arXiv:2601.18389v1 [math.AG] 26 Jan 2026

一般型曲面的上同调平凡或数值平凡自同构

FABRIZIO CATANESE，DAVIDE FRAPPORTI

ABSTRACT. 我们的主要结果是确定可约假二次曲面的上同调平凡自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$ 和数值平凡自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$，其中可约假二次曲面即与乘积等源的曲面 S，且 $q = p_g = 0$。

由此我们构造了新的纪录保持者：一个满足 S 且具有 $\mathrm{Aut}\ |_{(\mathbb{Q})}S| = 192$ 的曲面，以及一个其上同调具有挠元且具有非平凡 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S) \cong \mathbb{Z}/2$. 的曲面

CONTENTS

引言 1
1. 与高阶乘积等源的曲面 1.1. 群论描述 1.2. 非混合情形 2
1.3. 非强非混合情形 1.4. 确定正规化子 1.5. 确定中心化子 1.6. 上同调平凡自同构的情形 2. 与乘积等源的曲面，其中 $q = p_g = 0$ 3. 具有 $q \geq 1$ 和非平凡 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$ 的曲面 3.1. 不规则度 $q = 2$ 3.2. 不规则度 $q = 1$ 附录 A. MAGMA 脚本 A.1. $p_g = q = 0$ 情形 参考文献 3 4 4 5 5 5 6 11 11 12 12 13 14

INTRODUCTION

如 [CatLiu21] 所述，令 $\mathrm{Aut}_R(S) := \{g \in \mathrm{Aut}(S) | g^* = 1\ on\ H^*(S, R)\}$ 表示在系数环 R 上的上同调作用平凡的 S 的自同构群。

本文继续研究（参见 [CatLiu21], [、24], [CFGLS24]、24]CLS24]）曲面的上同调平凡自同构$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$和数值平凡自同构$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$。前一群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$ 是后一群的子群；对于极小非有理曲面，不存在群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$ 为有限群且其阶为 ≥ 4 的例子。最早探讨子群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$ 细微性质的学者是 Mukai 和 Namikawa [MN84]。

本文讨论的基本问题如下。

问题 1. *(I)* 一般型极小曲面 $max|$自同构群$_{\mathbb{Z}}(S)|$ 是什么？*(II)* 一般型极小曲面 $max|$自同构群$_{\mathbb{Q}}(S)|$ 是什么？

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14J50, 14J80, 14H30, 14F99, 32L05, 32M99, 32Q15, 32Q55.

Key words and phrases. 上同调平凡自同构、数值平凡自同构、一般型代数曲面、与乘积等源的曲面、假二次曲面。第二作者是 I.N.d.A.M. 的 G.N.S.A.G.A. 成员。

由于 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$，这些最大值存在这一点可由 Xin Jing Cai [Cai04] 的一个结果推出（请注意，Cai 将后文才引入的较弱概念“数值平凡”称为“上同调平凡”）。

定理 2（Cai）。对于 S 一般型的曲面，存在一个绝对常数 C 使得

$$|\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)| \leq C.$$

问题（II）有一个众所周知的例子：对于经典 Beauville 曲面 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Q}}(S)| = 75$和 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Z}}(S)| = 1$，正如我们稍后将要证明的那样[1]。

回顾一下，上述对象是一个与积同源的曲面，$S = (C \times C)/G$, $G \cong (\mathbb{Z}/5)^2$, 其中 C 是费马五次曲线，且作用是自由的。自同构群$_{\mathbb{Q}}(S)$由（$G \rtimes \mathbb{Z}/3$）$\times$ Id 诱导，我们证明在此情形下 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Z}}(S)| = 1$.

本文构造了一个与积同源的曲面的例子，其具有 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Q}}(S)| = 192$，因此我们提出如下问题。

问题 3。对于一个 S 一般型的极小曲面，最大值 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Q}}(S)| = 192$ 是否成立？

我们在此实现的第二个目标，是给出一个具有非平凡挠元的 一般型曲面 S的例子，其 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Z}}(S)| = 2$，以及 $H^*(S, \mathbb{Z})$具有非平凡挠元（此前 Cai [Cai07]曾给出一个没有挠元的例子）。

更确切地说，这是我们的主要结果，概括了定理 15 和 16。

定理 4. 设 $S = (C_1 \times C_2)/G$ 是一个非混合型与乘积等伦的曲面，且 $q(S) = p_g(S) = 0$。

那么 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Q}}(S)| \leq 192$，且当 $G = (\mathbb{Z}/2)^3$时等号成立。

若 G 是阿贝尔的，则 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Q}}(S)|$ 在 $G = (\mathbb{Z}/2)^4$, 72 时达到160；对于 $G = (\mathbb{Z}/3)^2$, 以及经典 ***Beauville*** 曲面，$|\text{自同构群}_{\mathbb{Q}}(S)| = 75$；而当 G 不是阿贝尔的时，$|\text{自同构群}_{\mathbb{Q}}(S)| \leq 32$。

此外，自同构群$_{\mathbb{Z}}(S)$ 是平凡的，但 $G = D_4 \times \mathbb{Z}/2$的情形除外；在该情形下，自同构群$_{\mathbb{Z}}(S) \cong \mathbb{Z}/2$，且交叉形式是偶的。

读者可能会问，为什么要考虑与乘积等源的曲面。

原因有几个，它们都指向这样一种现象：当 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Q}}(S)|$ 达到最大值时，S 与乘积等伦。

事实上，我们在第3节回顾了关于不规则曲面的两个主要问题的现状，即 $q > 0$，也就是说，$H_1(S, \mathbb{Z})$是无限的。

在 [CLZ13] 和 [Liu18] 中，已证明满足 $q(S) \geq 2$ 且具有非平凡自同构群$_{\mathbb{Q}}(S)$的不规则曲面必然是非混合型的与乘积等源的曲面，其中 $q(S) = 2$；进而自同构群$_{\mathbb{Q}}(S) = \mathbb{Z}/2$。

后来，[CL18] 证明了满足 $q(S) = 1$ 的不规则曲面具有 $|\text{自同构群}_{\mathbb{Q}}(S)| \leq 4$，并且如果等号成立，则$S$ 必然是非混合型的与乘积等源的曲面。

最后，在 [Cai04] Cai 证明了：若 $|\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)| \leq 4$ if $\chi(\mathcal{O}_S) > 188$，则 $|\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)| \leq 4$。最近，在 [CL24] 中，对正则曲面的情形$|\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)| = 4$ 进行了研究。特别地，他们证明，若 K_S 是丰的且等号成立，则 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S) = (\mathbb{Z}/2)^2$，并且 S 与非混合型曲线乘积等伦。此外，他们还给出了一系列 K^2 任意大的例子。

这些都是促使我们在本文中研究与乘积等源的曲面的群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$ 的充分理由。

1. Surfaces isogenous to a higher product

我们回顾一些基本定义和事实，这些内容主要由 [Cat00], 引入；更多细节请参见该文。

定义5。若存在有限群 G 和曲线 C_1，C_2，其亏格分别为 g_1，$g_2 \geq 2$，使得 G 在 $C_1 \times C_2$ 上自由作用，且 $S = (C_1 \times C_2)/G$，则称光滑曲面**同源于一个（高阶）乘积**。

[1]正如 Gregorz Gromadzki 在预印本 [Cat-Grom16] 中所示。

“高阶”一词强调 C_1，C_2 的亏格分别为 ≥ 2，这尤其意味着 S 是一般型（且其典范除子丰）。不过，为方便起见，从现在起我们将省略“高阶”一词。

与乘积等源的曲面有两种类型：若存在 G 中的元素交换因子，则为混合型；若 G作用于每条曲线上，并对角地作用于乘积上，则为非混合型。

注6。*(I)* 若 S 与乘积等源，则它是非混合型，除非可能出现 $C_1 \cong C_2 \cong C$。*(II)* 在混合情形下，存在一个正合列 $1 \to G^0 \to G \to \mathbb{Z}/2$，使得

$$S^0 := (C \times C)/G^0$$

是非混合型，并且 $G \setminus G^0$ 中存在一个元素，它是形如 $\tau'(x, y) = (y, \tau(x))$ 的自同构，其中 $\tau \in G^0$。

(III) 在所有情况下，我们都可以取一个极小实现 $S = (C_1 \times C_2)/G$，这意味着没有元素 nt 的 G 作用于每条曲线。*(IV)* 我们有一个与极小实现相关联的基本群正合列：

$$1 \to \pi_{g_1} \times \pi_{g_2} \to \pi_1(S) \to G \to 1,$$

该正合列在 S的每个自同构作用下均保持不变。

根据提升条件（一个连续映射可以提升为一个非分歧覆盖空间，当且仅当它保持相应的子群不变），S 的每个自同构都能提升到极小实现$C_1 \times C_2$。

注 6-(IV) 的结论是，自同构群(S)提升到 $C_1 \times C_2$，并且我们看到

$$\mathrm{Aut}(S) = N(G)/G, \qquad N(G) < \mathrm{Aut}(C_1 \times C_2) \text{ being the normalizer of } G.$$

从现在起，我们将讨论与非混合型乘积等源的曲面。

定义 7. (i) 为简便起见，记 $A_1 :=$ 自同构群(C_1) $A_1 :=$ 自同构群(C_2)。

(ii) 还有，我们称当 C_1 不同构于 C_2时处于强非混合情形.

