 最终会获胜。□

引理 2.3 的证明蕴含了一个与 [11, 推论 3] 中类似的观察：

推论 2.4。 如果 *Alice* 在具有 n 个状态的确定有限自动机上的 k-博弈中拥有获胜策略，那么她至多可以在 $\binom{n}{2}(n-2)+1$ 次移动中获胜。

证明。选取一对令牌 T 和 T′，并令 q_i 和 q'_i 表示在 Alice 的第 i 次移动之后持有令牌 T 和 T′ 的状态。于是，如果 Alice 采取最优策略，则对于每个 $\mathrm{j}>0$，必有 $\{\mathrm{q}_i, \mathrm{q}'_i\} \neq \{\mathrm{q}_{i+\mathrm{j}}, \mathrm{q}'_{i+\mathrm{j}}\}$。事实上，等式 $\{\mathrm{q}_i, \mathrm{q}'_i\} = \{\mathrm{q}_{i+\mathrm{j}}, \mathrm{q}'_{i+\mathrm{j}}\}$ 意味着，无论 Alice 如何通过她的第 (i + 1)-st 次.....第 (i + j − 1)-st 次移动来移动 T 和 T′，Bob 都能迫使 Alice 在她的第 (i + j) 次移动时，将令牌送回它们在她第 i 次移动之后所处的相同状态。类似地，Bob 也能迫使 Alice 在她的第 (i + 2j)-th、(i + 3j)-th、.....次移动之后，将 T 和 T′ 送回相同的状态。因此，这两个令牌中的任何一个都永远无法被移除，这与 Alice 拥有获胜策略且采取最优行动的假设相矛盾。

因此，Alice 在任何一轮中使用任意一对固定令牌进行操作时，其移动次数都不超过 $\binom{n}{2}$。此外，在每个同步自动机中，都存在状态 q 和 q'，使得 $q\cdot a = q'\cdot a$，其中 a 是某个字母。因此，Alice 可以在第一次移动时移除一个令牌。此后，她至多需要 $n-2$ 轮，便可移除剩余 $n-1$ 个令牌中的 $n-2$ 个。总而言之，Alice 至多需要 $\binom{n}{2}(n-2)+1$ 次移动。□

3. 同步速度

3.1. Aω-自动机的重置阈值。我们的目标是证明，每个 $A\omega$-自动机的重置阈值都小于其状态数。粗略地说，证明思路是：为 DFA $(Q\ \Sigma)$ 上 ω-博弈的每个位置赋予某个参数的值，并使其满足以下性质：首先，Alice 总能找到一种移动，以适当的方式降低当前值，而 Bob 的任何移动都无法使其增大；其次，该参数可能取到的值的总数小于 $|Q|$。为了实现这一思路，我们需要引入若干概念和记号。

对于一个确定有限自动机 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$，我们通过归纳法在集合 Q 上定义一列二元关系 $\{E_\ell\}_{\ell=0,1,2,\ldots}$：

- $E_0 := \{(q,\ q) : q \in Q\}$;
- $E_{\ell+1}$ 是所有满足以下条件的有序对 $(p,q) \in Q \times Q$ 组成的集合：对于每个词 $w \in \Sigma^*$，都存在一个字母 $x \in \Sigma$，使得 $(p\cdot wx, q\cdot wx) \in E_\ell$。

用 ω 关于 $\mathscr{A}$ 的博弈来表述，该定义说明，$(p,q) \in E_\ell$ 当且仅当 Alice 有一种策略，使她能在不超过 ℓ 次移动内，将令牌从状态 p 和 q 移至同一状态，前提是 Bob 先移动。

通过对 ℓ 作直接归纳可知，对于所有 ℓ，$(\mathrm{p},\mathrm{q}) \in \mathrm{E}_\ell$ 当且仅当 $(\mathrm{q},\mathrm{p}) \in \mathrm{E}_\ell$；也就是说，关系 E_ℓ 是对称的。因此，我们将有序对 $(\mathrm{Q},\mathrm{E}_\ell)$ 视为（无向）图，并使用相应的术语。在此语境下，我们有时也将满足 $(\mathrm{p},\mathrm{q}) \in \mathrm{E}_\ell$ 的有序对称为边，尽管严格来说，$(\mathrm{Q},\mathrm{E}_\ell)$ 的边是满足 $(\mathrm{p},\mathrm{q}) \in \mathrm{E}_\ell$ 的集合 $\{\mathrm{p},\mathrm{q}\}$。

我们记录关系 E_ℓ 的一些性质。

命题 3.1。 设 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$ 是一个确定有限自动机，ℓ 为非负整数。

（稳定性）：如果 $(p,q)\in E_\ell$，那么对于每个词 $w\in\Sigma^*$，都有 $(p\cdot w, q\cdot w)\in E_\ell$；（包含性）：$E_\ell\subseteq E_{\ell+1}$；（判据）：$\mathscr{A}$是一个 $A\omega$-自动机，当且仅当 $\bigcup_{\ell\geq 0}E_\ell = Q\times Q$。

证明。稳定性。对于 $\ell=0$，结论显然成立。设 $\ell>0$，并记 $p' := p\cdot w$ 和 $q' := q\cdot w$。任取一个词 $w'\in\Sigma^*$。则 $p'\cdot w' = p\cdot ww'$ 且 $q'\cdot w' = q\cdot ww'$。将 E_ℓ 的定义应用于 (p, q) 和词 ww'，可知存在一个字母 $x\in\Sigma$，使得 $(p\cdot ww'x, q\cdot ww'x)\in E_{\ell-1}$。因此，$(p'\cdot w'x, q'\cdot w'x)\in E_{\ell-1}$，这就验证了 $(p',q')\in E_\ell$。

包含关系。我们对 ℓ 进行归纳。基例 $E_0\subseteq E_1$ 显然成立。设 $\ell>0$。根据定义，对于每个 $(p, q)\in E_\ell$ 以及每个 $w\in\Sigma^*$，都存在一个字母 $x\in\Sigma$，使得 $(p\cdot wx, q\cdot wx)\in E_{\ell-1}$。根据归纳假设，$E_{\ell-1}\subseteq E_\ell$，因此 $(p\cdot wx, q\cdot wx)\in E_\ell$。于是，$(p,q)\in E_{\ell+1}$。

判据。“仅当”部分。由于集合 Q 有限，且对于所有 $\ell\geq 0$ 都有 $E_\ell\subseteq E_{\ell+1}$，因此存在一个整数 L，使得 $\bigcup_{\ell\geq 0}E_\ell = E_L$。令 $H := (Q\times Q)\setminus E_L$，并反设 $H\neq\varnothing$。那么，对于每一对 $(p, q)\in H$，都有 $p\neq q$，且存在一个词 $w_{(p,q)}\in\Sigma^*$，使得对于每个字母 $x\in\Sigma$，$(p\cdot w_{(p,q)}x, q\cdot w_{(p,q)}x)\in H$。事实上，否则，对于每个 $w\in\Sigma^*$，都可以找到一个字母 $x\in\Sigma$，使得 $(p\cdot wx, q\cdot wx)\in E_L$，这意味着 $(p,q)\in E_{L+1} = E_L$。

现在，Bob 在 $\mathscr{A}$ 上赢得 ω-博弈，采用以下策略。他首先选择一对 $(p_0,q_0)\in H$，并出词 $w_1 := w_{(p_0,q_0)}$。如果 Alice 随后出一个字母 x_1，并且我们令 $p_1 := p_0\cdot w_1x_1$，$q_1 := q_0\cdot w_1x_1$，，那么 Bob 就回应出词 $w_2 := w_{(p_1,q_1)}$，依此类推。根据构造，每回合结束后，从 (p_0,q_0) 到达的状态对都属于 H，因此由两个不同的状态组成。所以在任何回合，博弈的历史都不可能是 $\mathscr{A}$ 的复位词。这表明 Bob 在 $\mathscr{A}$ 上有获胜策略，这与 $\mathscr{A}$ 是 $A\omega$-自动机的假设矛盾。

“若”部分。根据引理 2.3，只需证明 Alice 从仅有两个令牌的每个位置都能获胜。任取这样一个位置，设持有令牌的状态为p 和q。由于 $\bigcup_{\ell\geq 0}E_\ell = Q\times Q$，存在 ℓ 使得有序对（p，q）属于关系 E_ℓ。正如在定义 E_ℓ 之后所述，Alice 因而有一种策略，能够在至多 ℓ次移动内将令牌从状态p 和q 移至同一个状态。□

根据命题 3.1，在任意$A\omega$-自动机（Q Σ）中，每一对（p，q）$\in Q\times Q$都属于某个关系 E_ℓ。我们用d（p，q）表示具有此性质的最小整数 ℓ。下一个命题中的所有结论都可由定义和命题 3.1 轻易推出。

命题 3.2。在任意 $A\omega$-自动机$(Q\ \Sigma)$中，对所有 $p, q\in Q$，以下结论均成立：(D1) $d(p, q) = 0$ 当且仅当 $p = q$；(D2) $d(p, q) = d(q, p)$；(D3) $d(p\cdot w, q\cdot w)\leq d(p, q)$ 对每个词 $w\in\Sigma^*$均成立；(D4) 如果 $d(p, q)>0$，那么存在一个字母 $x\in\Sigma$使得 $d(p\cdot x, q\cdot x)<d(p, q)$。

注。可以验证，函数 d 还满足三角不等式 $d(p,r)\leq d(p,q)+d(q,r)$，也就是说，d 是集合 Q 上的一个度量。不过，我们不使用这一事实。

我们需要介绍一些与图 (Q,E_ℓ) 的连通分量相关的记号，其中 $(Q\ \Sigma)$ 是一个 $A\omega$-自动机。为简便起见，我们将图 G 的一个连通分量的所有顶点的集合称为分量 。

对于每个整数 $\ell\geq 0$，令 $\mathscr{D}_\ell$ 表示图（Q，E_ℓ）的所有分量构成的集合。每个 $\mathscr{D}_\ell$ 都是集合 Q 的一个划分，并且将其视为划分时，$\mathscr{D}_{\ell+1}$ 比 $\mathscr{D}_\ell$更粗。因此，$\mathscr{D}_{\ell+1}$ 中的每个分量都是 $\mathscr{D}_\ell$中若干分量的并。由此我们得到一个

关于细化序的递降划分链。该链始于单块划分 $\{Q\}$（对于某个整数 K，它是 $\mathscr{D}_K$，且满足$E_K = Q \times Q$；这样的K存在，因为 $\bigcup_{\ell\geq 0} E_\ell = Q\times Q$，并且集合$Q$是有限的），并终于 $\mathscr{D}_0 = \{\{q\} : q \in Q\}$。令 $\mathscr{D} := \bigcup_{\ell\geq 0}\mathscr{D}_\ell$，并令 $\mathscr{D}^+ := \mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_0$。注意，$\mathscr{D}$中的任意两个分量要么不相交，要么在包含关系下可比较。

对于任意分量 $C \in \mathscr{D}$，令 $h(C)$ 表示满足 $C \in \mathscr{D}_\ell$ 的最小整数 ℓ。注意，$h(C) = 0$ 当且仅当 $C \in \mathscr{D}_0$，也就是说，当且仅当 $|C| = 1$。每个 $C \in \mathscr{D}^+$ 都被划分为 $\mathscr{D}_{h(C)-1}$ 中多个分量。我们用 $\mathscr{V}(C)$ 表示 C 的这一划分所包含的分量集合。因此，$\mathscr{V}(C) \subseteq \mathscr{D}_{h(C)-1}$，并且 $|\mathscr{V}(C)| > 1$。

对于每个非空子集 $A \subseteq Q$，在 $\mathscr{D}$ 中都存在一个（关于包含关系）包含 A 的最小分量。我们用 C_A 表示这个分量。注意，$|C_A| > 1$ 当且仅当 $|A| > 1$。将 $h(C_A)$ 记为 ℓ，我们引入另一组记号：

- $\mathscr{T}_A$ 是所有满足 $A \subseteq V \subseteq C_A$ 且 $E \subseteq E_\ell$ 的连通图 $G = (V,E)$ 的族；
- $\theta_\ell(G)$ 表示对于 $G = (V,E)$，$\in \mathscr{T}_A$ 满足条件 $d(e) = \ell$ 的边 $e \in E$ 的数量；
- $\gamma(A) := \min_{G\in\mathscr{T}_A}\theta_\ell(G)$.

引理 3.3. 对于每个 $A\omega$-自动机 $(Q\ \Sigma)$ 以及每个非空子集 $A \subseteq Q$,

$$\gamma(A) \leq \gamma(C_A) = \begin{cases} |\mathscr{V}(C_A)| - 1 & \text{if } |A| > 1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。为简化记号，在本证明中我们用 C 表示C_A。

不等式 $\gamma(A) \leq \gamma(C)$ 成立，这是因为表达式 $\gamma(A)$ 中的最小值是在一个更大的集合上取的；显然 $\mathscr{T}_C$ 是族 $\mathscr{T}_A$ 的子族。

为证明这个等式

$$\gamma(C) = \begin{cases} |\mathscr{V}(C)| - 1 & \text{if } C \in \mathscr{D}^+; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3}$$

首先注意到 $C_C = C$；因此，该族 $\mathscr{T}_C$ 中的所有图都以 C 作为顶点集。

若 $|C| = 1$，则无边的单顶点图属于该族 $\mathscr{T}_C$，因此 e $\min_{G\in\mathscr{T}_C} \theta_\ell(G) = 0$，这与 (3) 一致。

回顾一下，每个集合 $C \in \mathscr{D}^+$ 都被划分为 $|\mathscr{V}(C)|$ 个分量，这些分量来自 $\mathscr{D}_{\ell-1}$。对于图 $G = (C,E)$，其中 $E \subseteq E_\ell$，要使其连通，任意两个这样的分量之间都必须有一条路径相连，且该路径涉及 $E_\ell \setminus E_{\ell-1}$ 中的边；图4对此作了说明。

对于每条边 $\mathrm{e} \in \mathrm{E}_\ell \setminus \mathrm{E}_{\ell-1}$，根据函数 d 的定义，我们有 $\mathrm{d(e)} = \ell$，而要连接 $|\mathscr{V}(\mathrm{C})|$ 个分量，至少需要 $|\mathscr{V}(\mathrm{C})| - 1$ 条边。因此，对于每个图 $\mathrm{G} \in \mathscr{T}_C$，都有 $\theta_\ell(\mathrm{G}) \geq |\mathscr{V}(\mathrm{C})| - 1$。另一方面，$|\mathscr{V}(\mathrm{C})| - 1$ 条边就足够了。为说明这一点，考虑图 $\mathrm{H} := (\mathscr{V}(\mathrm{C}), \mathrm{F})$，其中，当且仅当图 $(\mathrm{C},(\mathrm{C}\times\mathrm{C})\cap\mathrm{E}_\ell)$ 中存在一条连接 V_1 和 V_2 的边 $\mathrm{e} \in \mathrm{E}_\ell \setminus \mathrm{E}_{\ell-1}$ 时，两个顶点 $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \in \mathscr{V}(\mathrm{C})$ 之间才由一条边 f 相连；我们称 e 诱导 f。图 H 是连通的，且 H 的任意生成树都有 $|\mathscr{V}(\mathrm{C})| - 1$ 条边。取 H 的一棵生成树 H'，并考虑图 $\mathrm{G}' = (\mathrm{C},((\mathrm{C}\times\mathrm{C})\cap\mathrm{E}_{\ell-1})\cup\mathrm{E}')$，其中 E' 由 $\mathrm{E}_\ell \setminus \mathrm{E}_{\ell-1}$ 中诱导生成树 H' 的边的 $|\mathscr{V}(\mathrm{C})| - 1$ 条边组成。图 G' 是连通的，因此属于族 $\mathscr{T}_C$。根据构造，$\theta_\ell(\mathrm{G}') = |\mathscr{V}(\mathrm{C})| - 1$。于是，$\min_{G\in\mathscr{T}_C} \theta_\ell(\mathrm{G}) = |\mathscr{V}(\mathrm{C})| - 1$，这再次与 (3) 一致。□

对于一个非空子集 $A \subseteq Q$，有序对 $\chi(A) := (C_A, \gamma(A))$ 称为 A 的特征。单元素集合的特征具有形式 $(\{q\},0)$，其中 $q \in Q$；我们称这样的

