DynFO 中正则语言类的代数刻画

Corentin Barloy 波鸿鲁尔大学，德国
FelixTschirbs 波鸿鲁尔大学，德国
NilsVortmeier 波鸿鲁尔大学，德国
ThomasZeume 波鸿鲁尔大学，德国

arXiv:2601.18429v1 [cs.LO] 26 Jan 2026

摘要

本文探讨了 Patnaik 和 Immerman 的动态描述复杂性框架中，可由一阶逻辑片段维护的正则语言类的精细结构。Hesse 的一项结果表明，即使只能使用一元辅助关系，正则语言类仍可由一阶公式维护。Gelade、Marquardt 和 Schwentick 的另一项结果表明，正则语言类与可由带有二元辅助关系的无量词公式维护的语言类相同。

我们改进了 Hesse 的结果，并证明在使用一元辅助数据时，$\exists^*\forall^*$-公式可以维护所有正则语言。随后，我们为存在一元辅助关系时可由无量词公式和正向 $\exists^*$-公式维护的语言类，得到了精确的代数刻画。

2012 年 ACM主题分类计算理论 → 复杂性理论与逻辑；计算理论 → 代数语言理论；计算理论 → 正则语言

关键词与短语动态描述复杂性、形式语言、幺半群理论

资助 所有作者均获得德国科学基金会（DFG，德国研究基金会）项目 532727578 的资助。

致谢 感谢 STACS 的审稿人认真审阅本文并提出富有见地的意见，这些意见显著提升了本文的质量。

1 引言

在 Schützenberger 以及 McNaugthon 和 Papert 的开创性研究中，正则语言类在代数层面被刻画为具有有限句法幺半群的语言类 [19] ，在逻辑层面则被刻画为可由单子二阶句子定义的语言类 [1]。在后续研究中，人们针对正则语言的子类获得了大量代数和逻辑刻画，其中包括将无星正则语言类（可用不含 Kleene 星号但含有否定的正则表达式描述的语言）刻画为具有有限非周期幺半群且可由一阶逻辑定义的语言类 [20, 9]；以及将分段可测试语言（可通过字中出现的子词集合来描述的语言）刻画为具有$\mathcal{J}$-平凡句法幺半群、且可由不含量词交替的一阶公式定义的语言 [21]。

在这里，我们关注 Patnaik 和 Immerman [10] 的动态描述复杂性框架所定义的形式语言的代数性质。在这一框架中，字符串会发生变化，目标是通过逻辑公式来维护字符串是否属于某种语言，也可以使用存储在辅助关系中的辅助信息（这些辅助关系同样需要通过逻辑公式更新）。在这一设定中，一个重要的语言类是可通过一阶公式维护的语言，称为 DynFO。早期研究已表明，DynFO 包含所有正则语言，甚至包含所有上下文无关语言 [10, 4]。

本文旨在开启对代数与动态描述复杂性类之间联系的探索。这与 Schützenberger、McNaugthon 和 Papert 在静态领域开启的代数与逻辑之间联系的探索精神相似，如上文所述。我们关注的核心问题是：

DynFO 是否存在某些限制，能够导出具有良好代数刻画的正则语言自然子类？

为了回答这一问题，自然要首先确定 DynFO 的哪些限制形式仍能维护所有正则语言。此前的研究已经对此进行了探讨。Hesse 的一项结果表明，即使只能使用非常受限的辅助信息，即只能使用一元关系，正则语言类仍可通过一阶公式进行维护 [6, 定理 2。8][1]Gelade、Marquardt 和 Schwentick 的一项奠基性结果表明，如果可以使用二元辅助关系，那么正则语言类与 DynProp（即通过无量词公式维护的语言类）相一致 [4, 定理 3。2]

我们对 Hesse 的结果进行了改进。记 UDynΣ_2 为使用一元辅助关系通过$\exists^*\forall^*$公式维护的语言类。

▶**定理 1**。 所有正则语言都属于 UDynΣ_2。

通过仔细考察 Hesse 的证明可以得到这一结果；该证明维护了有限状态自动机执行图的性质。在此，我们利用格林关系对该证明进行了代数化重述（见第3节）。

因此，在寻找与具有良好代数刻画的正则语言自然子类相对应的 DynFO 限制时，可以探索（a）(二元) DynProp 的片段，或（b）UDynΣ_2 的片段。

我们沿着两个方向都得到了结果。对于二元 DynProp，进一步限制辅助关系是很自然的。我们通过句法幺半群的代数性质，精确刻画了具有一元辅助关系的 DynProp 中的语言（见第 4 节）。

[1] 这一结果的一个变体已在 [10], 中报告，但其中使用了额外的内置算术作为辅助信息。

▶**定理 2**。 一个正则语言属于 UDynProp 当且仅当其句法幺半群是一个群。

对于 UDynΣ_2，进一步限制用于更新的公式的句法结构是很自然的。我们通过其有序句法幺半群的代数性质，精确刻画了可由正 $\exists^*$ 公式维护的语言（记为 UDynΣ_1^+）（见第 5 节）。

▶**定理 3.** 一个正则语言属于 UDynΣ_1^+，当且仅当其有序句法幺半群属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$。

这里，$\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 表示类 $\mathbf{J}^+$ 与 $\mathbf{G}$ 的花环积。