那么，在 在强非混合情形下，Aut($C_1 \times C_2$) $= A_1 \times A_2$；而如果 $\sigma(x, y) = (y, x)$，则

$$\mathrm{Aut}(C \times C) = A^2 \rtimes \langle \sigma \rangle \cong A^2 \rtimes \mathbb{Z}/2.$$

1.1. 群论描述。与乘积等源的曲面的描述是通过黎曼存在定理实现的，该定理允许在射影曲线之间构造伽罗瓦覆盖（关于这一部分的更多细节，请参阅 [BCP11]）。

定义 8。设 H为一个有限群，设 $g \geq 0$和 m_1，……，$m_r > 1$为整数。对于 H，类型为（g；m_1，……，m_r）的*Hurwitz*生成向量 是 $2g + r$个 H中的元素组成的有序组：

$$V := (a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g; c_1, \ldots, c_r)$$

满足

- V 中的元素生成 H，
- $\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \cdot c_1 \cdot c_2 \cdots c_r = 1$ 并且
- ord(c_i) $= m_i$ 对于 $i = 1$，……，r。

根据黎曼存在定理，任意一条曲线 C 连同其上的有限群作用 H，若满足 C/H 是一条亏格为 g 的曲线 C'，则基本上由生成向量 V 确定，其对应于 H 的签名为 (g; m_1，……，m_r)；带 puncture 的基曲线的映射类群在其上作用。特别是，阶 m_1，……，m_r 仅在置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$意义下确定。

我们将元素 $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ 称为全局单值化（它们对应于 $\pi_1(C')$ 的一组基的选择），而 $c_1, \ldots, c_r$ 则称为局部单值化，并对应于几何环路

围绕 $C \to C/H$ 的分支点。此外，它们确定了 H 中在 C 上具有不动点的元素集合：

$$\Sigma(V) := \bigcup_{h\in G}\bigcup_{i=1}^{r}\bigcup_{j=1}^{\mathrm{ord}(c_i)} \{h\cdot c_i^j\cdot h^{-1}\},$$

称为 H 在 C上的作用的稳定子集合。

非混合型且 $S=(C_1\times C_2)/G$ 与乘积等伦的曲面，可通过 G的一对生成向量（V_1, V_2）来描述；这对生成向量是不相交的，也就是说 $\Sigma(V_1)\cap\Sigma(V_2)=\{1\}$。

1.2. **非混合情形**。为避免混淆，由于 G 在 $C_1\times C_2$上对角地作用，对于 $j=1,2$，我们将 $G<A_j$和作用于 $C_1\times C_2$ 上的 G 视为对角子群 $\Delta_G<A_1\times A_2$。

接着考察 $\Delta_G<G\times G<A_1\times A_2$在 $A_1\times A_2$中的正规化子 $N^0(G):=N(G)\cap(A_1\times A_2)$。令 $\mathrm{Ad}(\gamma)g:=\gamma g\gamma^{-1}$，并设 $N_{A_j}(G)$为 G 在 A_j中的正规化子，则有

$$N^0(G)=\{(\gamma_1,\gamma_2)\in N_{A_1}(G)\times N_{A_2}(G)\mid \mathrm{Ad}(\gamma_1)=\mathrm{Ad}(\gamma_2)\}<N_{A_1}(G)\times N_{A_2}(G). \tag{1.1}$$

显然 $\Delta_G<N^0(G)$，并且我们有一个群的正合列

$$1\to\Delta_G\to N^0(G)\cap(G\times G)\to Z(G)\to 1,$$

其中 $Z(G)$ 是 G 的中心，而最后一个映射 $G\times G\to G$，$(g_1,\ g_2)\mapsto g_1^{-1}g_2$ 是集合映射（如果 G 不是阿贝尔群），但当 $g_1^{-1}g_2\in Z(G)$ 时是一个同态。

换句话说，令 $N_j:=N_{A_j}(G)$，则 $N^0(G)$ 是正合列下对角线 $\Delta_{\mathrm{Aut}(G)}$ 的原像

$$1\to\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2\to N_1\times N_2\to H_1\times H_2<\mathrm{Aut}(G)^2,$$

其中 $\mathcal{C}_j$ 是 A_j 中 G 的中心化子，$H_j:=N_j/\mathcal{C}_j$。

总而言之，若令 $H:=H_1\cap H_2$，则有正合列

$$1\to\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2\to N^0(G)\to H\to 1.$$

除以 Δ_G 并定义 $\mathrm{Aut}^*(S):=N^0(G)/\Delta_G$，我们得到

$$1\to(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)/\Delta_{Z(G)}\to\mathrm{Aut}^*(S)\to H/\Delta_{\mathrm{Inn}(G)}\to 1, \tag{1.2}$$

因为 $(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)\cap\Delta_G=\Delta_{Z(G)}\cong Z(G)$ 且 $G/Z(G)=\mathrm{Inn}(G)$。

注意，在强非混合情形下，$\mathrm{Aut}^*(S)=\mathrm{Aut}(S)$。

1.3. **非强非混合情形**。在 $C_1\cong C_2$ 的非混合情形下，我们有 $N^0(G)<N(G)$ 的指数至多为 2，且当且仅当存在一个自同构时等于 2

$$\gamma(x,y)=(\gamma_1(y),\gamma_2(x))$$

将子群 Δ_G 规范化，该子群通过 $g(x,y)=(g(x)\ g(y))$ 作用于 $C_1\times C_2$（但在给定的同构下，我们不将 C_1 与 C_2 视为相同，因此得不到 $G\times G$ 的对角线 Δ_G）。

这意味着 $\gamma_1:C_2\to C_1,\gamma_2:C_1\to C_2$, 满足：对于每个 $g\in G$，都存在 g'，使得$\gamma_2^{-1}g\gamma_2(x)=g'(x)$, $\gamma_1^{-1}g\gamma_1(y)=g'(y)$。

为使事情更加具体，现根据所选同构，将 C_1 和 C_2 视为同一条曲线 C。

于是我们得到一个自同构 $\psi:A:=$ 自同构群$(C)\to A$，使得

$$\Delta_G=\{(g,\psi(g))|g\in G\}.$$

现在，当且仅当 $\gamma(x,\ y)=(\gamma_1(y)\ \gamma_2(x))$ 规范化 Δ_G时，

$$\gamma_1^{-1}g\gamma_1=\psi(\gamma_2^{-1}\psi(g)\gamma_2).$$

我们不再进一步进行这些计算，因为在非混合情形下，若考虑数值平凡自同构，它们无法交换 S 的两条纤维化，因此属于 $\mathrm{Aut}^*(S)$。

1.4. 确定正规化子。回忆一下， $N_j < A_j$:=Aut(C_j) 是 G 的正规化子，因此 $G < N_j$ 和 $N'_j := N_j/G$ 下降到 $C'_j = C_j/G$ 的自同构子群，该子群中的自同构可提升到 C_j。

令 $\mathcal{B}$ 为商映射 $C_j \to C'_j$的分歧轨迹，因此该覆盖由满同态 $\pi_1(C'_j \setminus \mathcal{B}, y_0) \to G$给出。

Then

$$N'_j := \{\phi \in \mathrm{Aut}(C'_j) \mid \phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B},\ \exists \Phi \in \mathrm{Aut}(G), \Phi \circ \mu_0 = \mu_1 \circ \phi_*\}, \tag{1.3}$$

Here

$$\phi_* : \pi_1(C'_j \setminus \mathcal{B}, y_0) \to \pi_1(C'_j \setminus \mathcal{B}, \phi(y_0)),$$

and μ_0， μ_1 分别是以基点 y_0和 y_1 为基点的单值变换：$= \phi(y_0)$.