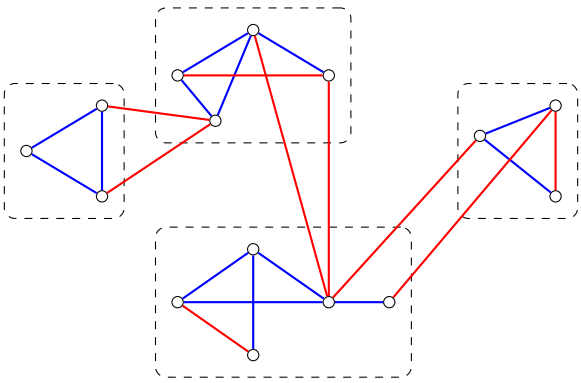


图4. 一个来自 $\mathscr{T}_C$ 、包含分量 $\mathscr{V}(C)$ 的图，以虚线轮廓标出。蓝色边属于 $E_{\ell-1}$ （来自E_0 的自环未显示）；红色边来自 $E_\ell \setminus E_{\ell-1}$。

特征为平凡。对于每个非平凡特征 $(C_A, \gamma(A))$，我们有 $|C_A| > 1$ 以及$1 \le \gamma(A) \le \gamma(C_A)$。接下来的两个命题表明，非平凡特征适合扮演本节开头证明概要中“参数”的角色。

命题 3.4. 对于每个 $A\omega$-自动机 $(Q\ \Sigma)$，非平凡特征的不同取值至多有 $|Q|-1$ 个。

证明。 对于每个分量$C \in \mathscr{D}^+$，首项为C的不同特征至多有 $\gamma(C)$ 个，因为第二项的可能取值属于集合 $\{1,\dots,\gamma(C)\}$。对所有此类分量求和，得到至多 $\sum \gamma(C)$ 个不同的非平凡特征$_{C\in\mathscr{D}^+}$。显然，$\sum \gamma(C) = \sum \gamma(C)$，因为将求和范围扩展到$_{C\in\mathscr{D}^+}$ $_{C\in\mathscr{D}}$中的分量只会增加零项。现在来计算后一个和。

对于每个分量 $R \in \mathscr{D}$，我们设

$$\Gamma(R) := \sum_{\substack{C\in\mathscr{D}\\ C\subseteq R}} \gamma(C). \tag{4}$$

我们通过对 $|R|$ 使用归纳法来证明 $\Gamma(R) = |R| - 1$。当 $|R| = 1$ 时，等式显然成立。假设 $|R| > 1$。那么 $|\mathscr{V}(R)| > 1$，因此归纳假设适用于 $\mathscr{V}(R)$ 中的每个分量。显然，对于每个满足$C \subsetneq R$的$C \in \mathscr{D}$，都存在唯一的分量$S \in \mathscr{V}(R)$，使得$C \subseteq S$。于是我们有

$$\begin{aligned}
\Gamma(R) &= \gamma(R) + \sum_{\substack{C\in\mathscr{D}\\ C\subsetneq R}} \gamma(C) = \gamma(R) + \sum_{S\in\mathscr{V}(R)} \sum_{\substack{C\in\mathscr{D}\\ C\subseteq S}} \gamma(C) \\
&= \gamma(R) + \sum_{S\in\mathscr{V}(R)} \Gamma(S) && \text{by (4)} \\
&= \gamma(R) + \sum_{S\in\mathscr{V}(R)} (|S|-1) && \text{根据归纳假设} \\
&= |\mathscr{V}(R)| - 1 + \sum_{S\in\mathscr{V}(R)} (|S|-1) && \text{by (3)}
\end{aligned}$$

$$= |\mathscr{V}(R)| - 1 + \sum_{S\in\mathscr{V}(R)} |S| - |\mathscr{V}(R)| = |R| - 1 \qquad \text{since } |R| = \sum_{S\in\mathscr{V}(R)} |S|.$$

特别地，$\Gamma(Q) = \sum \gamma(C) = |Q| - 1$。这就得出了不同非平凡特征数量的所述上界。□

我们称非空子集 $A \subseteq Q$ 避免 特征 μ，如果 $\mu \neq \chi(A{\cdot}w)$ 永远成立 y 词 $w \in \Sigma^*$。

命题 3.5。对于每个 $A\omega$-自动机 $(Q\ \Sigma)$ 以及每个满足 $|A| > 1$ 的子集 $A \subseteq Q$，都存在一个字母 $x \in \Sigma$，使得集合 $A{\cdot}x$ 避免特征 $\chi(A)$。

证明。记 $\ell = \mathrm{h}(\mathrm{C}_A)$，并选择一个图 $\mathrm{G} = (\mathrm{V},\mathrm{E}) \in \mathscr{T}_A$，使得 $\theta_\ell(\mathrm{G}) = \gamma(\mathrm{A})$。回忆一下，根据族 $\mathscr{T}_A$ 的定义，图 G 连通且 $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{E}_\ell$。选择一条边 $(\mathrm{p}_0,\mathrm{q}_0) \in \mathrm{E}$，使得 $\mathrm{d}(\mathrm{p}_0,\mathrm{q}_0) = \ell$。如命题 3.2 的条目 (D4) 所述，存在一个字母 $\mathrm{x} \in \Sigma$，使得 $\mathrm{d}(\mathrm{p}_0{\cdot}\mathrm{x}, \mathrm{q}_0{\cdot}\mathrm{x}) < \ell$。现在我们证明 $\mathrm{A}{\cdot}\mathrm{x}$ 避免特征 $\chi(\mathrm{A})$。

取任意一个词 $w \in \Sigma^*$，并令 $B := A{\cdot}xw$。我们旨在证明 $\chi(B) \neq \chi(A)$。若 $C_A \neq C_B$，则结论显然成立，因此假设 $C_A = C_B$。

考虑图 G 在词 xw的作用下的像 G'，即 $G' := (V', E')$，其中 $V' := V{\cdot}xw$ 且 $E' := \{(p{\cdot}xw, q{\cdot}xw) : (p,q) \in E\}$。我们旨在证明图 G' 属于族 $\mathscr{T}_B$，这等价于验证以下各项：

(i) $E' \subseteq E_{h(C_B)}$；
(ii) G' 是连通的；
(iii) $B \subseteq V' \subseteq C_B$。

包含关系 (i) 可直接由等式 $h(C_B) = h(C_A) = \ell$（由等式 $C_A = C_B$保证）、包含关系 $E \subseteq E_\ell$，以及命题 3.1 中所示的 E_ℓ 的稳定性得到。

对于 (ii)，只需注意，若一列连续的边

$$(p_1,p_2),(p_2,p_3),\ldots,(p_{m-1},p_m) \in E$$

连接了来自 A 的两个状态 $p = p_1$ 和 $p_m = q$，那么从其像中移除

$$(p_1{\cdot}xw, p_2{\cdot}xw),(p_2{\cdot}xw, p_3{\cdot}xw),\ldots,(p_{m-1}{\cdot}xw, p_m{\cdot}xw)$$

属于 E_0, 的配对（若有），便得到一列 E' 中的连续边，将来自B的状态 $p{\cdot}xw$ 和 $q{\cdot}xw$ 连接起来。

类似的论证可用于证明 (iii) 中的包含关系 $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{C}_B$。事实上，$\mathrm{V}'$中的每个状态都具有 $\mathrm{q}{\cdot}\mathrm{xw}$ 的形式，其中 $\mathrm{q} \in \mathrm{V}$。由于 $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{C}_A$，且 C_A是图 $(\mathrm{Q}, \mathrm{E}_\ell)$ 中包含 A 的连通分量，因此状态 q 通过 E_ℓ 中的一列连续边与状态 $\mathrm{p} \in \mathrm{A}$ 相连。随后，该序列的像将 $\mathrm{q}{\cdot}\mathrm{xw}$ 与 $\mathrm{p}{\cdot}\mathrm{xw} \in \mathrm{B}$ 相连；由于 E_ℓ 的稳定性，像中的每条边都属于 E_ℓ。因此，$\mathrm{q}{\cdot}\mathrm{xw}$ 位于图 $(\mathrm{Q}, \mathrm{E}_\ell)$ 中包含 B 的连通分量内，也就是说，$\mathrm{q}{\cdot}\mathrm{xw} \in \mathrm{C}_B$。

（iii）中的包含关系$B \subseteq V'$由包含关系$A \subseteq V$保证。

因此，G' 是 $\mathscr{T}_B$中的一个图。根据命题 3.2 的条目 (D3)，对于每条边 $(p,q) \in E_\ell$，都有$d(p{\cdot}xw, q{\cdot}xw) \leq \ell$。根据同一性质，对于边 (p_0,q_0)，这个不等式是严格的。因此，$\theta_\ell(G') < \gamma(A)$，所以 $\gamma(B) < \gamma(A)$。因此，$\chi(B) \neq \chi(A)$。□

我们现在可以证明主要结果了。

定理 3.6. 对于每个 $A\omega$-自动机 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$，*Alice* 都有一种策略，可以让她在少于 $|Q|$ 次移动内获胜。特别地，$\mathscr{A}$的复位阈值小于 $|Q|$。

证明. 我们可以假设 Bob 先移动。将 Bob 第i_i 回合之前的历史记为w_i ，并令$A_i := Q\cdot w_i$。Alice 的策略是选择一个字母x_i 作为回应，使集合$A_i\cdot x_i$ 避开特征 $\chi(A_i)$。根据命题 3.5，只要$|A_i| > 1$，也就是说，只要w_i 不是 $\mathscr{A}$的复位词，就存在这样的字母x_i 。

所述策略保证，只要 $i \neq j$，就有 $\chi(A_i) \neq \chi(Aj)$。事实上，假设 $i < j$；那么对于某个词 $u \in \Sigma^*$，有 $w_j = w_i x_i u$，因此 $A_j = A_i\cdot x_i u$。根据构造，$A_i\cdot x_i$ 可避开 $\chi(A_i)$；根据可避性的定义，这意味着对于每个词 $w \in \Sigma^*$，都有 $\chi(A_i) \neq \chi(A_i\cdot xw)$。令 $w = u$，即得 $\chi(A_i) \neq \chi(Aj)$。因此，所有特征 $\chi(A_1)\ \chi(A_2)\ldots$ 都互不相同。

根据命题 3.5，非平凡特征最多有 $|Q|-1$ 个。因此，采用所述策略，Alice 最多移动 $|Q|-1$ 次即可获胜。

博弈进行到最后一步为止的历史是一个复位词 $\mathscr{A}$，且与 Bob 在其各步中选择了哪些词无关。特别地，在 Bob 每一步都选择空词的博弈中，最终历史是一个复位词，其长度等于 Alice 移动的次数，因而不超过 $|Q|-1$。□

注。 1. 很容易看出，定理 3.6 中的界是紧的。作为一个简单的见证，对于每个$n \geq 3$，考虑 DFA（$\mathbb{Z}_n, \{a\}$），其中 $0\cdot a := 0$，且$m\cdot a := m-1$，对 $0 < m < n$成立。这是一个$A\omega$-自动机，有n 个状态，复位阈值为$n-1$，Alice 恰好需要$n-1$ 步才能获胜。

2. 定理 3.6 第二个结论的逆命题不成立。作为见证，对于每个 $n \geq 4$，考虑 DFA（$\mathbb{Z}_n$, {a,b}），其中字母使状态沿相反方向移动： $0\cdot a := 0$，且 $m\cdot a := m-1$，对 $0 < m < n$ 成立；而 $(n-1)\cdot b := n-1$，且 $m\cdot b := m+1$，对 $0 \leq m < n-1$成立。该 DFA 是同步的，复位阈值为 $n-1$，因为 a^{n-1} 和 b^{n-1} 分别都是长度最短的复位词。另一方面，Bob 在该 DFA 的 2-博弈中也能获胜。Bob 的获胜策略是：Alice 出 a 时就出 b，她出 b 时就出 a。这样，他可以确保每次回应后，每个“中间”状态 1、2、. . .、$n-2$ 上都有一个令牌；参见图5。

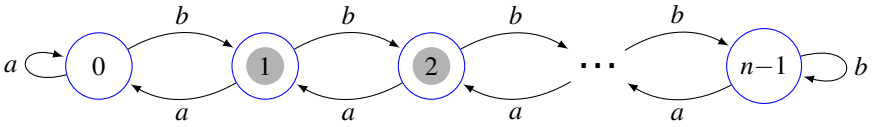


图5. 一个具有复位阈值$nn-1$ 的n状态确定有限自动机，Bob 通过将令牌（以灰色显示）保留在状态 1、2、...、$n-2$上获胜。

3.2. **DS-自动机的复位阈值**。 定理 3.6 证实了一个自然预期：在强大的对手面前 Alice 能够获胜的自动机应该能够快速同步。然而，具备$A\omega$-自动机这一性质或许过于苛刻，而且尚不清楚定理 3.6 是否适用于任何有意义的、并非以同步博弈来定义的 DFA 类。得益于 [10,第5节4],中的一项观察，我们得以展示这样一个类。为介绍它，我们先回顾确定有限自动机的转移幺半群这一概念，以及半群理论中的一些基本概念。

对于一个 DFA $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$，映射 $\tau_a : Q \to Q$ 由 $q\tau_a := q\cdot a$ 定义，是集合 Q上的一个变换。DFA $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$ 的转移幺半群 是集合 Q 上所有变换构成的幺半群中由集合 $\{\tau_a : a \in \Sigma\}$生成的子幺半群。我们将 DFA $\mathscr{A}$的转移幺半群记作 $T(\mathscr{A})$。在 $T(\mathscr{A})$ 中，任何形如 $\tau_{a_1}\tau_{a_2}\cdots\tau_{a_n}$ 的乘积都恰好是

由 $q\tau_w := q\cdot w$定义的变换 $\tau_w\colon Q \to Q$，其中 $w := a_1a_2\cdots a_n$。因此，转移幺半群 $T(\mathscr{A})$ 也可以等价地定义为集合 Q 上由 Σ 上的词作用所诱导的所有变换构成的幺半群。

如果 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$ 是同步DFA，且 w 是 $\mathscr{A}$ 的复位词，那么变换 τ_w 在 Q 上是常值映射，也就是说，$Q\tau_w = \{q\}$，其中 $q \in Q$。因此，同步自动机的转移幺半群总是包含一个常值变换。反过来，如果 $\zeta \in T(\mathscr{A})$ 是常值变换，那么任何满足 $\tau_w = \zeta$ 的词 w 都是 $\mathscr{A}$ 的复位词，因此 $\mathscr{A}$ 是同步的。由此可见，同步实际上是自动机的转移幺半群的一种性质，而不是自动机本身的性质：对于具有相同状态但输入字母表不同的 DFA $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$ 和 $\mathscr{A}' = (Q\ \Sigma')$，若 $T(\mathscr{A}) = T(\mathscr{A}')$，则 $\mathscr{A}'$ 是同步的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是同步的。

回顾任意半群 S上的格林关系 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$和 $\mathfrak{D}$的定义：

- $a\ \mathfrak{R}\ b \iff$ 当且仅当$a = b$，或者$a = bs$ 且$b = at$，其中$s,\ t \in S$;
- $a\ \mathfrak{L}\ b \iff$ 当且仅当$a = b$，或者$a = sb$ 且$b = ta$，其中$s,\ t \in S$;
- $a\ \mathfrak{D}\ b \iff a\ \mathfrak{R}\ c$ 且$c\ \mathfrak{L}\ b$，其中$c \in S$。

关系 $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{L}$ 显然都是等价关系。 $\mathfrak{D}$的定义意味着， $\mathfrak{D}$是 $\mathfrak{R}$与 $\mathfrak{L}$ 作为二元关系的乘积。正如 [13]中所观察到的， $\mathfrak{D}$ 也是 $\mathfrak{L}$与$\mathfrak{R}$的乘积，这意味着 $\mathfrak{D}$ 是包含 $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{L}$的最小等价关系。

若一个D 类包含一个元素a，使得对某个$b \in D$有$aba = a$，则称该正则 $\mathfrak{D}$-类为正则。转移幺半群中所有正则 $\mathfrak{D}$-类都是子半群的确定有限自动机在文献中经常出现；例如参见 [1, 2]。在 [9], 中，这类确定有限自动机被命名为*DS*-自动机，本文沿用这一术语。关于同步自动机在DS-自动机各子类中的研究概况，请读者参阅 [9, 第4节1] 。