在定理 2 和定理 3 的证明中，“如果”方向要求为所有（有序）句法幺半群满足某种性质的正则语言给出更新公式，这属于标准做法。“仅当”方向则要求针对所有非群语言（分别针对其有序句法幺半群不属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的所有语言），证明相对于 DynProp（分别相对于 UDynΣ_1^+）的下界。为此，我们使用子结构引理的变体 [4]（另见 [23]），为单个语言证明一个下界，再利用代数方面的洞见，将这一下界推广到所有不具备该性质的语言。

我们将寻找 UDynΣ_1 中语言的精确代数刻画这一问题留待解决；也就是说，这些语言可以通过（不一定是正的）$\exists^*$-公式和一元辅助关系来维护。我们将在第6节讨论回答这一问题所面临的挑战。

2 预备知识

本节回顾动态描述复杂性和代数形式语言理论的基础知识，同时也统一相关记号。

2.1 动态描述复杂性

本文关注固定正则语言的动态成员资格问题。设 $L \subseteq \Sigma^*$ 是字母表 Σ 上的一个语言。对于语言 L，动态成员资格问题 Member(L) 的输入结构是词 $w = w_1 \cdots w_n$ 的一种编码，它是论域为该词各位置组成的 $\{1, \ldots, n\}$ 上的关系结构。该结构包含：(1) 对每个 $\sigma \in \Sigma$，一个一元关系 W_σ，用于存储包含 σ 的 w 所在的位置；(2) 一个二元关系 $\leq$，表示各位置上的线性序。遵循 Patnaik 和 Immerman 以及 Gelade 等人的做法，[10, 4], 每个 w_i 要么属于 Σ，要么属于 ϵ；也就是说，每个位置 $i \in [n]$ 至多出现在一个关系 W_σ 中。为简单起见，我们用同一个符号 w 表示输入词及其编码。

在动态成员资格问题中，输入结构可以通过形如 set$_\sigma(i)$ 的操作进行更改，其中 $\sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$。具体的变更集 set$_\sigma(i)$ 实例化 y，并将位置 i 处的符号设为 σ。动态成员资格问题 Member(L) 询问当前输入结构是否编码了一个属于 L 的字，即 $w_1 \cdots w_n \in L$。

我们将探讨在 Patnaik 和 Immerman [10] 的动态描述复杂性框架下，维护动态成员资格问题所需的资源。

一个动态程序 Π 将输入结构以及一组辅助关系$\mathcal{A}$ 存储在某个（关系）模式 τ_{aux} 上，并且其论域与输入词的论域相同。对于每个辅助关系符号 $R \in \tau_{\text{aux}}$ 和每个变更操作集σ，程序 Π 都有一个更新公式 $\varphi_\sigma^R(\bar{x}; y)$，它可以访问输入关系和辅助关系。每当当前输入词 w 通过操作集$\sigma(i)$变更为新的输入词 w'时，新的辅助

更新集合$\mathcal{A}'$中的关系 $R^{\mathcal{A}'}$ 由所有满足 $\varphi_\sigma^A(\bar{a}; i)$ 的元组 $\bar{a}$ 构成，其中该公式在结构 $(w', \mathcal{A})$ 中成立。

如果动态程序 Π 维护动态成员资格问题 Member(L)，那么它具有一个特殊的辅助位 q（即一个 0 元辅助关系），该辅助位始终指示当前输入词是否属于 L。更准确地说，按照 Patnaik 和 Immerman 的做法，我们假设初始输入词 w_0 为空，并且初始辅助结构 $\mathcal{A}_0$ 由一个依赖于 w_0的一阶公式进行初始化。如果经过任意一系列更改将 Π 维护 Member(L)，并随后从 $(w_0,\mathcal{A}_0)$ 开始应用相应的更新公式，则所得的位 q 为真当且仅当 $w' \in L$。

如果动态问题 Member(L) 可以由具有一阶更新公式和一阶初始化公式的动态程序维护，则它属于 DynFO 类。如果所有辅助关系的元数最多为 k，则它属于 k 元 DynFO。对于公式类 $\mathcal{C}$，如果所有更新公式都属于 $\mathcal{C}$ 且初始化公式属于 FO，则它属于 Dyn$\mathcal{C}$。

本文中，我们始终假设公式处于前束范式。我们研究的类 $\mathcal{C}$ 包括无量词公式类 Prop；Σ_1 类的 $\exists^*$公式（即仅含存在量词的前束形式公式）；以及 Σ_2 类的 $\exists^*\forall^*$公式（即前束形式中先有一组存在量词，后接一组全称量词的公式）。我们还考虑 Prop$^+$、 Σ_1^+和 Σ_2^+的变体，其中否定只能直接用于线性序符号 $\leq$之前。我们将重点关注只能使用一元辅助关系的程序；在这种情况下，对于由更新公式构成的类 $\mathcal{C}$，我们用 UDyn$\mathcal{C}$ 表示相应的类。

▶ **例4.** 我们证明，字母表 $\Sigma = \{a, b\}$ 上的正则语言 $\Sigma^*\mathtt{aa}\Sigma^*$ 属于 UDynΣ_1，因此可以仅使用一元辅助关系和只含存在量词的前束形式更新公式来维护。

