arXiv:2601.18387v1 [math.AC] 26 Jan 2026

舒伯特循环和行列式环上典范模的迹理想

KAITO KIMURA

Abstract. 本文研究舒伯特循环和行列式环的典范迹。作为应用，我们对非戈伦斯坦轨迹给出了明确描述，并证明其结构与奇异轨迹和典范模的已知表示相容。此外，对于 Miyazaki 最近引入的 CTR性质，我们证明了其在基变换下的稳定性，并给出了行列式环情形下的刻画。

1. Introduction

在本文中，始终假设所有环都是交换诺特环。在本引言中陈述的三个定理中，(1) 遵循约定 3.1 和 3.3，而 (2) 遵循约定 4.1 和 4.3。

行列式簇和舒伯特簇是代数几何与表示论中的基本且重要的对象。作为它们坐标环出现的行列式环和舒伯特循环具有带直化律的分次代数结构，其环论性质也已得到广泛研究。众所周知，这些环的奇异轨迹，以及典范模在除子类群中的类，都可以用称为块和间隙的组合数据明确描述；参见 [2, 第 6 节以及 8]例如。鉴于这些结果，自然可以预期，非戈伦斯坦轨迹也能由相同的数据确定。本文的主要结果之一证实了这一预期。

定理 1.1。 [定理 3.5 和 4.6] 设 B 是一个环。
(1) 设 $\mathfrak{p}$ 是舒伯特循环 $G_B(X;\gamma)$ 的一个素理想，且 $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\cap B$。则 $G_B(X;\gamma)_{\mathfrak{p}}$ 是 *Gorenstein* 的，当且仅当 $B_{\mathfrak{q}}$ 是 *Gorenstein* 的，并且对于任意 $i\in\mathcal{U}$，$\mathfrak{p}$ 不包含 $J_B(x;\sigma_i)$。*(2)* 设 $\mathfrak{p}$ 是行列式环 $R_B(X;\delta)$ 的一个素理想，且 $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\cap B$。则 $R_B(X;\delta)_{\mathfrak{p}}$ 是 *Gorenstein* 的，当且仅当 $B_{\mathfrak{q}}$ 是 *Gorenstein* 的，并且对于任意 $i\in\mathfrak{U}$，$\mathfrak{p}$ 不包含 $I_B(x;\tau_i)$。

该定理是 [2, 定理 6.7 和 6.10] 的 Gorenstein 类比。比较这些结果时，值得注意的是，行列式环或舒伯特循环的奇异轨迹中的某些极小素理想涵盖了非戈伦斯坦轨迹的全部极小素理想（当基环是正则环时）。此外，哪些极小素理想构成非戈伦斯坦轨迹，可以由块和间隙的结构确定。这些事实可能与舒伯特簇的戈伦斯坦轨迹研究有关；例如参见 [13, 14] 。

定理 1.1 是通过对行列式环和舒伯特循环的典范迹进行详细分析而得到的。近年来，典范迹受到了广泛研究；例如参见 [3, 6, 7, 9, 10, 11, 12]。特别是，Ficarra、Herzog、Stamate 和 Trivedi [4] 研究了域上行列式环在最具代表性情形下的典范迹。我们在一般情形下给出了行列式环和舒伯特循环的典范迹的描述，从而推广了他们的结果。

定理 1.2. [命题 3.4 和 4.4] 设 B 是一个 *Gorenstein* 正规整环。
(1) 舒伯特循环 $G_B(X;\gamma)$ 的典范迹由 $\prod_{h=1}^{\kappa-\kappa'}\left(\bigcap_{i\in\mathcal{U}_h}J_B(x;\sigma_i)\right)$给出。(2) 行列式环 $R_B(X;\delta)$ 的典范迹由 $\prod_{h=1}^{\lambda-\lambda'}\left(\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h}I_B(x;\tau_i)\right)$给出。

Miyazaki [12] 引入了一类称为 CTR 的新环，它介于 Gorenstein 性质与 Cohen–Macaulay 性质之间，其特征在于典范迹是

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13H10; 13C70; 13F50.*Key words and phrases.* 典范模、迹理想、戈伦斯坦轨迹、典范迹根基（CTR）。

根理想。他给出了域上舒伯特循环的 CTR性质的组合刻画。对于行列式环、舒伯特循环，以及更一般的某些具有直化律的代数，环的标准性质（如 Cohen–Macaulay、Gorenstein、约化、正规或阶乘性）在基变换下保持不变；参见 [2, 第 5、6 节和 8]。下述定理断言，CTR性质在基变换下也具有类似的稳定性，这表明 CTR 是一类自然的环。

定理 1.3。 [定理 3.8 和 4。9] 设 B 是一个带有典范模的约化 *Cohen–Macaulay* 环。(1) $G_B(X;\gamma)$ </style}是 CTR，当且仅当 是 CTR 且 。(2) $R_B(X;\delta)$ *</style}是 CTR*，当且仅当 B 是 *CTR* 且 $\lambda - \lambda' \leq 1$。

本文的组织结构如下。第 2 节汇集迹理想的基本事实。本节建立的去齐次化结果，在将关于舒伯特循环的结果应用于行列式环时发挥重要作用。第 3 节研究舒伯特循环的典范迹以及 CTR 性质在基变换下的稳定性。引言中陈述的主要结果中，第 (1) 部分在本节得到证明。第 4 节通过考虑去齐次化，从第 3 节关于舒伯特循环的结果推出行列式环的相应结论，从而证明主要结果中的第 (2) 部分。

2. Basic facts on the canonical trace

在本节 中，我们研究一个（典范）模的迹理想的基本性质。

定义 2.1。 设 R 为一个环， M 为一个 R-模。 M 的迹理想 $\mathrm{tr}_R(M)$定义如下:

$$\mathrm{tr}_R(M) := \sum_{f \in \mathrm{Hom}_R(M,R)} \mathrm{Im}\, f.$$

众所周知，对于平坦的 R-代数 S和有限生成的 R-模 M，$\mathrm{tr}_S(M \otimes_R S) = \mathrm{tr}_R(M)S$。特别地，有限生成模的迹理想与局部化相容。

以下概念由 Miyazaki [12]引入。

定义 2.2。 如果一个 Cohen–Macaulay 环 R 对于 R的任意素理想 $\mathfrak{p}$， $R_\mathfrak{p}$ 都有一个典范模 $\omega_{R_\mathfrak{p}}$，且 $\mathrm{tr}^{R_\mathfrak{p}}(\omega_{R_\mathfrak{p}})$ 是 $R_\mathfrak{p}$的根理想，则称其为典范迹根基 （简称 CTR）。

在 [12], 中，已经证明 CTR 性质在各种运算下保持不变。在陈述我们的结果之前，我们先回顾一些基本事实。

注 2.3。 设 R 是一个 Cohen–Macaulay 环。
(1) 若 R-模 ω 满足：对于 R的每个素理想 $\mathfrak{p}$，局部化 $\omega_\mathfrak{p}$ 都是局部环 $R_\mathfrak{p}$的典范模，则称其为典范模。一般而言，两个典范模 ω 和 ω' 未必同构，但它们的迹理想相同。事实上，典范同态 $\omega \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\omega, \omega') \to \omega' : x \otimes f \mapsto f(x)$ 是一个同构，因为它在每个素理想处局部化后都是同构。因此， ω' 中的每个元素都是从 ω 到 ω'的同态像之和，这意味着 $\mathrm{tr}_R(\omega')$ 包含于 $\mathrm{tr}_R(\omega)$。由 ω 与 ω'的对称性可知，$\mathrm{tr}_R(\omega') = \mathrm{tr}_R(\omega)$。因此，讨论迹理想时，典范模的选取无关紧要。这个唯一的理想通常称为典范迹。

(2) 众所周知，典范模的迹理想就是非戈伦斯坦轨迹的定义理想。换言之，若 ω 是 R 的一个典范模，且 $\mathfrak{p}$是 R的一个素理想，那么 $\mathfrak{p}$包含 $\mathrm{tr}_R(\omega)$ 当且仅当 $R_\mathfrak{p}$ 不是 Gorenstein。

本文所研究的环类包括舒伯特循环和由其去齐次化所刻画的行列式环。它们是组合环中最重要的对象之一，这类组合环称为带直化律的分次代数（简称 ASL）；例如参见 [2] 。现在我们讨论去齐次化与迹理想之间的关系，这对于将舒伯特循环上的结果推广到行列式环是必要的。

命题 2.4. 设 $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_n$ 为分次环， M 为有限生成分次 R-模， $x \in R_1$为非幂零元，且 $A = R/(1-x)$。则 $\mathrm{tr}_R(M)A = \mathrm{tr}_A(M \otimes_R A)$。特别地，若 x 是 $R/\mathrm{tr}_R(M)$上的非零因子，则 $\mathrm{tr}_R(M)$ 是素理想（分别地，主理想、根理想）当且仅当$\mathrm{tr}_A(M \otimes_R A)$也是如此。

证明。 令 $y = 1 - x$。由于 y 的零次分量为 1， y 不包含于 R的任何齐次素理想中。由 [1, 引理 1.5.6(b)(ii)]可知， y 是每个有限生成分次R-模上的非零因子。特别地， y 是 R 和 $\operatorname{Ext}^1_R(M,\ R)$上的非零因子。短正合列 $0 \to R \xrightarrow{y} R \to A \to 0$ 诱导出一个长正合列

$$\operatorname{Hom}_R(M,R) \xrightarrow{y} \operatorname{Hom}_R(M,R) \to \operatorname{Hom}_R(M,A) \to \operatorname{Ext}^1_R(M,R) \xrightarrow{y} \operatorname{Ext}^1_R(M,R),$$

其中，最后一个同态是单射。这给出了一个典范同构

$$\operatorname{Hom}_R(M,R) \otimes_R A \cong \operatorname{Hom}_R(M,A) \cong \operatorname{Hom}_A(M \otimes_R A, A)$$

将 $(-) \otimes_R A$ 应用于自然正合列 $\operatorname{Hom}_R(M,\ R) \otimes_R M \to R \to R/\operatorname{tr}_R(M) \to 0$，得到自然正合列 $\operatorname{Hom}_A(M \otimes_R A,\ A) \otimes_A (M \otimes_R A) \to A \to A/\operatorname{tr}_A(M \otimes_R A) \to 0$，这意味着 $\operatorname{tr}_R(M)A = \operatorname{tr}_A(M \otimes_R A)$。后一断言可由去齐次化的基本性质推出；例如参见 [1, 习题 1.5.26(c)]或 [2, 命题 16.26(c)] 。□