由于改变路径会使两个基本群之间的同构仅在相差一个内自同构的意义下改变， Φ 仅在模去 Inn(G)的意义下定义良好。

该覆盖的局部单值化集合称为尼尔森指派，即将共轭类 $Conj(\mu(b))$（在 G中）指派给点 $b \in \mathcal{B}$。而 ϕ 诱导了一个保持尼尔森指派的 $\mathcal{B}$ 置换。

μ_0 确定了轨形基本群列

$$1 \to \pi_1(C_j, x_0) \to \pi_1^{orb}(C'_j, y_0) \to G \to 1,$$

进而通过 ϕ_*， Φ，确定 N'_j 在 $H_1(C_j, \mathbb{Z})$ 上的作用。

1.5. 确定中心化子。 G 在 A_j 中的中心化子元素会诱导 C_j 的一个自同构，该自同构与 G 的作用可交换，因而下降到 C'_j，并保持单值化不变。

特别地，若局部单值化两两不同，则这些元素在分支点集上诱导恒等变换。因此，若基曲线 C'_j 的亏格为 ≤ 1，则这些元素在 C'_j 上诱导恒等变换，故 $\mathcal{C}_j = Z(G)$。

1.6. 上同调平凡自同构的情形。为简化起见，假设我们关注的是 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$。设有一个自同构 $\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$。于是它诱导 C'_j 的一个自同构 ϕ，且该自同构属于 N'_j。随后， ϕ 在 C'_j 的上同调上平凡作用；我们将证明 ϕ 必为恒等变换，但有三种可能的例外：此时 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$ 在 N'_j 中的像 N''_j 的阶等于 2。

由 Lefschetz 定理可知，若 C'_j 的亏格至少为 2，则结论显然。

若 C'_j 的亏格为 1，则 ϕ 可能是一个平移，但此时它应当置换 $\mathcal{B}$中的分支点。根据 [CatLiu21 的原理 3，第 185], 页，分支点只能有两个，重数为 $m = 2$，且该平移应为 2 阶。

例 9 (例外 I)。群 G 由元素 a、b、c：$= c_1$生成，它们是单值化像 $a := \mu(\alpha)$ $b := \mu(\beta)$ $c_1 := \mu(\gamma_1)$

$$\mu : \langle \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 | \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = [\alpha, \beta]\gamma_1\gamma_2 = 1 \rangle \to G.$$

并且存在一个自同构 Φ： $G \to G$，使得

$$\Phi(a) = a, \Phi(b) = b, \Phi(c_1) = c_2, \Phi(c_2) = c_2^{-1}c_1c_2.$$

若 C'_j 的亏格为 0，则根据前述原理， ϕ 至多能交换 $\mathcal{B}$中的两个点，这两个点的重数为 2；其余点的重数为奇数且保持不动。因此，分支点至多有 4 个。

例 10 (例外 II). 群 G 由元素 c_1、c_2、c_3生成，它们是单值化的像 $c_1 := \mu(\gamma_1)$ $c_2 := \mu(\gamma_2)$ $c_3 := \mu(\gamma_3)$

$$\mu : \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 | \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_3^{2n+1} = 1 \rangle \to G.$$

并且存在一个自同构 Φ： $G \to G$ 使得

$$\Phi(c_3) = c_3, \Phi(c_1) = c_2, \Phi(c_2) = c_2^{-1}c_1c_2 = c_3c_2.$$

注意， G 的阿贝尔化是 $\mathbb{Z}/2$，其循环核的阶恰好为 $2n+1$。

这种情形确实存在，因为群 $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ 由阶为二的元素 c_1'、c_2' 生成，且由于$c_3 = c_2c_1$，只需取$(\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2)/\mathcal{K}$，其中 $\mathcal{K}$ 由$(c_2'c_1')^{2n+1}$正规生成。

例 11 (例外 III)。群 G 由元素 c_1、c_3、c_4生成，它们是单值化像 $c_1 := \mu(\gamma_1)$ $c_3 := \mu(\gamma_3)$ $c_4 := \mu(\gamma_4)$

$$\mu : \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 | \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_3^{2n+1} = \gamma_4^{2h+1} = 1 \rangle \to G.$$

并且存在一个自同构 $\Phi :\ G \to G$，使得

$$\Phi(c_3) = c_3, \Phi(c_4) = c_4, , \Phi(c_1) = c_2, \Phi(c_2) = c_2^{-1}c_1c_2.$$

注意，在 G 的阿贝尔化 G^{ab} 中（乘以$(2n+1)(2h+1)$） $[c_1] = [c_2]$，因此$[c_3] = -[c_4]$，于是 G^{ab} 是 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/(2r+1)$ 的一个商群，其中 $2r+1 =$最大公约数$(2n+1,\ 2h+1)$，且G^{ab} 可以等于 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/(2r+1)$。

备注12。我们有 $q(S) = g_1' + g_2'$，其中 g_j' 是 $C_j' = C_j/G$的亏格。

在 $q(S) = 0$的情形下，我们可以应用 [CFGLS24，引理2。1] 并推知所有分支点都保持不动，因此 N_1''、N_2''是平凡的。

更一般地，例如，若 $g_2' = 0$，则 N_1''是平凡的，因为纤维化$S \to C_1'$ 的相对不规则度为零（类似地，若 $g_1' = 0$，则 N_2''是平凡的）。

2. Surfaces isogenous to a product with $q = p_g = 0$

亏格为 $q = p_g = 0$ 的与乘积等源的曲面带有两个到曲线上的纤维化（混合情形见 [FL22] ）。因此，在非混合情形下，Aut$_{\mathbb{Q}}(S)$ 等于不交换这两个纤维化的群 Aut$^*(S)$，即自然等平凡纤维化 $S \to C_j' := C_j/G$, $j = 1,2$。事实上， $H^j(S, \mathbb{Q}) = 0$ 对于 $j = 1,3$，而 $H^2(S, \mathbb{Q})$ 的秩为 2，由两个纤维化各自的纤维类生成。

我们希望研究$q = p_g = 0$的非混合型与乘积等源的曲面的 Aut$_{\mathbb{Q}}(S)$ 和 Aut$_{\mathbb{Z}}(S)$。这些曲面已在 [BCG08] 中分类:

定理 13。设 $S = (C_1 \times C_2)/G$ 是一个非混合型与乘积等伦的曲面，且$p_g(S) = 0$，则 G 是表*1*中的群之一，其类型列于表中。对于列表中的每种情形，我们都有模空间的一个不可约分支，其维数记为D。

G	$Id(G)$	T_1	T_2	D	$H_1(S,\ \mathbb{Z})$
$\mathfrak{A}_5$	$\langle 60, 5\rangle$	$[2,5,5]$	$[3,3,3,3]$	*1*	$(\mathbb{Z}/3)^2 \times (\mathbb{Z}/15)$
$\mathfrak{A}_5$	$\langle 60, 5\rangle$	$[5,5,5]$	$[2,2,2,3]$	*1*	$(\mathbb{Z}/10)^2$
$\mathfrak{A}_5$	$\langle 60,\ 5\rangle$	$[3,3,5]$	$[2,2,2,2,2]$	*2*	$(\mathbb{Z}/2)^3 \times \mathbb{Z}/6$
$\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2$	$\langle 48,\ 48\rangle$	$[2,4,6]$	$[2,2,2,2,2,2]$	*3*	$(\mathbb{Z}/2)^4 \times \mathbb{Z}/4$
G(32)	$\langle 32,\ 27\rangle$	$[2,2,4,4]$	$[2,2,2,4]$	*2*	$(\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/8$
$(\mathbb{Z}/5)^2$	$\langle 25,\ 2\rangle$	$[5,5,5]$	$[5,5,5]$	*0*	$(\mathbb{Z}/5)^3$
$\mathfrak{S}_4$	$\langle 24,\ 12\rangle$	$[3,4,4]$	$[2,2,2,2,2,2]$	*3*	$(\mathbb{Z}/2)^4 \times \mathbb{Z}/8$
G(16)	$\langle 16, 3\rangle$	$[2,2,4,4]$	$[2,2,4,4]$	*2*	$(\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/8$
$D_4 \times \mathbb{Z}/2$	$\langle 16, 11\rangle$	$[2,2,2,4]$	$[2,2,2,2,2,2]$	*4*	$(\mathbb{Z}/2)^3 \times (\mathbb{Z}/4)^2$
$(\mathbb{Z}/2)^4$	$\langle 16, 14\rangle$	$[2,2,2,2,2]$	$[2,2,2,2,2]$	*4*	$(\mathbb{Z}/4)^4$
$(\mathbb{Z}/3)^2$	$\langle 9, 2\rangle$	$[3,3,3,3]$	$[3,3,3,3]$	*2*	$(\mathbb{Z}/3)^5$
$(\mathbb{Z}/2)^3$	$\langle 8, 5\rangle$	$[2,2,2,2,2]$	$[2,2,2,2,2,2]$	*5*	$(\mathbb{Z}/2)^4 \times (\mathbb{Z}/4)^2$

Table 1.