我们的目标是维护一元关系 N，该关系存储所有位置 j，使得从 j 向右的下一个不包含 ϵ 的字母是 a。利用 Σ_1 和 Π_1 更新公式，可以直接维护该关系。由于不允许使用 Π_1 更新公式，我们存储一个定义略有不同的关系 N' 以及一个额外的位 c。如果标志位 c 为真，则关系 $N\prime$等于 N。如果 c为假，则 $N\prime$是 $N\prime$的补集，也就是说，它包含所有位置 j，使得要么 j 右侧的所有位置都是 ϵ，要么第一个不是 ϵ的位置是 b。利用该关系，我们可以得到 N，即 $N(j) = (\neg c \wedge \neg N'(j)) \vee (c \wedge N\prime(j))$。

现在我们描述维护 N' 和 c的更新公式。我们还使用一元辅助关系 W_σ^o 来存储变更前的旧输入词。这些关系的维护非常简单。

- 对于形式为 set$_b(i)$ 的变更，我们设置 $c = 1$，更新后关系 N' 等于 N。如果变更前 $j \in N$，且满足 $i \leq j$，或在 i 与 j 之间存在一个 a，则位置 j 属于 N'。对应于 N' 的更新公式为 $\varphi_b^{N'}(j; i) = \exists k\big[N(j) \wedge \big(i \leq j \vee (j < i \wedge j < k \wedge k < i \wedge W_a(k))\big)\big]$，其中 $x < y$ 是 $x \leq y \wedge \neg(x = y)$ 的缩写。对于形式为 set$_a(i)$ 的变更，我们设置 $c = 0$，更新后关系 N' 是 N 的补集。如果变更前 $j \notin N$，且满足 $i \leq j$，或在 i 与 j 之间存在一个 b，则位置 j 属于 N'。对应于N' 的更新公式为 $\varphi_a^{N'}(j; i) = \exists k\big[\neg N(j) \wedge \big(i \leq j \vee (j < i \wedge j < k \wedge k < i \wedge W_b(k))\big)\big]$。对于变更集 set$_\epsilon(i)$，更新取决于位置 i 处原有的符号。如果该符号是一个 a，则更新后关系 N' 等于 N，并且我们设置 $c = 1$。
- 如果被移除的 a 是 j 右侧的第一个字母，那么我们必须检查 i 右侧的第一个字母。否则，该变更与位置 j 无关。因此，如果 $j < i$，下一个

来自 j 的字母是一个 a，当且仅当变更前 $N(j)$ 和 $N(i)$ 均为真，或者在 j 与 i 之间存在一个 a，且 $N(j)$ 已经为真。
如果变更将 b 替换为 ϵ，那么更新后，关系 N' 是 N 的补集，我们令 $c = 0$。如果 $j < i$，那么 j中的下一个字母不是 a，当且仅当变更前 $N(j)$ 和 $N(i)$ 均为假，或者 j 和 i 之间存在一个 b，且 $N(j)$ 为假。更新公式为

$$\varphi_\epsilon^{N'}(j;i) = \exists k\Big[$$
$$W_a^o(i) \wedge \Big((i \le j \wedge N(j)) \vee \big(j < i \wedge N(j) \wedge (N(i) \vee (j < k \wedge k < i \wedge W_a(k)))\big)\Big) \vee$$
$$W_b^o(i) \wedge \Big((i \le j \wedge \neg N(j)) \vee \big(j < i \wedge \neg N(j) \wedge (\neg N(i) \vee (j < k \wedge k < i \wedge W_b(k)))\big)\Big)\Big].$$

类似地，我们可以维护一个一元辅助关系 P，其中包含所有位置 j，使得 j 左侧不包含 ϵ 的下一个字母是 a。

现在我们描述位 q 的维护：每当 w 属于 $L = \Sigma^* a a \Sigma^*$时，该位就设为 1。对于变更集$_a(i)$，新字 w 属于 L，当且仅当 q 成立，或者 $N(i)$ 和 $P(i)$ 中有一个在变更前已为真。对于变更集$_b(i)$，当且仅当存在一个位置 $k > i$，其具有一个 a，使得 $N(k)$ 成立；或者存在一个位置 $k < i$，其具有一个 a，使得 $P(k)$ 成立，才有 $w \in L$。对于变更集$_\epsilon(i)$，当且仅当存在一个位置 $k > i$，其具有一个 a，使得 $N(k)$ 成立；或者存在一个位置 $k < i$，其具有一个 a，使得 $P(k)$ 成立；或者 $N(i)$ 和 $P(i)$ 同时成立，才有 $w \in L$。

这些条件很容易用存在量词更新公式来描述。 ⌟

在研究过程中，我们将需要以下闭包性质。对于字母表 Σ 上的语言 L 和字母 $\sigma \in \Sigma$，我们定义 $L\sigma^{-1} = \{w \mid w\sigma \in L\}$ 和 $\sigma^{-1}L = \{w \mid \sigma w \in L\}$。

▶ 引理 5。设 L 是字母表 Σ 上的语言，且 *DynC* $\in$ *{UDynProp, UDyn*Σ_1^+*}*。如果 *Member(L)* 可以在 *DynC* 中维护，那么 *(a)* 对任意映射 $h : \Gamma \to \Sigma^*$ 和任意字母表 Γ，*Member(*h^{-1}*(L))* 也可以维护；*(b)* 对任意 $\sigma \in \Sigma$，*Member(*$L\sigma^{-1}$*)* 和 *Member(*$\sigma^{-1}L$*)* 也可以维护。