将这一结果应用于典范迹，可得如下结论。尽管我们并未直接使用后一陈述，但它暗示了 CTR 性质在去齐次化下得以保持。

推论 2.5. 设 $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_n$ 是一个带有分次典范 R模ω的 ***Cohen–Macaulay*** 分次环， $x \in R_1$ 是一个非幂零元，并且 $A = R/(1-x)$。则$\operatorname{tr}_R(\omega)A$ 是 A的典范模 $\omega \otimes_R A$ 的迹理想。此外，假设 x 是 $R/\operatorname{tr}_R(\omega)$ 上的非零因子。那么， R 是 ***CTR*** 当且仅当 A 是 ***CTR***。

证明。 按照命题 2.4 的证明可知， $1 - x$ 是 ω上的非零因子。因此， $\omega \otimes_R A$是 A的一个典范模。结论立即由命题 2.4 得出。□

3. Schubert cycles

域上的舒伯特循环的 CTR 性质已由 Miyazaki [12]根据典范类完全刻画。另一方面，已知对相应 ASL 进行基变换时，基环的许多标准性质都得以保留；参见 [2]。从这个角度看，可以预期 CTR 性质在基变换下也表现出类似的行为。此外，由于典范迹能够刻画戈伦斯坦轨迹，已知舒伯特循环的典范迹后，便可利用组合数据确定其戈伦斯坦轨迹。本节将探讨这些问题。这里列出本文采用的标准记号。本文的约定以及所用的舒伯特循环和行列式环的基本事实（不再另行解释），基本上遵循 [2]。

约定 **定理 3.1**。 设 B 为一个环，并设 $X = (X_{ij})$ 为一个由不定元组成的 $m \times n$ 阶矩阵，其中 $m \leq n$.

(1) 对于整数 $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m \leq n$，记 $[a_1, \ldots, a_m]$为 X的 m 阶子式，该子式对应于列 $a_1, \ldots, a_m$。令 $\Gamma(X)$ 表示 X的所有 m 阶子式的集合，并令 $G(X)$（或在需要明确基环时记为 $G_B(X)$）表示由 $\Gamma(X)$ 生成的多项式环 $B[X]$的 B 子代数；也就是说，

$$\Gamma(X) := \{[a_1, \ldots, a_m] \mid 1 \leq a_1 < \cdots < a_m \leq n\} \text{ and } \Gamma(X) := B[\gamma \mid \gamma \in \Gamma(X)].$$

则 $\Gamma(X)$ 按如下方式赋予偏序:

$$[a_1, \ldots, a_m] \leq [b_1, \ldots, b_m] \iff a_i \leq b_i \text{ for all } 1 \leq i \leq m.$$

由下式给出的运算 $\sqcap$ 和 $\sqcup$

$$[a_1, \ldots, a_m] \sqcap [b_1, \ldots, b_m] = [\min\{a_1, b_1\}, \ldots, \min\{a_m, b_m\}] \text{ and}$$
$$[a_1, \ldots, a_m] \sqcup [b_1, \ldots, b_m] = [\max\{a_1, b_1\}, \ldots, \max\{a_m, b_m\}].$$

对于每个 $\gamma \in \Gamma(X)$，我们采用以下记号:

- $J(X;\gamma)$ 是由 $\{\delta \in \Gamma(X) \mid \delta \not\geq \gamma\}$ 生成的 $G(X)$ 的理想;
- $G(X;\gamma)$ 是 $G(X)$ 除以理想 $J(X;\ \gamma)$ 所得的商;
- $\Gamma(X;\gamma) := \{\delta \in \Gamma(X) \mid \delta \geq \gamma\}$ 是 $\Gamma(X)$ 的子集;
- 对于 $\delta \in \Gamma(X;\gamma)$, $J(x;\delta)$: $= J(X;\ \delta)/J(X;\ \gamma)$ 是 $G(X;\gamma)$ 的理想。

注意，对于任意 $\delta, \delta' \in \Gamma(X;\gamma)$，都有 $\delta \sqcap \delta', \delta \sqcup \delta' \in \Gamma(X;\gamma)$。类似地，当我们希望明确指出基环时，可以写作 $J_B(X;\gamma)$ $G_B(X;\gamma)$，等等。若所有 $\delta \in \Gamma(X;\gamma)$ 的次数均为 1，则 $G_B(X;\gamma)$ 是基于 B 的具有直化律的分次代数（简称 ASL）。特别地，若偏序集 $\Gamma(X;\gamma)$ 是全序集，则 $G(X;\gamma)$ 是基于 B 的多项式环；这种情形有时会作为平凡情形予以排除。在本文中，我们沿用 [2]，的称呼，将这些环称为 $G(X;\gamma)$ 舒伯特循环；例如，参见 [2, 第 1.D 节和定理 5。4]

(2) 对于这一部分，我们采用 [12] 的记号。固定 $\gamma = [a_1, \ldots, a_m] \in \Gamma(X)$。我们将其划分为块和间隙（按 [2, 第 6] 节中的含义）。令 $k(0) := 0$ 且 $a_{m+1} := n+1$。我们定义

- $\beta_i := a_{k(i)+1}, a_{k(i)+2}, \ldots, a_{k(i+1)-1}, a_{k(i+1)}$ 对每个 $0 \le i \le t$，以及
- $\beta_{t+1} := a_{k(t+1)+1}, a_{k(t+1)+2}, \ldots, n-1, n$

使得满足以下条件：

- $a_{j+1} - a_j = 1$ if $k(i) < j < k(i+1)$ for some $0 \le i \le t+1$;
- $a_{k(i)+1} - a_{k(i)} > 1$ for each $1 \le i \le t+1$.

在这种情况下，对于任意 $0 \le i \le t$，我们定义

$$\chi_i := a_{k(i+1)} + 1, a_{k(i+1)} + 2, \ldots, a_{k(i+1)+1} - 2, a_{k(i+1)+1} - 1,$$

也就是说，$\beta_0, \chi_0, \beta_1, \chi_1, \ldots, \beta_t, \chi_t, \beta_{t+1}$ 构成从 a_1 到 n 的连续数列。为方便起见，序列 $b_0, \ldots, b_{t+1}, \chi_0, \ldots, \chi_t$ 也可以视为集合。注意，β_{t+1} 可以为空，当且仅当 $a_m < n$ 时为空。在上述记号下，我们定义

$$\zeta_i := [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, a_{k(i)+1}, a_{k(i)+2}, \ldots, a_{k(i+1)-1}, a_{k(i+1)} + 1, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{t+1}]$$

对于 $0 \le i \le t$。（这是通过将 γ 中的 $a_{k(i+1)}$ 替换为 $a_{k(i+1)} + 1$得到的。）我们令

$$\kappa_i := \sum_{j=0}^{i} |\beta_j| + \sum_{j=i}^{t} |\chi_j|$$

对每个 $0 \le i \le t$，$\kappa := \max\{\kappa_i \mid 0 \le i \le t\}$ 以及 $\kappa' := \min\{\kappa_i \mid 0 \le i \le t\}$，其中符号 $|-|$ 表示集合的基数。若 B 是 Gorenstein 正规整环，则典范模的类为

$$\sum_{i=0}^{t} \kappa_i \operatorname{cl}(J(x;\zeta_i))$$

在 $G_B(X;\gamma)$ 的除子类群中。最后，对于 $1 \le i \le t$，我们设

$$\sigma_i := [\beta_0, \ldots, \beta_{i-2}, a_{k(i-1)+1}, a_{k(i-1)+2}, \ldots, a_{k(i)-1}, a_{k(i)+1}, a_{k(i)+2}, \ldots, a_{k(i+1)}, a_{k(i+1)}+1, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{t+1}].$$

注意，对于 $0 \le i \le t$，$J(x;\zeta_i)$ 以及对于 $1 \le j \le t$，$J(x;\sigma_j)$ 都是 $G(X;\gamma)$ 中意义下的极大子式理想，参见 [2, 第 9.A 节]。

注 3.2. 在约定 3.1 下，多项式环 $B[X]$ 在 B 上具有如下分次环结构：对每个 $1 \le i \le m$ 和 $1 \le j \le n$，$\deg(X_{ij}) = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{nj}) \in \mathbb{N}^n$，其中每个分量均由克罗内克 delta 定义。这种分次仅取决于列指标，与行指标无关。$\Gamma(X)$ 中的所有元素都是齐次的，并且 $G(X)$ 是 $B[X]$ 的一个 $\mathbb{N}^n$-分次子环。$G(X)$ 上的这种分次会在任意 $\gamma \in \Gamma(X)$ 下诱导出 $G(X;\gamma)$ 上的分次。命题 3.4 的证明需要这一概念，其中用到了以下事实：设 ξ，$\nu \in \Gamma(X)$。

- $\xi = \nu$ 当且仅当 $\deg(\xi) = \deg(\nu)$;
- 标准化关系可写成如下形式：$\xi\nu = \sum_i c_i \alpha_i \beta_i$，其中 $0 \ne c_i \in B$、$\alpha_i \le \beta_i$、$\alpha_i \le \xi$、$\alpha_i \le \nu$，并且对每个 i，$\deg(\xi) + \deg(\nu) = \deg(\alpha_i) + \deg(\beta_i)$;
- 有等式 $\deg(\xi) + \deg(\nu) = \deg(\xi \sqcup \nu) + \deg(\xi \sqcap \nu)$。

不仅结果值得关注，[12, 定理 4.3] 中的证明方法也同样值得关注。我们将通过应用其中使用的论证，说明如何根据 ASL 的偏序集结构来描述舒伯特循环的典范迹。这使得我们能够确定一般基环上的戈伦斯坦轨迹。值得注意的是，先前的研究并未明确给出舒伯特循环典范迹的描述，且这些结果的证明由作者完成；不过，Mitsuhiro Miyazaki 也了解同一方法。作者衷心感谢他允许将这些结果收录于本论文中。在陈述命题 3.4 之前，我们先在此总结一项将在后续各节中通用的约定。