备注14. 我们从 [BC04，第 3] 和 [BCG08，第 6]中读取与表*1*中的曲面相关联的*Hurwitz*生成向量。

i) $G = \mathfrak{A}_5$*:*
- $V_1 = [(24)(35), (13452), (12345)]$, $V_2 = [(123), (345), (243), (152)]$*;*
- $V_1 = [(12534), (12453), (12345)]$, $V_2 = [(12)(34), (24)(35), (14)(35), (243)]$*;*
- $V_1 = [(123), (345), (15432)]$, $V_2 = [(12)(34), (13)(24), (14)(23), (14)(25), (14)(25)]$.

ii) $G = \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2$:
$V_1 = [((12), 0), ((1234), 1), ((243), 1)]$,
$V_2 = [((12)(34), 1), ((12), 1), ((34), 1), ((14)(23), 1), ((23), 1), ((14), 1)]$.

iii) $G = G(32) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_j^2, [x_1, x_2]x_4, [x_1, x_3]x_5, [x_j, x_k]$ *for* $(j, k) \neq (1, 2), (1, 3)\rangle$*:*
$V_1 = [x_2x_3x_4, x_2, x_1x_2x_3x_5, x_1x_2]$,
$V_2 = [x_1x_4x_5, x_2x_3x_4x_5, x_2x_4x_5, x_1x_3x_4]$.

iv) $G = (\mathbb{Z}/5)^2$*:* $V_1 = [e_1, e_2, -(e_1 + e_2)]$, $V_2 = [e_1 - e_2, e_1 + 2e_2, -2e_1 - e_2]$.

v) $G = \mathfrak{S}_4$*:* $V_1 = [(123), (1234), (1243)]$, $V_2 = [(12), (12), (23), (23), (34), (34)]$。

vi) $G = G(16) = (\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2) \rtimes \mathbb{Z}/2 = \langle x, y, z \mid x^4, y^2, z^2, [x, y], [y, z], [z, x]y\rangle$: $V_1 = [z, z, x, x^{-1}]$, $V_2 = [zx^2y, zx^2y, xyz, (xyz)^{-1}]$。

vii) $G = D_4 \times \mathbb{Z}/2 = \langle r, s \mid r^4, s^2, (sr)^2\rangle \times \mathbb{Z}/2$*:*
$V_1 = [(1, 1), (s, 1), (rs, 0), (r, 0)]$, $V_2 = [(s, 0), (sr, 1), (sr^2, 0), (sr, 1), (r^2, 1), (r^2, 1)]$.

viii) $G = (\mathbb{Z}/2)^4$: $V_1 = [e_1, e_2, e_3, e_4, e := e_1 + e_2 + e_3 + e_4]$, $V_2 = [e + e_1, e + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4]$。

ix) $G = (\mathbb{Z}/3)^2$: $V_1 = [e_1, e_2, -e_1, -e_2]$, $V_2 = [e_1 + e_2, e_1 - e_2, -e_1 - e_2, -e_1 + e_2]$。

x) $G = (\mathbb{Z}/2)^3$: $V_1 = [e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3, e := e_1 + e_2 + e_3, e]$, $V_2 = [e_1, e_2, e_3, e_1, e_2, e_3]$.

定理1 **5.** 设 S 是非混合型的与乘积等伦曲面，且 $q(S) = p_g(S) = 0$.
Then $|\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)| \leq 192$，且当 $G =$时取等号 $(\mathbb{Z}/2)^3$.
若 G 是阿贝尔的，则 $|$自同构群$_{\mathbb{Q}}(S)|$ 达到 160，对于 $G = (\mathbb{Z}/2)^4$, 72，而对于 $G = (\mathbb{Z}/3)^2$,，经典 *Beauville* 曲面的 |自同构群$_{\mathbb{Q}}(S)| = 75$则达到该值（表中的第六种情形）。
此外，若 G 不是阿贝尔的，则 |自同构群$_{\mathbb{Q}}(S)| \leq 32$。

证明。我们已经注意到，Aut$_{\mathbb{Q}}(S)$ 是 Aut(S) 的子群 Aut$^*(S)$，其中后者不交换两个纤维化 $S \to C_j' = C_j/G$。
我们还证明了存在一个正合列

$$1 \to (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)/Z(G) \to \mathrm{Aut}^*(S) \to H/\mathrm{Inn}(G) \to 1.$$

如果对于每个 $C_j \to C_j'$，都有三个点的局部单值化与其他所有点的局部单值化不同，那么我们先前的论证表明 $\mathcal{C}_j = Z(G)$，因此

$$(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)/Z(G) \cong Z(G).$$

经典 Beauville 曲面的情形。这里 $G = (\mathbb{Z}/5)^2$,，局部单值化[2]分别为以下两个三元组 $[e_1, e_2, -e]$: $= [(1, 0), (0, 1), (-1, -1)]$,

$$\Psi[e_1, e_2, -e] := [(1, -1), (1, 2), (-2, -1)] =: [e_1', e_2', -e'].$$

在两种情况下，我们都有三个元素生成 G，且它们的和为零。
因此 $N_j' \cong \mathfrak{S}_3$，而映射 $N_j' \to H_j <$Aut(G) 可由考虑与这三个向量的一个置换相对应的诱导线性映射Φ 得到。

H_1 中的五个非平凡映射分别将 $(a, b) \in G$ 映射为

$$(b, a), (-a, -a + b), (a - b, -b), (-b, a - b), (b - a, -a).$$

[2]这些公式对所有与 6 n 互质的 $G = (\mathbb{Z}/n)^2$, 均成立。

最后两个映射对应于 $\mathfrak{S}_3$ 的 3-轮换，并循环置换向量 e'_1、e'_2、$-e'$。另一方面，考察 $e'_1 = (1、-1)$ 在前三个映射下的像，我们得到向量 $(-1、1)$、$(-1、-2)$、$(2、1)$，其中没有一个属于集合 $\{e'_1, e'_2, -e'\}$。

因此，H 的阶为 3，且 $|自同构群^*(S)| = 75$。

情形 w 于 $G = (\mathbb{Z}/2)^4$。局部单值化为 $[e_1, e_2, e_3, e_4, e := e_1 + e_2 + e_3 + e_4]$ 且

$$\Psi[e_1, e_2, e_3, e_4, e] =: [e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'] := [e + e_1, e + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4].$$

我们看到，置换 σ_1 将 e_1 与 e_2 互换，并将 e_3 与 e_4 互换，由此得到将 e'_1 与 e'_2 互换并将 e'_3 与 e'_4互换的置换。

事实上，第一个五元组由 4 个权为 1 的向量和 1 个权为 4 的向量组成，第二个五元组由 3 个权为 2 的向量和 2 个权为 3 的向量组成。因此，$\mathfrak{S}_4$中任何一个非平凡的置换，只要它置换元素 e_1，e_2，e_3，e_4，就会保持权不变。因此，如果它保持集合$\mathcal{E}' := \{e + e_1, e + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4\}$ 不变，就必定交换 e'_1与 e'_2，进而交换 e_1与 e_2，然后交换 e_3与 e_4。

反之，若在 $\mathfrak{S}_5 \setminus \mathfrak{S}_4$ 中有一个置换，则 e 会与某个 e_j 互换。

若我们交换 e 和 e_1，则必须交换 e_2 和 e_3，这样集合 $\mathcal{E}'$保持不变。

若我们交换 e 和 e_3，则必须将 $\{e_1, e_2\}$ 与 $\{e_1, e_4\}$ 置换；而要使 $\mathcal{E}'$ 保持不变，唯一的可能是将 e_2 与 e_4置换，并固定 e_1。

现在，利用上述两个二阶置换及它们与 σ_1 的乘积，我们看到 e 的轨道等于整个集合 $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3, e_4, e\}$。

因此，集合 $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3, e_4, e\}$ 上诱导出一个置换集合 $\mathcal{E}'$ 的线性映射的置换群的阶为 10，故 $H \cong D_5$，且 $Aut^*(S)$ 的阶等于 $16 \cdot 10 = 160$。

当 $G = (\mathbb{Z}/3)^2$ 时。

这里，四元 组单值变换为 $[e_1, e_2, -e_1, -e_2]$, $[e_1 + e_2, e_1 - e_2, -e_1 - e_2, -e_1 + e_2]$。

现在，第一组四元组中能诱导出 G 自同构的可容许置换，会保持划分 $\{e_1, -e_1\} \cup \{e_2, -e_2\}$ 不变。

这些置换显然会置换 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$（在 $G \setminus \{0\}$ 内）中的补集 $\mathcal{E}^c$，因此这里 $Aut^*(S)$ 的阶等于 $9 \cdot 8 = 72$。

我们接下来考察的情形是纪录获胜情形。

情形为 $G = (\mathbb{Z}/2)^3$。

这里，单值变换的 6 元组为 $[e_1, e_2, e_3, e_1, e_2, e_3]$，而单值变换的 5 元组为 $[e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3, e := e_1 + e_2 + e_3, e]$。