2.2 幺半群

对于 DynFO 及其许多具有良好闭包性质的自然限制，我们沿用 Skovberg Frandsen、Miltersen 和 Skyum [22] 的做法，研究幺半群上的动态问题，而非语言。幺半群 $(M, \cdot)$ 是一个集合 M，其上定义了满足结合律且具有单位元的二元运算 $\cdot$；也就是说，对所有元素 x、y、$z \in M$，运算都满足 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$，并且存在一个元素 $1 \in M$，使得对所有 $x \in M$，$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$。如果幺半群中的每个元素 x 都有逆元，即存在一个元素 y，使得 $x \cdot y = y \cdot x = 1$，那么该幺半群就是群。如果一个元素 e 满足 $e \cdot e = e$，则称其为幂等元。对于整数 $n > 0$ 和 $x \in M$，x 的 n 次积记作 x^n。众所周知，每个元素 $x \in M$ 都有唯一的幂是幂等元 [14, Prop. II.6.31]，称为 x 的幂等幂，记作 x^ω。

两个幺半群之间的 态射 φ： $M \to N$ 是一种映射，使得 $\varphi(1) = 1$ 且$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ 对每个 x，$y \in M$都成立。幺半群 M的 子幺半群 N是 M的一个子集，并且自身构成幺半群，即包含 1 且对 $\cdot$ 运算封闭，这意味着对所有 x，$y \in N$ 都有 $x \cdot y \in N$。如果存在从 M 到 N 的满射同态，则幺半群 N 是 M 的 商。如果 N 整除 M，即 N 是 M的某个子幺半群的商，我们就称 N 整除 M。如果存在一个态射： φ，使得 $\varphi(= 1)$，则称语言 L 被幺半群

识别：若存在一个态射 $\varphi: \Sigma^* \to M$ 以及 $P \subseteq M$，使得 $L = \varphi^{-1}(P)$。正则语言恰好是那些能被有限幺半群识别的语言（例如参见 [14,定理 IV.3.21]）。

对于一个幺半群 M，我们考虑字母表 M 上的动态程序，并定义在 M 中计算元素序列的问题。若一个动态程序Π维护动态成员资格问题 Member(M)，我们就称它满足：存在 $|M|$ 个专用辅助位，分别存储对于每个 $x \in M$，所维护的字在 x 上的求值结果。类似地，动态问题 StrictPrefix（分别为 StrictSuffix）通过为每个 $x \in M$ 设置一个专用一元关系来维护，该关系在前缀$w_1 \cdot \ldots \cdot w_{i-1}$（分别为后缀 $w_{i+1} \cdot \ldots \cdot w_n$）在 x 上的求值结果为真时存储值 $1 \leq i \leq n$。在这种情况下，符号 ϵ 与 M 的单位元 1 可以互换使用。例如，初始字 w_0 可以是空字，也可以是 1^n。

一个重要的幺半群是集合 Q 上的函数幺半群 $f: Q \to Q$。其运算是复合，单位元是恒等函数。给定一个转移函数为 $\delta: \Sigma^* \to (Q \to Q)$ 的确定性有限状态自动机，其转移幺半群是像 $\delta(\Sigma^*)$。正则语言的句法幺半群是其最小自动机的转移幺半群。它是识别该语言的最小幺半群，并反映了该正则语言的许多性质。事实上，句法幺半群包含的信息比其正则语言更多，以下命题对此有所揭示。若对于每个 $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$，都有 $\varphi \vee \psi$（分别为 $\varphi \wedge \psi$、$\neg\varphi$）属于$\mathcal{C}$，则称公式类$\mathcal{C}$ 对 $\vee$（分别为 $\wedge$、$\neg$）封闭。本文考察的所有公式类都具有这一性质。

▶**事实 6**。设 $\mathcal{C}$ 是一个对 $\vee$ 封闭的公式类。设 L 是一个句法幺半群为 M 且 k 为某个数的正则语言，则

$$\textsc{Member}(M) \in k\text{-}ary\ \mathsf{Dyn}\mathcal{C} \Rightarrow \textsc{Member}(L) \in k\text{-}ary\ \mathsf{Dyn}\mathcal{C}.$$

我们将在第 4 节和第 5 节中看到，当所考虑的公式类具有良好性质时，该断言的逆命题也成立。

本节最后指出，对于一个幺半群，Member(M) 的可维护性意味着，对于每个可整除 M 的 N，Member(N) 都具有可维护性。

▶**事实 7**。设 $\mathcal{C}$ 是一个对 $\vee$ 和 k 任意元数封闭的公式类。设 M 是一个幺半群，使得 $\textsc{Member}(M) \in k$-元 Dyn$\mathcal{C}$ 成立。那么，对于每个可整除 M 的 N，我们都有$\textsc{Member}(N) \in k$-元 Dyn$\mathcal{C}$。

3 UDynΣ_2 的正则语言

本节证明，每个正则语言都可以通过 Σ_2-公式和仅含一元关系来维护。也就是说，我们证明如下结论。

▶ **定理 8**（定理 1 的重述）。
对于一个y 正则语言 L：$\textsc{Member}$（L）属于 U DynΣ_2。

证明本质上是代数性的，因此我们证明可以维护句法幺半群M 的 Member(M)，然后应用事实 6。证明定理 8 的方法与 Hesse [6] 中的方法相同：我们希望展示可维护的一元关系，从而能够计算来自 M^* 的一个字的每个因子的求值。下面的引理将对此进行形式化。