主结果 [10] 指出，对于任意同步 DS-自动机，Alice 在同步博弈中都有一种统一的获胜策略，其中 Bob 的应对仅限于字母。这里，统一性是指 Alice 的获胜移动序列仅取决于底层自动机，而不取决于 Bob 的应对。在 [10,第5节4], 中，我们证明了这一策略在 ω-博弈中依然成立。因此，同步 DS-自动机是$A\omega$-自动机，由定理 3.6 可得：

推论 3.7。任意同步 *DS*-自动机的复位阈值都小于其状态数。

推论 3.7 的结果包含于 [2,定理 26], 中，其证明基于半群的线性表示的经典理论（Munn–Ponizovsky 理论）及其在 [1]中的扩展。我们的证明则截然不同，完全是组合性的，只需援引 [10], 中的结果；而这些结果本身也只用到少量代数。

注意，$A\omega$-自动机不一定是 DS-自动机。这里最简单的见证是图 6 所示的自动机 $\mathscr{B}_2$。它的转移幺半群 $T(\mathscr{B}_2)$ 很容易计算。它由 $\{0,1,2\}$ 上的六个变换组成：恒等变换 τ_ε、常值变换 τ_{a^2}，以及变换 τ_a、 τ_b、 τ_{ab} 和 τ_{ba}，它们在$T(\mathscr{B}_2)$中构成一个 $\mathfrak{D}$-类。这个 $\mathfrak{D}$-类不是子半群，例如，它不包含变换 $\tau_a^2 = \tau_{a^2}$。因此， $\mathscr{B}_2$ 不是 DS-自动机。另一方面，Alice 在 $\mathscr{B}_2$ 上的 ω-博弈中获胜。她可以先走a，将令牌留在状态 0 和 2 上。Bob 作出任何不会导致失败的应对之后，令牌要么仍留在 0 和 2 上，要么移到状态 0 和 1 上。随后，若是前一种情况，Alice 走a 即可获胜；若是后一种情况，她走b 即可获胜。

因此，定理 3.6 不仅为推论 3.7 提供了另一种证明，还将其结论扩展到了严格更大的类 $\mathbf{A}\omega$。

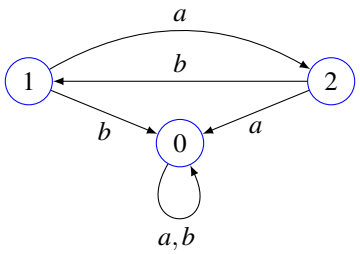


图 6. 一个不是 DS-自动机的$A\omega$-自动机

或许值得一提的是，$\mathbf{A}\omega$ 无法仅用变换幺半群来刻画。事实上，对于每个同步 DFA $\mathscr{A}=(Q\ \Sigma)$，都存在一个 $A\omega$-自动机 $\mathscr{A}'=(Q\ \Sigma')$，使得 $T(\mathscr{A})=T(\mathscr{A}')$。为此，令 $\Sigma':=\Sigma\cup\{c\}$，其中新增字母 c 的作用与 $\mathscr{A}$ 的某个固定复位词的作用相同。由 Σ' 中各字母诱导的变换，生成了与由 Σ 中各字母诱导的变换相同的、集合 Q 上所有变换所构成的幺半群的子幺半群。尽管如此，Alice 在 $\mathscr{A}'$ 上进行 ω-博弈时，只需在第一步选择字母 c，便能立即获胜。

话虽如此，幺半群$T(\mathscr{A})$具备哪些性质才能确保 $\mathscr{A}$是一个$A\omega$-自动机，这个问题似乎值得进一步探讨。

3.3. **同步自动机的迭代**。如果允许 Alice 像 Bob 一样，在 ω-博弈中玩词而非单个字母，会发生什么？当然，如果 Alice 可以玩任意词，那么博弈就变得毫无意义，因为 Alice 只需写出一个复位词，就能立即在任何同步自动机上获胜。Alice 的移动受到长度限制的变体则更有趣。要处理这种情况，以下构造非常合适。

对于$m\in\mathbb{N}$ 和字母表 Σ，令 $\Sigma^{\leq m}$ 表示 Σ 上长度不超过m的所有非空词的集合。DFA $\mathscr{A}=(Q\ \Sigma)$的m-次迭代 是 DFA $\mathscr{A}^{(m)}:=(Q\ \Sigma^{\leq m})$，其中 $\Sigma^{\leq m}$ 中“字母”的作用以自然的方式定义：对于所有$q\in Q$和$w\in\Sigma^{\leq m}$，有$q\circ w:=q\cdot w$，右侧表示在 $\mathscr{A}$中的作用。

我们将 m/ω-博弈定义为这样一种变体：Alice 的移动是长度不超过 m 的非空词，而 Bob 可以使用任意词。因此，Alice 在 DFA $\mathscr{A}$ 上赢得m/ω-博弈，当且仅当她在该 DFA $\mathscr{A}^{(m)}$ 上进行标准 ω-博弈时获胜，这一点显而易见。由此可知，对于任何具有 n 个状态、且 Alice 在 m/ω-博弈中拥有获胜策略的同步自动机，其复位阈值不超过 $m(n-1)$。现在我们将证明，这个上界还可以略微改进。

我们需要第 3.1 小节中引入的函数 d、$\mathscr{V}$、h、θ、γ、χ、$A\mapsto C_A$ 和 $A\mapsto\mathscr{T}_A$。请注意，这些函数都取决于所考虑的自动机；这里我们考虑两个自动机：$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}^{(m)}$。为避免歧义，我们规定，在以下两个陈述中，这些函数和符号 $\cdot$ 始终与 $\mathscr{A}^{(m)}$相关联。

引理 3.8. 如果 *Alice* 能在确定有限自动机 $\mathscr{A}=(Q\ \Sigma)$上的 m/ω-博弈中获胜，那么存在一个字母 $x\in\Sigma$，使得集合 $Q\cdot x$ 在 $\mathscr{A}^{(m)}$中避开特征 $\chi(Q)$。

证明。由于 $|Q|>1$，特征 $\chi(Q)$ 非平凡，且 $|\mathscr{V}(Q)|>1$。对于每个 $q\in Q$，我们用 $[q]$ 表示满足 $q\in C$ 的唯一分量 $C\in\mathscr{V}(Q)$。

存在状态 $p_0,q_0\in Q$ 和一个字母 $x\in\Sigma$，使得 $[p_0]\neq[q_0]$，且 $[p_0\cdot x]=[q_0\cdot x]$。事实上，任取 Q 中满足 $[p]\neq[q]$ 的状态 p、q，以及该确定有限自动机的任意复位词 $w_{\mathscr{A}}$。由于 $p\cdot w=q\cdot w$，w 的最长前缀 w' 满足 $[p\cdot w']\neq[q\cdot w']$ 不等于

w，因此它后面在 w 中跟着一个字母 x。根据 w' 的选取，我们有 $[p{\cdot}w'x] = [q{\cdot}w'x]$。于是，状态 $p_0 := p{\cdot}w'$、$q_0 := q{\cdot}w'$，以及字母 x 满足要求。

这是避开特征 $\chi(Q)$ 的集合 $Q{\cdot}x$。为证明这一点，我们证明对于每个词 $u \in \Sigma^*$，$\chi(Q{\cdot}xu) \neq \chi(Q)$。根据定义，$\chi(Q{\cdot}xu) = (C_{Q\cdot xu}, \gamma(Q{\cdot}xu))$，且 $\chi(Q) = (C_Q, \gamma(Q))$。如果 $C_{Q\cdot xu} \neq C_Q$，不等式 $\chi(Q{\cdot}xu) \neq \chi(Q)$ 显然成立。因此，我们只需考虑满足 $C_{Q\cdot xu} = C_Q$ 的词 u。显然，$C_Q = Q$，因此对于任何这样的词 u，$C_{Q\cdot xu} = Q$。我们旨在证明 $\gamma(Q{\cdot}xu) < \gamma(Q)$。

令 $\ell := h(Q)$，并固定一个图 $G_0 = (Q, E) \in \mathscr{T}_Q$，使得 $\theta_\ell(G_0) = \gamma(Q) = \min_{G \in \mathscr{T}_Q} \theta_\ell(G)$。由于图 G_0 是连通的，因此它包含一条连接 p_0 和 q_0 的路径 π。根据状态 p_0 和 q_0，的选取，分量 $[p_0]$ 与 $[q_0]$ 不同，因此路径 π 必定包含一条边 $e_0 \in E_\ell \setminus E_{\ell-1}$。令 G_1 为从 G_0 中移除边 e_0 后得到的图。根据构造，G_1 的边 e 少于 $\gamma(Q)$ 条，且满足 $d(e) = \ell$。

考虑图 G_1' 在词 xu的作用下的像，即 $G_1' := (V', E')$，其中 $V' := Q{\cdot}xu$ 且

$$E' := \{(p{\cdot}xu, q{\cdot}xu) : (p, q) \in E \setminus \{e_0\}\}.$$

根据命题 3.2 的 (D3)，对于每条边 $(p,q) \in E_\ell$，都有 $d(p{\cdot}xu, q{\cdot}xu) \leq \ell$，因此图 G_1' 中满足 $d(e') = \ell$ 的边 e' 少于 $\gamma(Q)$。由于 $[p_0{\cdot}xu] = [q_0{\cdot}xu]$, 图 $([p_0{\cdot}xu], E_{\ell-1})$ 根据分量的定义是连通的，因此包含一条连接 $p_0{\cdot}xu$ 和 $q_0{\cdot}xu$ 的路径 π'。

令 G_0' 为从 G_1' 得到的图，即将路径 π' 的所有边添加到边集 E'中。我们声称此图属于族 $\mathscr{T}_{Q\cdot xu}$，也就是说，

(i) G_0' 的边集包含于 $E^{h(Q\cdot xu)}$；(ii) G_0' 是连通的；(iii) $Q{\cdot}xu \subseteq V' \subseteq C_{Q\cdot xu}$。

包含关系 (iii) 是显然的，因为按构造有 $V' = Q{\cdot}xu$，且对于所考虑的词 u，有 $C_{Q\cdot xu} = Q$。后一个等式还意味着 $h(Q{\cdot}xu) = h(Q) = \ell$。因此，$E^{h(Q\cdot xu)} = E_\ell$，而包含关系 $E' \subseteq E_\ell$ 由包含关系 $E \subseteq E_\ell$ 以及 E_ℓ 的稳定性（命题 3.1）得出。除此之外，E'，图 G_0' 的边集还包含路径 π' 的边；但根据 π' 的选取，这些边都属于 $E_{\ell-1} \subseteq E_\ell$。这就验证了 (i)。

还需验证图 G_0' 是连通的。回想一下，图 G_0 是连通的，而 G_1 是从 G_0 中删除一条边后得到的。图 G_1 不可能是连通的；否则它就属于 $\mathscr{T}_Q$，且在 $E_\ell \setminus E_{\ell-1}$中边数少于 $\gamma(Q)$，这与 $\gamma(Q)$ 的定义矛盾。因此，G_1 恰有两个连通部分，一个包含 p_0，另一个包含 q_0。在命题 3.5 的证明中用于验证图 G' 连通性的论证表明，这两个部分在 xu 的作用下的像构成图 G_1'的两个连通子图，分别包含 $p_0{\cdot}xu$ 和 $q_0{\cdot}xu$。由于路径 π' 连接 $p_0{\cdot}xu$ 和 $q_0{\cdot}xu$，将它的边加入 G_1'的边中即可得到一个连通图。

因此，我们证明了 $G_0' \in \mathscr{T}_{Q\cdot xu}$。那么，根据函数 γ 的定义，$\gamma(Q{\cdot}xu) \leq \theta_\ell(G_0')$。另一方面，$\theta_\ell(G_0') < \gamma(Q)$，因为在图 G_0' 的边集中，集合 E' 中少于 $\gamma(Q)$ 条边属于 $E_\ell \setminus E_{\ell-1}$，而路径 π' 的边都属于 $E_{\ell-1}$。结合这两个不等式可得 $\gamma(Q{\cdot}xu) < \gamma(Q)$，因此 $\chi(Q{\cdot}xu) \neq \chi(Q)$。□

命题 3.9。在 m/ω-博弈中 *Alice* 拥有获胜策略的 n 状态自动机，其复位阈值不超过 $m(n-2)+1$。

证明。如前所述，如果 Alice 在 DFA $\mathscr{A} = (Q, \Sigma)$ 上的m/ω-博弈中有获胜策略，且 $|Q| = n$，那么她在 ω-博弈的第m次迭代中也有获胜策略

$\mathscr{A}^{(m)}=(Q\ \Sigma^{\le m})\ \mathscr{A}$。因此，为了在$n-1$步内获胜，Alice 可以采用定理 3.6 证明中的相同策略。具体而言，在第i回合，她选择一个词$u_i\in\Sigma^{\le m}$，使集合$A_i{\cdot}u_i$避开特征 $\chi(A_i)$，其中A_i 表示该回合开始前的博弈位置。根据引理 3.8，Alice 可以选择一个仅由单个字母组成的第一个词u_1。

如果 Alice 采用刚才描述的策略，而 Bob 始终以空词回应，那么拼接所得的 $u_1\cdots u_{n-1}$ 就是 $\mathscr{A}$ 的一个复位词，其长度至多为 $m(n-2)+1$。□

注。对于 $m=2$，命题 3.9 给出的上界 $2(n-2)+1=2n-3$ 是紧的。为此，对每个 $n\ge 3$，考虑花自动机 $\mathscr{F}_n:=(\mathbb{Z}_n,\ \{a1,\ \ldots,\ a_{n-1}\})$，其中各字母的作用如下：

$$m{\cdot}a_1:=\begin{cases}0 & \text{if } m=1,\\ m & \text{if } m\ne 1;\end{cases}\qquad m{\cdot}a_k:=\begin{cases}1 & \text{if } m=k,\\ k & \text{if } m=1,\\ m & \text{if } m\ne 1,k,\end{cases}\qquad \text{for } 2\le k\le n-1.$$

图 7 展示了自动机 $\mathscr{F}_n$（并说明了其名称的由来）。

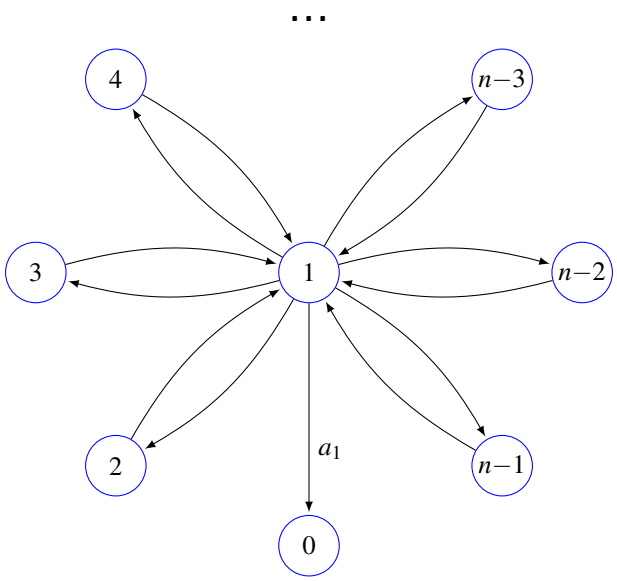


图 7。确定有限自动机 $\mathscr{F}_n$。当处于状态 q 时，如果没有画出由字母 x 标记的出边，则假定在 q 处有一条由 x 标记的自环；为使图示更简洁，这些自环均省略不画。

Alice 采用以下策略，便能在自动机 $\mathscr{F}_n$ 上赢得 $2/\omega$-博弈。Bob 移动之后，只要仍有令牌位于状态 $k\ne 0$，她就在$k=1$ 时播放字母 a_1，在$k>1$时播放词 $a_k a_1$。这样，无论 Bob 如何回应，Alice 最终都会将所有令牌带到状态 0。

显然，词 $a_1a_2a_1a_3\cdots a_{n-1}a_1$ 在所有奇数位置上均为 a_1，且在位置 $2(k-1)$上为 a_k，$2\le k\le n-1$，长度为 $2n-3$，并且复位了 $\mathscr{F}_n$。现在假设 w 是 $\mathscr{F}_n$的最短复位词。对于 $\mathbb{Z}_n$的任意非空子集 S，我们有

$$|S{\cdot}a_1|=\begin{cases}|S|-1 & \text{if } 0,1\in S,\\ |S| & \text{otherwise,}\end{cases}\quad\text{and}\quad |S{\cdot}a_k|=|S|\ \text{ for }\ 2\le k\le n-1.$$