约定 3.3。 此处的记号遵循约定 3.1(2)。对每个整数 $1 \le h \le \kappa - \kappa'$，我们令

- $\mathcal{S}_h = \{i \mid \kappa - \kappa_i \ge h\}$ 和 $\mathcal{T}_h = \{i \mid \kappa - \kappa_i < h\}$;
- $\mathcal{U}_h^+ = \{i \mid i \in \mathcal{S}_h, i-1 \in \mathcal{T}_h\}$, $\mathcal{U}_h^- = \{i \mid i \in \mathcal{T}_h, i-1 \in \mathcal{S}_h\}$和 $\mathcal{U}_h = \mathcal{U}_h^+ \cup \mathcal{U}_h^-$;
- $\mathcal{U} = \bigcup_{h=1}^{\kappa-\kappa'} \mathcal{U}_h$。

对于任意 $1 \le h \le \kappa - \kappa'$， $\mathcal{S}_h$和 $\mathcal{T}_h$是 $\{0,1,\dots,t\}$的互不相交子集，且它们的并集等于 $\{0,1,\dots,t\}$。此外，对于每个 $1 \le h \le \kappa - \kappa'$， $\mathcal{U}_h$都是 $\{1,\dots,t\}$ 的非空子集。

命题 3.4。 在约定 *3.1* 和约定 *3.3* 下，我们假设 B 是一个 *Gorenstein* 正规整环。那么， $G_B(X;\gamma)$ 的典范迹为

$$\prod_{h=1}^{\kappa-\kappa'} \Big(\bigcap_{i \in \mathcal{U}_h} J_B(x;\sigma_i) \Big).$$

特别地，戈伦斯坦轨迹 $G_B(X;\gamma)$ 的极小元恰为 $J_B(x;\sigma_i)$，其中 $i \in \mathcal{U}$。

证明。 令 $R = G_B(X;\gamma)$、$\Omega_i = \{\delta \in \Gamma(X;\ \gamma) \mid \delta \not\geq \zeta_i\}$ 以及 $J_i = J_B(x;\ \zeta_i) = R\Omega_i$为 $0 \le i \le t$。由 [2, 推论 9.18] 可知，对于任意 $0 \le i \le t$ 和 $k > 0$，均有 $J_i^k = J_i^{(k)}$。因此，根据 [2, 定理 8.12]，理想 $\omega := \bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa_i}$是 R 的典范模。由 [2, 推论 6.5]可得 $\gamma R = \bigcap_{i=0}^t J_i$。由于它们是具有相同除子类的除子理想，因此有 $\omega = \gamma^{\kappa'} \bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa_i - \kappa'}$ 和 $\gamma^{\kappa}\omega^{-1} = \bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa-\kappa_i}$。这意味着

$$\gamma^{\kappa} \operatorname{tr}_R(\omega) = (\gamma^{\kappa}\omega^{-1})\omega = \Big(\bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa-\kappa_i}\Big)\Big(\gamma^{\kappa'} \bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa_i-\kappa'}\Big) = \gamma^{\kappa'}\Big(\bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa-\kappa_i}\Big)\Big(\bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa_i-\kappa'}\Big),$$

这意味着 $\gamma^{\kappa-\kappa'} \operatorname{tr}_R(\omega) = (\bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa-\kappa_i})(\bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa_i-\kappa'})$，因为 γ是 R上的非零因子

.

设 $\alpha = \sum_{p=1}^s c_p \xi_{p1}\cdots\xi_{pr_p} \in R$为标准表示，即 $0 \ne c_p \in B$和 ξ_{p1}，……，$\xi_{pr_p} \in \Gamma(X;\ \gamma)$，其中对于任意 $1 \le p \le s$都有 $\xi_{p1} \le \cdots \le \xi_{pr_p}$。对于 $N > 0$和 $0 \le i \le t$，若 α属于 J_i^N，则对所有 $1 \le p \le s$都有 $r_p \ge N$ 和 ξ_{p1}，……，$\xi_{pN} \in \Omega_i$；参见 [2, 推论 9.3]。由此，若 α属于$\bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa-\kappa_i}$，则对所有 $1 \le p \le s$和 $0 \le i \le t$都有 $r_p \ge \kappa - \kappa'$和 ξ_{p1}，……，$\xi_{p\,\kappa-\kappa_i} \in \Omega_i$，这意味着对所有 $1 \le h \le \kappa - \kappa'$和 $i \in \mathcal{S}_h$都有 $\xi_{ph} \in \Omega_i$。我们看到，理想 $\bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa-\kappa_i}$由以下元素生成

$$\{\xi_1\cdots\xi_{\kappa-\kappa'} \mid \xi_1,\dots,\xi_{\kappa-\kappa'} \in \Gamma(X;\gamma), \xi_h \in \Omega_i \text{ for all } 1 \le h \le \kappa-\kappa' \text{ and } i \in \mathcal{S}_h\}.$$

类似地，理想 $\bigcap_{i=0}^t J_i^{\kappa_i-\kappa'}$ 由以下元素生成:

$$\{\xi_1\cdots\xi_{\kappa-\kappa'} \mid \xi_1,\dots,\xi_{\kappa-\kappa'} \in \Gamma(X;\gamma), \xi_{\kappa-\kappa'-h+1} \in \Omega_i \text{ for all } 1 \le h \le \kappa-\kappa' \text{ and } i \in \mathcal{T}_h\}.$$

Co综合以上内容可知， $\gamma^{\kappa-\kappa'}\operatorname{tr}_R(\omega)$ 由以下元素生成:

$$\left\{ \xi_1\cdots\xi_{\kappa-\kappa'}\cdot\nu_1\cdots\nu_{\kappa-\kappa'} \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi_1,\dots,\xi_{\kappa-\kappa'},\nu_1,\dots,\nu_{\kappa-\kappa'} \in \Gamma(X;\gamma), \\ \text{for all } 1 \le h \le \kappa-\kappa',\ i \in \mathcal{S}_h \text{ and } j \in \mathcal{T}_h \\ \xi_h \in \Omega_i \text{ and } \nu_{\kappa-\kappa'-h+1} \in \Omega_j \end{array} \right\}.$$

固定 $1 \le h \le \kappa - \kappa'$。令 $\xi,\nu \in \Gamma(X;\gamma)$，使得对于任意 $i \in \mathcal{S}_h$ 和 $j \in \mathcal{T}_h$，都有 $\xi \in \Omega_i$ 以及 $\nu \in \Omega j$。则 $\xi\nu$ 的标准化关系具有 $\pm\gamma(\xi \sqcup \nu)$ 的形式。事实上，对于任意满足 $\alpha \le \xi$ 和$\alpha \le \nu$的 $\alpha \in \Gamma(X;\gamma)$，由于 $\xi \in \Omega_i$、$\nu \in \Omega j$，且 Ω_i 和 Ωj 是偏序理想，我们看到对于任意 $i \in \mathcal{S}_h$ 和 $j \in \mathcal{T}_h$，都有 $\alpha \in \Omega_i \cap \Omega j$。这意味着对于任意 $i \in \mathcal{S}_h \cup \mathcal{T}_h = \{0,\dots,t\}$，都有 $\alpha \in \Omega_i$，从而 $\alpha = \gamma$。特别地，我们得到$\xi \sqcap \nu = \gamma$。根据注 3.2， $\xi\nu$ 的标准化关系中不会出现 $\gamma(\xi \sqcup \nu)$ 以外的项。当我们写作 $\xi\nu = c\gamma(\xi \sqcup \nu)$ 时，系数 c 非零，因为 $G_B(X;\gamma)$ 是一个整环。此外，当 $B = \mathbb{Z}$ 时，对任意剩余域 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作基变换， c 在 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 中的像必须非零。因此 $c = \pm 1$；通过从 $\mathbb{Z}$ 进行基变换，对于一般的 B 也同样成立。结合上一段，我们得到 $\gamma^{\kappa-\kappa'}\operatorname{tr}_R(\omega)$ 由以下元素生成:

$$\left\{ \gamma^{\kappa-\kappa'} \textstyle\prod_{h=1}^{\kappa-\kappa'} (\xi_h \sqcup \nu_{\kappa-\kappa'-h+1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi_1,\dots,\xi_{\kappa-\kappa'},\nu_1,\dots,\nu_{\kappa-\kappa'} \in \Gamma(X;\gamma), \\ \text{for all } 1 \le h \le \kappa-\kappa',\ i \in \mathcal{S}_h \text{ and } j \in \mathcal{T}_h \\ \xi_h \in \Omega_i \text{ and } \nu_{\kappa-\kappa'-h+1} \in \Omega_j \end{array} \right\}.$$

由于 γ 是 R 上的非零因子，我们得到

$$\mathrm{tr}_R(\omega) = \prod_{h=1}^{\kappa-\kappa'} R\{\xi \sqcup \nu \mid \xi, \nu \in \Gamma(X;\gamma),\, \xi \in \Omega_i \text{ and } \nu \in \Omega_j \text{ for all } i \in \mathcal{S}_h \text{ and } j \in \mathcal{T}_h\}.$$

我们对 $1 \le i \le t$ 定义 $\Theta_i = \{\delta \in \Gamma(X;\gamma) \mid \delta \not\geq \sigma_i\}$。由于 ζ_i，$\zeta_{i-1} \le \sigma_i$，我们得到 Ω_i，$\Omega_{i-1} \subseteq \Theta_i$。固定 $1 \le h \le \kappa - \kappa'$。那么，$\bigcap_{i\in\mathcal{U}_h} J_B(x;\sigma_i)$ 由 $\bigcap_{i\in\mathcal{U}_h} \Theta_i$ 生成；参见 [2, 命题 5.2]。根据上一段，为完成证明，只需证明以下等式:

$$\bigcap_{k\in\mathcal{U}_h} \Theta_k = \{\xi \sqcup \nu \mid \xi, \nu \in \Gamma(X;\gamma),\, \xi \in \Omega_i \text{ and } \nu \in \Omega_j \text{ for all } i \in \mathcal{S}_h \text{ and } j \in \mathcal{T}_h\}. \tag{3.4.1}$$

