arXiv:2601.18363v1 [math.AT] 26 Jan 2026

配置空间型模之间映射空间的图组合

谢苗·阿布拉米扬

Abstract. 在嵌入微积分中，嵌入空间被识别为带框架的富尔顿–麦克弗森型模（带框架的构形空间）之间的导出映射空间。遗憾的是，目前尚无足够好的带框架富尔顿–麦克弗森模代数模型，无法据此明确描述嵌入空间的有理同伦型。最近，有几种尝试通过考察带框架流形来避免处理带框架版本的富尔顿–麦克弗森模，例如，模去浸入的嵌入 $\widetilde{\text{Emb}}$，定义在 [FTW], 上；或者考察框架变形下的嵌入 Emb，定义在 [Ab]上。在这两种情况下，相应嵌入空间的有理同伦型都可以用图（毛图复形）明确描述。

我们构造了一种组合图形复合，用于嵌入空间 $\widetilde{\text{Emb}}$ 的复合。作为研究过程中的一个步骤，我们描述了余归纳函子在配置空间型 e_n^c-余模上的作用。

Contents

1. 引言 1 1.1. 约定 3 1.2. 致谢 3 2. L_∞预备知识 3 2.1.L_∞-代数 3 2.2. L_∞-导子与作用 4 3. 复合的模型 5 4. 图形范畴 6 4.1. 图复形 6 4.2. 带毛图复形 7 4.3. 图形作用 8 4.4. 图形复合 10 5. 图形复合的模型 11 5.1. 图形范畴 Graph$\mathcal{C}at_n$. 12 5.2. 主定理 13 6. coInd $\binom{m}{n}$ 14的描述 7. 一般情形 15 附录 A. 伴随与复合的相容性 18 参考文献 18

1. Introduction

近年来，Weiss 引入的函子流形微积分 [We]与小圆盘运算子 $L\mathbb{D}_m$ 之间建立了深刻的联系。具体而言，Goodwillie-Weiss [GW]（另见 [Tu，定理 2。1]）的收敛性结果表明，对于一对 m-带框架流形 M^m和 N^n，若 dim $N - \dim M \geqslant 3$，则存在弱等价

$$\text{Emb}(M,N) \xrightarrow{\sim} T_\infty \text{Emb}(M,N) \xrightarrow{\sim} \text{Map}^h_{\text{mod-}\mathcal{F}_m}(\mathcal{F}_M, \mathcal{F}_N^{m\text{-fr}}),$$

其中 $\mathcal{F}_m$, $\mathcal{F}_M$ 以及 $\mathcal{F}_N^{m\text{-fr}}$分别指 $\mathbb{R}^m$ 上的 Fulton-MacPherson 算子、上构形空间中点的 Axelrod-Singer-Fulton-MacPherson 紧化及其 m-带框架版本。嵌入函子的另一种（尽管非常相似的）形式见于 [AT, FTW]。具体而言，文中证明，对于模去浸入的嵌入函子

$$\overline{\mathrm{Emb}}(M,\mathbb{R}^n) := \mathrm{hofib}\left(\mathrm{Emb}(M,\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Imm}(M,\mathbb{R}^n)\right)$$

存在弱等价

$$\overline{\mathrm{Emb}}(M,\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} T_\infty \overline{\mathrm{Emb}}(M,\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}^h_{\text{mod-}\mathcal{F}_m}(\mathcal{F}_M,\mathcal{F}_n).$$

后一个空间的有理同伦型可以纯粹通过组合方法来描述。

最后，在最近的预印本 [Ab] 中，我们引入了另一种嵌入函子 $\widetilde{\quad}$。针对一对 平行化流形的嵌入 $\widetilde{\mathrm{Emb}}(M,N)$。空间 $\widetilde{\mathrm{Emb}}(M,N)$ 由一对 (f,h) 组成，其中一个是嵌入 $f\colon M \to N$，另一个是从 df 到 N 上给定标架的标架变形 h。已证明了与上述结果类似的收敛结果。也就是说，存在弱等价

$$\widetilde{\mathrm{Emb}}(M,N) \xrightarrow{\sim} T_\infty \widetilde{\mathrm{Emb}}(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}^h_{\mathrm{mod}-\mathcal{F}_m}(\mathcal{F}_M,\mathcal{F}_N).$$

此外，已证明以下弱等价

$$\mathrm{Map}^h_{\mathrm{mod}-\mathcal{F}_m}(\mathcal{F}_M,\mathcal{F}_N^{\mathbb{Q}}) \simeq \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^Z_{A_M,H^\bullet(N),n}),$$

其中 HGC 是毛图复形， A_M 是 M的一个模型，且 n 是 N 的维数（参见注释 5.3和（5.2））。

这引出了以下问题：如何以“图”的（组合的）方式对由嵌入的复合诱导的映射空间态射进行建模

$$\widetilde{\mathrm{Emb}}(M,N) \times \widetilde{\mathrm{Emb}}(N,K) \to \widetilde{\mathrm{Emb}}(M,K)? \tag{1.1}$$

为了回答上述问题，在第 5.1 节中，我们引入了一个图范畴 $\mathsf{Graph}\mathcal{C}at_n$，其对象是一个分次向量空间 U 和一个 Maurer-Cartan 元 $Z_u \in \mathrm{HGC}_{U,\,n}$组成的对 $(U,\ Z_u)$，而映射空间定义为

$$\mathrm{Map}_\bullet\left((U,Z_u),(V,Z_v)\right) := \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_u,Z_v}_{U,V,n}).$$

其证明 存在自然且定义良好的复合这一事实是第 4 节的内容 .4.

以下是本文的主定理；特别地，它给出了上述复合的组合描述。

定理 5.4。 存在一个单纯函子

$$\mathcal{F}\colon \mathsf{Graph}\mathcal{C}at_n \to \mathrm{dg}\Lambda\mathrm{HopfMod}^{c\,op}_{e^c_n},$$

使得

$$\mathcal{F}\colon (U,Z_u) \mapsto \mathsf{Graphs}^{Z_u}_{U,n}$$

并且复合映射

$$\mathsf{Map}^{\mathsf{Graph}\mathcal{C}at_n}\left((U,Z_u),(V,Z_v)\right) \to \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}^{Z_v}_{V,n},\mathsf{Graphs}^{Z_u}_{U,n}) \to \mathrm{Map}^h_n(\mathsf{Graphs}^{Z_v}_{V,n},\mathsf{Graphs}^{Z_u}_{U,n})$$

是单纯集合之间的弱等价。

根据 [Wi], 的本质像 $\mathcal{F}$ 可用以下方式描述。

定理 ([Wi])**.** 对于每个构形空间型的 $X \in$微分分次ΛHopf 模$^c_{e^c_n}$，若其 $H^\bullet(X(1))$ 连通且有限维，则存在一个 ***Maurer-Cartan*** 元 $Z \in \mathsf{MC}(\mathrm{HGC}_{H^\bullet(X(1))})$ 以及一个弱等价 —

$$\mathsf{Graphs}^Z_{H^\bullet(X(1)),n} \simeq X.$$

此外，我们给出了余归纳函子的描述

$$\mathrm{coInd}^m_n\colon \mathrm{dg}\Lambda\mathrm{HopfMod}^c_{e^c_m} \to \mathrm{dg}\Lambda\mathrm{HopfMod}^c_{e^c_n}.$$

限制在上述本质像上。

定理6.1。若 $n-m \geqslant 2$ 且 $m \geqslant 2$ 则存在一个微分分次ΛHopfe_n^c-余模之间的弱等价

$$\mathrm{coInd}_n^m(\mathsf{Graphs}_{U,m}^{Z_u}) \simeq \mathsf{Graphs}_{U,n}^{Z_u^{\mathrm{t}}}.$$

Here $Z_u \in \mathrm{HGC}_{U,\,m}$ 而 Z_u^{t} 是 Z_u 的树部分，重新赋予分次后成为 $\mathrm{HGC}_{U,\,n}$中的一个元素。

上述描述 使我们能够将定理 5.4中的复合映射修改为一个“映射” :

$$\mathrm{Map}^h_{\mathrm{mod}-\mathcal{F}_m}(\mathcal{F}_M, \mathcal{F}_N^{\mathbb{Q}}) \times \mathrm{Map}^h_{\mathrm{mod}-\mathcal{F}_n}(\mathcal{F}_N, \mathcal{F}_K^{\mathbb{Q}}) \dashrightarrow \mathrm{Map}^h_{\mathrm{mod}-\mathcal{F}_m}(\mathcal{F}_M, \mathcal{F}_K^{\mathbb{Q}})$$

该映射自然来源于复合（1.1）。

该应 适当的修改发生在第 7 节。主要结果如下定理所述 m.

定理 7.4。 令 $\mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_v\ Z_w}_{V\,W\,n,,,})\ \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_v^{\mathrm{t}}\ Z_w^{\mathrm{t}}}_{V\,W\,,,,k}\,)$ 为由复合映射诱导的映射

$$\mathrm{HGC}_{U,V,n} \to \mathrm{HGC}^{\mathrm{tree}}_{U,V,n} \to \mathrm{HGC}_{U,V,k}$$

该复合映射由投影到树部分以及树的重新分级给出。则该复合映射

$$\mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_v,Z_w}_{V,W,k}) \times \mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_u,Z_v}_{U,V,n}) \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_v,Z_w}_{V,W,k}) \times \mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_v^{\mathrm{t}},Z_w^{\mathrm{t}}}_{U,V,k}) \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_u,Z_v}_{U,W,k}),$$

其中第二个箭头由定理 5.4给出，并且与“复合”映射弱等价

$\mathrm{Map}^h_n(\mathrm{coRes}^n_k(\text{图}_{W,\,k}),\ \text{图}_{V,\,n})\ \mathrm{Map}^h_m(\mathrm{coRes}^m_n(\text{图}_{V,\,n}),\ \text{图}_{U,\,m})\ \mathrm{Map}^h_m(\mathrm{coRes}^m_k(\text{图}_{W,\,k}),\ \text{图}_{U,\,m})\times$

该映射通过$\mathrm{coInd}\ -\mathrm{coRes}$ 伴随(见第 7 节)定义。

1.1. **约定** 。下文中，基域始终为有理数域 $\mathbb{Q}$.