不失一般性，我们假设前 3 个分支点为 ∞，0，1。

我们声称 对于恰当选取的分支点，群 N'_1 满射到自同构群 $\mathfrak{S}_3$

自同构 phis对 G 进行置换，使三个向量 e_1，e_2，e_3 互相置换。

为此，我们需要证明，对于 $\{1, 2, 3\}$ 的每个置换，都存在一个射影变换，相应地置换数对 $\{\infty, P_4\}$、$\{0, P_5\}$、$\{1, P_6\}$。

一种证明方法是注意到 $\mathcal{B}_1 := \{\infty, 0, 1\}$ 是自然子群的一个轨道，该子群与 $\mathfrak{S}_3$ 同构，并保持 $\mathcal{B}_1$ 不变。因此，$\mathcal{B}_2 := \{P_4, P_5, P_6\}$ 必定是另一个轨道；特别地，给定交换 ∞ 和 0 的对换 $z \mapsto 1/z$，我们可以取 P_6 为另一个不动点 -1。依此推理，我们发现 P_4，P_5，P_6 必定是 $1/2$，2，-1。

这个满射的核由射影变换 τ 构成，它们分别固定集合 $\{\infty, P_4\}$、$\{0, P_5\}$、$\{1, P_6\}$。

显然，由于有四个不动点的射影变换就是恒等变换，因此核是 $(\mathbb{Z}/2)^3$ 的一个子群，使得 τ 非恒等变换至多有一个坐标不同于 1。因此，该子群要么是 $(\mathbb{Z}/2)(1，1，1)$，要么包含于 $(1，1，1)^\perp$。

在这两种情形下，如果存在这样的非平凡 τ，那么就存在一个变换交换一对中的两个元素，不失一般性地设为 1，-1。具有此性质的射影变换只有

形如$z \mapsto \frac{az+b}{-bz-a}$的变换，其阶为 2。若 $a=0$，则可得 0，∞ 互换，这与 τ 属于核矛盾。因此我们可以假设 $a=1$，于是 $\tau(0)=0 \Leftrightarrow b=0$，从而 $\tau(2)=-2$，故排除这种情形；因此必有 τ 将 0 与 2 对换，即 $a=1$，$b=-2$；现在可见，$\tau(z)=\frac{z-2}{2z-1}$ 将 0 与 2 对换、将 ∞ 与 $1/2$对换，并将 1 与 -1对换。

由此我们得到一个阶为 $6\cdot 2=12$ 的群 N_1'。

对于分支点 $P_1,\dots,P_6$ 的其他任意选择，我们都有一个群同态 $N_1' \to \mathfrak{S}_3$，其核含有 4 个或 2 个元素。

T除非 N_1' 满射到 $\mathfrak{S}_3$ 且核的阶为 4，否则 12 是最大阶。

在这种情况下，N_1' 将是 $\mathbb{P}GL(2,\mathbb{C})$ 的一个 24 阶非阿贝尔子群，因此它将同构于 $\mathfrak{S}_4$。确实存在一个从 $\mathfrak{S}_4$ 到 $\mathfrak{S}_3$ 的满射，其核是由双换位组成的克莱因群 $\mathcal{K}$。

根据克莱因，$\mathfrak{S}_4$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上只有一种作用，对应于一个伽罗瓦覆盖：$\mathbb{P}^1$ 在三个点处有分支，其局部单值化的阶分别为 2,3, 4。

于是，除了特殊轨道外，所有轨道都含有 24 个元素；特殊轨道分别含有 12、8、6 个元素。因此，$\mathcal{B}$ 是 N_1'-不变的，是若干轨道的并，并且应当是含有 6 个元素的轨道，其中每个元素的稳定子都是一个 4 阶循环置换。

将该轨道划分为三对的方式，对应于选择三个 8 阶西洛子群；这些西洛子群是 D_4，分别是 $\mathfrak{S}_3$ 中三个换位的原像。于是，每一对都对应于集合 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 中的一个元素，通过这种方式，单值化同态到 G 被确定下来。

关于第二个单值化，我们看到存在一个从 N_2' 到 $\mathfrak{S}_3$ 的满射，它置换三个不同的单值化，并保持 e 不变。而且其核必定是平凡的。

在这两种情形下，前面的判据都不适用，因为存在重复的单值化；但我们看到，N_2' 由 6 个元素组成，并且对于其中每一个元素，在 N_1' 中都有一个置换与之对应，该置换含有 12 或 24 个元素，并对应于在 G 上给定的作用；因此，$\mathrm{Aut}^*(S)$ 的阶等于 $8\cdot 12$ 或 $8\cdot 24$，即 96 或 192 个元素。

非阿贝尔情形。

对于群 G 不是阿贝尔群的情形，我们将给出更粗略的估计。

回顾 $H=H_1\cap H_2 \supset \mathrm{Inn}(G)$，我们有 $\frac{H}{\mathrm{Inn}(G)} \subseteq \frac{H_j}{\mathrm{Inn}(G)}$ 以及正合列

$$1 \to \mathcal{C}_j/Z(G) \to N_j' \to H_j/\mathrm{Inn}(G) \to 1,$$

结合（1.2）可得粗略估计：

$$|\mathrm{Aut}^*(S)| \le \min\{|N_1'|\cdot|\mathcal{C}_2|, |N_2'|\cdot|\mathcal{C}_1|\}.$$

群 N_j' 是 $\mathbb{P}GL(2,\mathbb{C})$ 的有限子群，因此可能是：

（1）循环群 $\mathbb{Z}/n$，具有两个基数为 1 的轨道，其余轨道的基数为 n；（2）二面体群 D_n，具有三个特殊轨道，其基数分别为（n，n、2），其余轨道的基数为 $2n$；

（3）$\mathfrak{A}_4$，具有三个特殊轨道，其基数分别为（6、4、4），其余轨道的基数为 12；（4）$\mathfrak{S}_4$，具有三个特殊轨道，其基数分别为（12、8、6），其余轨道的基数为 24；（5）$\mathfrak{A}_5$，具有三个特殊轨道，其基数分别为（30、20、12），其余轨道的基数为 60。

由于 $\mathcal{B}_j$ 是 N_j' 的轨道之并，我们注意到，如果存在一个长度为 1 的轨道，那么 N_j' 必须是循环群。

从表1可以看出，$\mathfrak{A}_5$ 这种情况从未发生；如果 $N_j'=\mathfrak{S}_4$，那么 $\mathcal{B}_j$ 是一个含有6个元素的单一轨道，并且六个单值变换的阶相同。

类似地，如果 $N_j'=\mathfrak{A}_4$，那么 $\mathcal{B}_j$ 是一个含有4个或6个元素的单一轨道，而且这两种情况下所有分支阶都相同。

如果 N_j' 是循环群，那么当所有分支阶都相同时，其阶不超过 $|\mathcal{B}_j|$；否则不超过 $|\mathcal{B}_j|-1$。

同样，如果 N_j' 是二面体群，则当所有分支阶都相等时，其阶被 $2|\mathcal{B}_j|$ 所界；否则被 $2|\mathcal{B}_j|-4$ 所界。

根据这些考量，我们得到以下估计：

- 若 $G=\mathfrak{A}_5$、 $T_1=[2,5,5]$ 和 $T_2=[3,3,3,3]$，则 $|N_1'|\leq 2$ 和 $|N_2'|\leq 12$。
- 若 $G=\mathfrak{A}_5$、 $T_1=[5,5,5]$ 和 $T_2=[2,2,2,3]$，则 $|N_1'|\leq 6$ 和 $|N_2'|\leq 3$。
- 若 $G=\mathfrak{A}_5$、 $T_1=[3,3,5]$ 和 $T_2=[2,2,2,2,2]$，则 $|N_1'|\leq 2$ 和 $|N_2'|\leq 10$。
- 若 $G=\mathfrak{S}_4\times\mathbb{Z}/2$、 $T_1=[2,4,6]$ 和 $T_2=[2,2,2,2,2,2]$，则 $|N_1'|=1$ 和 $|N_2'|\leq 24$。
- 若 $G=G(32)$、 $T_1=[2,2,4,4]$ 和 $T_2=[2,2,2,4]$，则 $|N_1'|\leq 4$ 和 $|N_2'|\leq 3$。
- 若 $G=\mathfrak{S}_4$、 $T_1=[3,4,4]$ 和 $T_2=[2,2,2,2,2]$，则 $|N_1'|\leq 2$ 和 $|N_2'|\leq 24$。
- 若 $G=G(16)$、 $T_1=[2,2,4,4]$ 和 $T_2=[2,2,4,4]$，则 $|N_1'|\leq 4$ 和 $|N_2'|\leq 4$。
- 若 $G=D_4\times\mathbb{Z}/2$、 $T_1=[2,2,2,4]$ 和 $T_2=[2,2,2,2,2,2]$，则 $|N_1'|\leq 3$ 和 $|N_2'|\leq 24$.