因此，要将 n 元集合 $\mathbb{Z}_n$ 压缩为单元素集合，词 w 中必须至少出现 $n-1$ 次字母 a_1。这些出现中的任意两次之间都必须由一个非空词隔开。事实上，如果 w 含有因子 a_1^i，其中 $i>1$，那么将该因子替换为单个字母 a_1，就会得到一个更短的词，且其作用与 w 完全相同，这与 w 的极小性矛盾。因此，对于某些非空词 $w_1,\dots,w_{n-2}$，w 可以写成形式 $w=w_0a_1w_1a_1\cdots w_{n-2}a_1w_{n-1}$。$w_1,\dots,w_{n-2}$的总长度至少为 $n-2$，由此 $|w|\geq n-1+n-2=2n-3$。

因此，自动机 $\mathscr{T}_n$ 的复位阈值为 $2n-3$。

我们不知道命题 3.9 给出的界 $m(n-2)+1$ 对于$m\geq 3$是否是紧的，而且我们倾向于认为并非如此。

˘ 命题 3.9 还导出了一个满足 Černý 猜想界的新类同步自动机：

推论 3.10. 对于一个 n 状态自动机，如果 *Alice* 在 n/ω-博弈中拥有获胜策略，那么其复位阈值不超过 $n(n-2)+1=(n-1)^2$。

尽管推论 3.10 中的观察似乎值得记录，但公平地说，与定理 3.6 不同，我们迄今尚未发现这一观察对那些并非以同步博弈来定义的确定有限自动机有任何应用。

3.4. **重置阈值：A_k-自动机（含 $k\in\mathbb{N}$）**。在这里，对于每个$k\in\mathbb{N}$，我们给出一系列例子，说明与$A\omega$-自动机相比，含有$k\in\mathbb{N}$ 的A_k-自动机的复位阈值可能远远超过状态数。更具体地说，该系列中的确定有限自动机的复位阈值下界为状态数的二次函数，其首项系数为 $12k$。

由于 Černý序列 $\{\mathscr{C}_n\}_{n=2,3,\dots}$ 在 $n=1$ 时见证了这一结论，我们假设 $n>1$。对于每个 $m\in\mathbb{N}$，考虑自动机 $\mathscr{L}_{n,m}:=(\mathbb{Z}_n,\{a_1,\dots,a_{k+m}\})$，其状态数 $n=k+m+1$。其中，每个字母 a_i（$i=1,\dots,k$）将状态 i 映射到 0，并保持其他所有状态不变；而每个字母 a_{k+j}（$j=1,\dots,m$）则循环置换状态 j、$j+1,\dots,k+j-1$、$k+j$，并保持其他所有状态不变。因此，对于每个 $q\in\mathbb{Z}_n$，我们有

$$q\cdot a_i=\begin{cases}0 & \text{if } q=i,\\ q & \text{otherwise,}\end{cases}\quad i=1,\dots,k,\ \text{and}\ \ q\cdot a_{k+j}=\begin{cases}q+1 & \text{if } j\leq q<k+j,\\ j & \text{if } q=k+j,\\ q & \text{otherwise,}\end{cases}\quad j=1,\dots,m.$$

特别要注意的是，

$$q\cdot a_q=\begin{cases}0 & \text{if } 1\leq q\leq k,\\ q-k & \text{if } k+1\leq q\leq k+m,\end{cases}\quad \text{and}\ \ p\cdot a_q\geq p\ \ \text{whenever}\ \ p\neq q. \tag{5}$$

还要注意，0 是 $\mathscr{L}_m^k$ 的一个汇点，也就是说，它是一个被所有字母固定的状态。

举例来说，图8展示了自动机 $\mathscr{L}_2^k$。

命题 3.11。确定有限自动机 $\mathscr{L}_m^k$ 是一个 A_k-自动机。

证明。假设 Bob 先移动。用 w_s 表示截至 Bob 第 s 个回合为止的历史，并令 $A_s:=Q\cdot w_s$。如果 $A_s=\{0\}$，Alice 已经获胜。否则，如果 $A_s\neq\{0\}$ 且 $q_s:=\min(A_s\setminus\{0\})$，Alice 就出字母 a_{q_s}。根据 (5)，则 $q_s\cdot a_{q_s}=0$ 或 $q_s\cdot a_{q_s}=q_s-k$。无论 Bob 作为回应出哪个长度为 $<k$ 的词 v_{s+1}，都有 $q_s\cdot a_{q_s}v_{s+1}<q_s$。因此，要么 $q_s\cdot a_{q_s}v_{s+1}=0$（此时 $|A_{s+1}|<|A_s|$），要么 $q_{s+1}<q_s$。所以，该策略保证最终存在某个 t，使得 $A_t=\{0\}$，于是 Alice 获胜。□

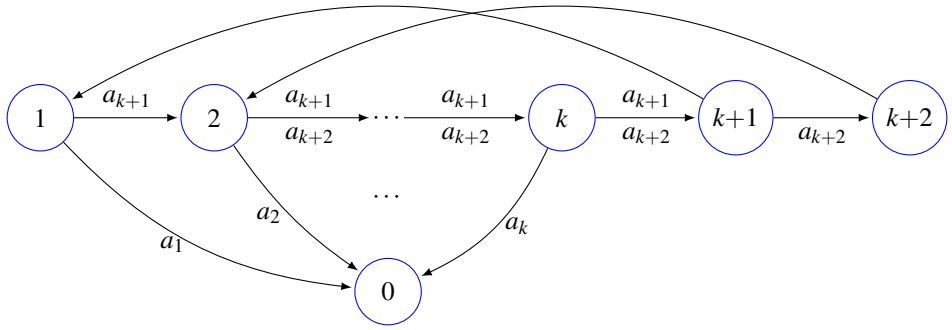


图8. 确定有限自动机 $\mathscr{L}_2^k$。在状态 q 时，如果没有显示标记为字母 x 的出边，则假定存在一条在 q 处标记为x 的自环；为使图示更简洁，省略了这类自环。

命题 3.12。 自动机 $\mathscr{L}_m^k$ 的复位阈值不小于 $n(n-1)/2+k$。

证明。 假设 $w = x_1 \cdots x_\ell$是 $\mathscr{L}_{km}$的一个复位词。对于每个 $s \in \{0,1,\ldots,\ell\}$，记$u_s$ 为w 的长度为 s的前缀；特别地，$u_0 = \varepsilon$。

复位词 w 将 $\mathscr{L}_m^k$ 的所有状态映射到同一个状态。由于 0 在所有输入字母作用下都保持不变，该状态必定是 0。因此，对于每个状态$q \in \mathbb{Z}_n$，都有$q\cdot w = 0$。令$p_t := q\cdot u_t$，并考虑状态序列

$$q = p_0,\ p_1,\ \ldots\ p_{t-1},\ p_t, \ldots\ p_\ell = q\cdot w = 0.$$

如果$q \neq 0$，那么该序列中必定有一些状态严格大于其紧邻的后继状态。因此，对于每个$q \in \{1,\ldots,k+m\}$，集合

$$E_q := \{s \in \{1,\ldots,\ell\} : p_s < p_{s-1}\}$$

非空。对于 $s \in E_q$，我们有 $p_{s-1} \neq 0$。由于 $p_s = p_{s-1}\cdot x_s$，式 (5) 的第一部分意味着：若 $k+1 \le p_{s-1} \le k+m$，则 $p_{s-1} - p_s = k$；若 $1 \le p_{s-1} \le k$，则 $p_{s-1} - p_s = p_{s-1} \le k$。因此，对于每个 $s \in E_q$，都有$0 < p_{s-1} - p_s \le k$；而根据不等式 (5)，对于所有 $t \notin E_q$，都有 $p_{t-1} - p_t \le 0$。现在我们有

$$\begin{aligned} q &= \sum_{t=1}^{\ell} (p_{t-1} - p_t) && \text{(telescopic sum)} \\ &\le \sum_{s\in E_q} (p_{s-1} - p_s) && \text{(dropping nonpositive summands)} \\ &\le \sum_{s\in E_q} k = k|E_q| && \text{(using that } p_{s-1} - p_s \le k \text{ for } s \in E_q). \end{aligned}$$

因此 $|E_q| \ge_q k$。

对于任意两个不同的 $q, q' \in \{1,\ldots,k+m\}$，集合 E_q 和 $E_{q'}$ 不相交。事实上，反设 $E_q \cap E_{q'} \neq \varnothing$，并令 $s \in E_q \cap E_{q'}$。那么 $p_s = p_{s-1}\cdot x_s < p_{s-1}$，同时 $p'_s = p'_{s-1}\cdot x_s < p'_{s-1}$，其中 $p_t := q\cdot u_t$，且 $p'_t := q'\cdot u_t$。根据 (5)，对每个字母 $x \in \{a_1, \ldots, a_{k+m}\}$，恰好存在一个状态 $p \in \mathbb{Z}_n$，使得 $p\cdot x < p$。因此，$p_{s-1} = p'_{s-1}$，也就是说，$q\cdot u_{s-1} = q'\cdot u_{s-1}$。根据确定有限自动机 $\mathscr{L}_m^k$ 的构造，若两个不同的状态经某个词映射到同一个状态，则所得状态为 0。由于 $p_{s-1} \neq 0$，这就产生了矛盾。

因此，我们有

$$|w| \geq \left|\bigcup_{q=1}^{k+m} E_q\right| = \sum_{q=1}^{k+m} |E_q| \geq \sum_{q=1}^{k+m} \frac{q}{k} = \frac{(k+m+1)(k+m)}{2k} = \frac{n(n-1)}{2k}.$$

因此，$\mathrm{rt}(\mathscr{L}_m^k) \geq \frac{n(n-1)}{2k}$，如所述。 □

注。 1. [9]中的问题 2 询问，是否每个具有n个状态的 A-自动机，都能由长度为$n-1$的词复位。（按本文当前的术语， [9]的 A-自动机恰好是这样的确定有限自动机：在一种 2-博弈变体中，Alice 对其拥有获胜策略；在该变体中，Bob 不允许跳过移动，也就是说，不能出空词。）命题 3.11 和 3.12 对$n > 4$给出了否定答案。

2. 由于 $|E_q|$ 是一个整数，命题 3.12 的证明表明，事实上，对每个q，都有 $|E_q| \geq \lceil \frac{q}{k} \rceil$。因此，$\mathrm{rt}(\mathscr{L}_{km}) \geq L := \sum_{q=1}^{k+m} \lceil \frac{q}{k} \rceil$。我们给出了一个长度为$L$的复位词，用于 $\mathscr{L}_{km}$，从而证明L 是 $\mathrm{rt}(\mathscr{L}_m^k)$ 的精确值。

令 $v_q := a_q$ 对于 $1 \leq q \leq k$，以及 $v_q := a_q a_{q-k} a_{q-2k} \cdots a_t$，其中 $1 \leq t \leq k$，对于 $k+1 \leq q \leq k+m$。则 $|v_q| = \lceil \frac{q}{k} \rceil$ 且 $q \cdot v_q = 0$，而对于所有 $r > q$，$r \cdot v_q = r$。因此，词 $v_1 v_2 \cdots v_{k+m}$ 重置 $\mathscr{L}_{km}$，长度为 L。

将第二条注中的观察与命题 3.12 结合可得

$$\frac{n(n-1)}{2k} \leq \mathrm{rt}(\mathscr{L}_m^k) < \frac{n(n-1)}{2k} + n,$$

因为对于每个实数 α都有 $\lceil \alpha \rceil < \alpha + 1$。令 $e := \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor$，以及 $r := n - 1 - ke$，我们可以将 $\mathrm{rt}(\mathscr{L}_m^k)$ 表示如下：

$$\mathrm{rt}(\mathscr{L}_m^k) = k\frac{e(e+1)}{2} + r(e+1).$$

如果 k 整除 $n-1$，即 $r = 0$ 且 $e = \frac{n-1}{k}$，则右端可化简为 $\frac{(n-1+k)(n-1)}{2k}$。

如果$\mathbf{S}$ 是一个 DFA 类，那么它的*Černý*函数 $\mathfrak{C}_{\mathbf{S}}(n)$定义为$\mathbf{S}$中所有$n$状态同步自动机的复位阈值的最大值。采用这一记号，定理 3.6 及其后面的注确立了等式 $\mathfrak{C}_{\mathbf{A}_\omega}(n) = n-1$；而命题 3.12 得出不等式 $\mathfrak{C}_{\mathbf{A}_k}(n) \geq \frac{n(n-1)}{2k}$。我们不知道下界 $\frac{n(n-1)}{2k}$ 与 $\mathfrak{C}_{\mathbf{A}_k}(n)$ 的实际值有多接近。

我们假设$k > 1$，以避免与已知结果重叠；但对于$k = 1$，自动机 $\mathscr{L}_m^k$ 的构造同样完全成立。对于每个$n \geq 3$，DFA $\mathscr{L}_{n-2}^1$ 与 Igor Rystsov 构造的自动机一致（见 [16, 定理2] 或 [17, 定理 6.1]），该自动机用于证明所有带汇点同步自动机组成的类的 Černý函数下界 $\binom{n}{2}$；已知这个下界是紧的。这为如下猜想提供了一些支持：当$n-1$能被k整除时，带汇点的A_k-自动机类的 Černý函数的正确值可能是$\frac{(n-1+k)(n-1)}{2k}$。

若$k = n-1$，则表达式$\frac{(n-1+k)(n-1)}{2k}$的值为$n-1$。我们将在第5节证明，每个带汇点的A_{n-1}-自动机都是$A\omega$-自动机，因此根据定理 3.6，其复位阈值至多为$n-1$。因此，$\frac{(n-1+k)(n-1)}{2k}$ 给出了带汇点的A_k-自动机类的 Černý函数的正确值，适用于两个极端情形：$k = 1$ 和$k = n-1$。

4. 可判定性

在此，我们探讨一个自然的问题：如何高效地判定 Alice 在给定的确定有限自动机上的k-博弈中是否拥有获胜策略。我们假设读者熟悉算法理论的基础知识，包括大 O 记号，以及多项式时间算法和多项式时间归约的概念。

4.1. 二元子集自动机。我们的分析依赖于二元子集自动机这一广为人知的构造，现回顾如下。给定一个确定有限自动机 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$，令$Q^{[2]}$ 表示由Q的所有二元子集构成的集合，并加入一个新的符号$\mathbf{s}$。定义字母$a \in \Sigma$ 在$Q^{[2]}$ 上的作用 $\circ$ 如下：

$$\mathbf{s}\circ a := \mathbf{s} \text{ and } \{q,q'\}\circ a := \begin{cases} \{q\cdot a, q'\cdot a\} & \text{if } q\cdot a \neq q'\cdot a, \\ \mathbf{s} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这定义了一个确定有限自动机（$Q^{[2]}$, Σ），其中$\mathbf{s}$ 是一个汇点。我们用 $\mathscr{A}^{[2]}$表示这个自动机。若 $\mathscr{A}$有n 个状态，则 $\mathscr{A}^{[2]}$ 有 $\binom{n}{2}+1$ 个状态。

众所周知（参见例如 [18, 定理 3], , 且易于验证），自动机 $\mathscr{A}$和$\mathscr{A}^{[2]}$ 具有相同的复位词集合。（特别地，两个自动机要么都可同步，要么都不可同步。）因此，我们可以对 $\mathscr{A}^{[2]}$ 应用以下观察。

引理 4.1。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，以及任意具有相同复位词集合的同步自动机 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{A}'$，要么 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{A}'$ 都是 A_k-自动机，要么都不是。

证明。设 $\mathfrak{S}$ 是 Alice 在 $\mathscr{A}$上的k-博弈中的获胜策略。Alice 可以在 $\mathscr{A}'$ 上的k-博弈中模仿 $\mathfrak{S}$，方法如下：每当 Bob 在 $\mathscr{A}'$上的博弈中移动时，她就在 $\mathscr{A}$上重复相同的移动，确定 $\mathfrak{S}$ 指定她回应时应选的字母，然后在 $\mathscr{A}'$上的博弈中选出相同的字母。这样，在 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{A}'$上的博弈中，每个回合的历史都相同。如果 $\mathscr{A}$上博弈的最终历史是 $\mathscr{A}$的复位词，那么它也是 $\mathscr{A}'$的复位词。因此，只要 $\mathscr{A}$是 A_k-自动机，$\mathscr{A}'$ 也必然是；反过来则由对称性可得。□