▶**引理 9**。设 M 是一个有限幺半群。存在一个动态程序 Π，它在模式 τ_M 上维护一元辅助关系，使得

i) Π 在线性 y 使用 Σ_2 公式 $\psi_x(j,k)$，它定义在 Π 的模式上，并且满足 f
ii) 对于每个 $x \in M$，都存在一个 Σ_2 公式 $\psi_x(j,k)$，它定义在 Π 的模式上，并且满足 f 当且仅当输入词 w 的因子 $w_{j+1} \cdots w_{k-1}$ 的求值为 x。

辅助关系的定义和引理的证明依赖于幺半群的局部理论，该理论由 Green [5] 提出。我们首先证明定理 8。

定理 8 的证明。 我们证明 $\textsc{Member}(M)$ 属于 $\mathsf{UDyn}\Sigma_2$，其中幺半群是某个正则语言的句法幺半群。由于 $\mathsf{UDyn}\Sigma_2$ 对析取封闭，由事实 6 可得结论。为此，设 Π 为动态程序，ψ_x 为表示输入词各因子求值的公式，如引理 9 所给出。注意，公式ψ_x 给出的是发生变更之前输入词的求值。为了维护 $\textsc{Member}(M)$，我们需要变更之后的求值。假设发生了一次变更 $\textsc{set}_\sigma(i)$。公式

$$\psi_x^\sigma(j,k;i) = \Big[(j < i < k) \wedge \Big(\bigvee_{\substack{y,z \in M \\ y\sigma z = x}} \psi_y(j,i) \wedge \psi_z(i,k) \Big)\Big] \vee \Big[(i \le j \vee k \le i) \wedge \psi_x(j,k)\Big]$$

于是表示变更后的输入词中从位置 $j+1$ 到位置 $k-1$ 的因子求值为 x。由于公式 ψ_x, ψ_y, ψ_z 不处于否定的辖域内，且没有使用其他量词，该公式也属于 Σ_2。

现在，公式

$$\varphi(i) = \exists j,k \Big[\min(j) \wedge \max(k) \wedge \Big(\bigvee_{\substack{v,y,z \in M \\ yvz = x}} W_y(j) \wedge W_z(k) \wedge \psi_v^\sigma(j,k;i) \Big)\Big],$$

其中 $\min(j) = \forall i (i \le j \to i = j)$ 且 $\max(k) = \forall i (i \ge k \to i = k)$，表示对于任意固定的 $x \in M$，变更位置 i发生变化后，w 的求值为 x。该公式仍然只有一次量词交替，且属于 Σ_2。结合 Π的更新公式，我们得到一个用于 $\textsc{Member}(M)$ 的动态 $\mathsf{Dyn}\Sigma_2$ 程序。◀

在本节的其余部分，我们回顾格林关系，并利用它们定义模式 τ_M 中程序 Π 所包含的一元关系，该程序来自引理 9。关于这些关系满足引理 9 中条件 (i) 和 (ii) 的证明，将留待本文的完整版。

格林关系 有限幺半群的局部理论通过考察行为相同的元素集合的性质来研究幺半群的结构。它建立在所谓的格林关系之上，这些关系将整除的概念推广到了任意幺半群。在整数上，整除关系是一个偏序，而对于任意幺半群，格林关系是预序，即自反且传递的关系。固定一个幺半群 M。其 格林预序 定义如下：对于 x，$y \in M$：

- $x \le_{\mathcal{R}} y$ 当且仅当存在 $\alpha \in M$ 使得 $x = y\alpha$，$x \le_{\mathcal{L}} y$ 当且仅当
- 存在 $\alpha \in M$ 使得 $x = \alpha y$，$x \le_{\mathcal{J}} y$ 当且仅当存在 α，$\beta \in M$
- 使得 $x = \alpha y \beta$，$x \le_{\mathcal{H}} y$ 当且仅当 $x \le_{\mathcal{R}} y$ 且 $x \le_{\mathcal{L}} y$。
-

M 的 *Green* 等价类 $\mathcal{R}$、$\mathcal{L}$、$\mathcal{J}$ 和$\mathcal{H}$ 是这些预序的等价类。例如，若且唯若 $x \le_{\mathcal{R}} y$ and $y \le_{\mathcal{R}} x$，两个元素 $x, y \in M$ 在 $\mathcal{R}$ 下等价，记作 $x \mathcal{R} y$。根据定义可得，$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$ 且$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$。注意，在四种 Green 关系中，任意一种$\mathcal{K}$ 都会在$\mathcal{K}$等价类的集合上诱导出偏序。偏序 $\le_{\mathcal{J}}$ 尤为重要：假设某个$\mathcal{J}$等价类 J中有一个元素 x。那么，