设 ξ，$\nu \in \Gamma(X;\gamma)$，其中对于所有 $i \in \mathcal{S}_h$ 和 $j \in \mathcal{T}_h$，都有 $\xi \in \Omega_i$ 和 $\nu \in \Omega j$。若 $k \in \mathcal{U}_h^+$，则 $k \in \mathcal{S}_h$ 且 $k-1 \in \mathcal{T}_h$。我们有 $\xi \in \Omega_k$ 和 $\nu \in \Omega_{k-1}$，因此 ξ，$\nu \in \Theta_k$，由此得到 $\xi \sqcup \nu \in \Theta_k$。另一方面，若 $k \in \mathcal{U}_h^-$，则 $k-1 \in \mathcal{S}_h$ 且 $k \in \mathcal{T}_h$。我们得到 $\xi \in \Omega_{k-1}$ 和 $\nu \in \Omega_k$，因此 ξ，$\nu \in \Theta_k$，由此得到 $\xi \sqcup \nu \in \Theta_k$。这表明 (3.4.1) 的右端包含于左端。反过来，我们取 $\beta = [b_1, \dots, b_m] \in \bigcap_{k\in\mathcal{U}_h} \Theta_k$，并令

$$H_1 = \{l \mid k(i) < l \le k(i+1) \text{ for some } i \in \mathcal{S}_h\};$$
$$H_2 = \{l \mid k(i) < l \le k(i+1) \text{ for some } i \in \mathcal{T}_h\};$$
$$H_3 = \{k(t+1)+1, k(t+1)+2, \dots, m-1, m\};$$

$$c_l = \begin{cases} a_l & \text{if } l \in H_1; \\ b_l & \text{if } l \in H_2 \cup H_3; \end{cases} \qquad c'_l = \begin{cases} a_l & \text{if } l \in H_2; \\ b_l & \text{if } l \in H_1 \cup H_3. \end{cases}$$

注意，H_1、H_2和 H_3 互不相交，且它们的并集为 $\{1, \dots, m\}$。我们证明，对所有 $i \in \mathcal{S}_h$，都有 $[c_1, \dots, c_m] \in \Omega_i$。为证明 $[c_1, \dots, c_m]$ 属于 $\Gamma(X;\gamma)$，我们验证对每个$1 \le l \le m$，$c_{l-1} < c_l$ 都成立。非平凡的情形是 $l-1 \notin H_1$ 且 $l \in H_1$。此时 $l-1 \in H_2$ 且 $l \in H_1$（因为条件 $l-1 \in H_3$ 会推出 $l \in H_3$）。我们看到，对某个满足 $i < t$ 且$i+1 \in \mathcal{S}_h$的 $i \in \mathcal{T}_h$，有 $l-1 = k(i+1)$。由于 $i+1 \in \mathcal{U}_h^+ \subseteq \mathcal{U}_h$，$\beta$ 属于 Θ_{i+1}。由此，$c_{l-1} = b_{k(i+1)} < a_{k(i+1)+1} = c_l$ 成立。对任意$i \in \mathcal{S}_h$，由$c_{k(i+1)} = a_{k(i+1)}$可得 $[c_1, \dots, c_m] \not\geq \zeta_i$。这意味着，对每个 $i \in \mathcal{S}_h$，都有 $[c_1, \dots, c_m] \in \Omega_i$。对偶地，也可看出，对所有 $j \in \mathcal{T}_h$，都有 $[c'_1, \dots, c'_m] \in \Omega j$。由于 $\beta = [c_1, \dots, c_m] \sqcup [c'_1, \dots, c'_m]$，证明至此完成。□

由上述内容，我们得到本节的主要结果之一。约定 3.1 中的元素 $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ 用于刻画舒伯特循环的奇异轨迹；参见 [2, 定理 6.7]。定理 3.5 断言，其中一些元素恰好确定了非戈伦斯坦轨迹。在陈述定理之前，我们指出，条件 $i \in \mathcal{U}$ 等价于 $\kappa_i \neq \kappa_{i-1}$。

定理 3.5. *在约定 3.1 和 3.3 下，设 $\mathfrak{p}$ 是 $G_B(X;\gamma)$ 的素理想，且 $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap B$。那么，$G_B(X;\gamma)_{\mathfrak{p}}$ 是 Gorenstein，当且仅当 $B_{\mathfrak{q}}$ 是 Gorenstein，且对于任意 $i \in \mathcal{U}$，$\mathfrak{p}$ 不包含 $J_B(x;\sigma_i)$。特别地，若 $\mathfrak{a}$ 是 B的非戈伦斯坦轨迹的定义理想，那么*

$$\Big(\bigcap_{i\in\mathcal{U}} J_B(x;\sigma_i)\Big) \cap \mathfrak{a}G_B(X;\gamma)$$

是 $G_B(X;\gamma)$ 的非戈伦斯坦轨迹的定义理想。

证明。设 $\mathfrak{p}$ 是 $R := G_B(X;\gamma)$ 的素理想，$\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap B$ 和 $\kappa(\mathfrak{q}) = B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$。由于 $B_{\mathfrak{q}} \to R_{\mathfrak{p}}$ 是平坦的局部环，当且仅当 $B_{\mathfrak{q}}$ 和 $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$ 均为 Gorenstein 时，$R_{\mathfrak{p}}$ 才是 Gorenstein。设 P 是 $G_{\kappa(\mathfrak{q})}(X;\gamma)$ 的素理想，它出现在自然同构 $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \cong (\kappa(\mathfrak{q}) \otimes_B R)_P = G_{\kappa(\mathfrak{q})}(X;\gamma)_P$ 中。那么，对于任意 $i \in \mathcal{U}$，$\mathfrak{p}$ 不包含 $J_B(x;\sigma_i)$，当且仅当 P 不包含 $J_{\kappa(\mathfrak{q})}(x;\sigma_i)$，其中 $i \in \mathcal{U}$。根据命题 3.4，后者等价于 $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$ 是 Gorenstein 的条件，因为 $\kappa(\mathfrak{q})$ 是一个域。后一断言由前者推出。□

以下结果是 Miyazaki 在 B 为域的情形下证明的；参见 [12, 定理 4.3]。为求完整起见，我们给出一个严格的证明，因为稍后将需要情形 $B = \mathbb{Z}$。

推论 3.6. *在约定 3.1 下，我们假设 B 是 Gorenstein 正规整环。那么$G_B(X;\gamma)$ 是 CTR，当且仅当 $\kappa - \kappa' \le 1$。在这些情形下，$G_B(X;\gamma)$ 的典范迹为$\bigcap_{i\in I} J(x;\sigma_i)$，其中 $I = \{i \mid 1 \le i \le t, \kappa_i \neq \kappa_{i-1}\}$。*

证明。 命题 3.4 指出， $G_B(X;\gamma)$ 的典范迹是 $\prod_{h=1}^{\kappa-\kappa'}(\bigcap_{i\in\mathcal{U}_h} J_B(x;\sigma_i))$。由于所有$J_B(x;\sigma_i)$都是素理想，“若”部分及后一个断言立即成立。另一方面，$\prod_{h=1}^{\kappa-\kappa'}(\bigcap_{i\in\mathcal{U}_h} J_B(x;\sigma_i))$由次数为 $\kappa-\kappa'$ 的元素生成（作为一个 ASL），因此当 $\kappa-\kappa'\geq 2$时不包含γ。然而， γ 属于 $\bigcap_{i\in\mathcal{U}} J_B(x;\sigma_i)$，即 $\prod_{h=1}^{\kappa-\kappa'}(\bigcap_{i\in\mathcal{U}_h} J_B(x;\sigma_i))$ 的根理想。“仅若”部分也已得证。□

在本节余下部分，我们的目标是证明定理 3.8，即可以进行一次基变换，将此情形作为基例。为此，我们先准备下面的引理。这是对 [5, 命题 4.1]，的推广，其思路源自其中给出的证明。

引理 3.7。令 C 为一个环，令 A 和 B 为 C-代数。令 M 为一个 A-模，并且 $R=A\otimes_C B$。假设 A 和 M 在 C 上平坦。则有以下结论。

（1）对任意 -模 及任意整数，$\operatorname{Tor}_i^R(M\otimes_A R, N\otimes_B R)=0$。（2）若对于某个 A-模 L 有 $M=A/\operatorname{tr}_A(L)$，则对于任意有限生成的 B-模 N，有以下结论：

$$\operatorname{tr}_A(L)R\cap\operatorname{tr}_B(N)R=(\operatorname{tr}_A(L)R)\cdot(\operatorname{tr}_B(N)R)\subseteq\operatorname{tr}_R(L\otimes_C N)\subseteq\operatorname{tr}_B(N)R.$$

证明。 (1) 令 F 为 M 的一个 A-自由分解。由于 A 和 M 在 C 上平坦， $F\otimes_C B$ 是 $M\otimes_C B\cong M\otimes_A R$ 的一个 R-自由分解。因此，对任意 B-模 N，有 $(F\otimes_C B)\otimes_R(R\otimes_B N)\cong F\otimes_C N$。由于 F 也是 M 的一个 C-平坦分解，且 M 在 C 上平坦，我们有 $\operatorname{Tor}_i^R(M\otimes_A R,\ N\otimes_B R)=H_i((F\otimes_C B)\otimes_R(R\otimes_B N))\cong H_i(F\otimes_C N)=\operatorname{Tor}_i^C(M,\ N)=0$，其中 $i>0$ 任意。

(2) 根据 (1)，对于任意 B-模 N，我们有 $\operatorname{Tor}_1^R(R/\operatorname{tr}_A(L)R, R/\operatorname{tr}_B(N)R)=0$，这意味着 $\operatorname{tr}_A(L)R\cap\operatorname{tr}_B(N)R=(\operatorname{tr}_A(L)R)\cdot(\operatorname{tr}_B(N)R)$。对于一个 A-同态 $f\colon L\to R$ 和一个 B-同态$f\colon N\to R$，张量积 $f\otimes g\colon L\otimes_C N\to A\otimes_C B=R$ 是一个 R-同态。这诱导出一个包含关系 $(\operatorname{tr}_A(L)R)\cdot(\operatorname{tr}_B(N)R)\subseteq\operatorname{tr}_R(L\otimes_C N)$。为证明最后一个包含关系，设 $\Phi\colon L\otimes_C N\to A\otimes_C B=R$ 是一个 R-同态， $x\in L$，且 $y\in N$。我们考虑一个 R-同态 $F\colon A\otimes_C N\to L\otimes_C N: a\otimes z\mapsto(ax)\otimes z$。于是 $\Phi(x\otimes y)=(\Phi\circ F)(1\otimes y)\in\operatorname{Im}(\Phi\circ F)$。另一方面，由于 $R=A\otimes_C B$ 在 B 上平坦，且 N 在 B 上有限生成，我们得到典范同构

$$\Phi\circ F\in\operatorname{Hom}_R(A\otimes_C N, A\otimes_C B)\cong\operatorname{Hom}_R(R\otimes_B N, R\otimes_B B)\cong R\otimes_B\operatorname{Hom}_B(N,B)$$