如前所述，引理 4.1 适用于 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{A}^{[2]}$，由此得到以下有用的事实。

引理 4.2。对于任意 $k \in \mathbb{N}$和任意确定有限自动机 $\mathscr{A}$，要么 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{A}^{[2]}$ 都是 A_k-自动机，要么两者都不是。

对于任意 $k \in \mathbb{N}$，引理 4.2 给出了一个多项式时间归约，将识别 A_k-自动机的问题归约为识别带汇点的 A_k-自动机的问题。因此，任何用于解决后者的多项式时间算法，都能立即得到一个用于解决前者的多项式时间算法。由于带汇点的自动机在技术上更容易处理，对于 A_k-自动机的识别问题，我们通过将其限制在带汇点的确定有限自动机上来处理，$k = \omega$和 $k \in \mathbb{N}$的情形均如此。

4.2. A 的多项式可判定性ω。我们首先给出带汇点的 $A\omega$-自动机的一个刻画。其表述涉及强连通分量这一概念，下面我们回顾一下。若确定有限自动机 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$ 的两个状态 q 和 q' 满足：对于某些词 $w,w' \in \Sigma^*$，有 $q' = q\cdot w$ 且 $q = q'\cdot w'$，则称这两个状态互相可达。互达关系是 Q 上的一个等价关系，其等价类称为 $\mathscr{A}$ 的强连通分量 。

命题 4.3。一个带有汇点 $\mathbf{s}$的确定有限自动机 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$是一个 $A\omega$-自动机，当且仅当对于每个状态 $q \neq \mathbf{s}$，都存在一个字母 $a \in \Sigma$，使得状态 q 和 $q\cdot a$ 属于 $\mathscr{A}$的不同强连通分量。

证明。我们借助同步博弈的图形表示进行论证，在这种表示中，所有状态最初都持有令牌。游戏过程中，状态 **s**上的令牌永远不会移动。

假设存在一个状态 $q \neq \mathbf{s}$，使得对于每个 $a \in \Sigma$，状态 $q{\cdot}a$ 都属于 q所在的强连通分量。那么，对于每个 $a \in \Sigma$，都存在一个词 $w_a \in \Sigma^*$，使得 $q{\cdot}aw_a = q$。因此，在 $\mathscr{A}$上的 ω-博弈中，Bob 总能在 Alice 出a时回应w_a，将令牌送回q。于是，在 Bob 每次移动之后，至少状态**s**和q 上都持有令牌，Bob 获胜。

反过来，假设对于每个状态 $\mathrm{q} \neq \mathrm{s}$，都存在一个字母 $\mathrm{a} \in \Sigma$，使得状态 q 和 q·a 属于 $\mathscr{A}$中不同的强连通分量。那么，对于任意一个除 s 以外仍有状态持有令牌的位置，Alice 都能通过反复执行以下步骤，在 $\mathscr{A}$上的 ω-博弈中获胜。她任意选择一个持有令牌的状态 $\mathrm{q}_0 \neq \mathrm{s}$，并出一个字母 a_1，使得 $\mathrm{q}_0{\cdot}\mathrm{a}_1 \notin \mathrm{K}_0$，其中 K_0 是包含 q_0的强连通分量。当 Bob 出一个词 w_1，且 $\mathrm{q}_0{\cdot}\mathrm{a}_1\mathrm{w}_1 \neq \mathrm{s}$ 时，Alice 就回应一个字母 a_2，使得 $\mathrm{q}{\cdot}\mathrm{a}_1\mathrm{w}_1\mathrm{a}_2 \notin \mathrm{K}_1$，其中 K_1 是包含 $\mathrm{q}_0{\cdot}\mathrm{a}_1\mathrm{w}_1$, 的强连通分量，依此类推。由于序列 K$_0$,K1,. ..中的强连通分量不可能重复，这个过程必定最终终止；只有当某个 ℓ 满足 $\mathrm{q}_0{\cdot}\mathrm{a}_1\mathrm{w}_1\mathrm{a}_2\cdots\mathrm{a}_\ell\mathrm{w}_\ell = \mathrm{s}$ 时，过程才会终止。随后，从 q_0移动到 s 的令牌便会被移除。Alice 如此行动，移除除 s 上的令牌之外的所有令牌并获胜。□

命题 4.4。存在一种算法，对于给定的带有汇点的确定有限自动机 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$，可以在 $O(|Q| \cdot |\Sigma|)$ 时间内判定 ω-博弈在 $\mathscr{A}$中的胜者。

证明。令 $n{:=}\,|Q|$，且 $m := |\Sigma|$。我们证明，命题 4.3 中的条件可以在 $O(nm)$ 时间内验证。众所周知，有向图的强连通分量可以在线性于顶点数和边数的时间内计算出来（例如，使用 Tarjan 算法 [19, 第 4] 节）。$\mathscr{A}$的有向图有 n 个顶点和 nm 条边，因此可以在 $O(nm)$ 时间内计算出其强连通分量。

如果计算结果表明 $\mathscr{A}$有多个汇点，那么 $\mathscr{A}$就不是同步自动机，Bob 获胜。如果 $\mathscr{A}$恰有一个汇点，则只需进行 $O(nm)$ 次检查，即可验证每个非汇点状态 q 和每个字母 $a \in \Sigma$对应的状态 q 与 $q{\cdot}a$ 是否属于同一个强连通分量。□

定理 4.5。存在一种算法，给定一个确定有限自动机 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$，可在 $O(|Q|^2 \cdot |\Sigma|)$ 时间内判定 $\mathscr{A}$上的 ω-博弈的胜者。

证明。根据引理 4.2（取 $k = \omega$），只需识别 2-子集自动机 $\mathscr{A}^{[2]}$ 是否为 $A\omega$-自动机。由于 $\mathscr{A}^{[2]}$ 有一个汇点，命题 4.4 适用，可在 $O(|Q^{[2]}| \cdot |\Sigma|) = O(|Q|^2 \cdot |\Sigma|)$ 时间内给出答案。预处理开销（即从 $\mathscr{A}$构造 $\mathscr{A}^{[2]}$）同样为 $O(|Q|^2 \cdot |\Sigma|)$，因此总运行时间为 $O(|Q|^2 \cdot |\Sigma|)$。□

4.3. **A 的多项式可判定性**$_k$

（$k \in \mathbb{N}$）与上一小节一样，我们先为带有汇点的确定有限自动机提供一种算法。与命题 4.4 的算法不同，后者足够简单，可以进行非正式描述；当前算法则更为复杂，因此需要更正式的阐述。我们先给出伪代码，然后说明其正确性并进行复杂度分析。

下面介绍后续伪代码中使用的记号。对于非空子集 $F \subseteq Q$以及确定有限自动机 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$ 的一个状态$q \in Q$，定义

$$F{\cdot}\Sigma^{-1} := \bigcup_{a\in\Sigma}\{q \in Q : q{\cdot}a \in F\} \quad \text{and} \quad q{\cdot}\Sigma^{<k} := \{q{\cdot}w : w \in \Sigma^{<k}\}.$$

从 $\mathscr{A}$ 上 k-博弈的图形表示来看，集合$F\cdot\Sigma^{-1}$ 由 Alice 能够通过一次移动将令牌移至F 中某个状态的所有状态组成，而$q\cdot\Sigma^{<k}$则包含 Bob 能够通过一次移动将令牌从q 移至的所有状态。

输入：确定有限自动机 $\mathscr{A}=(Q\ \Sigma)$，其汇点为 **s**

1: $F,\ P\leftarrow\{\mathbf{s}\}$ ▷ 初始化
2: **当** $F\subsetneq Q$ **时**
3: $P\leftarrow F\cdot\Sigma^{-1}$ ▷ 初步标记
4: **如果** $(\forall q\in P\setminus F)\ q\cdot\Sigma^{<k}\setminus P\neq\varnothing$ **那么**
5: **返回** $\mathscr{A}$不是一个A_k-自动机
6: **else**
7: $F\leftarrow F\cup\{q\in P\setminus F : q\cdot\Sigma^{<k}\subseteq P\}$ ▷ 固定标记
8: **返回** $\mathscr{A}$是一个A_k-自动机

算法1： 检查给定的带汇点确定有限自动机上的k-博弈中 Alice 是否具有获胜策略。

读者可以尝试在第3.4小节介绍的系列中的自动机 $\mathscr{L}_2^3$ 上运行算法1。图 9 和图 10 展示了在假设$k=3$的情况下算法的执行过程。

算法1使用两组状态：由F 确定标记状态组成的集合，以及由P 初步标记状态组成的集合。第3行和第7行展示了如何更新这些集合。（在图 9 和图 10 中，F 中的状态显示为深蓝色，而P中的状态显示为浅蓝色；颜色较深的标记会覆盖颜色较浅的标记。）算法将F 初始化为单元素集合 $\{\mathbf{s}\}$。在主循环中，首先将P更新为 $\mathscr{A}$中所有边的尾节点所组成的集合，其中这些边的头节点位于当前集合F中。然后，针对$P\setminus F$ 中的每个状态，检验其在任意长度小于k的词作用下得到的所有像是否都属于P这一性质。如果不存在这样的状态，算法将报告 $\mathscr{A}$不是A_k-自动机并停止；否则，将所有通过检验的状态添加到集合F中。主循环重复执行，直到$F=Q$，此时算法报告 $\mathscr{A}$是A_k-自动机。

图9上方的图中，状态 0 标记为深蓝色，因为 0 是确定有限自动机 $\mathscr{L}_2^3$ 的汇点。下一幅图显示，状态 1、2 和 3 分别由于边 $1\xrightarrow{a}0$、$2\xrightarrow{a}0$ 和 $3\xrightarrow{a}0$ 而标记为浅蓝色。接下来进行测试，只有状态 1 通过，而状态 2 和 3 未通过，因为 $2\cdot a_4^2=3\cdot a_4=4\notin\{0,1,2,3\}$。下一步，状态 4 由于边 $4\xrightarrow{a}1$ 而标记为浅蓝色。接下来测试状态 2、3 和 4，这次状态 2 通过了——等式 $2\cdot a_4^2=4$ 不再构成障碍，因为状态 4 已加入初步标记状态集合。状态 3 和 4 未通过，因为$3\cdot a_5^2=4\cdot a_5=5\notin\{0,1,2,3,4\}$。这一结果显示在图9下方的图中。

最后两个步骤如图10所示。

作为比较，在同一个确定有限自动机 $\mathscr{L}_2^3$上执行，且 $k=4$ 时，算法1会在步骤 2 停止，因为状态 1、2 和 3 中的每一个都可以通过长度小于 4 的词到达状态 4，因此这些状态都无法通过测试。

命题 4.6。 算法*1*能够正确判定给定的带汇点确定有限自动机上的 k-博弈的赢家。

证明。 沿用算法1中的记号。设 F_i和 P_i、$i=0,1,2,\ldots$分别表示算法在确定有限自动机$\mathscr{A}=(Q\ \Sigma)$上执行时，经过第i次迭代后的集合 F和 P。我们对 i 进行归纳证明：每当状态$q\in F_i$ 持有一个令牌时，

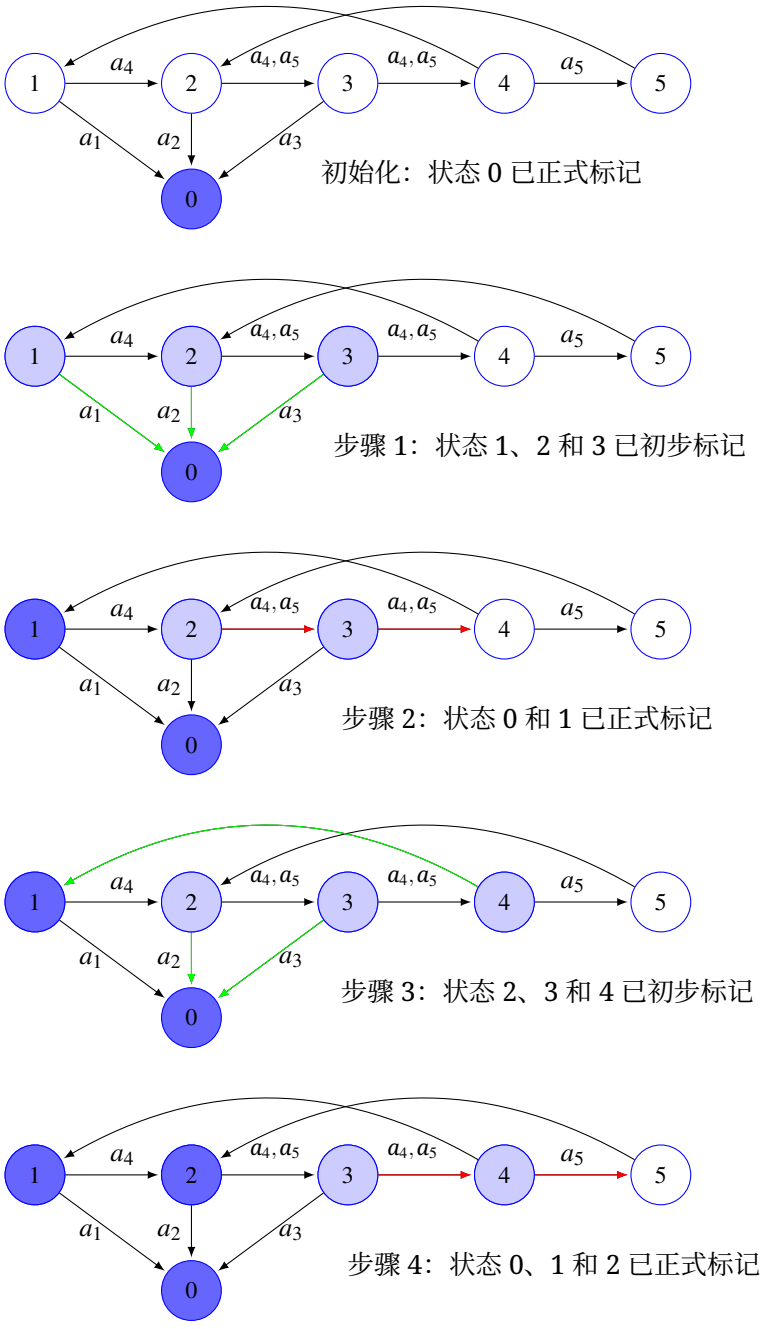


图9。算法1（其中 $k = 3$）在确定有限自动机 $\mathscr{L}_2^3$ 上的前几个步骤，省略了自环。F（已正式标记）中的状态以深蓝色显示，而$P \setminus F$（已初步标记但尚未正式标记）中的状态以浅蓝色显示。绿色边为初步标记提供见证，红色路径则从未通过正式标记测试的状态出发。

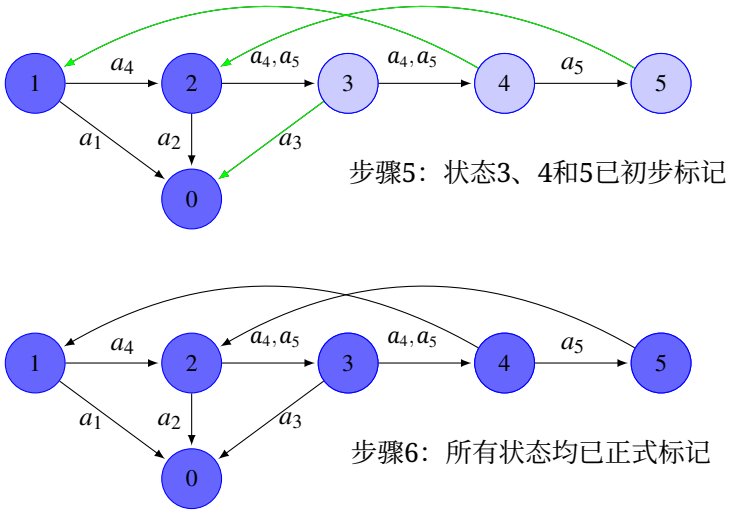


图10. 算法1（带有$k = 3$）在确定有限自动机 $\mathscr{L}_2^3$ 上的最后几个步骤。

对于 Bob 从q执行的每个移动$w \in \Sigma^{<k}$，Alice 都有一种策略，可以将令牌从状态$q{\cdot}w$移动到汇点$\mathbf{s}$。