对于任意 $y, z \in M$， yxz属于某个$\mathcal{J}$等价类 I，且 $I \leq_{\mathcal{J}} J$。因此，若一个字$w_1 \cdots w_n \in M^*$的某个因子映射为$\mathcal{J}$等价类 J中的某个元素，则整个字映射为等价类 J' 中的某个元素，且 $J' \leq_{\mathcal{J}} J$。对于$\mathcal{R}$等价类和$\mathcal{L}$等价类，也有类似的结论，我们将在全文中反复使用：若元素 x 是另一个元素 y的前缀，即存在 α 使得 $x\alpha = y$，则有 $y \leq_{\mathcal{R}} x$。同样，若 x 是 y的后缀，即存在 α 使得 $\alpha x = y$，则有 $y \leq_{\mathcal{L}} x$。

▶ **例10.** $(\mathtt{aa})^*$ 的句法幺半群是 $\mathbb{Z}_2$，即一个含有两个元素 1 和 a 的循环群，满足 $a \cdot a = 1$。这两个元素是 $\mathcal{H}$-等价的（因此也分别是$\mathcal{R}$-、$\mathcal{L}$-和$\mathcal{J}$-等价的）。事实上，在群中，所有元素总是 $\mathcal{H}$-等价的。

▶ **例11.** $(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\mathtt{a}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$ 的句法幺半群通常记作 U_1。它有两个元素 1 和 a，满足对于每个元素 x， $a \cdot x = x \cdot a = a$。这两个元素属于所有格林关系的不同等价类，并且 $1 \geq_{\mathcal{J}} a$。

▶ **例12.** $(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\mathtt{a}$ 的句法幺半群通常记作 U_2。它有三个元素 1、 a 和 b，满足 a 和 b 是幂等元，且 $a \cdot b = b$ 和 $b \cdot a = a$。元素 a 和 b 是$\mathcal{R}$-等价的（因此也$\mathcal{J}$-等价），但并非$\mathcal{L}$-等价。单位元 1 单独处于其$\mathcal{J}$-等价类中，该等价类的$\mathcal{J}$-序小于 a和 b所属的等价类。

用于表示因子求值的一元辅助关系引理 9 的证明依赖于这样一个事实：有限幺半群只有有限多个 $\mathcal{J}$-类。因此，当我们从左到右对一个字进行求值时，$\mathcal{J}$-类只会发生有限次变化。我们将这一直观想法明确化。下文中，对于一个字 $w = w_1 \cdots w_n \in M^*$，我们用$w[j,k]$ 表示 w中位于索引 j和 k之间的子字 $w_j \cdots w_k$。对于一个元素 x，我们用 $\mathcal{J}(x)$ 表示其 $\mathcal{J}$-类。当上下文清楚时，我们将 M^*中的一个字与其求值等同起来。下面的引理讨论从左到右对一个字 $w \in M^*$ 进行求值，也就是说，按顺序对 w_1、 w_1w_2、 $w_1w_2w_3$、…、 $w_1 \cdots w_n$进行求值。它说明，除去常数次（取决于 M 而不取决于 w）之外，部分求值的 $\mathcal{J}$-类不会发生变化。

▶ **引理 13.** 设 w 是来自 M^* 的一个字，其大小为 n，且 $j \leq n$ 是一个位置。那么存在整数 $j = \ell_0 < \ell_1 < \cdots < \ell_m = n+1$，满足 $m \leq |M|$，使得：
i) 对于 $0 \leq s < m$ 和 $\ell_s \leq i < \ell_{s+1}$， $w[j,\ell_s] \mathcal{J}\ w[j,i]$，**ii)** 对于 $0 \leq s < m-1$，$w[j,\ell_{s+1}-1] \not\mathcal{J}\ w[j,\ell_{s+1}]$。从右向左也有一个对称命题。也就是说，存在整数 $0 = \ell_m < \cdots < \ell_1 < \ell_0 = j$满足 $m \leq |M|$ 使得：**i)** 对于 $0 \leq s < m$ 和 $\ell_{s+1} < i \leq \ell_s$， $w[\ell_s, j] \mathcal{J}\ w[i,j]$，**ii)** 对于 $0 \leq s < m-1$， $w[\ell_{s+1}-1, j] \not\mathcal{J}\ w[\ell_{s+1}, j]$。

引理 9 中所承诺的关系包含了对于每个位置 i 的信息，即将引理 13 的分解应用于 i 所得到的前缀的求值信息。下文中，我们略微滥用记号，写作 $x \geq_{\mathcal{J}} J$，表示 x 的 $\mathcal{J}$-类相对于 $\mathcal{J}$-类的序至少为 J。

令 w为来自 M^*的一个字， i为该字中的一个位置， $y \in M$为 J 的一个 $\mathcal{J}$ 类。令 k 为满足 $y \cdot w[j+1,k] \geq_{\mathcal{J}} J$ 的最大位置。于是，我们将 $R_{\geq J,y}(j)$ 定义为 $w[j+1,k]$ 的求值（注意，这不是 $y \cdot w[j+1,k]$）。类似地，令 k为满足 $w[k,j-1] \cdot y \geq_{\mathcal{J}} J$ 的最小位置。于是，我们将 $L_{\geq J,y}(j)$ 记作 _ _$w[k,j-1]$的求值。当 $y = 1$时，我们简单地记作 $R_{\geq J}$ 和 $L_{\geq J}$。我们还定义 $R_{\geq J,y}$ 和 $L_{\geq J,y}$，表示将 j 纳入区间的变体。注意，如果无法访问后继谓词，就不清楚如何从其中一个计算出另一个。