由 [8, 定理 7.11] 得出。因此 $\Phi(x\otimes y)\in\operatorname{Im}(\Phi\circ F)\subseteq\operatorname{tr}_B(N)R$。 □

下面的定理是本节的另一个主要结果。

定理 3.8. 在约定 *3.1* 下，我们假设 B 是一个带有典范模 ω_B 的约化 *Cohen–Macaulay* 环。那么，当且仅当 B 是 *CTR* 且 $\kappa-\kappa'\leq 1$ 时， $G_B(X;\gamma)$ 是 *CTR*。在这些情形下，令$I=\{i\mid 1\leq i\leq t, \kappa_i\neq\kappa_{i-1}\}$。那么， $G_B(X;\gamma)$ 的典范迹为

$$\Big(\bigcap_{i\in I} J_B(x;\sigma_i)\Big)\cap(\operatorname{tr}_B(\omega_B)G_B(X;\gamma)).$$

证明。 设 $A=G_{\mathbb{Z}}(X;\gamma)$ 和 $R=A\otimes_{\mathbb{Z}}B=G_B(X;\gamma)$。由 [2, 推论 5.17] 和推论 3.6 可知， A 是一个带有典范模 ω_A 的 Cohen–Macaulay 环，并且当且仅当 $\kappa-\kappa'\leq 1$ 时它是 CTR。此外， $\omega_R:=\omega_A\otimes_{\mathbb{Z}}\omega_B$ 是 R 的一个典范模；参见 [2, 定理 3.6]。

我们先证明“若”部分。假设 B 是 CTR 且 $\kappa-\kappa'\leq 1$。由推论 3.6 可得 $\operatorname{tr}_A(\omega_A)=\bigcap_{i\in I} J_{\mathbb{Z}}(x;\sigma_i)$，其中 $I=\{i\mid 1\leq i\leq t, \kappa_i\neq\kappa_{i-1}\}$。由于 $A/J_{\mathbb{Z}}(x;\sigma_i)\cong G_{\mathbb{Z}}(X;\sigma_i)$ 是自由$\mathbb{Z}$-模，因此它是 $\mathbb{Z}$-无挠的。考虑自然嵌入 $A/\operatorname{tr}_A(\omega_A)\hookrightarrow\bigoplus_{i\in I}A/J_{\mathbb{Z}}(x;\sigma_i)$，可知 $A/\operatorname{tr}_A(\omega_A)$ 是 $\mathbb{Z}$-无挠的，这意味着它在 $\mathbb{Z}$ 上平坦。由引理 3.7 可得

$$\operatorname{tr}_A(\omega_A)R\cap\operatorname{tr}_B(\omega_B)R\subseteq\operatorname{tr}_R(\omega_R)\subseteq\operatorname{tr}_B(\omega_B)R. \tag{3.8.1}$$

由于对所有 $i\in I\}$， $\{\xi\in\Gamma(X;\delta)\mid\xi\not\geq\sigma_i$ 都生成 A 中作为理想的 $\operatorname{tr}_A(\omega_A)=\bigcap_{i\in I}J_{\mathbb{Z}}(x;\sigma_i)$，并且也生成 R 中作为理想的 $\bigcap_{i\in I}J_B(x;\sigma_i)$，因此 $\operatorname{tr}_A(\omega_A)R$ 与 $\bigcap_{i\in I}J_B(x;\sigma_i)$ 相同。注意，对于每个 $i\in I$，$R/J_B(x;\sigma_i)\cong G_B(X;\sigma_i)$ 都是约化的。因此，$\operatorname{tr}_A(\omega_A)R$ 是 R 的根理想。另一方面，$\operatorname{tr}_B(\omega_B)R$ 也是 R 的根理想，因为 $R/\operatorname{tr}_B(\omega_B)R\cong A\otimes_{\mathbb{Z}}(B/\operatorname{tr}_B(\omega_B))\cong G_{B/\operatorname{tr}_B(\omega_B)}(X;\gamma)$ 是约化的。由上可知，一旦证明 $\operatorname{tr}_R(\omega_R)\subseteq\operatorname{tr}_A(\omega_A)R$，结合 (3.8.1) 即可推出 $\operatorname{tr}_R(\omega_R)=\operatorname{tr}_A(\omega_A)R\cap\operatorname{tr}_B(\omega_B)R$，从而 R 是 CTR。定理的后一断言也可由上述论证得出。

设 $\mathfrak{p}$ 是 R 的一个素理想，且包含 $\mathrm{tr}_A(\omega_A)R = \bigcap_{i\in I} J_B(x;\sigma_i)$。存在 $i \in I$ 使得 $J_B(x;\sigma_i) \subseteq \mathfrak{p}$。令 $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap B$，并令 $\kappa(\mathfrak{q}) = B_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}B_\mathfrak{q}$。自然同构 $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \cong (\kappa(\mathfrak{q}) \otimes_B R)_P = G_{\kappa(\mathfrak{q})}(X;\gamma)_P$ 中出现的 $G_{\kappa(\mathfrak{q})}(X;\gamma)$ 的素理想 P 包含 $J_{\kappa(\mathfrak{q})}(x;\sigma_i)$。由于 $\kappa(\mathfrak{q})$ 是一个域，推论 3.6 表明 P 包含 $G_{\kappa(\mathfrak{q})}(X;\gamma)$ 的典范迹，这意味着 $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \cong G_{\kappa(\mathfrak{q})}(X;\gamma)_P$ 不是 Gorenstein；参见注记 2.3(2)。由于 $\mathbb{Z} \to A$ 是平坦的，$B \to A \otimes_\mathbb{Z} B = R$ 也平坦，因此 $B_\mathfrak{q} \to R_\mathfrak{p}$ 亦然。由于 $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$ 不是 Gorenstein，$R_\mathfrak{p}$ 也不是 Gorenstein。再次根据注记 2.3(2)，$\mathfrak{p}$ 包含 $\mathrm{tr}_R(\omega_R)$。由上述论证可知，$\mathrm{tr}_R(\omega_R) \subseteq \sqrt{\mathrm{tr}_A(\omega_A)R} = \sqrt{\mathrm{tr}_A(\omega_A)R}$。

接下来，我们证明“仅当”部分。假设 R 是 CTR。由 [2, 引理 6.1] 可知，A_γ 同构于某个域 $\mathbb{Z}$ 上的多项式环按一个素元进行局部化所得的环。特别地，A_γ 是唯一分解整环，因此 $(\omega_A)_\gamma \cong A_\gamma$。（例如，可以通过考察类群看出这一点。）由于 $(\omega_R)_\gamma \cong (\omega_A)_\gamma \otimes_\mathbb{Z} \omega_B \cong A_\gamma \otimes_\mathbb{Z} \omega_B \cong R_\gamma \otimes_B \omega_B$ 且 R_γ 在 B上平坦，我们得到

$$\mathrm{Hom}_{R_\gamma}((\omega_R)_\gamma, R_\gamma) \cong \mathrm{Hom}_{R_\gamma}(R_\gamma \otimes_B \omega_B, R_\gamma \otimes_B B) \cong R_\gamma \otimes_B \mathrm{Hom}_B(\omega_B, B).$$

我们得到 $(\mathrm{tr}_R(\omega_R))R_\gamma = (\mathrm{tr}_B(\omega_B))R_\gamma$，根据假设它是一个根理想。再次由 [2, 引理 6.1]，$R_\gamma/(\mathrm{tr}_B(\omega_B))R_\gamma \cong R_\gamma \otimes_B (B/\mathrm{tr}_B(\omega_B)) \cong A_\gamma \otimes_\mathbb{Z} (B/\mathrm{tr}_B(\omega_B)) \cong G_{B/\mathrm{tr}_B(\omega_B)}(X;\gamma)_\gamma$ 同构于某个域 $B/\mathrm{tr}_B(\omega_B)$上的多项式环按一个素元进行局部化所得的环。由于 $R_\gamma/(\mathrm{tr}_B(\omega_B))R_\gamma$ 是约化的，我们得出其子环 $B/\mathrm{tr}_B(\omega_B)$ 也是约化的，这意味着 B 是 CTR。设 $\mathfrak{q}$ 是 B的一个极小素理想。由于 B 是约化的，$B_\mathfrak{q}$ 是一个域。由于 $R_\mathfrak{q} \cong A \otimes_\mathbb{Z} B_\mathfrak{q} \cong G_{B_\mathfrak{q}}(X;\gamma)$ 是 CTR，由推论 3.6 可得 $\kappa - \kappa' \leq 1$。□

注记 3.9. 定理 3.8 中假设 B 是约化的，这一假设在以下意义上是必要的。设 B 是一个非约化的 Gorenstein 环，$\kappa - \kappa' = 1$，且 $I = \{i\}$ 是单元素集，也就是说，$G_\mathbb{Z}(X;\gamma)$ 的典范迹是 $J_\mathbb{Z}(x;\sigma_i)$，它是 $G_\mathbb{Z}(X;\gamma)$ 的一个素理想。那么，$J_B(x;\sigma_i)$ 不是 $G_B(X;\gamma)$ 的根理想，因为 $G_B(X;\gamma)/J_B(x;\sigma_i) \cong G_B(X;\sigma_i)$ 不是约化的。这意味着，$G_B(X;\gamma)$ 具有 CTR 性质与 $J_B(x;\sigma_i)$ 是典范迹并不相容，因此定理 3.8 的结论不成立。我们还注意到，$G_B(X;\gamma)$ 具有 CTR 性质并不意味着 B 是约化的；参见 [2, 推论 8.13]。

作为说明，当 $m = n$, $\Gamma(X)$ 是单元素集时，不会发生任何非平凡的情况。值得关注的情形是 $m < n$；正如我们将在下一节看到的，在这种情形下，$G(X;\gamma)$ 会化为一个由构成 $m \times (n-m)$-矩阵的 Y 这些不定元上的特定环 $R(Y;\delta)$。因此，具体例子的展示留待下一节。