现在考察基数 $|\mathcal{C}_1|$， $|\mathcal{C}_2|$，并回顾一下：对于 $\mathfrak{A}_5$ 和 $\mathfrak{S}_4$， $Z(G)$ 是平凡的；对于 $\mathfrak{S}_4\times\mathbb{Z}/2$，其阶为 2；而对于 $G(32)$ $G(16)$ 和 $D_4\times\mathbb{Z}/2$，它等于 $(\mathbb{Z}/2)^2$。

如上所述，如果对于 $C_j\to C_j'$，有三个点的局部单值化与所有其他局部单值化都不同，那么 $\mathcal{C}_j=Z(G)$。

通过考察备注14中列出的局部单值化，我们看到 $|\mathcal{C}_j|=|Z(G)|$ ($j=1$， 2)，但 $G=\mathfrak{S}_4$、 $G=G(16)$ 或 $G=D_4\times\mathbb{Z}/2$ 的情形除外。

因此，如果 G 不属于这 3 个群之一，我们就得到界 $|\text{自同构群}^*(S)|\leq 12$。

对于 $G=\mathfrak{S}_4$，有 $\mathcal{C}_1=Z(G)$，且 $|\text{自同构群}^*(S)|\leq|N_2'|\leq 24$。

考虑 $G=G(16)$，其中心由 x^2， y 生成（见备注14）。局部单值化为 $[z,z,x,x^{-1}]$ 和 $[zx^2y,zx^2y,xyz,(xyz)^{-1}]$，因此 $|\mathcal{C}_j/Z(G)|\leq 2$，从而 $|\mathrm{Aut}^*(S)|\leq 32$。

最后，考虑 $G=D_4\times\mathbb{Z}/2$，其中心的阶为 4，局部单值化为：

$$V_1=[(1,1),(s,1),(rs,0),(r,0)],\ V_2=[(s,0),(sr,1),(sr^2,0),(sr,1),(r^2,1),(r^2,1)].$$

因此 $\mathcal{C}_1=Z(G)$ 且 $|\mathcal{C}_2/Z(G)|\leq 2$，从而 $|\mathrm{Aut}^*(S)|\leq 24$。

□

现在考虑 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$。

由备注12可知，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)<Z(G)=N^0(G)\cap(G\times G)/\Delta_G$，因为 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$ 在 $N_j'=N_j/G$ 中的像对于 $j=1$， 2 是平凡的。这意味着，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$ 是由子群 $H<Z(G)\times\{1_G\}<G\times G$ 诱导的自同构群。

定理1 **6.** 设 S 是一张非混合型、与乘积等伦的曲面，其中 $q(S)=p_g(S)=0$.

那么，自同构群$_{\mathbb{Z}}(S)$ 是平凡的，除非 $G=D_4\times\mathbb{Z}/2$ 这种情况，此时 自同构群$_{\mathbb{Z}}(S)\cong\mathbb{Z}/2$，且交叉形式是偶的。

证明。对于 $G=\mathfrak{A}_5$ 和 $G=\mathfrak{S}_4$ 的情形，该结论显然成立。

对于剩余情形，我们使用一个 MAGMA [BCP97] 脚本来确定$Z(G)$ 中哪些自同构在 $H_1(S,\mathbb{Z})$ 上作用平凡（见附录 A）。

下面的计算表明，除 $G=D_4\times\mathbb{Z}/2$ 外，所有情形中都不存在在 $H_1(S,\mathbb{Z})$ 上作用平凡的非平凡元素。

对于 $G=D_4\times\mathbb{Z}/2$，元素（r^2， 0）在 H_1（S， $\mathbb{Z}$）$\cong$（$\mathbb{Z}/2$）$^3\times$（$\mathbb{Z}/4$）^{2}上作用平凡 .

尚需证明（r^2， 0）在 H^2（S， $\mathbb{Z}$）上作用平凡。

鉴于正合列

$$1\to\mathrm{Tors}(S)\cong(\mathbb{Z}/2)^3\times(\mathbb{Z}/4)^2\to H^2(S,\mathbb{Z})\to\mathrm{Num}(S)=H^2(S,\mathbb{Z})/\mathrm{Tors}(S)\cong\mathbb{Z}^2\to 0,$$

又由于（r^2， 0）在 Tors（S）上以及在商群 Num（S）上作用平凡，只需找出一个分裂 Num（S）$\to H^2$（S，$\mathbb{Z}$），使其在（r^2， 0）作用下不变。

如 [CCCK25] 中所述，我们考虑两个纤维化 $f_i:\ S\to C_i/G$，并将相应的纤维记为 F_i，然后按如下方式论证。

由于纤维的重数，我们得到 Z（G）个不变除子 Φ_1， Φ_2，使得下列线性等价成立： $F_1\equiv 4\Phi_1$， $F_2\equiv 2\Phi_2$。

注意到 $\Phi_1\cdot\Phi_2=|G|/8=2.$

此外， K_S 与 $\Phi_1+2\Phi_2$数值等价，因此，如果 Φ_1 的数值等价类可被 2 整除，则 S 上的交叉形式是偶的；进而，如果 $2\Phi_1'$ 与 Φ_1数值等价，那么 Φ_1'， Φ_2构成 Num(S) 的一组基，其中 $\Phi_1'\cdot\Phi_2=1$，$(\Phi_1')^2=\Phi_2^2=0$。

为求得 Φ_1'，考虑满射 $G=D_4\times\mathbb{Z}/2\twoheadrightarrow(\mathbb{Z}/2)^3$, 及其核 $H=\langle r^2\rangle\cong\mathbb{Z}/2$。于是，令

$$B=C_1/(\mathbb{Z}/2), E:=C_1/H,$$

B是 $\mathbb{P}^1$ 的一个 D_4覆盖，分歧重数为 (2，2，4)，因此 B是射影直线，而 E是椭圆曲线，是 $\mathbb{P}^1$ 的一个 ($\mathbb{Z}/2)^3$ 覆盖，在4个点处分歧，并且 $C_1\to E$ 在4个点处分歧。

因此， $C:=C_1$ 是一个亏格为3的超椭圆曲线，而 $K_C=2\mathcal{H}$，其中 $\mathcal{H}$ 是超椭圆除子（ B中一点的原像），其线性等价类对于C的每个自同构都是不变的。

ˆ 接下来，我们考虑 $C_1\times C_2$ 上的一个除子 Φ_1 ，它对应于 C_1上的除子 $\mathcal{H}$ 。更准确地说，考虑 C 中的 G-轨道 $\mathcal{O}$ ，它对应于 $C\to\mathbb{P}^1$的最后一个分支点，确实就是$G/\langle r\rangle\cong\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$-轨道。

$\mathcal{O}=\{P,(0,1)P,(s,0)P,(s,1)P\}$ 由 $C\to E$ 的分歧点组成，因此

$$K_C\equiv(P+(0,1)P)+((s,0)P+(s,1)P)\equiv\mathcal{H}+\mathcal{H},$$

因为 $\mathcal{H}$ 是 $B\cong\mathbb{P}^1$ 中一点的拉回。

特别地，

$$(P+(0,1)P)\equiv((s,0)P+(s,1)P).$$

ˆ 在 $C_1\times C_2$ 上考虑除子 $\Phi_1:=P\times C_2+(0,1)P\times C_2$.

$G\times G$ 中每个自同构不被除子 $\hat{\Phi}_1+(s,0)\hat{\Phi}_1$ 要么保持不变，要么被除子 $(s,0)\Phi_1$：于是，ˆ 前述线性等价关系表明， Φ_1 的线性等价类保持不变。

根据我们的选择，有效除子 ˆ Φ_1 在 $C_1\times C_2$ 上关于群 $G'':=\langle r\rangle\times\mathbb{Z}/2$ 的作用保持不变，因此相应的线丛具有 G''-线性化，故 ˆ Φ_1 可下降为 $S'':=(C_1\times C_2)/G''$ 上的除子 Φ_1''，且它是该除子的原像。

同理 $\hat{\Phi}_1+(s,0)\hat{\Phi}_1$ 是 G-不变，且是 o f Φ_1 的完整原像。

我们有一个非分歧双覆盖 p： $S''\to S=S''/s$，且二者 Φ_1''， $s\Phi_1''$ 满足

$$p_*(\Phi_1'')=p_*(s\Phi_1'')=\Phi_1.$$

现在考虑线丛 $\mathcal{L}:=\mathcal{O}_{S''}(\Phi_1'')$。那么，由于 $(s,0)$ˆΦ_1 也具有 G''-不变性，并且线性等价于 Φ_1，$s^*(\mathcal{L})\cong\mathcal{L}$，因此我们可以考虑相应的 Theta 群

$$1\to\mathbb{C}^*\to\Theta(\mathcal{L})\to\mathbb{Z}/2=\langle s\rangle\to 1,$$

它被分类为由 $\epsilon\in H^2(\mathbb{Z}/2,\ \mathbb{C}^*)\ =1$. 给出的中心扩张

因此，Theta 群分裂，且存在 s 到 $\mathcal{L}$ 的一个自同构提升，由此在 S 上得到一个商线丛，进而得到 S 上的除子类 Φ_1' ，使得 $p^*(\Phi_1')\equiv\Phi_1''$.