▶**定义 14**。 令 M 为一个幺半群。模式 τ_M 定义为以下关系集合，其中 x、$y \in M$，且 J 是 M 的一个 $\mathcal{J}$-类：

- $R_{\geq J,\ y,\ x}$ 包含 j 当且仅当 $R_{\geq J,\ y}(j) = x$，$L_{\geq J,\ y,\ x}$ 包
- 含 j 当且仅当 $L_{\geq J,\ y}(j) = x$，$\bar{}$ $\bar{}$它们的变体
- $R_{\geq J,\ y,\ x}$ 以及 $L_{\geq J,\ y,\ x}$。

这些一元关系满足引理 9 的条件 (i) 和 (ii)，详见完整版。利用这些关系来求值因子 $w]j,\ k[$ 的思路是，用它们计算引理 13 给出的 $w]j,\ n]$ 的分解。我们可以通过对位置 $l_0, \ldots, l_m$ 进行存在量化，并使用唯一全称量词检查分解的性质来实现这一点。l_s 之后的第一个 k 使我们能够推导出 $w]j,\ k[$的 $\mathcal{R}$-等价类：事实上，根据分解的定义，$w]j,\ l_s[$与 $w]j,\ k[$ 关于 $\mathcal{J}$等价；由于其中一个是另一个的前缀，这一等价关系可加强为 $\mathcal{R}$-等价。利用引理 13 中从右向左的第二个分解，我们还可以推导出 $w]j,\ k[$的 $\mathcal{L}$-等价类。由此可以确定该因子的 $\mathcal{H}$-等价类，之后还需要进行更复杂的处理，才能精确计算其求值。

4 UDynProp 的正则语言

如果允许使用二元辅助关系，DynFO 的无量词片段 DynProp 足以维护所有正则语言 [4]。本节将刻画：仅允许使用一元辅助关系时，可通过无量词更新公式维护的正则语言。这些语言恰好是由群识别的正则语言。直观地说，群中的计算可以借助逆元在任意时刻逆转。也就是说，如果对 xy 的计算最终得到某个内存状态，就可以恢复计算 x之后的内存状态。我们用 **G** 表示这类语言。

▶ **定理 15** （定理 2 的重述）。 对于任意正则语言 L：$\textsc{Member}(L) \in$ UDynProp 当且仅当 L 的句法幺半群是一个群。

我们首先证明，每个正则群语言都可以在 UDynProp 中维护，所采用的方法是对使用二元辅助关系维护所有正则语言的动态程序进行简单调整。随后，我们证明其他正则语言无法被维护。为此，我们调整 [24]中的一个下界结果，以证明 UDynProp 无法维护正则语言“至少存在一个 a”，然后将这一结果推广到句法幺半群不是群的所有正则语言。

4.1 使用无量词公式维护正则群语言

我们证明，一元辅助关系和无量词更新公式足以维护群的求值问题。定理 15 给出的上界由此得到。

▶**引理 16**。 如果 G 是一个群，那么问题 $\textsc{Member}(G)$、$\textsc{StrictPrefix}(G)$ 和 $\textsc{StrictSuffix}(G)$ 属于 UDynProp。

证明概要。 Gelade 等人 [4] 解释了如何使用二元辅助关系维护所有正则语言的成员关系、严格前缀和后缀。他们的方法可以直接用于维护幺半群中的这些问题。对于每个幺半群元素 g，相应的更新公式使用一个位 Q_g 来指示整个输入是否计算为 g，以及另外三个辅助关系：

- 一个一元关系 P_g，包含所有位置 i，使得截至位置$i-1$ 结束的前缀计算为 g；一个一元关系 S_g，包含所有位置 i，使得从位置$i+1$ 开始的后缀计算为 g；以及一个二元关系 I_g，包含所有位置对（i, j），使得从位置 $i+1$ 开始并在位置 $j-1$ 结束的因子计算为 g。

假设位置 p 处的元素被设置为幺半群元素 g_1。设 i, j 为满足 $i < p-1$ 和 $j > p+1$ 的位置。改变后，从位置 $i+1$ 到位置 $j-1$ 的因子求值为元素 $g_0 \cdot g_1 \cdot g_2$，其中 g_0 是从位置 $i+1$ 到位置 $p-1$ 的因子求值结果，g_2 是从位置 $p+1$ 到位置 $j-1$ 的因子求值结果。给定发生改变的位置 p 以及辅助关系需要更新的位置 i, j，无需使用量词，即可从形如 I_g 的辅助关系中读取元素 g_0 和 g_2。

如果幺半群是群，我们可以按如下方式替换更新公式中的原子公式 $I_g(i, j)$。设 g_w 是整个输入的求值结果，g_p, g_s 分别是截至位置 $i-1$ 的前缀和从位置 $j+1$ 开始的后缀的求值结果。设 g_i 和 g_j 分别是位置 i 和 j 处的元素。给定 i 和 j，无需使用量词，即可从输入和辅助关系中获得所有这些元素。由 $g_w = g_p \cdot g_i \cdot g \cdot g_j \cdot g_s$，对于从位置 $i+1$ 到位置 $j-1$ 的因子的求值 g，我们可得到 g，其形式为 $g = g_i^{-1} \cdot g_p^{-1} \cdot g_w \cdot g_s^{-1} \cdot g_j^{-1}$，因为每个群元素都有逆元。