当 $i = 0$ 时，该断言显然成立。现在假设该断言对 F_i 中的所有状态都成立，并证明它对每个状态 $q \in F_{i+1}$ 都成立。显然，我们可以假设 $q \in F_{i+1} \setminus F_i$。根据算法的构造，有 $q{\cdot}\Sigma^{<k} \subseteq P_{i+1}$。因此，如果 Bob 从 q 执行一个词 $w \in \Sigma^{<k}$，状态 $q{\cdot}w$ 就属于 P_{i+1}。根据定义，$P_{i+1} = F_i{\cdot}\Sigma^{-1}$，所以存在一个字母 $a \in \Sigma$，使得 $(q{\cdot}w){\cdot}a \in F_i$。Alice 执行这个字母 a，从而将令牌移动到 F_i 中的一个状态。根据归纳假设，无论 Bob 随后如何移动，Alice 都能迫使令牌到达汇点 s。

由此可知，如果算法以 $F = Q$ 终止，那么 Alice 从每个状态出发都有获胜策略。结合这些策略，她可以逐个从除汇点以外的所有状态中移除令牌。因此，$\mathscr{A}$ 是一个 A_k-自动机。

反过来，假设算法在第 i 次迭代时停止，却未达到等式 $F = Q$。于是 $F_i \subsetneq Q$。若 $P_{i+1} = Q$，则对于所有状态 q 和词 w，条件 $q{\cdot}w \in P_{i+1}$ 都成立，算法的第 $(i+1)$ 次迭代就会继续执行，这与终止相矛盾。因此，$P_{i+1} \subsetneq Q$。Bob 可以通过以下策略让一个令牌无限期地留在 P_{i+1} 之外。将令牌放在状态 $q \notin P_{i+1}$ 上，并让 Alice 任意选择一个字母 $a \in \Sigma$。根据 P_{i+1} 的定义，$q{\cdot}a \notin F_i$。如果 $q{\cdot}a \notin P_{i+1}$，Bob 就跳过自己的回合。如果 $q{\cdot}a \in P_{i+1} \setminus F_i$，那么根据终止条件（第 4 行），存在一个词 $w \in \Sigma^{<k}$，使得 $(q{\cdot}a){\cdot}w \notin P_{i+1}$。Bob 选择这个词，从而将令牌移回 P_{i+1} 之外。因此，始终有一个令牌位于不同于 s 的某个状态上。既然 Bob 有获胜策略，$\mathscr{A}$ 就不是 A_k-自动机。□

对算法1进行复杂度分析时，令$n := |Q|$，$m := |\Sigma|$。算法中最耗时的步骤是第4行的测试：对于所有$q \in P \setminus F$，是否$q{\cdot}\Sigma^{<k} \subseteq P$。该测试可以通过在 $\mathscr{A}$的有向图中从q开始执行广度优先搜索（广度优先搜索）来完成。在任意图$G = (V,E)$中，广度优先搜索可在$O(|V| + |E|)$时间内求出从给定顶点出发的最短路径距离；参见 [7, 第20.2]节。由于 $\mathscr{A}$的有向图有n 个顶点

和nm 条边，单次广度优先搜索需要$O(nm)$时间。广度优先搜索完成后，检查距q 小于k 的所有状态是否属于P ，可在$O(n)$时间内完成，前提是集合P 以按状态索引的布尔数组表示，并采用直接寻址；参见 [7,第11.1]节。

由此，人们可能会得出结论：如果每个非汇点状态 q 对条件 $q\cdot\Sigma^{<k}\subseteq P$ 只测试一次，那么在算法的整个执行过程中，为固定标记所需的测试耗费的总时间为 $O(n^2m)$。然而，如何实现算法1以保证这一性质并不显而易见。注意，如上面在确定有限自动机 $\mathscr{L}_2^3$ 上运行该算法的示例所示，朴素实现并不满足这一要求：例如，状态3被测试了三次，在步骤2和步骤4中未通过测试，而在步骤6中通过了测试。

为绕过这一瓶颈，我们引入一种辅助数据结构。对于每个非汇点状态 q，该结构存储集合 $R[q] := q\cdot\Sigma^{<k}\setminus P$ ，其中包含所有当前未标记且可通过长度小于 k 的词从 q 到达的状态。于是，条件 $q\cdot\Sigma^{<k}\subseteq P$ 等价于 $R[q]$ 为空。

集合$R[q]$的初始值可以通过广度优先搜索预先计算。随后，主循环的每次迭代都会从仍非空的集合中移除算法在本次迭代中添加到P的状态。更新会“即时”进行，也就是说，一旦某个状态被添加到P，就会立即从包含该状态的每个集合$R[q]$ 中将其移除。当集合$R[q]$ 变为空时，状态$q\in P\setminus F$就会被添加到F中。

下面以伪代码形式给出对算法1的拟议修改。

输入：带有汇点**s**的确定有限自动机 $\mathscr{A}=(Q\ \Sigma)$

1: $F,\ P\leftarrow\{\mathbf{s}\}$ ▷ 初始化
2: **对**每个 $q\in Q\setminus\{\mathbf{s}\}$ **执行**
3: $R[q]\leftarrow q\cdot\Sigma^{<k}\setminus\{\mathbf{s}\}$ ▷ 预计算
4: **当** $F\subsetneq Q$ **执行**
5: $P\leftarrow F\cdot\Sigma^{-1}$ ▷ 初步标记
6: **对**每个 $q\in P\setminus F$ **执行**
7: $R[q]\leftarrow R[q]\setminus P$
8: **如果**（$\forall q\in P\setminus F$） $R[q]\neq\varnothing$ **则**
9: **返回** $\mathscr{A}$不是一个A_k-自动机
10: **else**
11: $F\leftarrow F\cup\{q\in P\setminus F:\ R[q]=\varnothing\}$ ▷ 固定标记
12: **返回** $\mathscr{A}$是一个 A_k-自动机

算法 2： 算法1 的一种修改版本，其实现的时间复杂度为 $O(|Q|^2\cdot|\Sigma|)$

为便于说明，下表展示了在确定有限自动机 $\mathscr{L}_2^3$ 上执行算法 2 时，集合 $R[q]$，P 和 F 的演变过程。读者可以再次参阅图 9 和图 10，以直观了解此表。

	步骤 0	步骤 1	步骤 2	步骤 3	步骤 4	步骤5	步骤6
$R[1]$	{1,2,3}		$\varnothing$				
$R[2]$	{2,3,4}		{4}		$\varnothing$		
$R[3]$	{3,4,5}		{4,5}		{5}		$\varnothing$
$R[4]$	{1,2,4,5}		{4,5}		{5}		$\varnothing$
$R[5]$	{2,3,5}		{4,5}		{5}		$\varnothing$
P	{0}	1、2、3 加入 P		4 加入 P		5 个连接P	
F	{0}		1 个连接 F		2 个连接 F		3、4、5 个连接 F

命题 4.7。 算法 *2* 在确定有限自动机 $Q\ \Sigma)$ 上的运行时间为 $O(|Q|^2\cdot|\Sigma|)$。

证明。设 $n:=|Q|$ ，且 $m:=|\Sigma|$。

对于每个状态 $q\in Q$，算法通过从 q 开始执行广度优先搜索，初始化集合 $R[q]$。如上所述，广度优先搜索需要 $O(nm)$ 时间。由于对所有 $q\in Q$ 都要进行预计算，初始化所有集合 $R[q]$ 总共需要 $O(n^2m)$ 时间。

在主循环执行期间，算法仅通过移除加入集合 P 的状态来更新集合$R[q]$。每个状态 $p\in Q$ 至多加入 P 一次；每当发生这种情况，p 都会立即从其所在的每个集合 $R[q]$ 中移除。因此，每个满足 $p\in R[q]$ 的状态对 (p,q) 至多处理一次。假设集合 P 和 $R[q]$用按状态索引的布尔数组表示，则通过直接寻址，每次添加或移除的耗时均为 $O(1)$。因此，对集合 $R[q]$ 进行所有更新的累计成本不会超过状态对 (p,q) 的数量，故为 $O(n^2)$。

在主循环的每次迭代中，算法都会检查对于所有 $q\in P\setminus F$，是否有 $R[q]=\varnothing$。这些检查所需时间与 $|P\setminus F|$ 成线性关系，并且由于每个状态至多进入 $P\setminus F$ 一次，因此这些测试耗费的总时间为 $O(n)$。

算法的所有其余操作，包括计算 $F\cdot\Sigma^{-1}$ 的初步标记步骤，总共耗时 $O(nm)$，因为每个转移至多被检查一次。

综合以上界限，我们得出结论：总运行时间主要由预计算集合 $R[q]$, 所耗费的时间决定，因此为 $O(n^2m)$。□

下一个结果可以由引理 4.2（其中 $k\in\mathbb{N}$）以与定理 4.5 完全相同的方式推导出来，区别仅在于使用命题 4.6 和 2 代替命题 4.4。

定理 4.8。 存在一种算法，对于给定的确定有限自动机 $\mathscr{A}=(Q\ \Sigma)$，能够在 $(|Q|^4\cdot|\Sigma|)$ 时间内判定 $\mathscr{A}$上的 k-博弈的胜者。

定理 4.8 中给出的时间界限可能并非最优。

5.1. A 与 $_k$ $k\in\mathbb{N}$ 及 Aω 之间的关系（针对固定规模自动机）。给定一个确定有限自动机 $\mathscr{A}=(Q\ \Sigma)$ 和 $k\geq 0$，令 $T_k(\mathscr{A})$ 表示转移幺半群 $T(\mathscr{A})$ 中由 $\Sigma^{<k}$ 中的词诱导的所有变换构成的集合。于是我们得到如下子集升链：

$$T_0(\mathscr{A})\subseteq T_1(\mathscr{A})\subseteq\cdots\subseteq T_k(\mathscr{A})\subseteq T_{k+1}(\mathscr{A})\subseteq\ldots, \tag{6}$$

其并集为整个幺半群 $T(\mathscr{A})$。由于 $T(\mathscr{A})$ 是有限的，式 (6) 中并非所有包含关系都能是严格的。一旦式 (6) 中首次出现等式 $T_k(\mathscr{A})=T_{k+1}(\mathscr{A})$，该链便会永久稳定。（事实上，这个等式意味着，将 $T_k(\mathscr{A})$ 中的变换与由 Σ 中的字母诱导的变换复合，不会产生新的变换，因此 $T_{k+1}(\mathscr{A})=T_{k+2}(\mathscr{A})$，依此类推。）因此，对于某个 $k\in\mathbb{N}$，有 $T(\mathscr{A})=T_k(\mathscr{A})$。

等式 $T(\mathscr{A})=T_k(\mathscr{A})$ 意味着，对于每个词 $w\in\Sigma^*$，都存在一个词$w'\in\Sigma^{<k}$，使得 w 和 w' 在 Q 上诱导相同的变换。因此，如果 Alice 在 $\mathscr{A}$ 上的 k-博弈中拥有获胜策略 $\mathfrak{S}$，她可以如下使用 $\mathfrak{S}$ 在 $\mathscr{A}$ 上赢得 ω-博弈：每当 Bob 选择一个词 $w\in\Sigma^*$ 时，她就根据 $\mathfrak{S}$ 针对 Bob 选择 w' 所规定的策略，选择一个字母作为回应。由此我们得出，如果 $\mathscr{A}$ 是某个足够大的 $k\in\mathbb{N}$ 所对应的 A_k-自动机，那么 $\mathscr{A}$ 也是一个 $A\omega$-自动机。

这里，我们确定最小的数 $k(n)\in\mathbb{N}$，使得每个具有n 个状态的 $A^{k(n)}$-自动机都是一个 $A\omega$-自动机。与上一节一样，从带汇点的自动机开始，并通过引理 4.2 将分析扩展到一般情形，是很方便的做法。

命题 5.1。 每个带有汇点的 n 状态 A_{n-1}-自动机都是一个 $A\omega$-自动机。

证明。 通过逆否命题进行论证，假设 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$ 是一个具有 n 个状态（包括汇点 $\mathbf{s}$）的确定有限自动机，在该自动机上，Bob 在 ω-博弈中拥有获胜策略。我们的目标是证明 Bob 也能在 $\mathscr{A}$ 上的（$n-1$）-博弈中获胜。

如果对于每个 $\mathrm{q} \in \mathrm{Q}$，Alice 都有一种策略，可以将放置在 q 上的令牌移动到 s，那么利用 s 上的令牌永远不会移动这一事实，她就可以通过逐个从其他状态移除令牌来获胜。因此，存在一个状态 $\mathrm{r} \in \mathrm{Q}$，使得在 ω-博弈中，Bob 可以阻止最初放置在 r 上的令牌到达 s。每个词 $\mathrm{w} \in \Sigma^*$ 都可以视为 ω-博弈在 $\mathscr{A}$ 进行到某个回合时的历史。因此，对于每个 $\mathrm{w} \in \Sigma^*$，存在一个词 $\mathrm{v} \in \Sigma^*$，Bob 可以进行该词，使得 $(\mathrm{r}\cdot\mathrm{w})\cdot\mathrm{v} \neq \mathrm{s}$。将 $\mathrm{r}\cdot\mathrm{w}$ 记为 p，并令 $\mathrm{u} = \mathrm{u}_1 \cdots \mathrm{u}_\ell$ 为满足 $\mathrm{p}\cdot\mathrm{u} = \mathrm{p}\cdot\mathrm{v}$ 的最短词。考虑序列

$$p,\ p\cdot u_1,\ p\cdot u_1u_2,\ \ldots,\ p\cdot u_1\cdots u_\ell = p\cdot u.$$

该序列省略了汇点 s，因为 $\mathrm{p}\cdot\mathrm{u} \neq \mathrm{s}$。此外，它不包含重复的状态。事实上，如果对于某些 $0 \leq \mathrm{i} < \mathrm{j} \leq \ell$，有 $\mathrm{p}\cdot\mathrm{u}_1\cdots\mathrm{u}_i = \mathrm{p}\cdot\mathrm{u}_1\cdots\mathrm{u}\,\mathrm{j}$，那么较短的词 $\mathrm{u}' := \mathrm{u}_1\cdots\mathrm{u}_i\mathrm{u}\,\mathrm{j}_{+1}\cdots\mathrm{u}_\ell$ 将满足 $\mathrm{p}\cdot\mathrm{u}' = \mathrm{p}\cdot\mathrm{v}$，这与 u 的极小性矛盾。因此，该序列由 $\ell+1$ 个不同的非汇状态组成。由于 $\mathscr{A}$ 恰好有 $\mathrm{n}-1$ 个非汇状态，我们得到 $\ell+1 \leq \mathrm{n}-1$，从而 $|\mathrm{u}| = \ell < \mathrm{n}-1$。

现在描述 Bob 在 $\mathscr{A}$ 上的（$n-1$）博弈中的获胜策略。Bob 跟随最初放在状态 r 上的令牌 T。Alice 移动后，每当 T 到达状态 $r\cdot w$，Bob 就参考自己在 ω-博弈中的获胜策略，选择一个词 v。然后，他会选取一个长度小于 $n-1$ 的词 u，使得 $(r\cdot w)\cdot u = (r\cdot w)\cdot v$。根据构造，这保证令牌 T 永远不会到达汇点 $\mathbf{s}$，因此至少有两个令牌（T 和放在 $\mathbf{s}$ 上的令牌）永远不会被移除。□

注。 令 $\mathbf{D}_n^0$ 表示所有带有汇点的 n 状态确定有限自动机组成的类。命题 5.1 表明，当层级 (1) 限制在 $\mathbf{D}_n^0$ 上时，会在第 $n-1$ 层塌缩：

$$\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{D}_n^0 \supseteq \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{D}_n^0 \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{A}_{n-1} \cap \mathbf{D}_n^0 = \cdots = \mathbf{A}_\omega \cap \mathbf{D}_n^0.$$

这个结果是最优的，因为对于每个 $1 \leq k \leq n-2$，包含关系

$$\mathbf{A}_k \cap \mathbf{D}_n^0 \supseteq \mathbf{A}_{k+1} \cap \mathbf{D}_n^0$$