设 $V^\bullet$是一个分次向量空间， $x_1, \ldots, x_n$ 是次数分别为 $|x_1|, \ldots, |x_n|$的齐次元素， $\sigma \in S_n$ 是一个置换。Koszul 符号 $\epsilon(\sigma)$由以下关系定义

$$\epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = x_1 \cdots x_n$$

在分次对称代数 $S(V)$中。

我们（滥）用记号 Map_n 和 Mor_n 表示 dgΛHopf e_n-模范畴及 dgΛHopf e_n^c-余模范畴中的映射空间和态射集合。

1.2. **致谢**。 我由衷感谢我的导师 Thomas Willwacher 提出这个问题，并在许多小时里耐心指导我。

2. L_∞ PRELIMINARIES

2.1. **L_∞-代数**。 A（平坦） L_∞-代数（在 $\mathbb{Q}$ 上）是一个分次向量空间 L，其上赋有次数为一的余微分 l ，定义在约化对称余代数 $\left(S^+(L[1]), \Delta_{sh}\right)$ 上。

两个 L_∞-代数 $F\colon (L, l) \to (L', l')$ 之间的 L_∞-态射，是分次余微分余代数的一个态射

$$F\colon S^+\big(L[1]\big) \to S^+\big(L'[1]\big),$$

即 $Fl = l'F$。

考察余导子 l 的泰勒系数，我们得到通常的结构映射

$$l_n\colon S^n\big(L[1]\big) \to L[2],$$

其中余导子定义为

$$l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in Sh(k,n-k)} \epsilon(\sigma) l_k(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) x_{\sigma(k+1)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

对于齐次的 $x_1, \ldots, x_n \in L$。关系 $l^2 = 0$ 等价于

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in Sh(k,n-k)} \epsilon(\sigma) l_{n-k+1}(l_k(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}), x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = 0$$

2.2. L_∞**-导子与作用**。定义一个微分分次李代数 $\mathrm{Der}_{L_\infty}(L)$，由 L 的 L_∞-导子构成，即余自由余交换余代数 $(S^+\big(L[1]\big), \Delta_{sh})$ 的余导子：

$$\mathrm{Der}_{L_\infty}(L) \coloneqq \big\{\delta\colon S^+\big(L[1]\big) \to S^+\big(L[1]\big) \mid \bar{\Delta}_{sh}\delta = (\delta \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \delta)\bar{\Delta}_{sh}\big\},$$

配以括号

$$[\delta_1, \delta_2] \coloneqq \delta_1 \circ \delta_2 - (-1)^{|\delta_1||\delta_2|}\delta_2 \circ \delta_1,$$

其中，次数 $|\delta_i|$ 是映射 $\delta_i\colon S^+\big(L[1]\big) \to S^+\big(L[1]\big)$ 的次数，而微分

$$d \cdot \delta \coloneqq [l, \delta].$$

注意，Maurer-Cartan 集合

$$\mathsf{MC}\left(\mathrm{Der}_{L_\infty}(L)\right) \coloneqq \{\delta \in \mathrm{Der}_{L_\infty}(L) \mid d \cdot \delta + \tfrac{1}{2}[\delta, \delta] = 0\}$$

恰好是 L上的 L_∞-结构的变形集合。也就是说，$l + \delta$ 在 L 上定义一个 L_∞-结构，当且仅当对于 $\delta \in \mathrm{Der}_{L_\infty}(L)$，$l + \delta$ 是一个 Maurer-Cartan 元。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个微分分次李代数。$\mathfrak{g}$ 在一个 L_∞-代数 L 上的左（分别为右） L_∞-作用是一个微分分次李代数同态 $\mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{L_\infty}(L)$（分别为 $\mathfrak{g}^{op} \to \mathrm{Der}_{L_\infty}(L)$）。

注意，$\mathfrak{g}$ 在 L 上的任意 L_∞作用都会诱导一个 Maurer-Cartan 集合之间的映射

$$\mathsf{MC}(\mathfrak{g}) \to \mathsf{MC}\left(\mathrm{Der}_{L_\infty}(L)\right).$$

因此，$\mathfrak{g}$ 中的任意 Maurer-Cartan 元都可用于变形 L上的 L_∞结构。具体而言，设 $\mathfrak{g}$ 在 L 上的 L_∞作用由态射 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{L_\infty}(L)$给出，并设 $z \in \mathsf{MC}(\mathfrak{g})$是一个 Maurer-Cartan 元。于是，我们将 L^z 定义为一个 L_∞代数，其底层空间不变，扭曲余导子为 $l + \varphi(z)$。

类似地，若给定一对（左和右）作用 $\varphi_1\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{Der}_{L_\infty}(L)$和 $\varphi_2\colon \mathfrak{g}_2^{op} \to \mathrm{Der}_{L_\infty}(L)$，以及两个 Maurer-Cartan 元 $z_1 \in \mathsf{MC}(\mathfrak{g}_1)$和 $z_2 \in \mathsf{MC}(\mathfrak{g}_2)$，我们可以将 $L^{z_1,\, z_2}$ 定义为 L_∞代数结构的变形，其余导子由 $l + \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)$给出。

命题 2.1. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个微分分次李代数，L_1、L_2、L_3 是三个 L_∞-代数。假设 L_1、L_2 分别带有 L_∞的右作用和左作用 $\varphi_1\colon \mathfrak{g}^{op} \to \mathrm{Der}_{L_\infty}(L_1)$、$\varphi_2\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{L_\infty}(L_2)$。设

$$F\colon L_1 \oplus L_2 \to L_3$$

是一个 L_∞-代数的态射，且在 $\mathfrak{g}$的对角作用下保持不变，也就是说，对于 $z \in \mathfrak{g}$、x_1、……、$x_p \in L_1$、y_1、……、$y_q \in L_2$，等式成立

$$F\big(\varphi_1(z)(x_1 \cdots x_p y_1 \cdots y_q)\big) = F\big(\varphi_2(z)(x_1 \cdots x_p y_1 \cdots y_q)\big). \tag{2.1}$$

在上文中，φ_1、φ_2 分别表示作用在 L_1 和 L_2 上的作用。那么对于任意 $z \in \mathsf{MC}(\mathfrak{g})$，都有一个诱导态射

$$L_1^z \oplus L_2^z \to L_3$$

从扭曲的 L_∞-代数的直和到 L_3。

证明。用 $l^\oplus$、l^z 分别表示直和 $L_1 \oplus L_2$ 和扭曲直和 $L_1^z \oplus L_2^z$上的 L_∞-结构。于是有

$$l^z(x_1 \cdots x_p y_1 \cdots y_q) = l^\oplus(x_1 \cdots x_p y_1 \cdots y_q) + \varphi_1(z)(x_1 \cdots x_p y_1 \cdots y_q) - \varphi_2(z)(x_1 \cdots x_p y_1 \cdots y_q).$$

因此，应用 F 到两边并利用不变性（2.1），我们得到

$$F\big(l^z(x_1 \cdots x_p y_1 \cdots y_q)\big) = F\big(l^\oplus(x_1 \cdots x_p y_1 \cdots y_q)\big).$$

因此，F 在扭曲直和上是良定义的。 □

推论 2.2。令 *et* $\mathfrak{g}_1$、$\mathfrak{g}_2$、$\mathfrak{g}_3$ 是三个微分分次李代数，L_1、L_2、L_3 是三个 L_∞-代数。假设 *th* *at*

- L_1、L_3 具有 $\mathfrak{g}_1$的左 L_∞-作用；
- L_1、L_2 分别具有 $\mathfrak{g}_2$的右和左 L_∞-作用；
- L_2, L_3 具有 $\mathfrak{g}_3$的右 L_∞-作用；

使得给定的左作用和右作用在 L_i, $i=1,2,3$上彼此交换。设 $F\colon L_1\oplus L_2\to L_3$ 是一个 L_∞-代数的态射，它是 $\mathfrak{g}_1$-$\mathfrak{g}_3$-等变的，并且在 $\mathfrak{g}_2$ (见 (2.1))的对角作用下不变。那么，对于任意三元组 $z_i\in \mathsf{MC}(\mathfrak{g}_i)$，$i=1,2,3$ *Maurer-Cartan* 元素，均存在一个诱导态射

$$L_1^{z_1,z_2}\oplus L_2^{z_2,z_3}\to L_3^{z_1,z_3}$$

扭曲的 L_∞-代数的，因此也是 *Maurer-Cartan* 集合的一个态射

$$\mathsf{MC}(L_1^{z_1,z_2})\times \mathsf{MC}(L_2^{z_2,z_3})\to \mathsf{MC}(L_3^{z_1,z_3}).$$

证明。 根据 命题 2.1，我们得到一个 L_∞-代数的态射

$$L_1^{z_2}\oplus L_2^{z_2}\to L_3.$$

由于左作用和右作用彼此可交换，我们还可以用 z_1 和 z_3 对给定的态射进行扭曲，从而得到所需的态射

$$L_1^{z_1,z_2}\oplus L_2^{z_2,z_3}\to L_3^{z_1,z_3}$$

扭曲的 L_∞-代数的。 □

3. Models for composition

命题 3.1。 设 $\mathcal{C}$ 为一个单纯模型范畴， A、 B、 $C\in\mathcal{C}$ 为余纤维对象。设 $X_\bullet$、 $Y_\bullet$、 $Z_\bullet$ 为配备了映射 $X_\bullet\to$ 映射空间$c(A,B)$、 $Y_\bullet\to$ 映射空间$c(B,C)$、 $Z_\bullet\to$ 映射空间$c(A,C)$ 以及使下图表交换的 $X_\bullet\times Y_\bullet\to Z_\bullet$ 的单纯集合

$$\begin{array}{ccccc} X_\bullet & \times & Y_\bullet & \longrightarrow & Z_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A,B) & \times & \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B,C) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A,C). \end{array}$$