但这样一来， $2\Phi_1'=p_*(p^*(\Phi_1'))\ \equiv p_*(\Phi_1'')\ =\Phi_1$.

□

备注 *17. </style}*对于 $D_4\times\mathbb{Z}/2$，交叉形式是偶形式；这一点 *Kyoung-Seog-Lee* 及其合作者也已证明（私人通信）。

3. Surfaces with $q\geq 1$ and nontrivial $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$

3.1. 不规则度 $q=2$。 在论文 [CLZ13] 中，作者证明，对于满足 $q(S)\geq 2$ 的曲面 S ，除非 $q(S)\ =2$ 且该曲面 S 与非混合型乘积等伦，其中$C_j'=C_j/G$ 的亏格为 1（当 $j=1$，2 时），否则自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$ 是平凡的；群 G 是阿贝尔的，且

$$G=(\mathbb{Z}/2m)\oplus(\mathbb{Z}/2mn),\quad\text{or}\quad G=(\mathbb{Z}/2)\oplus(\mathbb{Z}/2m)\oplus(\mathbb{Z}/2mn),$$

且所有分支重数均为 2。

采用 [CLZ13] 的记号，令第一个覆盖的分支点数为 $2k$，第二个覆盖的分支点数为$2l$。此外，第一个覆盖的局部单值化均为 γ，而第二个覆盖的局部单值化均为 γ'，其中 $\gamma \neq \gamma'$。

若 $k \geq 2$，则 N_1' 是平凡的；类似地，若 $l \geq 2$，则 N_2' 是平凡的。

在上述文献中已证明，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$ 是由 $\gamma \times \gamma' \in G \times G$ 诱导的对合 ι。We shall 现在参见 w hether ι bel 属于 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$.

问题18。若 S 是一个具有 $q(S) = 2$ 的不规则曲面，那么 自同构群$_{\mathbb{Z}}(S)$ 能否非平凡？等价地，是否可能有 自同构群$_{\mathbb{Z}}(S) = \langle \iota \rangle \cong \mathbb{Z}/2$?

第一作者与 Gromadtzki 于2015年夏开展的合作研究（[Cat-Grom15], 或第一作者的手写笔记）研究了 ι 在 $H_1(S, \mathbb{Z})$上的作用，证明对于 m，n 的某些取值，该作用是平凡的，而对于其他取值则是非平凡的（在第一种情况下，平凡性等价于 m为偶数）。

然而，由于上述曲面的p_g很大，确定该作用在 $H^2(S, \mathbb{Z})$上的平凡性颇为困难。

3.2. **不规则度** $q = 1$。论文 [CL18] 证明，对于具有 $q(S) = 1$ 的曲面 S，如果 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$ 是非平凡的，那么它的阶至多为4；如果等号成立，则 S 与一个非混合型乘积等伦；作者还给出了 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(S)$的阶为4的例子。

如果 $q = 1$，那么根据[CFGLS24，引理2.1]，Aut $h \in$ ($_{\mathbb{Z}}$)中的任意元素都在椭圆曲线 $A = \mathrm{Alb}(S)$上作用为恒等变换。

现在假设 S 与一个非混合型乘积等伦：$|\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)| = 4$, $q(S) = 1$是否可能?

曲面 S 有第二个纤维化 $f : S \to C_2/G = \mathbb{P}^1$，其重纤维的重数为 $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_r$，其中 $r \geq 3$，并且根据 [CatLiu21，原理 3]，除非 $m_1 = m_2 = 2$，m_j 对于 $j = 3$，4是奇数，且在 C_2/G 上的作用为2 阶，否则 h 在 C_2/G上作为恒等变换作用。

因此，如果 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(S)$的阶为4，就会有一个元素 $h = (h_1, h_2)$在C_2/G上作为恒等变换作用，并在 C_1上作为恒等变换作用，因此必然有 $h_2 \in Z(G)$。

但是，还是要如何处理 $H^2(S, \mathbb{Z})$中的超越循环呢?

Appendix A. MAGMA scripts

该脚本可在 http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/ 上运行。

```
/* Input: i) the group: G; ii) the monodromy images of pi_orb(C_i)-> G: mon1 and mon 2;
iii) the genus of the quotient curves C_i/G: h1 and h2; Output: the elements of Z(G),
acting trivially on H_1(S,Z)*/ // Given the monodromy images,  the next function constructs
// the group pi^orb and the monodromy map pi^orb-->>G Orbi:=function(gr,mon, h)
F:=FreeGroup(#mon); Rel:={}; G:=Id(F);
for i in {1..h} do G:=G*(F.(2*i-1)^-1,F.(2*i)^-1); end for;
for i in {2*h+1..#mon} do G:=G*F.(i); Include(~Rel,F.(i)^(Order(mon[i]))); end for;
Include(~Rel,G); P:=quo<F|Rel>; return P,  hom<P->gr|mon>; end function;
// MapProd computes given two maps f, g:A->B the map product induced by the product on B
MapProd:=function(map1,map2) seq:=[]; A:=Domain(map1); B:=Codomain(map1);
```

```
if Category(A) eq GrpPC then n:=NPCgens(A); else n:=NumberOfGenerators(A);
end if; for i in [1..n] do Append(~seq, map1(A.i)*map2(A.i)); end for;
return hom<A->B|seq>; end function;

// This is the main routine of the script
TrivialActionH1:=function(G,mon1, h1, mon2, h2)
// First of all we construct the monodromy maps pi_j^orb-->>G
T1, f1:=Orbi(G,mon1, h1); T2, f2:=Orbi(G,mon2, h2); T1xT2, inT, proT:=DirectProduct([T1,T2]); GxG,
inG:=DirectProduct(G,G); Diag:=MapProd(inG[1],inG[2])(G);
f:=MapProd(proT[1]*f1*inG[1],proT[2]*f2*inG[2]);
Pi1S:=Rewrite(T1xT2,Diag@@f); // This is the fundamental group of S=(C1xC2)/G H1S,
q:=AbelianQuotient(Pi1S); //H_1(S,Z) triv:={G!1};
for z in Center(G) do // we consider the automorphisms in Z(G) and their action on H_1(S,Z)
      act:={}; // in act we collect the differences z*h-h,  where h is a generator
       of H_1(S,Z)       z1:=(inG[1](z)@@f); // lifts of z=(z,1) to the productT1xT2
      for h in Generators(H1S) do
           h1:=h@@q; Include(~act,q(z1*h1*z1^-1)-h); // con       end for;
      // check if g in Z(G)=Aut_Q(S),  acts trivially on H_1(S,Z)
      if act eq {H1S!0} then Include(~triv,z); end if; end for; return triv;
end function;
```