都是严格的。这一点可由 DFA $\mathscr{L}_{kn} = (\mathbb{Z}_n, \{a1, \ldots, a_{n-1}\})$ 见证，该自动机在第 3.4 小节中引入。根据命题 3.11，这个 DFA 有一个汇点，并且是 A_k-自动机。另一方面，Bob 在 $\mathscr{L}_{kn}$ 上的（$k+1$）博弈中有一个简单的获胜策略：假设 Alice 先移动，那么每当 Alice 出一个字母 x，Bob 就用词 x^k 回应。由于对于每个 $x \in \{a1, \ldots, a_{n-1}\}$，都有 $(n-1)\cdot x^{k+1} = n-1$，这保证最初放在状态 $n-1$ 上的令牌在 Bob 每次移动后仍留在该状态。

现在我们考虑一般情况。

定理 5.2. 使得每个具有 n 个状态的 $A^{k(n)}$-自动机都是 $A\omega$-自动机的最小 $k(n) \in \mathbb{N}$ 等于 $\binom{n}{2}$。

证明。 设 $\mathscr{A}$ 为一个 $A\binom{n}{2}$-自动机，具有 n 个状态。它的二元子集自动机 $\mathscr{A}^{[2]}$ 拥有一个汇点，并且有 $\binom{n}{2}+1$ 个状态。此外，根据引理 4.2，$\mathscr{A}^{[2]}$ 是一个 $A\binom{n}{2}$-自动机。根据命题 5.1，我们得出 $\mathscr{A}^{[2]}$ 是一个 $A\omega$-自动机，而根据引理 4.2，$\mathscr{A}$ 也是如此。因此我们证明了 $k(n) \leq \binom{n}{2}$。

为证明反向不等式，我们需要一系列属于 n 状态自动机 $\mathbf{A}_K \setminus \mathbf{A}\omega$，其中 $K := \binom{n}{2} - 1$。我们通过在 Černý 自动机 $\mathscr{C}_n = (\mathbb{Z}_n, \{a, b\})$ 中添加两个额外字母来构造这样的自动机。回顾一下，字母 a 和 b 的作用如下：

$$0{\cdot}a := 1,\ \ m{\cdot}a := m \ \text{ for } \ 0 < m < n, \qquad m{\cdot}b := m+1 \pmod n.$$

我们定义 $\mathscr{D}_n$:=$(\mathbb{Z}_n, \{a,b,c,d\})$，其中新添加的字母的作用如下：

$$m{\cdot}c := \begin{cases} 0 & \text{if } m = 0, \\ 1 & \text{otherwise;} \end{cases} \qquad m{\cdot}d := \begin{cases} 1 & \text{if } m = \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例如，图11展示了自动机 $\mathscr{D}_5$。

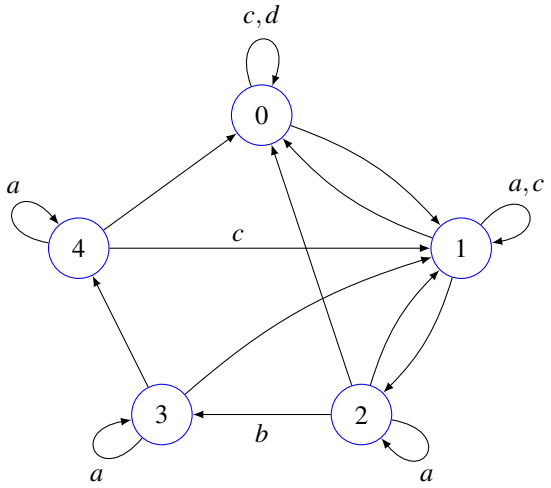


图11. 确定有限自动机 $\mathscr{D}_5$

我们旨在证明自动机 $\mathscr{D}_n$ 属于$\mathbf{A}_K \setminus \mathbf{A}_{K+1}$。为此，我们需要了解 Černý 自动机 $\mathscr{C}_n$的二元子集自动机 $\mathscr{C}_n^{[2]}$的一个性质。这个性质可能早已为人所知，但由于我们未能找到合适的参考资料，因此在此给出完整证明，但不声称有任何原创性。

首先，我们详细说明 $\mathscr{C}_n^{[2]}$的结构。在b 作用于$\mathscr{C}^{[2]}{}_n$的非汇状态时，这些状态，即二元子集 $\{p、q\} \subseteq \mathbb{Z}_n$，被划分为轨道，且$b$ 在每个轨道上都起循环置换的作用。每个轨道由具有固定圆周距离的集合 $\{p、q\}$ 组成，定义如下：

$$\min\{\ell \in \mathbb{N} : p{\cdot}b^\ell = q \ \text{ or } \ q{\cdot}b^\ell = p\} = \min\big\{|p-q|,\, n-|p-q|\big\}.$$

显然，圆周距离可以取从 1 到 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$的任意值，因此共有 $\lfloor {}_{n_2} \rfloor$个轨道。如果n 为偶数，则除一个轨道外，其余轨道的大小均为n；这个特殊轨道（称为对跖轨道）的大小为$_n2$。如果n – 为奇数，则所有轨道的大小均为n。我们用 $\mathscr{O}_d$ 表示由圆周距离为d的子集组成的轨道。

由于 a 在 $\mathscr{C}_n$ 中的作用固定除 0 以外的所有状态，二元子集自动机 $\mathscr{C}^{[2]}{}_n$ 中 a 的作用固定除包含 0 的子集以外的所有子集。当 $d <{}_n2$ 时，轨道 $\mathscr{O}_d$ 包含两个含 0 的子集，即 $\{0,d\}$和 $\{n-d\ 0\}$；当 n 为偶数时，对跖轨道 $\mathscr{O}_{n2}$仅包含 $\{0, {}_{n_2}\}$。我们有 –

$$\{0,d\}{\circ}a = \begin{cases} \mathbf{s} & \text{if } d = 1, \\ \{0,d-1\} & \text{if } \ d = 2,\dots,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor; \end{cases} \quad \text{and} \quad \{n-d,0\}{\circ}a = \{n-d,1\}.$$

我们看到，对于 $d \geq 2$，$\{0,d\}\circ a \in \mathcal{O}_{d-1}$；而 $\{n-d\ 0\}\circ a \in \mathcal{O}_{d+1}$，但有两种例外情况：当 n 为偶数且 $d = n2$ 时，$\{n-d\ 0\}\circ a = \{0,d\}\circ a$ 会下降到 $\mathcal{O}_{d-1}$；或者当 n 为奇数且 $d = n_2^{-1}$ 时，$\{n-d\ 0\}\circ a$ 保持在 $\mathcal{O}_d$ 中。注意，每个轨道 $\mathcal{O}_d$ 在 $1 < d < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 时都与其两个“相邻”轨道 $\mathcal{O}_{d\pm1}$ 连通。因此，所有轨道的并集构成了 $\mathscr{C}_n^{[2]}$ 的一个强连通分量。

例如，图12展示了 Černý 自动机 $\mathscr{C}_6$ 的二元子集自动机。

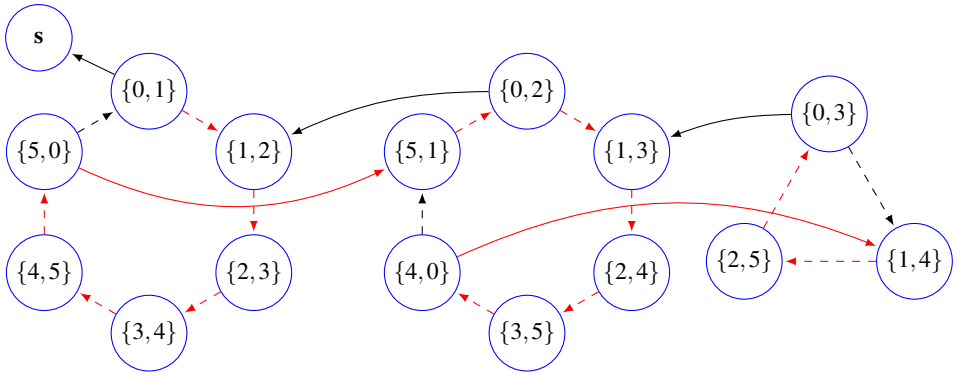


图12。二元子集自动机 $\mathscr{C}_6^{[2]}$。实线和虚线边分别表示a和b的作用；省略自环。红色边构成了 $\mathscr{C}_6^{[2]}$ 的轨道并集中的一条哈密顿路径。

回顾一下，有向图中的哈密顿路径 是指一条有向路径，它恰好访问有向图的每个顶点一次。我们所要求的 $\mathscr{C}_n^{[2]}$ 的性质如下：

引理5.3。 $\mathscr{C}^{[2]}n$ 的轨道并集有一条以集合 $\{0,1\}$ 为起点的哈密顿路径，沿此路径的标签构成一个将集合$\{0,1\}$ 映射到集合 $\{0,\lceil n_2 \rceil\}$ 的最短唯一词。

证明。 设$u \in \{a、b\}^*$是一个将 $\{0,1\}$ 映射到 $\{0,\lceil n_2 \rceil\}$ 的最短词（由于轨道并集具有强连通性，这样的词确实存在）。

词 u 将一个来自 $\mathcal{O}_1$ 的集合映射到一个来自 $\mathcal{O}_{\lfloor n_2 \rfloor}$ 的集合。对于每个 $d = 1, \ldots, \lfloor n_2 \rfloor - 1$，唯一能将轨道 $\mathcal{O}_d$ 中的集合移动到循环距离更大的轨道中的转移是转移 $\{n-d\ 0\}\circ a = \{n-d\ 1\} \in \mathcal{O}_{d+1}$。将 $\{0,1\}$ 映射到$\{n-1,0\}$ 的最短词是 b^{n-1}，而同一个词也是将轨道 $\mathcal{O}_d$的“入口”集合$\{n-d\ 1\}$（其中 $1 < d < \lfloor n_2 \rfloor$）映射到该轨道的“出口”集合 $\{n-d-1,0\}$ 的最短词。

由此可知，将 $\{0,1\}$ 映射到 $\mathcal{O}_{\lfloor n_2 \rfloor}$ 中某个集合的最短词是 $(b^{n-1}a)^{\lfloor n^{2-1} \rfloor}$；当 n 为奇数时，它是 $(b^{n-1}a)\,n_{2^{-1}-1}$；当 n 为偶数时，它是 $(b^{n-1}a)\,n^{2-1}$。轨道 $\mathcal{O}_{\lfloor n_2 \rfloor}$ 的“入口”集合是 $(n-\lfloor n_2 \rfloor+1,1)$，可写作 $\{\lceil n_2 \rceil+1,1\}$，因为 $n = \lfloor n_2 \rfloor + \lceil n_2 \rceil$。从 $\{\lceil n_2 \rceil+1,1\}$ 到集合 $\{0,\lceil n_2 \rceil\}$ 的最短词是：当 n 为奇数时为 b^{n-1}，当 n 为偶数时为 $b\,n^{2-1}$（后一种情形下，$\mathcal{O}_{\frac{n}{2}}$ 是对跖轨道）。

我们得出结论，词 u 必定与词

$$\vec{w} := \begin{cases} (b^{n-1}a)^{\frac{n-1}{2}-1}\, b^{n-1} & \text{if } n \text{ is odd,} \\ (b^{n-1}a)^{\frac{n}{2}-1}\, b^{\frac{n}{2}-1} & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{7}$$

不难验证，$|\overrightarrow{w}| = \binom{n}{2} - 1 = K$，与 n 的奇偶性无关。

对于每个$i \in \{0,1,\ldots,K\}$，记u_i为词 $\overrightarrow{w}$的长度为i的前缀，并考虑以下集合序列：

$$\{0,1\} = \{0,1\}\cdot u_0,\ \{0,1\}\cdot u_1,\ \ldots,\ \{0,1\}\cdot u_K = \{0, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\}. \tag{8}$$

$\overrightarrow{w}$ 的极小性意味着 (8) 中没有重复的集合。(8) 中集合的数量为$K+1 = \binom{n}{2}$，这等于 $\mathbb{Z}_n$的二元子集数量。因此，每个二元子集在 (8) 中恰好出现一次，且由 $\overrightarrow{w}$ 标记的路径是哈密顿路径。□

作为示例，图12以红色显示了按照引理5.3的构造方法得到的$\mathscr{C}_6^{[2]}$ 轨道并集中的哈密顿路径。

现在我们可以证明自动机 $\mathscr{D}_n$ 属于$\mathbf{A}_K \setminus \mathbf{A}_{K+1}$。

为了赢得在 $\mathscr{D}_n$上的K-博弈，Alice 在第一个回合出字母c，从而将整个状态集压缩为 $\{0,1\}$。如果 Bob 回以长度小于K的词v，引理5.3保证 $\{0,1\}\cdot v \neq \{0, \lceil n_2 \rceil\}$。如果$v$ $\{0,1\}$·不包含 0，Alice 出c即可获胜；如果v $\{0,1\}$·不包含 $\lceil n_2 \rceil$，她出d即可获胜。

Bob 在 $\mathscr{D}_n$ 上的（K + 1）博弈中的获胜策略，是让令牌始终停留在状态 0 和 $\lceil n_2 \rceil$上，这一点他总能做到。如果 Alice 将令牌从集合 $\{0, \lceil n_2 \rceil\}$ 移到某个集合 $\{p,q\} \subseteq \mathbb{Z}_n$，Bob 就在序列 (8) 中找到后一个集合，它在那里表示为 $\{0,1\}\cdot u_i$，其中 $i \in \{0,1,\ldots,K\}$。然后 $\{p, q\}\cdot v_i = \{0, \lceil n_2 \rceil\}$，其中 v_i 是 w 中紧接在 u 后面的后缀$_{i}$。由于 $|v_i| \leq |w| = K$，Bob 可以走 v_i，从而将令牌重新移回状态 0 和 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$。□

注。 就限于类 $\mathbf{D}_n$ 的所有 n 状态确定有限自动机而言，定理 5.2 意味着

$$\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{D}_n \supseteq \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{D}_n \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{A}_{\binom{n}{2}-1} \cap \mathbf{D}_n \supsetneq \mathbf{A}_{\binom{n}{2}} \cap \mathbf{D}_n = \cdots = \mathbf{A}_\omega \cap \mathbf{D}_n.$$

事实上，对于 $1 \leq k \leq \binom{n}{2} - 2$，所有包含关系

$$\mathbf{A}_k \cap \mathbf{D}_n \supseteq \mathbf{A}_{k+1} \cap \mathbf{D}_n$$

都是严格的。自动机 $\mathscr{L}_{km}$ for $1 \leq k \leq n-2$（参见命题 5.1 后的注）以及自动机 $\mathscr{E}_n$ for $k = n-1$（参见引理2.1）为此提供了见证。对于每个 $n \leq k \leq \binom{n}{2} - 2$，通过修改定理 5.2 的证明中构造的自动机 $\mathbf{A}_K \setminus \mathbf{A}_{K+1}$，即可得到一个见证。以下描述这一修改时，我们沿用该证明中的记号；特别是，$K = \binom{n}{2} - 1$。

固定 $k \in \{n、n+1、\ldots\ldots、K\}$，并令 $\{p_k、q_k\} := \{0,1\}\cdot u_k$，其中 u_k是词 $\overrightarrow{w}$（定义见式 (7)）的长度为 k 的前缀。（例如，$\{p_n、q_n\} = \{0,1\}\cdot u_n = \{n-1,\ 1\}$以及 $\{p_K、q_K\} = \{0,1\}\cdot u_K = \{0, \lceil n_2 \rceil\}$。）考虑确定有限自动机 $\mathscr{D}_n^k := (\mathbb{Z}_n, \{a, b, c_k, d_k\})$，它是在 Černý 自动机 $\mathscr{C}_n = (\mathbb{Z}_n, \{a, b\})$ 的基础上添加两个额外字母 c_k和 d_k得到的，这两个字母的作用如下：

$$m\cdot c_k := \begin{cases} 0 & \text{if } m = p_k, \\ 1 & \text{otherwise;} \end{cases} \qquad m\cdot d_k := \begin{cases} 1 & \text{if } m = q_k, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特别地，$\mathscr{D}_n^K$与自动机 $\mathscr{D}_n \in \mathbf{A}_K \setminus \mathbf{A}_{K+1}$相同。证明确定有限自动机$\mathscr{D}_n^k$属于 $\mathbf{A}_k \setminus \mathbf{A}^{k+1}$，对每个$n \leq k \leq \binom{n}{2} - 2$都成立，基本上重复了定理 5.2 的证明（引理5.3除外），因此省略。