设 $A\xrightarrow{q_A}\widehat{A}$、 $B\xrightarrow{q_B}\widehat{B}$ 和 $C\xrightarrow{q_C}\widehat{C}$ 是纤维余纤维替换，并且还是余纤维。最后，假设复合映射

$$\begin{aligned} X_\bullet\to\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A,B)&\xrightarrow{(q_A)_*}\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A,\widehat{B})=\mathrm{Map}^h_{\mathcal{C}}(A,B)\\ Y_\bullet\to\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B,C)&\xrightarrow{(q_B)_*}\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B,\widehat{C})=\mathrm{Map}^h_{\mathcal{C}}(B,C)\\ Z_\bullet\to\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A,C)&\xrightarrow{(q_C)_*}\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A,\widehat{C})=\mathrm{Map}^h_{\mathcal{C}}(A,C) \end{aligned}\tag{3.1}$$

是单纯集合之间的弱等价。那么映射 $X_\bullet\times Y_\bullet\to Z_\bullet$ 弱等价于导出复合映射 映射$^h_{\mathcal{C}}(A,B)\times$映射$^h_{\mathcal{C}}(B,C)\to$映射$^h_{\mathcal{C}}(A,C)$。

证明。考虑以下图表

$$\begin{array}{ccccc} \text{映射}c(A,\widehat{B}) & \times & \text{映射}c(\widehat{B},\widehat{C}) & \longrightarrow & \text{映射}c(A,\widehat{C}) \\ \uparrow\sim & & \uparrow\sim & & \uparrow\sim \\ X_\bullet & \times & Y_\bullet & \longrightarrow & Z_\bullet \end{array}\tag{3.2}$$

其中，自下而上的箭头由复合（3.1）给出。顶部的水平箭头由复合映射给出，并表示导出复合映射。注意，所有对角箭头都是弱等价。

令 $F_\bullet, G_\bullet, H_\bullet$ 为下列图表的拉回

$$X_\bullet \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, \widehat{B}) \xleftarrow{\mathbb{1}} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(\widehat{B}, \widehat{C});$$
$$Y_\bullet \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(B, \widehat{C}) \xleftarrow{(q_B)^*} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(\widehat{B}, \widehat{C});$$
$$Z_\bullet \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, \widehat{C}) \xleftarrow{\mathbb{1}} \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, \widehat{C}).$$

根据泛性质，复合映射

$$F_\bullet \times G_\bullet \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, \widehat{B}) \times \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(\widehat{B}, \widehat{C}) \to \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(A, \widehat{C})$$

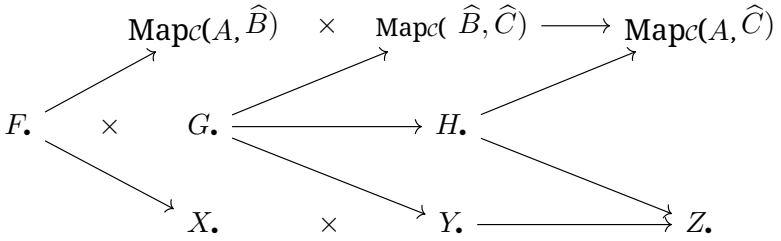
and

$$F_\bullet \times G_\bullet \to X_\bullet \times Y_\bullet \to Z_\bullet$$

定义一个映射

$$F_\bullet \times G_\bullet \to H_\bullet$$

使其适合以下交换图

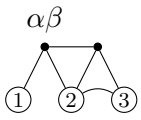


这些对角箭头是弱等价，因为它们是（3.2）中对角箭头的拉回 □

4. Graphical categories

4.1. **图复形。** 本节概述图复形和毛图复形。全面的论述请参见 [Wi] 。接下来我们将使用图复形的通常版本和对偶化版本。

我们从 dgΛHopf e_n^c-余模 $\mathsf{Graphs}^{\#}_{U,n}$, $n \geqslant 2$ 开始。令 U 为一个分次向量空间。将 $\mathsf{Graphs}^{\#}_{U,n}(r)$ 定义为由定向图的同构类张成的向量空间，其中有 r 个编号的“外部”顶点，以及任意有限个未编号的“内部”顶点（图中以黑色表示），且每个连通分支都至少含有一个外部顶点。此外，所有顶点都可以用对称代数 $S(U)$ 中的元素装饰。



$\in \mathsf{Graphs}^{\#}_{U,n}(3), \text{with } \alpha, \beta, \gamma \in U.$

本文始终采用上同调次数约定。也就是说，内部顶点的次数为$-n$，边的次数为 $n-1$:

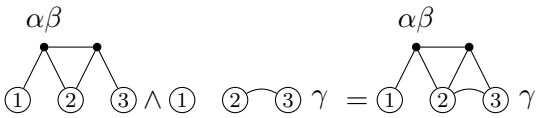
$$\deg(\Gamma) = (n-1)\#\{\text{edges of } \Gamma\} - n\#\{\text{internal vertices of } \Gamma\}.$$

根据 n 的奇偶性，定向对应于图的以下约定:
n 为偶数：图的边集带有一个次序。通过置换 σ 改变次序，会使图的符号乘以 $\mathsf{sgn}(\sigma)$。

奇 n：图的内部顶点集合带有一个次序。通过置换 σ 改变次序会使图的符号乘以 $\mathsf{sgn}(\sigma)$。此外，边带有方向，不同方向视为相差一个符号。

$$\longrightarrow \; = \; - \; \longleftarrow \; .$$

图上的乘法$\overset{\#}{U}_{\bullet,n}(r)$ 是通过沿外部顶点粘合图来定义的。



微分由收缩两个不同内部顶点之间的边给出。[1] 所得顶点的装饰是该边两端装饰的乘积。目前我们不对价数施加任何额外要求，但请注意以下这一点：每个顶点装饰 U 都会使该顶点的价数增加 1。

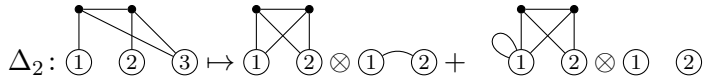
集合 $\{\overset{\#}{U}_{\bullet,n}(r)\}_{r\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 带有右 e_n^c-余模结构。对称群 S_r 在$\overset{\#}{U}_{\bullet,n}(r)$ 上的右作用由置换外部顶点的编号来定义。右 e_n^c-余作用由收缩不含内部顶点的子图给出。具体而言，令

$$\Delta_s\colon \mathsf{Graphs}^{\#}_{U,n}(r) \to \mathsf{Graphs}^{\#}_{U,n}(r-s+1)\otimes e_n^c(s)$$

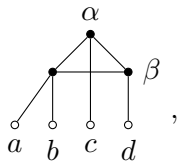
为对应于子集 $\{1,\dots,s\}\subseteq\{1,\dots,r\}$ 的余运算余作用。那么，对于图 $\Gamma\in\overset{\#}{U}_{\bullet,n}(r)$，

$$\Delta_s(\Gamma)=\sum \pm(\Gamma/\gamma)\otimes\gamma,$$

其中求和遍历所有包含外部顶点 1、……、 s且不包含其他顶点的子图，以及将 γ 收缩为一个新的编号为 1 的外部顶点，并将外部顶点 $s+1$、……、 r 重新编号为 2、……、 $r-s+1$后得到的图。

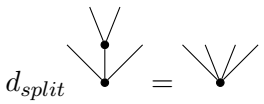


4.2. 毛图复形。现在我们转向微分分次李代数 $\mathrm{HGC}^{\#}_{U,n}$。作为向量空间，$\mathrm{HGC}^{\#}_{U,n}$ 由连通图（同前）的同构类张成，其中所有外部顶点（“毛发”）的价数恰为 1，并带有 $U_1 := \mathbb{Q}\cdot 1\oplus U$ 的装饰，其中 1 是次数为 0 的形式符号：

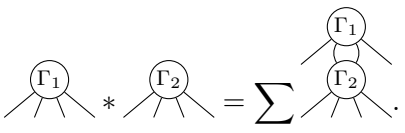


，其中 $\alpha,\ \beta\in U^*$ 以及 $a,\ b,\ c,\ d\in U_1$。

微分由上述操作的对偶操作给出。具体而言，微分通过以所有可能的方式拆分一个顶点来定义。

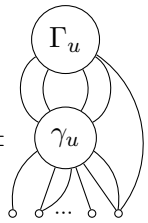


李括号由交换子 $[\Gamma_1,\Gamma_2]=\Gamma_1*\Gamma_2-(-1)^{|\Gamma_1||\Gamma_2|}\Gamma_2*\Gamma_1$ 给出，其中两个图的李可容许乘积 $\Gamma_1*\Gamma_2$ 是通过对 Γ_1 中的毛发与 Γ_2 中的装饰进行所有部分匹配求和得到的：将毛发与带装饰的顶点粘合，并乘以装饰的自然配对。毛发上的装饰 1 需要特殊处理： Γ_1 中的这些毛发可以连接到 Γ_2 的任意顶点：



[1]如果边和顶点的顺序使得 e 是第一条边，连接排序中的第一个内部顶点和第二个内部顶点，那么符号为“+”，而 Γ/e中其余边和顶点的顺序与 Γ中的相同。

回顾一下，图$\overset{\#}{U}{}^{*}_{n}$，允许 HGC$\overset{\#}{U}$ 的作用n (见 [Wi，第 8.3] 节）。HGC$\overset{\#}{U}$ 对nGraphs$\overset{\#}{U}{}^{*}_{n}$ 的作用为：