A.1. **情形** $p_g = q = 0$. 我们使用前一个脚本，检查 $Z(G)$ 中哪些元素作用时并非 n-平凡地作用于 $H_1(S, \mathbb{Z})$，针对备注14中列出的代数数据。

```
G:=SmallGroup(48,48); // S4 x Z/2
mon1:=[ G.1 * G.4 * G.5, G.1 * G.2 * G.3^2 * G.5, G.2 * G.3 ];
mon2:=[ G.2 * G.5, G.2 * G.4 * G.5, G.1 * G.2 * G.3^2 * G.4, G.1 * G.2 * G.3 * G.5,
G.1 * G.2 * G.3 * G.5, G.1 * G.2 * G.3^2 ]; TrivialActionH1(G,mon1,0,mon2,0);
> { Id(G) }
G:=SmallGroup(32,27); // G(32)
mon1:=[ G.2 * G.3 * G.4, G.2, G.1 * G.2 * G.3 * G.5, G.1 * G.2 ];
mon2:=[ G.1 * G.4 * G.5, G.2 * G.3 * G.4 * G.5, G.2 * G.4 * G.5, G.1 * G.3 * G.4];
TrivialActionH1(G,mon1,0,mon2,0); > { Id(G) }
G:=SmallGroup(25,2); // (Z/5)^2
mon1:=[ G.1, G.2, G.1^4 * G.2^4 ];
mon2:=[ G.1*G.2^4, G.1 * G.2^2, G.1^3 * G.2^4 ];
TrivialActionH1(G,mon1,0,mon2,0); > { Id(G) }
G:=SmallGroup(16,3); // G(16)
mon1:=[ G.2, G.2, G.1, G.1^3 ];
mon2:=[ G.2 * G.1^2* G.3 , G.2 * G.1^2* G.3, G.1*G.3*G.2, (G.1*G.3*G.2)^-1 ];
TrivialActionH1(G,mon1,0,mon2,0); > { Id(G) }
```

```
25
26 G:=SmallGroup(16,11); // D4 x Z/2
27 mon1:=[ G.2 * G.3, G.3 * G.4, G.1 * G.3, G.1 * G.2 * G.3 * G.4 ];
28 mon2:=[ G.1 * G.4, G.1 * G.4, G.3, G.3, G.2 * G.4, G.2 * G.4 ];
29 TrivialActionH1(G,mon1,0,mon2,0);
30 > { Id(G), G.4 } // G.4=(r^2,0) acts trivially
31
32 G:=SmallGroup(16,14); // (Z/2)^4
33 mon1:=[ G.1, G.2, G.3, G.4, G.1 * G.2 * G.3 * G.4 ];
34 mon2:=[ G.2 * G.3 * G.4, G.1 * G.3 * G.4, G.1 * G.3, G.2 * G.4, G.3 * G.4 ];
35 TrivialActionH1(G,mon1,0,mon2,0);
36 > { Id(G) }
37
38 G:=SmallGroup(9,2); // (Z/3)^2
39 mon1:=[ G.1, G.2, G.1^2, G.2^2 ];
40 mon2:=[ G.1 * G.2, G.1 * G.2^2, G.1^2 * G.2^2, G.1^2 * G.2 ];
41 TrivialActionH1(G,mon1,0,mon2,0);
42 > { Id(G) }
43
44 G:=SmallGroup(8,5); // (Z/2)^3
45 mon1:=[ G.1 * G.2, G.1 * G.3, G.2 * G.3, G.1 * G.2 * G.3, G.1 * G.2 * G.3 ];
46 mon2:=[ G.1, G.2, G.3, G.1, G.2, G.3 ];
47 TrivialActionH1(G,mon1,0,mon2,0);
48 > { Id(G) }
```

References

[BC04] Ingrid Bauer 和 Fabrizio Catanese。具有 $p_g = q = 0$ 的一些新曲面。《Fano会议论文集》都灵，123–142，2004。[BCG08] Ingrid Bauer、Fabrizio Catanese 和 Fritz Grunewald。具有 $p_g = q = 0$ 、与曲线乘积等源的曲面的分类。《纯粹与应用数学季刊》4(2):547–586，2008。[BCP11] Ingrid Bauer、Fabrizio Catanese 和 Roberto Pignatelli。几何亏格为零的一般型曲面：综述。载于 *Complex and Differential Geometry*，第8卷，第1–48页。《施普林格数学会议录》，2011。[Be96] Arnaud Beauville，《复代数曲面》。由 R. Barlow 从1978年的法文原版翻译，并由 N. I. Shepherd-Barron 和 M. Reid 协助。第二版。《伦敦数学学会学生教材》，34。剑桥大学出版社，剑桥，（1996）x+132 页。[BM47] Salomon Bochner 和 Deane Montgomery，解析流形上的群。《数学年刊》（第2辑）48（1947），659–669。[BCP97] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust，Magma代数系统。I. 用户语言。《符号计算杂志》24（3-4）：235–265，1997。[BR75] Dan Burns 和 Michael Rapoport，关于 k¨ahler K3 曲面的托雷利问题。《法国高等师范学校科学年鉴》（第4辑）8（1975），第2期，235–273。[Cai04] Jin-Xing Cai，在上同调中平凡作用的一般型曲面的自同构。《东北数学杂志》（第2辑）56（2004），第3期，341–355。[Cai07] Jin-Xing Cai，具有在上同调中平凡作用的自同构的亏格2纤维曲面的分类。《太平洋数学杂志》232（2007），第1期，43–59。[Cai09] Jin-Xing Cai，诱导上同调中恒等变换的椭圆曲面自同构，《代数杂志》322（2009），4228–4246。[CLZ13] Jin-Xing Cai、Wenfei Liu、Lei Zhang，具有 $q \geq 2$ 且在上同调中平凡作用的一般型曲面的自同构。《组合数学》149（2013），第10期，1667–1684。[CL18] Jin-Xing Cai 和 Wenfei Liu，具有 $q = 1$ 且在上同调中平凡作用的一般型正则曲面的自同构。《比萨高等师范学校科学年鉴》（第5辑）18（2018），第4期，1311–1348。[CL24] Jin-Xing Cai 和 Wenfei Liu，关于自同构群阶为4的数值平凡一般型正则曲面。arXiv：2412.16501。[CCCK25] Paolo Cascini、Fabrizio Catanese、Yifan Chen、JongHae Keum，Mori梦空间与 $\mathbb{Q}$-同调二次曲面。《太平洋数学杂志》339，第2期，223-242（2025）。[Cat00] Fabrizio Catanese，纤维化曲面、与乘积等源的簇及相关模空间。《美国数学杂志》122（2000），第1期，1–44。[Cat06] Fabrizio Catanese，*Surface classification and local and global fundamental groups.*《林琴科学院数学与应用》17，第2期，135–153（2006）。[Cat08] Fabrizio Catanese，*Differentiable and deformation type of algebraic surfaces real and symplectic structures.*，Catanese, Fabrizio（编）等，《辛–流形与代数曲面》。讲授于

C.I.M.E. 暑期学校，意大利切特拉罗，2003年9月2日至10日。柏林：施普林格；佛罗伦萨：C.I.M.E. 基金会，《数学讲义》1938，55–167（2008）。[Cat15] Fabrizio Catanese，*Topological methods in moduli theory.*《数学科学通报》5（2015），第3期，287–449。[Cat-Grom15] Fabrizio Catanese 和 Grzegorz Gromadzki，*On fundamental groups of complex surfaces, and the action of their automorphisms on the first integral homologies* 17, 2015, 1 9 预印本，8月，页码 - 。[Cat-Grom16] Fabrizio Catanese 和 Grzegorz Gromadzki，*The group of automorphisms of a Beauville surface acts nontrivially on the first integral homology* 23, 2016, 1 7 预印本，4月，页码 - 。[CatLiu21] Fabrizio Catanese 和 Wenfei Liu，关于紧致 K¨ahler 流形和代数曲面上的拓扑平凡自同构，《林琴科学院数学与应用》32（2021），181–211，DOI 10.4171/RLM/933[CFGLS24] Fabrizio Catanese、Davide Frapporti、Christian Gleißner、Wenfei Liu 和 Matthias Sch¨utt，关于椭圆曲面的上同调平凡自同构 I：$\chi(S) = 0$，纪念 Y. Prokhorov 的专卷，《台湾数学杂志》29（6），1209–1260，（2025年12月），DOI：10.11650/tjm/241106。[CLS24] Fabrizio Catanese、Wenfei Liu 和 Matthias Sch¨utt，关于椭圆曲面的上同调平凡自同构 II：$\chi(S) > 0$。arXiv：2412.17033。[FL22] Davide Frapporti 和 Kyoung-Seog Lee，具有 $p_g = 0$ 的混合型与乘积等源的曲面上的除子，《太平洋数学杂志》318，第2期，233–247（2022）。[Fuj78] Akira Fujiki，*On automorphism groups of compact Kähler manifolds.*《数学发明》44，225–258（1978）。[Liu18] Wenfei Liu，具有 $q = 2$ 的一般型曲面，《当代数学通讯》第20卷，第7期（2018）1750084（12页）。[MKS-76] Wilhelm Magnus、Abraham Karrass、Donald Solitar，《组合群论》。以生成元与关系表示群。第2次修订版。《多佛高级数学丛书》。纽约：多佛出版社，XII，444页（1976）。[Me17] Laurent Meersseman，关于紧致复流形自同构群的一则注记，《数学教学》（第2辑）63（2017），263–272。[MN84] Shigeru Mukai 和 Yukihiko Namikawa，在上同调群上平凡作用的 Enriques 曲面的自同构。《数学发明》77（1984），第3期，383–397。[Pet79] Chris A. M. Peters，紧致 K¨ahler 曲面的全纯自同构及其在上同调中的诱导作用。《数学发明》52（1979），第2期，143–148。[Pe80] Chris A. M. Peters，关于紧致 K¨ahler 曲面的自同构，《昂热代数几何会议录》，1979年7月/《代数几何》，昂热，1979，249–267，Sijthoff & Noordhoff，莱茵河畔阿尔芬 - 马里兰州日耳曼敦，（1980）。

Lehrstuhl Mathematik VIII Mathematisches Institut der Universität Bayreuth NW II Universitätsstr. , , , , 30 95447 Bayreuth.
Email address: Fabrizio.Catanese@uni-bayreuth.de

Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, via Bonardi 9, 20133 Milano
Email address: davide.frapporti@polimi.it