5.2. m/ω-**同步自动机上的博弈**。回顾一下，在m/ω-博弈中，Alice 可以出长度至多为m的非空词，而 Bob 可以出任意词。这里，我们证明使 Alice 能够赢得每个具有n 个状态的同步自动机上的$m(n)/\omega$-博弈的最小数$m(n) \in \mathbb{N}$为$\binom{n}{2}$。因此，$m(n)$ 与前一小节讨论的参数$k(n)$相同。这可能有些令人惊讶，因为乍看之下，参数$m(n)$和$k(n)$似乎毫无关联。事实上，它们是相关的：二者都等于 Černý 自动机 $\mathscr{C}_n$的二元子集自动机的直径。

命题 5.4. 使 *Alice* 能在每个具有 n 个状态的同步自动机上赢得 $m(n)/\omega$-博弈的最小 $m(n) \in \mathbb{N}$ 等于 $\binom{n}{2}$。

证明。 为完整起见，这里仅给出说明$m(n) \leq \binom{n}{2}$ 包含在内的标准论证。

设 $\mathscr{A} = (Q\ \Sigma)$ 是一个具有 n 个状态的同步自动机。如引理 2.3 所示，只需证明 Alice 能从 $\mathscr{A}$ 中任意一个有两个令牌的位置赢得 $\binom{n}{2}/\omega$-博弈。考虑这样一个位置 P，其中状态 q 和 q' 上各有一个令牌。由于该确定有限自动机$\mathscr{A}$是同步的，存在一个词，其作用可将两个令牌带到同一状态。令$v \in \Sigma^*$为长度最短的此类词，对于 $i = 0, 1 \ldots, |v|$，令 v_i表示v 中长度为 i的前缀。由v 的极小性可知，序列中的所有集合

$$\{q, q'\} = \{q, q'\}\cdot v_0,\ \{q, q'\}\cdot v_1, \ldots, \{q, q'\}\cdot v_{|v|-1},$$

彼此不同且都不是单元素集合。因此，这个序列的长度 $|v|$ 不超过Q的二元子集数量，即 $\binom{n}{2}$。因此，v 是 Alice 在 $\binom{n}{2}/\omega$上的博弈中的合法移动，而 Alice 通过使用这个词，便能从位置P立即赢得博弈。

另一方面，Bob 可以在 Černý 自动机 $\mathscr{C}_n$上赢得K/ω-博弈，其中$K = \binom{n}{2} - 1$。为证明这一点，我们使用$_n\,\mathscr{C}^{[2]}$中的一条哈密顿路径；从某种意义上说，它与引理 5.3 中的哈密顿路径恰好相反。

引理 5.5。 自动机 $\mathscr{C}^{[2]}n$ 存在一条从集合 $\{\lceil n_2 \rceil + 1, 1\}$出发的哈密顿路径，沿此路径的标签构成一个唯一的最短词，它将集合$\{\lceil n_2 \rceil + 1, 1\}$ 映射到 $\mathscr{C}^{[2]}n$ 的汇点。

例如，图13用红色标出了引理 5.5 中的哈密顿路径 $\mathscr{C}^{[2}{}_{6}{}^{]}$.

引理 5.5 的证明与引理5.3的证明非常相似，因此省略。我们只指出，引理中声称存在的词为

$$\overleftarrow{w} := \begin{cases} \left(b^{n-1}a\right)^{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n \text{ is odd,} \\ b^{\frac{n}{2}-1}a\left(b^{n-1}a\right)^{\frac{n}{2}-1} & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

可以观察到，词 $\overleftarrow{}w$ 是将a 添加到（7）中的词 $\overrightarrow{}w$ 末尾后，再反向读取得到的。

Bob 在K/ω-博弈中K/ω上的获胜策略是让令牌始终停留在状态1和$\lceil {}_n{}_2 \rceil + 1$上，这一点他总能做到。事实上，对于长度至多为$K$的每个词$u$，引理 5.5 表明 $\{\lceil {}_n{}_2 \rceil + 1, 1\}\circ u \neq \mathbf{s}$。因此，Alice 移动后，来自集合 $\{\lceil {}_n{}_2 \rceil + 1, 1\}$的令牌会到达某个集合 $\{p, q\} \subseteq \mathbb{Z}_n$，而由于轨道并集具有强连通性，Bob 可以将它们送回状态1和 $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$。□

注。 对于带汇点的自动机，可以很容易证明，Alice 能在每个具有 n 个状态的带汇点同步自动机上赢得 $(n-1)/\omega$-博弈。界 $n-1$ 是紧的，其见证是来自 $\mathscr{L}_{km}$ 系列的确定有限自动机 $\mathscr{L}^1_{n-2}$；该系列在第3.4小节中介绍。

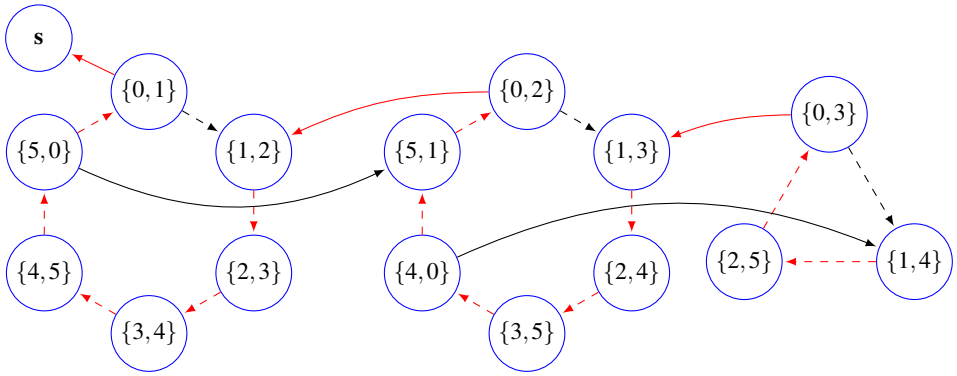


图13. 二元子集自动机 $\mathscr{C}_6^{[2]}$。实线和虚线分别表示a和b的作用；省略自环。红色边构成 $\mathscr{C}_6^{[2]}$ 中的一条哈密顿路径。

6. 结论与未来工作

我们总结研究结果，并重点指出迄今仍未解决的问题。

定理 3.6 及其后的注给出了所有$A\omega$-自动机类的 Černý函数的精确值。对于A_k-自动机且$k \in \mathbb{N}$，目前我们只有一个下界，该下界由命题 3.11 和 3.12 结合得出。对于每个$k \in \mathbb{N}$，类$\mathbf{A}_k$ 并不包含于任何一个迄今已证明 Černý函数具有二次上界的同步自动机类中；此类的汇总见 [21] 。因此，找到 $\mathfrak{C}_{\mathbf{A}_k}(n)$ 的一个$O(n^2)$ 上界具有重要意义。

我们认为，下界 $n(n-1)\,2k$ 对于$\mathfrak{C}_{\mathbf{A}_k}(n)$（其中 $k \in \mathbb{N}$）可以进一步改进。请注意，作为该下界见证的确定有限自动机都是带汇点的自动机。对于若干类已知其 Černý 函数下界的自动机，带汇点的自动机这一子类的下界约为整个类下界的一半。如果这一经验观察也适用于类$\mathbf{A}_k$，那么人们或许会预期其下界的首项为 $n^2\,k$，而不是 $n2\,2k$。

关于A_k-自动机的复位阈值，我们还提出两个具体问题。

问题 1. 每个具有 k 个状态的 A_k-自动机，其复位阈值是否都小于 k?

根据命题 5.1 和定理 3.6，对于带汇点的自动机，答案是肯定的。

问题 2. 是否存在正实数常数 C 和 D，使得只要$\mathscr{A}$是一个具有 n 个状态且 $k \geq Dn$ 的 A_k-自动机，就有 $\mathrm{rt}(\mathscr{A}) \leq Cn$?

命题 3.9 给出了具有 n 个状态的m/ω-自动机的重置阈值上界 $m(n-2)+1$。当$m=2$时，该上界是紧的，但对于更大的m，它很可能不是紧的。对于$m=3$的情形，有一些证据表明该上界可以改进为 $3n-6$，因此我们提出以下问题。

问题 3. 每个具有 n 个状态的 $3/\omega$-自动机是否都有长度为$3n-6$的复位词?

值得关注的是，在具有A_k的自动机上，k-博弈的可能长度。对于$k=\omega$，定理 3.6 给出了上界$n-1$；该界是紧的，因为任何

在确定有限自动机 $\mathscr{A}$ 上的k-博弈长度至少为 rt($\mathscr{A}$)。然而，对于$k \in \mathbb{N}$，目前我们只有推论 2.4 给出的直接三次上界。很难想象存在一系列具有A_k的自动机，其状态数为n，且 Alice 需要 $\Theta(n^3)$ 次移动才能获胜；然而，这种自动机的存在既不会与目前的认知相矛盾，也不会与 Černý 猜想相矛盾。我们认为，以下问题可能颇具挑战性。

问题 4。 是否存在一个 $1 < k < \omega$以及一个无限的 A_k-自动机序列，使得其 k-博弈长度的增长速度超过状态数的任何二次函数？

请注意，对于 $k \in \mathbb{N}$，AA_k-自动机的复位阈值与 Alice 在其上获胜所需的移动次数之间并不存在直接关系，唯一的关系是后者始终大于或等于前者。利用 [11,定理 6], 中的复制构造，可以轻易生成一个由无限多个具有 $2n$ 个状态的 A_k-自动机构成的序列，其中 $1 < k < \omega$且复位阈值等于 2，而 Alice 需要 $\Theta(n^2)$ 次移动才能获胜。

至于算法方面的问题，我们认为，定理 4.5 和定理 4.8 给出的识别 A_k-自动机时间复杂度的上界对于 $k = \omega$ 是紧的，而对于 $k < \omega$则可能有所改进。注意，定理 4.8 的界与参数 k 无关，因此当 k 为常数时可能过于保守；除非像第5节中那样，需要比较不同 k 值下的 k-博弈，否则将 k 视为常数是很自然的设定。这表明，可以在参数化复杂度框架下研究带有 A_k-自动机的 $k < \omega$ 识别问题。

参考文献

[1] Almeida, Jorge, Margolis, Stuart, Steinberg, Benjamin, Volkov, Mikhail：有限半群的表示理论、半群根基与形式语言理论，《美国数学学会汇刊》 **361** 3, 1429 1461 2009 10 1090 0002 9947 08 04712 0：–（）。doi：./S--- - Almeida, Jorge, [2] Steinberg, Benjamin：矩阵湮灭问题与Černý–Pin 猜想。载于：Diekert, Volker, Nowotka, Dirk（编），《语言理论的发展》，第13届国际会议（DLT 2009），《计算机科学讲义》，第5583卷，第67–80页。施普林格，柏林，海德堡（2009）。doi：10.1007/978-3-642-02737-6 5_[3] Ananichev, Dmitry S., Volkov, Mikhail V., Zaks, Yulia I.：具有一个亏损度为2的字母的同步自动机。载于：Ibarra, Oscar H., Dang, Zhe（编），《语言理论的发展》，第10届国际会议（DLT 2006），《计算机科学讲义》，第4036卷，第433–442页。施普林格，柏林，海德堡（ 2006 10 1007 11779148_39 ）。doi：./ Ananichev, Dmitry S., Volkov, [4] Mikhail V., Zaks, Yulia I.：具有一个亏损度为 2 **376**, 30 41 2007 10 1016 2007 01 010 的字母的同步自动机。[5] 《理论计算机科学》–（）。doi：./j.tcs... Blass, Andreas, Gurevich, Yuri, Nachmanson, Lev, Veanes, Margus：通过博弈进行测试。载于：Grieskamp, Wolfgang, Weise, Carsten（编），《软件测试的形式化方法》，第5届研讨会（FATES 2005），《计算机科学讲义》，第3997卷，第32–46页。施普林格，柏林，海德堡（2006）。doi：10.1007/11759744_3[6] Černý, Jan：关于有限自动机的齐次实验的注。斯洛伐克科学院数学与物理学杂志 **14**(3)：208–216（1964）（斯洛伐克语；英文译文：关于有限自动机的齐次实验的注。《自动机、语言与组合学杂志》**24**：2-4，123–132（2019）。doi：10.25596/jalc-2019-123）[7] Cormen, Thomas H., Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald L., Stein, Clifford：《算法导论》。第4版。MIT出版社，剑桥，马萨诸塞州（2022）[8] Fernau, Henning, Haase, Carolina, Hoffmann, Stefan：自动机子类上的同步博弈。载于：Fraigniaud, Pierre, Uno, Yushi（编），第11届趣味算法国际会议（FUN 2022），Leibniz计算机科学研究所国际会议论文集（LIPIcs），第226卷，第14:1–14:17页。Schloss Dagstuhl–Leibniz计算机科学中心，Dagstuhl（ 2022 10 4230 2022 14 ）。doi：./ [9] LIPIcs.FUN.. Fernau, Henning, Haase, Carolina, Hoffmann, Stefan, Volkov, Mikhail：有限自动机子类上同步博弈的获胜策略。载于：Manea, Florin, Pighizzini, Giovanni（编），第14届自动机非经典模型及其应用国际研讨会论文集，《理论计算机科学电子札记》论文集，第407卷，第77–85页。开放出版协会，滑铁卢（2024）。doi：10.4204/EPTCS.407.6

[10] Fernau, Henning, Haase, Carolina, Hoffmann, Stefan, Volkov, Mikhail：有限自动机子类上同步博弈的统一获胜策略。《自动机、语言与组合学杂志》，已接受。arXiv：
2512 11007 2025 10 48550 2512 11007。（）。doi：./arXiv：.
[11] Fominykh, Fedor M., Martyugin, Pavel V., Volkov, Mikhail V.：为同步而博弈，《国际计算机科学基础杂志》 **24** 6, 765 780 2013 10 1142 0129054113400170：–
（）。doi：./S Fominykh, Fedor, Volkov, Mikhail：为同步而博弈。载于：Moreira, Nelma, Reis, Rogério（编），第17届国际自动机实现与应用会议（CIAA 2012），《计算机科学讲义》，第7381卷，第159–170页。施普林格，柏林，海德堡（2012）。doi：10.1007/978-3-642-31606-7_14[13] Green, James Alexander：关于半群的结构。《数学年刊》第二辑 **54**1，163 172 1951 10 2307 1969317：–（）。doi：./
[14] Kari, Jarkko, Volkov, Mikhail：Černý 猜想与道路着色问题。载于：Pin, Jean-Éric（编），《自动机理论手册》第一卷。《理论基础》，第525–565页。EMS出版社，苏黎世（2021）。doi：10.4171/AUTOMATA-1/15[15] Montoya, Juan Andres, Nolasco, Christian：关于同步、博弈和平面自动机的一些注。《理论计算机科学电子札记》
339, 85 97 2018 10 1016 2018 06 006 –（）。
[16] doi：./j.entcs... Rystsov, Igor, K.：有限自动机中核字长度的估计。载于：Spivak, Mark A.（编），《自动机：校际科学文集》，第2卷，第43–48页。萨拉托夫国立大学。萨拉托夫（1977）（俄语）[17] Rystsov, Igor, K.：交换自动机和可解自动机的复位字。《理论计算机科学》**172**：1-2，273–279（1997）。doi：10.1016/S0304-3975(96)00136-3[18] Rystsov, Igor, K.：有限自动机中正则理想的表示。《控制论与系统分析》**39**，668–675（2003）。doi：10.1023/B:CASA.0000012087.71746.0e[19] Tarjan, Robert E.：深度优先搜索与线性图算法。《SIAM计算杂志》**1**：2，146–160（1972），doi：10.1137/0201010[20] Volkov, Mikhail V.：有限自动机的同步。《俄罗斯数学调查》**77**：5，819–891（2022）。doi：10.4213/rm10005e[21] Volkov, Mikhail V.：关于Černý 猜想及同步自动机复位阈值的研究成果列表。arXiv：2508.15655（2025）。doi：10.48550/arXiv.2508.15655