$\Gamma_u \cdot \gamma_u \coloneqq \sum \pm$ 

,

其中的求和遍历了将 Γ_u 的毛发附加到 γ_u上的所有可能方式。

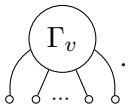
最后，我们定义一个 L_∞-代数 HGC$\overset{\#}{U}$，V，n。作为一个向量空间，HGC$\overset{\#}{U}$，V，n 由连通图的同构类张成，这些图与 HGC$\overset{\#}{U}$，n 类似，不同之处在于，现在内部顶点的装饰由一个分次向量空间 V^*给出。目前，我们赋予 HGC$\overset{\#}{U}$，V，n 一个阿贝尔 L_∞-结构。

4.3. 图形作用。本节中，我们赋予 HGC$\overset{\#}{U}$，V，n 一个 HGC$\overset{\#}{V}$，n 的左 L_∞-作用（分别为 HGC$\overset{\#}{U}$，n的右作用）。

由于每个余导子都由其泰勒系数唯一确定，同态

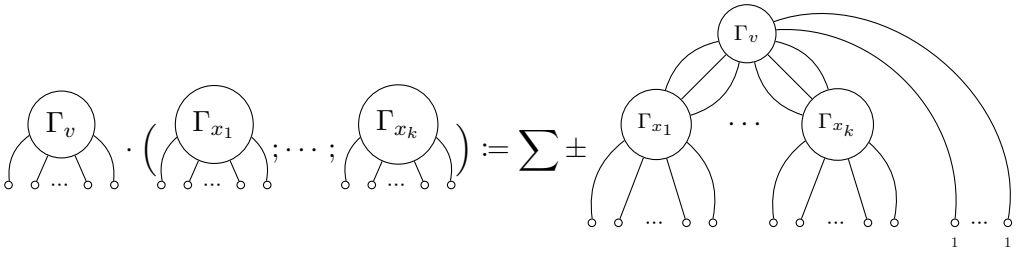
$$\mathrm{HGC}^{\#}_{V,n} \to \mathrm{Der}_{L_\infty}(\mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n}) \tag{4.1}$$

由这些映射唯一确定



$\cdot\colon S^k(\mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n}[1]) \to \mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n}[2].$

按以下方式定义上述内容



,

其中，求和遍历所有将 Γ_v连接到 Γ_{x_1}、……、Γ_{x_k}的方式，使得

- 所得的图是内部连通的；
- 所有带装饰的 V 毛发都已连接；
- 由 1 装饰的 Γ_v 毛发可以保持未连接。

为验证 (4.1) 是李代数的态射，我们需要验证以下恒等式

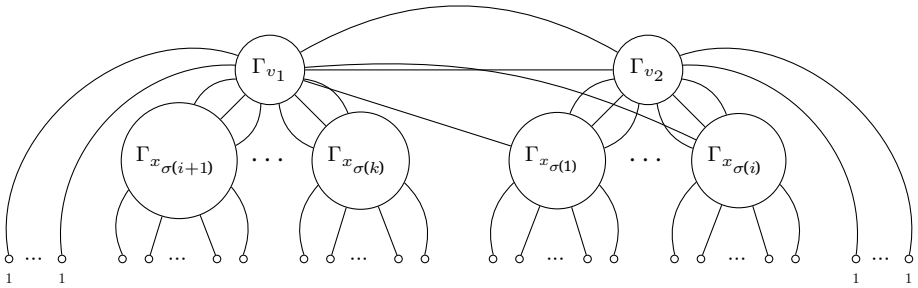
$$\begin{aligned}[\Gamma_{v_1},\Gamma_{v_2}]\cdot(\Gamma_{x_1};\cdots;\Gamma_{x_k}) = \sum_{\sigma\in Sh(i,k-i)} \pm\Big(&\Gamma_{v_1}\cdot\big(\Gamma_{v_2}\cdot(\Gamma_{x_{\sigma(1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma(i)}});\Gamma_{x_{\sigma(i+1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma(k)}}\big)\\ &\pm\Gamma_{v_2}\cdot\big(\Gamma_{v_1}\cdot(\Gamma_{x_{\sigma(1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma(i)}});\Gamma_{x_{\sigma(i+1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma(k)}}\big)\Big).\end{aligned}$$

为此，我们先对右侧进行组合描述，即对该因子进行组合描述

$$\Gamma_{v_1}\cdot\big(\Gamma_{v_2}\cdot(\Gamma_{x_{\sigma(1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma(i)}});\Gamma_{x_{\sigma(i+1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma(k)}}\big). \tag{4.2}$$

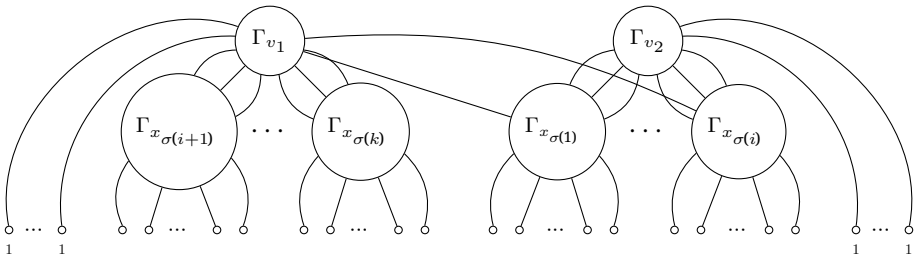
所得的和分为两部分：含有一条从 Γ_{v_1} 到 Γ_{v_2} 的边的图（见（4.3））,

(4.3)



以及其间没有边的图 Γ_{v_1} 和 Γ_{v_2} （见（4.4））。

(4.4)



请注意，后者也作为对应部分出现在

$$\Gamma_{v_2}\cdot\big(\Gamma_{v_1}\cdot(\Gamma_{x_{\sigma'(1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma'(j)}});\Gamma_{x_{\sigma'(j+1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma'(k)}}\big),$$

其中 $\Gamma_{x_{\sigma'(1)}},\ldots,\Gamma_{x_{\sigma'(j)}}$ 是附加了 Γ_{v_1} 的图，见 (4.4)。因此，(4.2) 中剩余的部分只有形如 (4.3) 的图，即至少有一根 Γ_{v_1} 毛附加到 Γ_{v_2}上的图。对于

$$\Gamma_{v_2}\cdot\big(\Gamma_{v_1}\cdot(\Gamma_{x_{\sigma(1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma(i)}});\Gamma_{x_{\sigma(i+1)}};\cdots;\Gamma_{x_{\sigma(k)}}\big).$$

因此，右侧唯一有贡献的图，是带有毛发的Γ_{v_1} 连接到Γ_{v_2} ，或反过来的图，这恰好描述了左侧。

最后， 我们需要检查它与微分的相容性。具体来说，我们需要验证 t

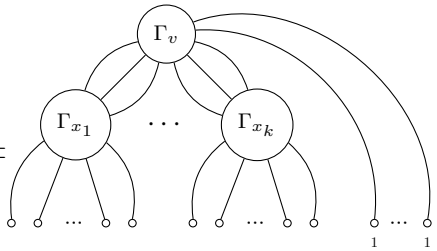
$$(d_{split}\Gamma_v)\cdot=[d_{split},\Gamma_v\cdot]. \tag{4.5}$$

我们先展开右侧

$$d_{split}\circ(\Gamma_v\cdot)-(-1)^{|\Gamma_v|}(\Gamma_v\cdot)\circ d_{split}. \tag{4.6}$$

第一项应用于 Γ_{x_1}，……，Γ_{x_k} 的结果分成两部分:

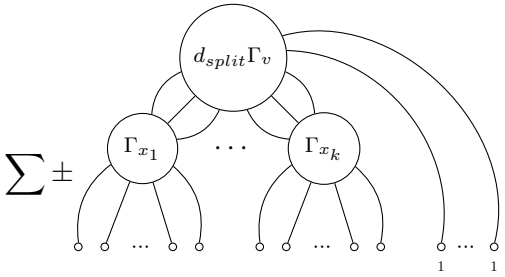
$$d_{split}\circ(\Gamma_v\cdot)(\Gamma_{x_1};\cdots;\Gamma_{x_k})=d_{split}\Bigg(\sum\pm$$



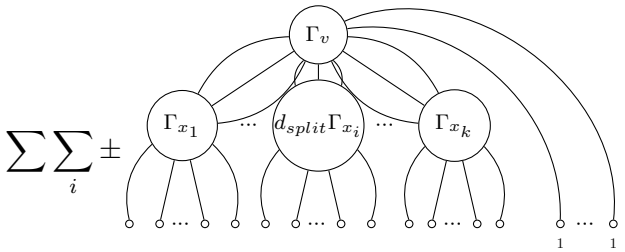
$$\Bigg)$$

$$=\textcircled{I}+\textcircled{II},$$

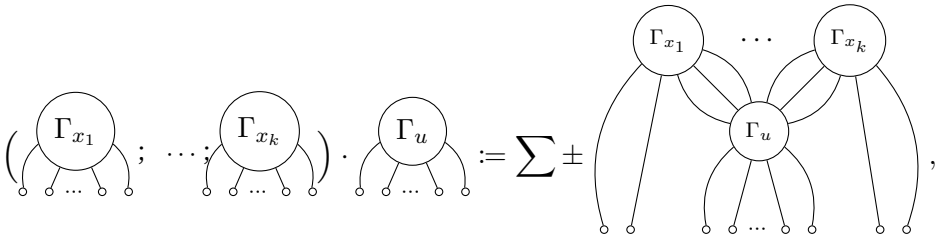
其中 I 是所有将 d_{split} 应用于图的内部顶点 Γ_v的项之和，



并且 II 是剩余的和，即所有将 d_{split} 作用于图 $\Gamma_{x_1}, \dots, \Gamma_{x_k}$.所得项的和。



注意，I 恰好等于（$d_{split}\Gamma_v$）·（Γ_{x_1}；⋯；Γ_{x_k}）。根据我们的符号约定，II 等于$(-1)^{|\Gamma_v|}\Gamma_v \cdot d_{split}$（$\Gamma_{x_1}$；⋯；$\Gamma_{x_k}$），这恰好是（4.6）中的剩余项。至此，式（4.5）的验证完成。类似地，$\mathrm{HGC}^{\#}_{U,\,n}$ 的右作用定义为