4. 行列式环

在上一节中，我们研究了 ASL $G(X;\gamma)$ 的 CTR性质和非戈伦斯坦轨迹。本节将考察 ASL $R(X;\delta)$ 这一另一个重要例子。对于每个 $R(X;\delta)$，都存在一个相应的~~ ~~ $G(X;\delta)$，它保持偏序集结构，并且环的一些性质也会被继承。我们再次在此记录论文中使用的标准记号。

约定 4.1. 设 B 为一个环，$X = (X_{ij})$ 为一个由不定元构成的 $m \times n$-矩阵。

（1）对于 $r \leq \mathrm{mim}\{m,n\}$ 和整数 $1 \leq a_1 < \cdots < a_r \leq m$、$1 \leq b_1 < \cdots < b_r \leq n$，我们用 $[a_1,\ldots,a_r|b_1,\ldots,b_r]$ 表示 X 中对应于行 $a_1,\ldots,a_r$ 和列 $b_1,\ldots,b_r$ 的 r 子式。令 $\Delta(X)$ 表示 X 的所有子式的集合；也就是说，

$$\Delta(X) := \{[a_1,\ldots,a_r|b_1,\ldots,b_r] \mid r \leq \mathrm{mim}\{m,n\}, 1 \leq a_1 < \cdots < a_r \leq m, 1 \leq b_1 < \cdots < b_r \leq n\}.$$

那么，$\Delta(X)$ 按照以下方式构成偏序：

$$[a_1,\ldots,a_r|b_1,\ldots,b_r] \leq [c_1,\ldots,c_s|d_1,\ldots,d_s] \iff r \geq s \text{ and } a_i \leq c_i, b_i \leq d_i \text{ for all } 1 \leq i \leq s.$$

对于每个 $\delta \in \Delta(X)$，我们采用以下记号：

- $I(X;\delta)$ 是由 $\{\gamma \in \Delta(X) \mid \gamma \not\geq \delta\}$ 生成的 $B[X]$ 的理想；
- $R(X;\delta)$ 是 $B[X]$ 对理想 $I(X;\delta)$ 的商；
- $\Delta(X;\delta) := \{\gamma \in \Delta(X) \mid \gamma \geq \delta\}$ 是 $\Delta(X)$ 的子集。
- 对于 $\gamma \in \Delta(X;\delta)$，$I(x;\gamma) := J(X;\gamma)/J(X;\delta)$ 是 $R(X;\delta)$ 的理想。

为了明确基环，我们可以写作 $I_B(X;\delta)$ $R_B(X;\delta)$，等等。若所有不定元的次数都为 1，则 $R_B(X;\delta)$ 是基环 B 上的分次 ASL。特别地，若偏序集 $\Delta(X;\gamma)$ 是全序的，那么 $R(X;\delta)$ 就是基环 B 上的多项式环；有时会将这种情况排除在外，视为平凡情形。

本文沿用 [2], 的说法，将这些环称为 $R\langle X;\delta\rangle$ 行列式环；例如参见 [2, 第 1.C 节和定理 5.3] 。（这是所谓的梯形行列式环的一个特例。）

(2) 我们由 X 和附加到 X上的 m 个新列构造矩阵 $\widetilde{X}$：

$$\widetilde{X}=\begin{pmatrix} X_{1\,1} & \cdots & X_{1\,n} & X_{1\,n+1} & \cdots & X_{1\,n+m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m\,1} & \cdots & X_{m\,n} & X_{m\,n+1} & \cdots & X_{m\,n+m} \end{pmatrix}.$$

以下 ~ 将矩阵元素代入后，得到一个从 $B[X]$ 到 $B[X]$的满同态 :

$$\begin{pmatrix} X_{1\,1} & \cdots & X_{1\,n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ X_{m\,1} & \cdots & X_{m\,n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

~此同态诱导出一个满射 $\varphi:\ G(X)\to B[X]$, 它满足以下性质；参见 [2]。下文中，我们采用约定 3.1 中给出的舒伯特循环记号。

- 我们有 $\varphi([n+1,\dots,n+m])=(-1)^{m(m-1)/2}$。对于 $[n+1,\dots,n+m]\neq[b_1,\dots,b_m]\in\Gamma(\widetilde{X})$，令 $r=\max\{j\mid b_j\le n\}$，并令 $1\le a_1<\cdots<a_r\le m$ 满足

$$\{a_1,\dots,a_r,(m+n+1)-b_m,\dots,(m+n+1)-b_{r+1}\}=\{1,2,\dots,m\}.$$

  在映射 φ下， $[b_1,\dots,b_m]$ 被映到 $[a_1,\dots,a_r|b_1,\dots,b_r]$, 相差一个符号。
- 映射 φ 在偏序集 $\Gamma(\widetilde{X})\setminus\{[n+1,\dots,n+m]\}$ 与 $\Delta(X)$ 之间诱导出一个同构。~ ~ ~此外，对于 $\delta\in\Delta(X)$ 和 $\delta=\pm\varphi^{-1}(\delta)\in\Gamma(X)\setminus\{[n+1,\dots,n+m]\}$, φ 在偏序集 $\Gamma(X;\,\delta)\setminus\{[n+1,\dots,n+m]\}$ 与 $\Delta(X;\delta)$ 之间诱导出一个~ ~同构。
- 令 $\varepsilon=(-1)^{m(m-1)/2}[n+1,\dots,n+m]$。则 φ 诱导出一个去齐次化映射 $G(\widetilde{X})/(1-\varepsilon)\cong$ ~ ~$B[X]$。此外，对于 $\delta\in\Delta(X)$ 和 $\delta=\pm\varphi^{-1}(\delta)\in\Gamma(X)\setminus\{[n+1,\dots,n+m]\}$, φ 诱导出一个去齐次化映射 $G(\widetilde{X};\,\widetilde{\delta})/(1-\varepsilon)\cong R(X;\,\delta)$。注意，对于任意的 $\gamma\in\Delta(X;\,\delta)$ 和 $\widetilde{\gamma}=\pm\varphi^{-1}(g)\in$ ~ ~ ~ ~$\Gamma(X;\,\delta)\setminus\{[n+1,\dots,n+m]\}$, ε是 $G(X;\,\delta)/J(x;\,\widetilde{\gamma})=G(X;\,\widetilde{\gamma})$上的非零因子。因此，理想 $J(x;\,\widetilde{\gamma})$ 和 $I(x;\gamma)$ 通过去齐次化一一对应。

~ ~(3) 令 $\delta\in\Delta(X)$，且 $\delta=\pm\varphi^{-1}(\delta)\in\Gamma(X)\setminus\{[n+1,\dots,n+m]\}$。此处依照约定 3.1，当我们令“$\gamma$”$=\delta$时，我们用 $\widetilde{\eta}_0,\dots,\widetilde{\eta}_t\in\Gamma(X;\,\delta)$ 表示对应于“$\zeta_0,\dots,\zeta_t$”的元素，并用 $\lambda_0,\dots,\lambda_t$ 表示对应于 “$\kappa_0,\dots,\kappa_t$” 的整数~。令 $\lambda:=\max\{\lambda_i\mid 0\le i\le t\}$, $\lambda':=\min\{\lambda_i\mid 0\le i\le t\}$，并对任意 $0\le i\le t$ 定义 $\eta_i=\pm\varphi(\widetilde{\eta}_i)\in\Delta(X;\delta)$。类似地，依照约定 3.1，当我们令“$\gamma$”$=\delta$时，我们用 $\widetilde{\tau}_1,\dots,\widetilde{\tau}_t\in\Gamma(X;\,\delta)$ 表示对应于 “$\sigma_1,\dots,\sigma_t$” 的元素。于是，对任意 $1\le i\le t$，我们令 $\tau_i=\pm\varphi(\widetilde{\tau}_i)\in\Delta(X;\,\delta)\cup\{1\}$；关于此处的 $\{1\}$，请参见注 4.2。若 B 是 Gorenstein 正规整环，则通过去齐次化，典范类可表示为与 [12, Fact 4.2], 中类似的形式，即，

$$\sum_{i=0}^{t}\lambda_i\,\mathrm{cl}(I(x;\eta_i))$$

当然，也可以用 δ 的各个分量显式表示 $\eta_0,\dots,\eta_t$、 $\tau_1,\dots,\tau_t$ 和 $\lambda_0,\dots,\lambda_t$，如 [2, 定理 8.14]所示。然而，这只会徒增复杂性，并无任何特别的好处，因此本文不采用这种做法。

注 4.2。在约定 4.1(3)下，排除平凡的全序情形后，我们不会有 $\widetilde{\eta}_i=[n+1,\dots,n+m]$ for $0\le i\le t$, 但可能会出现 $\widetilde{\tau}_i=[n+1,\dots,n+m]$（例如，当 $m,\ n\ge 2$ 和 $\delta=[1|1]$时）。此时， τ_i 不是偏序集中的元素；相反，我们定义 $\tau_i=1$,$\Delta(X;\,\tau_i)=\emptyset$, 并令 $I_B(x;\,\tau_i)$ 表示由 $\Delta(X;\delta)$ 的所有元素生成的齐次理想。后续所有结果均可按此重新解释，不会产生任何问题。

首先，我们确定 $R(X;\delta)$ 的典范迹和非戈伦斯坦轨迹。对典范迹的这一刻画使我们能够讨论 $R(X;\delta)$ 的 CTR 性质。同样，我们也引入必要的最简记号。

约定4.3。 此处的记号遵循约定 4.1(3)。对每个整数 $1 \le h \le \lambda - \lambda'$，定义

- $\mathfrak{S}_h = \{i \mid \lambda - \lambda_i \ge h\}$ 和 $\mathfrak{T}_h = \{i \mid \lambda - \lambda_i < h\}$;
- $\mathfrak{U}_h^+ = \{i \mid i \in \mathfrak{S}_h, i-1 \in \mathfrak{T}_h\}$, $\mathfrak{U}_h^- = \{i \mid i \in \mathfrak{T}_h, i-1 \in \mathfrak{S}_h\}$和 $\mathfrak{U}_h = \mathfrak{U}_h^+ \cup \mathfrak{U}_h^-$;
- $\mathfrak{U} = \bigcup_{h=1}^{\lambda-\lambda'} \mathfrak{U}_h$。

命题 4.4。 在约定 *4.1* 和 *4.3* 下，假设 B 是一个 *Gorenstein* 正规整环。那么， $R_B(X;\ \delta)$ 的典范迹为

$$\prod_{h=1}^{\lambda-\lambda'} \Big(\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h} I_B(x;\tau_i) \Big).$$

特别地，t 戈伦斯坦轨迹 $R_B(X;\delta)$ 的极小元恰好是 $I_B(x;\tau_i)$，其中 $i \in \mathfrak{U}$.

~ ~证明。 命题 3.4 表明， $G_B(X;\delta)$ 的典范迹为

$$\mathfrak{a} := \prod_{h=1}^{\lambda-\lambda'} \Big(\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h} J_B(x;\widetilde{\tau}_i) \Big).$$

~ ~ ~ ~对于每个 $1 \le h \le \lambda - \lambda'$， $\{\xi \in \Gamma(X;\delta) \mid \xi \not\ge \widetilde{\tau}_i$ 对所有 $i \in \mathfrak{U}_h\}$ 都是 $G_B(X;\delta)$ 中理想 $\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h} J_B(x;\widetilde{\tau}_i)$ 的一个生成元，而 $\{\xi \in \Delta(X;\delta) \mid \xi \not\ge \tau_i$ 对所有 $i \in \mathfrak{U}_h\}$ 都是 $R_B(X;\delta)$ 中理想 $\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h} I_B(x;\tau_i)$ 的一个生成元。由于这些生成元在去齐次化下对应，因此我们得到 $\mathfrak{a}R_B(X;\delta) = \prod_{h=1}^{\lambda-\lambda'} (\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h} I_B(x;\tau_i))$；根据推论 2.5，它是 $R_B(X;\delta)$ 的典范迹。□

例 4.5。 命题 4.4 推广了 [4, 定理 1.1]。事实上，我们考虑基环 B 为域的情形（或者，若充分利用命题 4.4，只需假设 B 为 Gorenstein 正规整环），并令 $\delta = [1,\dots,r|1,\dots,r]$，其中 $1 \le r < \min\{m,n\}$。于是我们有~$\delta = [1,\dots,r,n+1,\dots,n+m-r]$、 $t = 1$、 $\lambda_0 = n+r$、 $\lambda_1 = m+r$、 $\widetilde{\tau}_1 = [1,\dots,r-1,n+1,\dots,n+m-r+1]$; 若 $r > 1$，则 $\tau_1 = [1,\dots,r-1|1,\dots,r-1]$; 否则，按照约定 4.1， $\tau_1 = 1$。命题 4.4 断言， $R(X;\delta)$ 的典范迹 $= B[X]/I_{r+1}(X)$ 为

$$I(x;\tau_i)^{|n-m|} = I_r(X)^{|n-m|} R(X;\delta).$$

~ ~当 $|n-m| = 1$ 时， $G(X;\delta)$ 是注记 3.9 中所考虑情形的一个典型例子，其中 I 是单元素集，也就是说，典范迹是素理想。

定理 4.6 可通过与定理 3.5 相同的方式证明，只需用命题 4.4 替代命题 3.4。这是 [2, 定理 6.10] 的 Gorenstein 版本。

定理 4.6。 在约定 *4.1* 和 *4.3* 下，设 $\mathfrak{p}$ 是 $R_B(X;\delta)$ 的素理想，且 $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap B$。那么$R_B(X;\delta)_{\mathfrak{p}}$ 是 *Gorenstein*，当且仅当 $B_{\mathfrak{q}}$ 是 *Gorenstein*，且对于任意 $i \in \mathfrak{U}$， $\mathfrak{p}$ 不包含 $I_B(x;\tau_i)$。特别地，若 $\mathfrak{a}$ 是 B 的非戈伦斯坦轨迹的定义理想，则

$$\Big(\bigcap_{i\in\mathfrak{U}} I_B(x;\tau_i) \Big) \cap \mathfrak{a}R_B(X;\delta)$$

是 $R_B(X;\delta)$ 的非戈伦斯坦轨迹的定义理想。

我们希望给出 $R(X;\delta)$ 具有 CTR 性质的充要条件，类似于推论 3.6。在推论 3.6 的“仅当”部分的证明中，$\Gamma(X;\gamma)$ 的所有元素都是次数为一的齐次元素，这一点至关重要。另一方面， $\Delta(X;\ \delta)$ 的元素次数各不相同，因此无法直接应用原有证明。为了解决这个问题，我们先准备下面的引理。

引理 4.7。 设 B 和 X 如约定 *4.1* 所述，并记作 $\delta = [c_1,\dots,c_r|d_1,\dots,d_r] \in \Delta(X)$。对于任意 $1 \le i \le t$, 存在 $1 \le N_i \le r$，使得对于约定 *4.1(3)* 中的 τ_i，以下结论成立：(1) 若 $[e_1,\dots,e_s|f_1,\dots,f_s] \in \Delta(X;\ \delta) \setminus \Delta(X;\ \tau_i)$，则 $s \ge N_i$。

(2) 对于任意 $N_i \le s \le r$, $[c_1,\dots,c_s|d_1,\dots,d_s] \in \Delta(X;\ \delta) \setminus \Delta(X;\ \tau_i)$。

~~证明。令 δ 和 $\widetilde{\tau}_i$ 如约定 4.1(3) 中关于 δ 的定义。写作 $\delta = [a_1,\dots,a_m]$ 时，按照约定 3.1 的记号，约定 4.1(3) 规定：

$$\widetilde{\tau}_i = [\beta_0,\dots,\beta_{i-2}, a_{k(i-1)+1}, a_{k(i-1)+2},\dots,a_{k(i)-1}, a_{k(i)+1}, a_{k(i)+2},\dots,a_{k(i+1)}, a_{k(i+1)}+1, \beta_{i+1},\dots,\beta_{t+1}].$$

~~令 $\gamma := [e_1,\dots,e_s|f_1,\dots,f_s] \in \Delta(X;\ \delta)$ 且 $\widetilde{\gamma} := \pm\varphi^{-1}(\gamma) = [b_1,\dots,b_m] \in \Gamma(X;\ \delta)$，其中 φ 是约定 4.1(2) 中定义的映射。容易看出：

$$\gamma \notin \Delta(X;\tau_i) \iff \widetilde{\gamma} \notin \Gamma(\widetilde{X};\widetilde{\tau}_i) \iff b_{k(i)} < a_{k(i)+1}. \tag{4.7.1}$$

注意，对任意 $1 \le s \le r$, $[c_1,\dots,c_s|d_1,\dots,d_s]$ 都属于 $\Delta(X;\ \delta)$。

首先，我们处理 $a_{k(i)+1} \le n+1$ 的情形。在这种情况下，结论中出现的 N_i 是 $k(i)$。如果 $b_{k(i)} < a_{k(i)+1}$，那么 $b_{k(i)} \le n$，因此对任意 $1 \le j \le k(i)$，都有 $f_j = b_j$。特别地， $s \ge k(i)$。由 (4.7.1) 可知，(1) 得证。另一方面，由于 $a_{k(i)} < a_{k(i)+1} \le n+1$，我们看到对任意 $1 \le j \le k(i)$，都有 $a_j = d_j$。对于 $k(i) \le s \le r$，由 $d_{k(i)} = a_{k(i)} < a_{k(i)+1}$ 可得 $[c_1,\dots,c_s|d_1,\dots,d_s] \notin \Delta(X;\ \tau_i)$，这意味着 (2)；参见 (4.7.1)。

接下来，我们处理 $n+1 < a_{k(i)+1}$ 的情形。这个假设特别推出 $i > 0$、$n+1 \le a_{k(i)+1}-1$ 和 $a_{k(i)} < a_{k(i)+1}-1 < a_{k(i)+1}$。考察由 φ 给出的偏序集对应，我们发现存在一个整数 N_i，使得 $c_{N_i+1} = (m+n+1) - (a_{k(i)+1}-1) \le m$。假设 $\gamma \notin \Delta(X;\tau_i)$。那么根据 (4.7.1)，$b_{k(i)} < a_{k(i)+1} \le b_{k(i)+1}$。可以看出

$$\begin{aligned}\{1,2,\dots,m+n+1-a_{k(i)+1}\} &= \{c_1,\dots,c_{N_i}, m+n+1-a_m,\dots,m+n+1-a_{k(i)+1}\}\\ &\supseteq \{m+n+1-b_m,\dots,m+n+1-b_{k(i)+1}\};\end{aligned}$$

这些是 $\{1,2,\dots,m\}$ 的子集。我们有 $m+n+1-b_{k(i)} \notin \{1,2,\dots,m+n+1-a_{k(i)+1}\}$，因为 $b_{k(i)} < a_{k(i)+1}$。从 $[b_1,\dots,b_m]$ 构造 $[e_1,\dots,e_s|f_1,\dots,f_s]$ 可知

$$\{1,2,\dots,m+n+1-a_{k(i)+1}\} = \{e_1,\dots,e_{N_i}, m+n+1-b_m,\dots,m+n+1-b_{k(i)+1}\},$$

~~，这说明 $s \ge N_i$，因此 (1) 成立。固定 $N_i \le s \le r$。我们用 $[d_1,\dots,d_s,g_{s+1},\dots,g_m] \in \Gamma(X;\ \delta)$ 表示与 $[c_1,\dots,c_s|d_1,\dots,d_s] \in \Delta(X;\ \delta)$ 对应的元素。于是有以下等式

$$\begin{aligned}\{1,\dots,m\} &= \{c_1,\dots,c_s, m+n+1-g_m,\dots,m+n+1-g_{s+1}\}\\ &= \{c_1,\dots,c_s,c_{s+1},\dots,c_r, m+n+1-a_m,\dots,m+n+1-a_{r+1}\}\end{aligned}$$

holds，因此可推出，对于任意满足 $m+n+1-a_j < c_{s+1}$ 的整数 j，都有 $a_j = g_j$。由于

$$m+n+1-a_{k(i)+1} < (m+n+1) - (a_{k(i)+1}-1) = c_{N_i+1} \le c_{s+1},$$

我们有 $g_{k(i)} < g_{k(i)+1} = a_{k(i)+1}$。由 (4.7.1) 可得 $[c_1,\dots,c_s|d_1,\dots,d_s] \notin \Delta(X;\ \tau_i)$。 □