其中求和遍历所有将$\Gamma_{x_1}, \dots, \Gamma_{x_k}$连接到 Γ_u 上的方式，使得

- 所得的图是内部连通的；
- 所有 U^* 带装饰的内部顶点都被合并；
- 的毛发 Γ_{x_1}、……、 Γ_{x_i}可以保持未连接状态。

与前面类似的论证表明，

$$\mathrm{HGC}^{\#\,op}_{U,n} \to \mathrm{Der}_{L_\infty}(\mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n})$$

是一个李代数同态。

注 4.1。 可以将由 V^* 中的元素构成的内部顶点装饰看作“向上竖起的毛发”；按照这种对内部顶点装饰的解释，上述图形会变成垂直对称的。

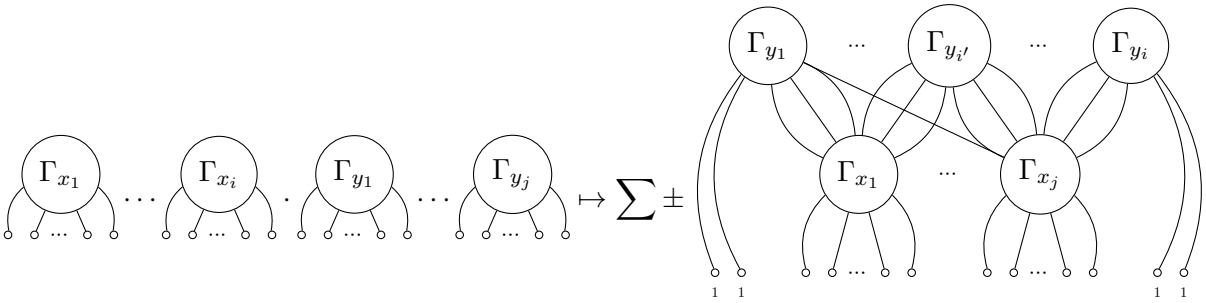
很容易看出，这两个作用彼此可交换。特别地，可以分别使用两个李代数中的 Maurer-Cartan 元素 $Z_u \in \mathrm{MC}(\mathrm{HGC}^{\#}_{U,\,n})$ 和 $Z_v \in \mathrm{MC}(\mathrm{HGC}^{\#}_{V,\,n})$，对 $\mathrm{HGC}^{\#}_{U,\,V,\,n}$ 上的 L_∞-结构进行扭曲。

4.4. 图形复合。 考虑三个（阿贝尔）L_∞-代数 $\mathrm{HGC}^{\#}_{U,\,V,\,n}$、$\mathrm{HGC}^{\#}_{V,\,W,\,n}$ 和$\mathrm{HGC}^{\#}_{U,\,W,\,n}$。存在一个态射

$$\mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n} \oplus \mathrm{HGC}^{\#}_{V,W,n} \to \mathrm{HGC}^{\#}_{U,W,n} \tag{4.7}$$

它是 $\mathrm{HGC}^{\#}_{U}$，n-$\mathrm{HGC}^{\#}_{W}$，n-双模，并且在源上的 $\mathrm{HGC}^{\#}_{V}$，n 的对角作用下保持不变。我们称之为图形复合。和之前一样，我们只定义 L_∞-态射的系数

$$S^{i+j}\Big((\mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n}\oplus\mathrm{HGC}^{\#}_{V,W,n})[1]\Big)\to\mathrm{HGC}^{\#}_{U,W,n}[2].$$



其中，对所有将 $\Gamma_{y_1},\dots,\Gamma_{y_j}$ 连接到 $\Gamma_{x_1},\dots,\Gamma_{x_i}$ 的方式求和，并满足

- 所得的图内部连通；
- 所有 V^* 带装饰的内部顶点都被合并；
- 所有 V 带装饰的毛发都已连接；
- 由 1 装饰的 $\Gamma_{y_1},\dots,\Gamma_{y_j}$ 毛发可以保持未连接。

该态射

$$\mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n}\oplus\mathrm{HGC}^{\#}_{V,W,n}\to\mathrm{HGC}^{\#}_{U,W,n}$$

是 $\mathrm{HGC}^{\#}_{U}$，n-$\mathrm{HGC}^{\#}_{W}$，n-等变的，并且在 HGC 的对角作用下保持不变$^{\#}_{V}$，n。与第 4.3 节 中的论证类似，可以证明该态射与微分可交换。根据推论 2.2，对于一组三个 Maurer-Cartan 元素 $Z_u\in\mathrm{HGC}^{\#}_{U}$，$n$，$Z_v\in\mathrm{HGC}^{\#}_{V}$，$n$ 和 $Z_w\in\mathrm{HGC}^{\#}_{W}$，$n$，存在一个扭曲的 L_∞-代数态射

$$\mathrm{HGC}^{\#\,Z_u,Z_v}_{U,V,n}\oplus\mathrm{HGC}^{\#\,Z_v,Z_w}_{V,W,n}\to\mathrm{HGC}^{\#\,Z_u,Z_w}_{U,W,n}.$$

此外，图形复合是结合的。

5. Models for graphical composition

在本节中，我们将交替使用 e^c_n-余模图$^{\#}_{U}$，n 和 e_n-模图$^{\#*}_{U}$，n。原因是，对于模而言，给出这些运算的组合描述要容易得多，但提供代数论证则困难得多。

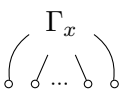
我们想要构造一个单纯集合之间的映射

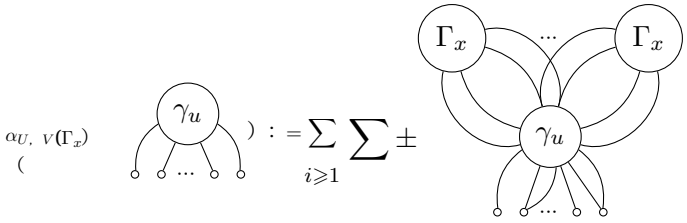
$$\alpha_{U,V}\colon \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n})\to\mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}^{\#*}_{U,n},\mathsf{Graphs}^{\#*}_{V,n})$$

该模式 是映射空间的复合，即使下图交换 e

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n})\times\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{\#}_{V,W,n}) & \longrightarrow & \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{\#}_{U,W,n})\\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{U,V}\times\alpha_{V,W}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{U,W}}\\ \mathrm{Map}_n(\text{Gra}\quad \text{phs}^{\#*}_{U\,n,}\ ,\ \text{图}^{\#*}_{V\,n,}\ )\times\text{映射}_n(\text{图}^{\#*}_{V\,n,}\ ,\ \text{图}^{\#*}_{W\,n,}\ ) & & \text{映射}_n(\text{图}^{\#*}_{U\,n,}\ ,\ \text{图}^{\#*}_{W\,n,}\ )\end{array}\tag{5.1}$$

.

构造 5.1。设 $\Gamma_x = $  $\in$MC(HGC$^{\#}_{U,V,n}$) 是 HGC$^{\#}_{U,V,n}$ 中的一个 Maurer-Cartan 元。定义$\alpha_{U,V}(\Gamma_x) \in$ Mor$_n$(图$^{\#*}_{U\,n}$, , 图$^{\#*}_{V\,n}$,)，其公式为



其中求和遍历所有将 i 个 Γ_x 附加到 $\gamma_u \in$ 图$^{\#*}_{U\,n}$, 的方式，使得

- Γ_x 的所有毛发都已附加；
- γ_u 的所有装饰顶点 U^* 都已合并。

由此得到的图 既没有 U 装饰，也没有 U^* 装饰，因此 $\alpha_{U,V}(\Gamma_x)(\gamma_u)$ 属于 Graphs$^{\#*}_{V\,n}$, .

注意，$\alpha_{U,V}$: MC.(HGC$^{\#}_{U,V,n}$) $\to$ Mor$_n$(Graphs$^{\#*}_{U\,n}$, , Graphs$^{\#*}_{V\,n}$,) 关于 HGC$^{\#}_{U,n}$ 和 HGC$^{\#}_{V,n}$ 的作用是等变的。

此外，我们 还将使用切除图的对偶构造（参见 [Wi，定义 8。3]).