有了这一点，我们就可以证明推论 3.6 的 $R(X;\delta)$ 版本。

引理 4.8. 根据约定 *4.1*，假设 B 是一个 *Gorenstein* 正规整环。那么， $R_B(X;\ \delta)$是 *CTR*，当且仅当 $\lambda - \lambda' \le 1$。在这些情况下， $R_B(X;\ \delta)$ 的典范迹为 $\bigcap_{i\in I} I(x;\ \tau_i)$，其中 $I = \{i \mid 1 \le i \le t, \lambda_i \ne \lambda_{i-1}\}$。

~~证明。设 $G = G_B(X;\delta)$，且 ω_G 是 G 的分次典范模。首先，假设 $\lambda - \lambda' \le 1$。根据命题 4.4，若 $\lambda - \lambda' = 0$，则 $R_B(X;\delta)$ 是 Gorenstein；否则， $R_B(X;\ \delta)$ 的典范迹为 $\bigcap_{i\in I} I(x;\tau_i)$。因此， $R_B(X;\ \delta)$ 是 CTR。接下来，假设 $\lambda - \lambda' \ge 2$。命题 4.4 表明， $R_B(X;\ \delta)$ 的典范迹为 $\prod_{h=1}^{\lambda-\lambda'} (\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h} I_B(x;\ \tau_i))$。令 $\delta = [c_1,\dots,c_r|d_1,\dots,d_r]$ 并

$$s := \max\{N_i \text{ appearing in Lemma } 4.7 \mid i \in \mathfrak{U}_h,\ 1 \le h \le \lambda - \lambda'\}.$$

由引理 4.7(2)可得 $[c_1,\dots,c_s|d_1,\dots,d_s]$ 属于 $\bigcap_{1\le h\le\lambda-\lambda',\ i\in\mathfrak{U}_h} I_B(x;\ \tau_i)$，后者是 $\prod_{h=1}^{\lambda-\lambda'} (\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h} I_B(x;\tau_i))$ 的根理想。另一方面，取 $1 \le g \le \lambda - \lambda'$ 和 $j \in \mathfrak{U}_g$ 使得 $s = N_j$，由引理 4.7(1) 可知， $\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_g} I_B(x;\ \tau_i) \subseteq I_B(x;\tau_j)$ 的每个元素都由次数至少为 s的元素生成（作为 ASL）。由于 $\lambda-\lambda' \ge 2$，存在 $1 \le g' \le \lambda-\lambda'$使得 $g' \ne g$，且 $\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_{g'}} I_B(x;\ \tau_i)$ 由正次数元素生成。因此， $\prod_{h=1}^{\lambda-\lambda'} (\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h} I_B(x;\tau_i))$ 由次数至少为

$s+1$的元素生成，这意味着 $[c_1,\dots,c_s|d_1,\dots,d_s]\notin\prod_{h=1}^{\lambda-\lambda'}(\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h}I_B(x;\tau_i))$。特别地，$\prod_{h=1}^{\lambda-\lambda'}(\bigcap_{i\in\mathfrak{U}_h}I_B(x;\tau_i))$ 不是根理想，也说是，$R_B(X;\delta)$ 不是 CTR。□

下面的定理可由与定理 3.8 相同的证明得出，唯一的修改是分别用引理 4.8 和 [2, 引理 6.4] 替代推论 3.6 和 [2, 引理 6.1], 。

定理 4.9. 在约定 *4.1* 下，我们假设 B 是一个约化 *Cohen–Macaulay* 环，其典范模为 ω_B。那么，$R_B(X;\delta)$ 是 *CTR*，当且仅当 B 是 *CTR* 且 $\lambda-\lambda'\le 1$。在这些情况下，令$I=\{i\mid 1\le i\le t,\lambda_i\neq\lambda_{i-1}\}$。那么，$R_B(X;\delta)$ 的典范迹为

$$\Big(\bigcap_{i\in I}I_B(x;\tau_i)\Big)\cap(\mathrm{tr}_B(\omega_B)R_B(X;\delta)).$$

我们通过考察 CTR 和非 CTR 情形的例子来结束本文。

例 4.10. 例 4.5 讨论了典范迹由单个素理想的幂给出的情形，据此我们可以判定该环是否为 CTR。这里，我们考虑一个典范迹由两个素理想表示的例子。我们在约定 4.1 下进行讨论，并为简单起见假设 B 是约化且 Gorenstein。

(1) 令 $m=3$、$n=5$和 $\delta=[1\ 3|1\ 4]$。则 $\delta=[1\ 4\ 7]$、$t=2$、$\widetilde{\tau_1}=[4\ 5\ 7]$、$\widetilde{\tau_2}=[1\ 7\ 8]$、$\tau_1=[1\ 3|4\ 5]$、$\tau_2=[3|1]$、$\lambda-\lambda'=2$、$\mathfrak{U}_1=\{1\}$和 $\mathfrak{U}_2=\{2\}$。由命题 4.4，得到

$$I(x;[1\ 3|4\ 5])\cdot I(x;[3|1]).$$

特别地，$R(X;\delta)$ 不是 CTR。

(2) 令 $m=4$、$n=4$和 $\delta=[1\ 3\ 4|1\ 3\ 4]$。则 $\delta=[1\ 3\ 4\ 7]$、$t=2$、$\widetilde{\tau_1}=[3\ 4\ 5\ 7]$、$\widetilde{\tau_2}=[1\ 4\ 7\ 8]$、$\tau_1=[1\ 3|3\ 4]$、$\tau_2=[3\ 4|1\ 3]$、$\lambda-\lambda'=1$和 $\mathfrak{U}_1=\{1,2\}$。由命题 4.4，得到

$$I(x;[1\ 3|3\ 4])\cap I(x;[3\ 4|1\ 3]).$$

这意味着 $R(X;\delta)$ 是 CTR。

(3) 设 $m=4$、$n=5$ 和 $\delta=[1\ 3\ 4|1\ 3\ 4]$。那么 $\delta=[1\ 3\ 4\ 8]$、$t=2$、$\widetilde{\tau_1}=[3\ 4\ 5\ 8]$、$\widetilde{\tau_2}=[1\ 4\ 8\ 9]$、$\tau_1=[1\ 3\ 4|3\ 4\ 5]$、$\tau_2=[3\ 4|1\ 4]$、$\lambda-\lambda'=2$、$\mathfrak{U}_1=\{1\}$ 和 $\mathfrak{U}_2=\{1,2\}$。由命题 4.4，得到

$$I(x;[1\ 3\ 4|3\ 4\ 5])\cdot(I(x;[1\ 3\ 4|3\ 4\ 5])\cap I(x;[3\ 4|1\ 4])).$$

因此 $R(X;\delta)$ 不是 CTR。此情形仅与 (2) 的区别在于 n 增加了 1。

(4) 定理 3.8 和 4.9 表明，关于张量积的一般结果（例如 [12, 推论 3.11]）在其中一个因子是舒伯特循环或行列式环时成立。换言之，设 R 是一个带有典范模的约化 Cohen–Macaulay B-代数，且 S 是一个环，它在 B 上具有 $G(X;\gamma)$ 或 $R(X;\delta)$ 的形式。那么 $R\otimes_B S$ 是 CTR，当且仅当 R 和 S 是 CTR。

致谢。作者谨向Mitsuhiro Miyazaki致以诚挚谢意，感谢他围绕本研究进行的宝贵讨论并提供建议。特别是，正如正文中所述，作者非常感谢他对如何处理论文中的部分结果给予理解和体谅。作者还感谢Hiroki Matsui、Yuya Otake和Ryo Takahashi提出的宝贵意见。作者部分获得了日本学术振兴会特别研究员资助金（资助编号：23KJ1117）。

References

[1] W. Bruns; J. Herzog, 《Cohen–Macaulay 环》, 修订版, 《剑桥高等数学研究丛书》**39**, *Cambridge University Press Cambridge* 1998 „.

[2] W. Bruns; U. Vetter, 《行列式环》, Monogr. Mat., **45**, *Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro* 1988 ,.

[3] H. Dao; T. Kobayashi; R. Takahashi, 典范模的迹理想、Ext 模的湮灭子以及接近 Gorenstein 的环类, *J. Pure Appl. Algebra* **225** (2021), 第 9 期, 论文编号 106655, 共 18 页。

[4] A. Ficarra; J. Herzog; D. I. Stamate; V. Trivedi *Arch. Math. (Basel)*, 行列 **123** 2024 5, 487 497

式环的典范迹, ( ), 第 – 期。[5] J. Herzog; T. Hibi; D. I. Stamate, 典范模的迹, *Israel J. Math.* **233** (2019), 第 1 期, 133–165。[6] S. Kumashiro; S. Miyashita, 纤维积的典范迹及其应用, 预印本 (2025), arXiv:2506.04899.[7] H. Lindo, 交换环上模的迹理想与自同态环的中心, *J. Algebra* **482** (2017), 102–130。

[8] H. Matsumura, 《交换环理论》, M. Reid 从日文翻译, 第二版, 《剑桥高等数学研究丛书》**8**, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1989。[9] S. Miyashita, 伪戈伦斯坦环何时成为 Gorenstein 环?, *Bull. Lond. Math. Soc.* 第 58 卷, 第 1 期。https://doi.org/10.1112/blms.70186。[10] S. Miyashita; M. Varbaro, 在去心谱上为 Gorenstein 的斯坦利–赖斯纳环的典范迹, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2025), 第 12 期, 论文编号 rnaf176, 共 11 页。[11] M. Miyazaki, 圈图稳定集多面体的埃尔哈特环的非戈伦斯坦轨迹与近戈伦斯坦性质, *Taiwanese J. Math.* **27** (2023), 第 3 期, 441–459。[12] M. Miyazaki, Cohen–Macaulay 环典范模的迹的根性质, *J. Math. Soc. Japan*, https://www.mathsoc.jp/publication/JMSJ/pdf/JMSJ9593.pdf [13] N. Perrin, 极小权舒伯特簇的 Gorenstein 轨迹, *Adv. Math.* **220** (2009), 第 2 期, 505–522。[14] A. Woo; A. Yong, 支配舒伯特簇的奇点, *J. Algebra* **320** (2008), 第 2 期, 495–520。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya 464-8602, Japan
Email address: m21018b@gmail.com