注意，$\alpha_{U,V}$: MC.(HGC$^{\#}_{U,V,n}$) $\to$ Mor$_n$(Graphs$^{\#*}_{U\,n}$, , Graphs$^{\#*}_{V\,n}$,) 关于 HGC$^{\#}_{U,n}$ 和 HGC$^{\#}_{V,n}$ 的作用是等变的。

引理 5.2。 图表 (5.1) 中的 $\alpha_{\bullet,\bullet}$ 由 构造 5.1 定义，且可交换。

证明。我们要证明，给定 $\Gamma_x \in$ MC(HGC$^{\#}_{U,V,n}$) 和 $\Gamma_y \in$ MC(HGC$^{\#}_{V,W,n}$)，复合$\alpha_{V,W}(\Gamma_y)\alpha_{U,V}(\Gamma_x)$ 与 $\alpha_{U,W}(\Gamma_y \circ \Gamma_x)$ 相同，其中 $\Gamma_y \circ \Gamma_x$ 是图形复合 (4.7)。

令 $\gamma_u \in$ 图$^{\#*}_{U\,n}$, 同前。我们将所得的和 $\alpha_{V,W}(\Gamma_y)\alpha_{U,V}(\Gamma_x)(\gamma_u)$ 分成两个子和，具体取决于毛发 Γ_y 附着到 $\alpha_{U,V}(\Gamma_x)(\gamma_u)$ 中图上的方式。

(1) 毛发 Γ_y 全部附着到 Γ_x；(2) 毛发 Γ_y 中的一些附着到 γ_u。（注意，由于 γ_u 没有任何 V^*-装饰，附着到 γ_u 的 Γ_y 的毛发只能是由 1 装饰的毛发。）

在第一种情况下，所得的图对应于 $\Gamma_y \circ \Gamma_x$ 中的图，其中 Γ_y 的所有毛发都连接到 Γ_x上。在第二种情况下，所得的图对应于一些图，其中 Γ_y中由 1 标记的部分毛发仍未连接。证明至此完成。□

5.1. **图范畴**图$\mathcal{C}at_n$。我们在本节中转向本文的主要对象：毛图复形 HGC$_{U,n}$ 和 HGC$_{U,V,n}$的“未加尖”版本，以及图复形 Graphs$_{U,n}$的“未加尖”版本。

如 [Wi], 所述，我们分两步进行。首先，我们用 Maurer-Cartan 元进行扭曲

$$Z_0 = \overset{1}{\bullet} + \sum_i \overset{u_i^*}{\underset{u_i}{\bullet}} \in \mathrm{HGC}^{\#}_{U,n},$$

其中 u_i和 u_i^*是分别对应于 U和 U^*的一对对偶基。最后，HGC$_{U,n}$定义为一个微分分次李子代数

$$\mathrm{HGC}_{U,n} \subseteq (\mathrm{HGC}^{\#}_{U,n})^{Z_0},$$

由所有内部顶点度数至少为 3 的图生成。

类似地，我们将 HGC$_{U,V,n}$ 定义为一个 L_∞ 子代数

$$\mathrm{HGC}_{U,V,n} \subseteq (\mathrm{HGC}^{\#}_{U,V,n})^{Z_0,Z_0'}$$

它由所有内部顶点价至少为 3 的图生成。在上文中， Z_0' 是以下 Maurer-Cartan 元

$$Z_0' = \overset{}{\underset{1}{\circ}} + \sum_i \overset{v_i^*}{\underset{v_i}{\circ}} \in \mathrm{HGC}_{V,n}^{\#}.$$

为了定义图$U,\ n$ 我们需要加入一项额外的微分，它来自余运算子图$_n^{\#}$ 对图$_U^{\#}$ 的n 余作用（参见 [Wi，第 3.11、8 节5]）。具体而言，

$$Z = -\overset{\bullet}{\underset{1}{\circ}} \in \left(\mathsf{Graphs}_n^{\#}(1)\right)^*$$

定义为扭曲图复形 $(\mathsf{Graphs}_U^{\#},\ n)^{Z_0,\ Z}$ 的商：

$$\mathsf{Graphs}_{U,n}(r) \coloneqq (\mathsf{Graphs}_{U,n}^{\#})^{Z_0,Z}/I(r),$$

由 $I(r)$张成，其中包括没有外部顶点的连通分支所对应的图，以及含有价数小于 3 的顶点的图；其中， U装饰对价数的贡献为 1。

注意，$\mathrm{HGC}_U^{\#},\ n$ 对图$_U^{\#}$ 的作用n （分别对 $\mathrm{HGC}U,\ V,\ n$的作用）可下降为 $\mathrm{HGC}U,\ n$ 对图$U,\ n$ （分别对 $\mathrm{HGC}U,\ V,\ n$的作用）（参见 [Wi，第 8 节3]。

注 5.3 （参见 [Wi，第 8 节9]）。如果 $U_1 \coloneqq \mathbb{Q}\cdot 1 \oplus U$ 具有代数结构，那么还可以对毛图复形施加另一种典范扭曲。具体而言，元素

$$Z_\mu = \sum c_{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta} \overset{\alpha_1\cdots\alpha_k}{\underset{\beta}{\bullet}} \in \mathrm{HGC}_{U,n}$$

是一个 Maurer-Cartan 元，它编码了 U_1中的乘积。

现在设 A是一个代数，则我们定义

$$\mathrm{HGC}_{A,V,n} \coloneqq \mathrm{HGC}_{\bar{A},V,n}^{Z_\mu} \tag{5.2}$$

令 Graph$\mathcal{C}at_n$ 为一个由以下构造定义的、以单纯集合为丰的范畴。Graph$\mathcal{C}at$ 的对象是由分次向量空间 U 和 Maurer-Cartan 元 $Z_u \in \mathrm{HGC}U$组成的对 (U, Z_u)。映射空间定义为

$$\mathrm{Map}_\bullet\Big((U,Z_u),(V,Z_v)\Big) \coloneqq \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}^{Z_u,Z_v}).$$

推论 2.2 配备上述复合后，可推出该复合定义良好且满足结合律。

5.2. **主定理**。 最后，我们可以陈述主定理了。

定理 5.4。 存在一个单纯函子

$$\mathcal{F}\colon \mathsf{Graph}\mathcal{C}at_n \to \mathrm{dg}\Lambda\mathrm{HopfMod}_{e_n^c}^{c\,op},$$

使得

$$\mathcal{F}\colon (U,Z_u) \mapsto \mathsf{Graphs}_{U,n}^{Z_u}$$

以及复合映射

$$\mathrm{Map}_{\mathsf{Graph}\mathcal{C}at_n}\left((U,Z_u),(V,Z_v)\right) \to \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}_{V,n}^{Z_v},\mathsf{Graphs}_{U,n}^{Z_u}) \to \mathrm{Map}_n^h(\mathsf{Graphs}_{V,n}^{Z_v},\mathsf{Graphs}_{U,n}^{Z_u})$$

是单纯集合的弱等价。

证明。取 Maurer-Cartan 元素 $Z_u' = Z_u + Z_0$、 $Z_v' = Z_v + Z_0'$ 和 $Z_w' = Z_w + Z_0''$，其 h

$$Z_0'' = \overset{}{\underset{1}{\circ}} + \sum_i \overset{w_i^*}{\underset{w_i}{\circ}} \in \mathrm{HGC}_{W,n}^{\#}.$$

我们可以应用 推论 2.2于图表 (5.1)，得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_u,Z_v}_{U,V,n}) \times \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_v,Z_w}_{V,W,n}) & \longrightarrow & \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_u,Z_w}_{U,W,n}) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{U,V}\times\alpha_{V,W}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{U,W}} \\ \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}^{Z_u\,*}_{U,n}, \mathsf{Graphs}^{Z_v\,*}_{V,n}) \times \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}^{Z_v\,*}_{V,n}, \mathsf{Graphs}^{Z_w\,*}_{W,n}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}^{Z_u\,*}_{U,n}, \mathsf{Graphs}^{Z_w\,*}_{W,n}). \end{array}$$

回想 [Wi], 复合映射

$$\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_u,Z_v}_{U,V,n}) \xrightarrow{\alpha_{U,V}} \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}^{Z_u\,*}_{U,n}, \mathsf{Graphs}^{Z_v\,*}_{V,n}) \to \mathrm{Map}^h_n(\mathsf{Graphs}^{Z_u\,*}_{U,n}, \mathsf{Graphs}^{Z_v\,*}_{V,n})$$

是一个弱等价。因此，我们可以应用命题 3.1得到所述断言。 □

6. Description of coInd^m_n

dg 映射空间的复合ΛHopf 余模的复合（1.1）自然产生，它在第 7 节中通过 coInd-coRes伴随定义。为了明确描述该复合，我们需要描述余归纳函子在构形空间型模上的作用。

定理 6.1。如果 $n-m\geqslant 2$ 且 $m\geqslant 2$，那么存在 *dgΛHopf* e^c_n-余模之间的一个弱等价

$$\mathrm{coInd}^m_n(\mathsf{Graphs}^{Z_u}_{U,m}) \simeq \mathsf{Graphs}^{Z^{\mathrm{t}}_u}_{U,n}.$$

这里， $Z_u \in \mathrm{HGC}_{U,\,m}$ 而 Z^{t}_u 是重新分级后成为$\mathrm{HGC}_{U,\,n}$中一个元素的树部分。

证明。为简化记号，我们给出未扭曲情形的证明。为处理扭曲情形，我们注意到，下面的构造与毛图复形的作用相容。从 Z_u 到Z^t_u 的过渡发生在（6.2）中。

由于余操作的态射 $e^c_n \to e^c_m$ 经过交换余操作 $e^c_\infty := \mathsf{Com}^c$（参见 [FW]），因此可以将 coinduction 函子分解为

$$\mathrm{coInd}^m_n = \mathrm{coInd}^\infty_n \circ \mathrm{coInd}^m_\infty .$$

因此，我们分两步进行：

i) $\mathrm{coInd}^m_\infty(\mathsf{Graphs}_{U,\,m}) \simeq \mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,\,m}(1)}$;

ii) $\mathrm{coInd}^\infty_n(\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,\,m}(1)}) \simeq \mathsf{Graphs}_{U,\,n}$。

为处理步骤 *i*) ，我们注意到，根据 [Wi] $\mathsf{Graphs}_{U,\,m}$ 是一个构形空间型 dgΛHopfe^c_n-余模。这意味着存在一个弱等价

$$\mathrm{coInd}^m_\infty(\mathsf{Graphs}_{U,m}) \simeq \mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}_{U,m}(1)}.$$

Let

$$\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,m}(1) \to \mathsf{Graphs}_{U,m} \tag{6.1}$$

由树所张成子空间的自然包含。我们声称，(6.1) 是一个弱等价。事实上，考虑下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,m}(1) & \longrightarrow & \mathsf{Graphs}_{U,m}(1) \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & U_1. & \end{array}$$

这里，对角箭头通过将 $\alpha\in U_1$ 映射到 α 给出：一个由 α装饰的单个外部顶点。根据[Wi，推论 8，12], 两个对角箭头都是弱等价；因此，水平箭头也同样是弱等价。特别地，包含映射 (6.1) 诱导出一个弱等价

$$\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,m}(1)} \to \mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}_{U,m}(1)}$$

这就完成了第*i*步。

对于第ii步，我们希望构造一个拟同构

$$\mathsf{Graphs}_{U,n} \to \mathrm{coInd}_n^{\infty}(\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}_{U,m}^{\mathrm{tree}}(1)}).$$

根据 coRes-c oInd 伴随，上述态射等价于一个 Com^c-余模的态射 es

$$\mathrm{coRes}_n^{\infty}(\mathsf{Graphs}_{U,n}) \to \mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}_{U,m}^{\mathrm{tree}}(1)}.$$

我们通过投影到树子空间来定义后者

$$\mathsf{Graphs}_{U,n}(r) \to \mathsf{Graphs}_{U,n}^{\mathrm{tree}}(1)^{\otimes r} \tag{6.2}$$

并重新分级所得的森林。伴随态射

$$\mathsf{Graphs}_{U,n} \to \mathrm{coInd}_n^{\infty}(\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}_{U,m}^{\mathrm{tree}}(1)})$$

是一个弱等价 根据（6.1）中的相同推理。这就完成了步骤 ii），从而完成了证明。 □

7. General case

在本节中，我们希望将映射空间的复合构造修改为适用于对应于不同维数的毛图复形的情形。具体而言，我们希望定义一个“复合”（7.1）

$$\mathrm{Map}_m^h(\mathsf{Graphs}_{U,m}^*, \mathrm{Res}_m^n \mathsf{Graphs}_{V,n}^*) \times \mathrm{Map}_n^h(\mathsf{Graphs}_{V,n}^*, \mathrm{Res}_n^k \mathsf{Graphs}_{W,k}^*) \dashrightarrow \mathrm{Map}_m^h(\mathsf{Graphs}_{U,m}^*, \mathrm{Res}_m^k \mathsf{Graphs}_{W,k}^*)$$

并用毛图复形对其作出图示描述。

现在我们转而处理余运算子上的余模，而不是运算子上的模，因为在这种情况下证明会简单得多。

具体而言，为了定义“复合”（7.1），我们将定义一个对偶映射（7.2）

$$\mathrm{Map}_n^h(\mathrm{coRes}_k^n(\text{图}_{W,k}), \mathsf{Graphs}_{V,n}) \times \mathrm{Map}_m^h(\mathrm{coRes}_n^m(\mathsf{Graphs}_{V,n}), \mathsf{Graphs}_{U,m}) \dashrightarrow \mathrm{Map}_m^h(\mathrm{coRes}_k^m(\mathsf{Graphs}_{W,k}), \mathsf{Graphs}_{U,m}).$$

我们通过下面的图表定义上方的虚线箭头

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}_n^h(\mathrm{coRes}_k^n(\text{图}_{W,k}),\ \text{图}_{V,n}) \times \mathrm{Map}_m^h(\mathrm{coRes}_n^m(\text{图}_{V,n}),\ \text{图}_{U,m}) & \dashrightarrow & \mathrm{Map}_m^h(\mathrm{coRes}_k^m(\text{图}_{W,k}),\ \text{图}_{U,m}) \\
\| & & \\
\mathrm{Map}_n^h(\mathrm{coRes}_k^n(\text{图}_{W,k}),\ \text{图}_{V,n}) \times \mathrm{Map}_n^h(\text{图}_{V,n},\ \mathrm{coInd}_n^m(\text{图}_{U,m})) & \to & \mathrm{Map}_n^h(\mathrm{coRes}_k^n(\text{图}_{W,k}),\ \mathrm{coInd}_n^m(\text{图}_{U,m}))
\end{array} \downarrow \cong \quad \downarrow \cong,$$

其中，垂直同构由 coRes-coInd 伴随给出，而底部的水平箭头是 $\mathsf{dgHopf}_n^{e^c}$-模-余模范畴中的自然复合。

为了在底行转到毛图复形，我们希望确保目标余模属于构形空间型。考虑以下图表：(7.3)

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}_n^h(\mathrm{coRes}_k^n(\text{图}_{W,k}), \text{图}_{V,n}) \times \mathrm{Map}_n^h(\text{图}_{V,n}, \mathrm{coInd}_n^m(\text{图}_{U,m})) & \to & \mathrm{Map}_n^h(\mathrm{coRes}_k^n(\text{图}_{W,k}), \mathrm{coInd}_n^m(\text{图}_{U,m})) \\
\| & & \downarrow \cong \\
\mathrm{Map}_k^h(\text{图}_{W,k}, \mathrm{coInd}_k^n(\text{图}_{V,n})) \times \mathrm{Map}_n^h(\text{图}_{V,n}, \mathrm{coInd}_n^m(\text{图}_{U,m})) & \to & \mathrm{Map}_k^h(\text{图}_{W,k}, \mathrm{coInd}_k^m(\text{图}_{U,m})) \\
\| & & \| \\
\mathrm{Map}_k^h(\text{图}_{W,k}, \mathrm{coInd}_k^n(\text{图}_{V,n})) \times \mathrm{Map}_k^h(\mathrm{coInd}_k^n(\text{图}_{V,n}), \mathrm{coInd}_k^m(\text{图}_{U,m})) & \to & \mathrm{Map}_k^h(\text{图}_{W,k}, \mathrm{coInd}_k^m(\text{图}_{U,m}))
\end{array}$$

其中，上方的垂直同构来自 coRes–coInd 伴随，而下方的箭头由 coInd_k^n 给出。虚线箭头通过周围的同构定义，使两个方块都交换。

引理 7.1. 图表 (7.3)交换。

证明。 直接由命题 A.1得出。 □

根据命题 6.1，图表的底部两行（7.3）可改写为

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_k^h(\mathsf{Graphs}_{W,k},\mathsf{Graphs}_{V,k})\times \mathrm{Map}_n^h(\mathsf{Graphs}_{V,n},\mathsf{Graphs}_{U,n}) & \dashrightarrow & \mathrm{Map}_k^h(\mathsf{Graphs}_{W,k},\mathsf{Graphs}_{U,k}) \\ \| & \downarrow & \| \\ \mathrm{Map}_k^h(\mathsf{Graphs}_{W,k},\mathsf{Graphs}_{V,k})\times \mathrm{Map}_k^h(\mathsf{Graphs}_{V,k},\mathsf{Graphs}_{U,k}) & \to & \mathrm{Map}_k^h(\mathsf{Graphs}_{W,k},\mathsf{Graphs}_{U,k}). \end{array}$$

现在我们转向毛图复形。映射：

$$\alpha_{U,V}\colon \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}) \to \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}_{V,n},\mathsf{Graphs}_{U,n})$$

与构造 5.1中描述的映射互为对偶。我们的目标是描述映射

$$\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}) \to \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,k})$$

使图表

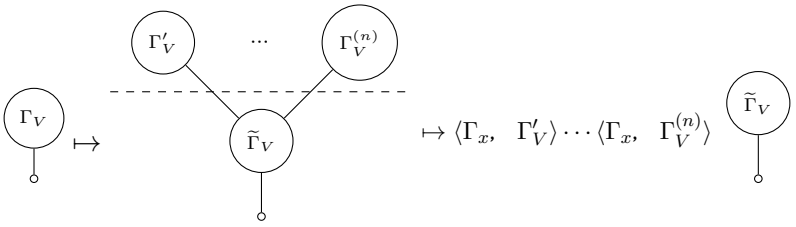
$$\begin{array}{ccc} \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}) & \xrightarrow{\alpha^h_{U,V}} & \mathrm{Map}_n^h(\mathsf{Graphs}_{V,n},\mathsf{Graphs}_{U,n}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,k}) & \xrightarrow{\alpha^h_{U,V}} & \mathrm{Map}_k^h(\mathsf{Graphs}_{V,k},\mathsf{Graphs}_{U,k}) \end{array} \tag{7.4}$$

交换。

我们从一系列（非导出的）映射空间之间的映射开始。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}) & \xrightarrow{\alpha_{U,V}} & \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}_{V,n},\mathsf{Graphs}_{U,n}) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{coInd}_k^n} \\ & & \mathrm{Map}_k(\mathrm{coInd}_k^n\,\mathsf{Graphs}_{V,n},\mathrm{coInd}_k^n\,\mathsf{Graphs}_{U,n}) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{Map}_k(\mathrm{coInd}_k^\infty\,\mathrm{coInd}_\infty^n\,\mathsf{Graphs}_{V,n},\mathrm{coInd}_k^\infty\,\mathrm{coInd}_\infty^n\,\mathsf{Graphs}_{U,n}) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{Map}_k(\mathrm{coInd}_k^\infty\,\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{V,n}(1)},\mathrm{coInd}_k^\infty\,\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,n}(1)}) \end{array} \tag{7.5}$$

$\alpha_{U,V}(\Gamma_x) \in \mathrm{Map}_n($图$_{V,n}$，图$_{U,n})$ 在 $\mathrm{Map}_k(\mathrm{coInd}_k^\infty\,\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{V,n}(1)},\mathrm{coInd}_k^\infty\,\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,n}(1)})$ 中的像由余生成元集上的如下操作给出：切开该图，并在顶部部分上计算 Γ_x 的多个副本。



特别地，结果仅在 Γ_x 的树部分上非零。因此，复合映射 $\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}) \to \mathrm{Map}_k(\mathrm{coInd}_k^\infty\,\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{V,n}(1)},\mathrm{coInd}_k^\infty\,\mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,n}(1)})$ 可经由 $\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{\mathrm{tree}}_{U,V,n})$ 分解。

引理 7.2。 下图是交换的

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}) & \xrightarrow{\alpha_{U,V}} & \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}_{V,n}, \mathsf{Graphs}_{U,n}) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{coInd}_k^n} \\
 & & \mathrm{Map}_k(\mathrm{coInd}_k^n\, \mathsf{Graphs}_{V,n}, \mathrm{coInd}_k^n\, \mathsf{Graphs}_{U,n}) \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathrm{Map}_k(\mathrm{coInd}_k^\infty\, \mathrm{coInd}_\infty^n\, \mathsf{Graphs}_{V,n}, \mathrm{coInd}_k^\infty\, \mathrm{coInd}_\infty^n\, \mathsf{Graphs}_{U,n}) \\
 & & \downarrow \\
\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{\mathrm{tree}}_{U,V,n}) & \xrightarrow{\alpha_{U,V}} & \mathrm{Map}_k(\mathrm{coInd}_k^\infty\, \mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{V,n}(1)}, \mathrm{coInd}_k^\infty\, \mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,n}(1)}),
\end{array}$$

其中，左侧的垂直箭头由投影到树部分给出。 □

The 描述的最后一部分见下面的引理，其证明是直接的。

引理 7.3。 令 $\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{\mathrm{tree}}_{U,V,,n}) \to \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,k})$ 为重新分级映射。则存在一个交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{\mathrm{tree}}_{U,V,n}) & \xrightarrow{\alpha_{U,V}} & \mathrm{Map}_k(\mathrm{coInd}_k^\infty\, \mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{V,n}(1)}, \mathrm{coInd}_k^\infty\, \mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,n}(1)}), \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathrm{Map}_k(\mathsf{Graphs}_{V,k}, \mathrm{coInd}_k^\infty\, \mathbb{F}_{\mathsf{Graphs}^{\mathrm{tree}}_{U,n}(1)}) \\
 & & \uparrow \\
\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,k}) & \xrightarrow{\alpha_{U,V}} & \mathrm{Map}_k\left(\mathsf{Graphs}_{V,k}, \mathsf{Graphs}_{U,k}\right)
\end{array}$$

总结来说，映射

$$\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}) \to \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,k})$$

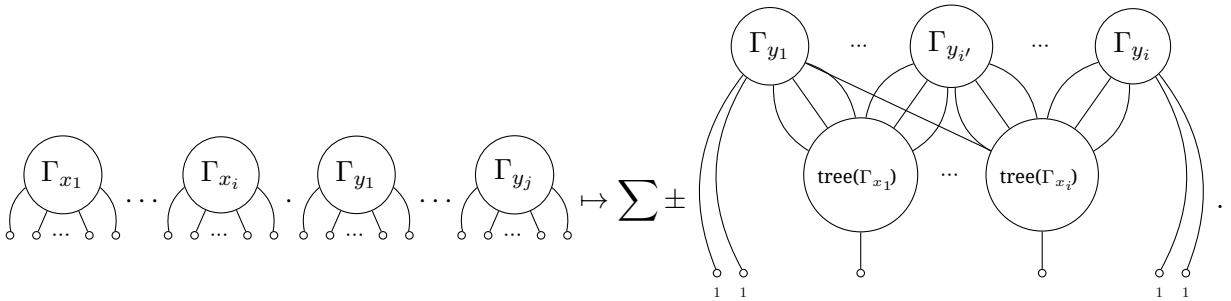
其为 coInd 建模$_k^n$ 由投影到树部分和重新分级的复合映射给出。现在我们可以通过下面的图来定义式（7.3）中间复合的一个模型

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{V,W,k}) & \times & \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}) & \longrightarrow & \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,W,k}) \\
\| & & \downarrow & & \| \\
\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{V,W,k}) & \times & \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,k}) & \longrightarrow & \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,W,k}).
\end{array}$$

也就是说，映射

$$\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{V,W,k}) \times \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,V,n}) \to \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}_{U,W,k})$$

由以下过程给出。对于 $\Gamma_{x_1}, \ldots, \Gamma_{x_i} \in \mathbf{HGC}_{U,V,n}$，我们先投影到树部分，再对结果重新分级，最后以所有可能的方式将 $\Gamma_{y_1}, \ldots, \Gamma_{y_j} \in \mathbf{HGC}_{V,W,k}$ 附加到其上：



定理 7.4。 设$\mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_v\ Z_w}_{V\ W\ n,,,})\ \to \mathrm{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_v^{\mathrm{t}}\ Z_w^{\mathrm{t}}}_{V\ W\ ,,,k})$ 为由复合映射诱导的映射

$$\mathrm{HGC}_{U,V,n} \to \mathrm{HGC}^{\mathrm{tree}}_{U,V,n} \to \mathrm{HGC}_{U,V,k}$$

对树部分进行投影并对树重新分级。然后，复合映射

$$\mathit{MC}_\bullet(\mathit{HGC}^{Z_v\ Z_w}_{V\ W\ ,\ ,\ ,k}) \times \mathit{MC}_\bullet(\mathit{HGC}^{Z_u\ Z_v}_{U\ V\ n,\ ,\ ,\ }) \to \mathit{MC}_\bullet(\mathit{HGC}^{Z_v\ Z_w}_{V\ W\ ,\ ,\ ,k}) \times \mathit{MC}_\bullet(\mathit{HGC}^{Z_v^{\mathrm{t}}\ Z_w^{\mathrm{t}}}_{U\ V\ k,\ ,\ ,\ }) \to \mathit{MC}_\bullet(\mathit{HGC}^{Z_u\ Z_v}_{U\ W\ k,\ ,\ ,\ }),$$

其中第二个箭头由定理 *5.4* 给出，它与“复合”映射 $\mathit{Map}^h_n(\mathit{coRes}^n_k(\mathit{Graphs}_{W,k}), \mathit{Graphs}_{V,n})\ \mathit{Map}^h_m(\mathit{coRes}^m_n(\mathit{Graphs}_{V,n}), \mathit{Graphs}_{U,m})\ \mathit{Map}^h_m(\mathit{coRes}^m_k(\mathit{Graphs}_{W,k}), \mathit{Graphs}_{U,m})$ ×弱等价$\dashrightarrow$ 该映射由 $\mathit{coInd}\ -\mathit{coRes}$ 伴随函子（见第 *7* 节）定义。

证明。 由于图表中的水平映射

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_v,Z_w}_{V,W,k}) & \times & \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_u,Z_v}_{U,V,n}) & \longrightarrow & \mathsf{MC}_\bullet(\mathrm{HGC}^{Z_u,Z_w}_{U,W,k}) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_{U,V}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{V,W}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{V,W}} \\
\mathrm{Map}_k(\mathsf{Graphs}^{Z_w}_{W,k}, \mathsf{Graphs}^{Z_v}_{V,k}) & \times & \mathrm{Map}_n(\mathsf{Graphs}^{Z_v}_{V,n}, \mathsf{Graphs}^{Z_u}_{U,n}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_k(\mathsf{Graphs}^{Z_w}_{W,k}, \mathsf{Graphs}^{Z_u}_{U,k})
\end{array}$$

w是为使图表交换而构造的，因此结论由命题 3.1得出。 □

Appendix A. Compatibility of Adjunctions with Composition

P命题 A.1. 设 $L\colon \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D}\colon R$是一对伴随函子。那么图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \times & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,RZ) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,RZ) \\
\downarrow{\scriptstyle L} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(LX,LY) & \times & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(LY,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(LX,Z)
\end{array}$$

是可交换的。这里，第一个垂直箭头由应用 L 给出，其余垂直箭头是伴随同构，水平箭头是态射的自然复合。

证明。 所需的图表是两个可交换方块的“拼接”

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \times & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,RZ) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,RZ) \\
\downarrow{\scriptstyle L} & & \downarrow{\scriptstyle L} & & \downarrow{\scriptstyle L} \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(LX,LY) & \times & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(LY,LRZ) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(LX,LRZ) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle (\varepsilon_Z)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\varepsilon_Z)_*} \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(LX,LY) & \times & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(LY,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(LX,Z),
\end{array}$$

其中 $(\varepsilon_Z)_*\colon LRZ \to Z$ 是伴随余单位。因此，外侧方块可交换。 □

References

[Ab] Abramyan, Semyon。 *Embedding calculus for parallelized manifolds*。arXiv:2504.05587。[AT] Arone, Gregory; Turchin, Victor。 *On the rational homology of high-dimensional analogues of spaces of long knots*。《几何与拓扑》18 (2014)，第 3 期，1261–1322。[FTW] Fresse, Benoit; Turchin, Victor; Willwacher, Thomas。 *On the rational homotopy type of embedding spaces of manifolds in* $\mathbb{R}^n$ 2008 08146 。arXiv: 。。[FW] Fresse, Benoit; Willwacher, Thomas。 *The intrinsic formality of* E_n*-operads* **22** 2020 7, 。《欧洲数学会杂志》2047 2133 （），第 – 期。[GW] Goodwillie Thomas G.; Weiss, Michael S. *Embeddings from the point of view of immersion theory II*。《几何与拓扑》3 (1999)，103–118。[Tu] Turchin, Victor。 *Context-free manifold calculus and the Fulton-MacPherson operad*。《代数几何与拓扑》13 (2013)，第 3 期，1243–1271。[We] Weiss, Michael S. *Embeddings from the point of view of immersion theory I*。《几何与拓扑》3 (1999)，67–101。

[Wi] Willwacher, Thomas。 *Models for configuration spaces of points via obstruction theory* I. arXiv:2302.07369。*Email address*: semyon.abramyan@gmail.com