因此，我们将任意原子公式 $I_g(i, j)$ 替换为公式 $\bigvee_{g=g_i^{-1} \cdot g_p^{-1} \cdot g_w \cdot g_s^{-1} \cdot g_j^{-1}} Q_w \wedge W_{g_i}(i) \wedge W_{g_j}(j) \wedge P_{g_p}(i) \wedge S_{g_s}(j)$，从而得到仅使用至多一元辅助关系的更新公式。结论由此得出。◀

4.2 非群正则语言的下界

我们希望证明引理 16 是最优的，并且句法幺半群不是群的任何语言都无法在 UDynProp 中维护。证明分为三个步骤。首先，我们证明一种特定的正则语言无法在 UDynProp 中维护。然后，我们将这一结果推广，证明对于任何不是群的幺半群，UDynProp 都无法维护其成员资格问题。最后，借助这一类语言已知的闭包性质，我们推导出任何句法幺半群不是群的正则语言都无法维护。

4.2.1 一种不属于 UDynProp 的正则语言

Schwentick 和 Zeume [24] 已经证明，所谓 1 层图的图可达性问题——边只能从起始节点 s 指向某个节点集合 A 中的节点，并从该集合 A 中的节点指向目标节点 t ——不属于 UDynProp。非常类似地，可以证明，在集合中添加或删除元素时，无法在 UDynProp 中维护该集合是否为空。我们调整这一证明，以说明正则语言 $(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\mathtt{a}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$（即字母表 $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ 上的所有包含一个 $\mathtt{a}$ 的字所构成的语言）也不属于 UDynProp。这些问题之间的细微差别在于，字的位置是线性有序的，而集合中的元素则没有顺序。不过，尽管多了这一结构，基本上同样的证明依然成立。我们会进一步详细说明，也因为我们希望在第 5 节调整这些证明技巧。

作为证明技巧，我们使用子结构引理 [4], ，其基本含义是：如果两个子结构（包括它们的辅助关系）同构，并且所做的更改尊重该同构，那么应用无量词更新公式后得到的辅助关系也同构。

我们将其表述得更形式化。对于任意自然数 n，我们用 $[n]$ 表示集合 $\{1, \ldots, n\}$。如果 w 是一个长度为 n的字，I 是 $[n]$ 的子集，且 A 是一组辅助关系，我们用 $(w, \mathsf{A})_{|I}$ 表示将 (w, A) 限制到位置 I所得的结构。设 w、w' 分别是长度为 $n \leq m$ 的字，并设 π 是从 $[n]$ 到 $[m]$的映射。如果 $i < i'$ 蕴含 $\pi(i) < \pi(i')$，我们称 π 为保序映射。若对于变化的任意一对 δ_i、δ'_i，只要 $\delta_i =$ 针对某个符号 σ 和某个位置 j设置了 $\sigma(j)$，就有 $\delta'_i =$针对 $\pi(j)$ 设置了 σ，那么分别作用于 w 和 w'的变化序列 $\alpha = \delta_1 \cdots \delta_\ell$和 $\alpha' = \delta'_1 \cdots \delta'_\ell$称为 π-尊重的。

若 α 是一个更改序列，且 Π 是一个动态程序，我们用 $\Pi_\alpha(w, \mathcal{A})$ 表示对字 w 和辅助关系 $\mathcal{A}$ 应用更改 α 以及来自 Π 的相应更新公式后得到的字与辅助关系对。

▶引理 *17*（子结构引理 [4, 引理 1]）。设 Π 是一个动态 *UDynProp* 程序，$w \in \Sigma^n$ 和 $w' \in \Sigma^m$ 是字母表 Σ 上的两个字。此外，设 A 和 A' 是论域 w 和 w' 上、模式为 Π 的至多一元辅助关系集合。假设存在 $I \subseteq [n]$ 和 $I' \subseteq [m]$，使得 $(w, A)_{|I}$ 和 $(w', A')_{|I'}$ 通过某个保序同构 π 同构。那么，对于任意 π 保持的更改序列 α 和 α'，π 也是从 $\Pi_\alpha(w, A)_{|I}$ 到 $\Pi_{\alpha'}(w', A')_{|I'}$ 的保序同构。

为了通过子结构引理得到一个下界，我们需要找到同构子结构，使得两组保持同构的变更序列会导向在正则语言成员关系上有所不同的字。为找到这样的结构，我们使用 Higman 引理。

▶ **引理 18** (见 [8, 第 6]章)。设 $(w_i, A_i)_{i \geq 1}$ 是由字 $w_i \in \Sigma^i$ 和一元模式上的关系集 A_i 组成的序列，且这些关系定义在 w_i的论域上。存在两个整数$n < m$、一个子集 $I \subseteq [m]$ 以及一个映射 $\pi : [n] \to I$，使得 π 是从 w_n 到 $w_{m|I}$的保序同构。

现在我们证明所需的结果。

▶ **引理 19** （参见 [24, 命题 4.8]）。语言 $(\mathsf{a} + \mathsf{b})^*\mathsf{a}(\mathsf{a} + \mathsf{b})^*$ 不属于 UDynProp。

证明。反设存在一个动态 UDynProp 程序 Π，能够维护 $(\mathsf{a} + \mathsf{b})^*\mathsf{a}(\mathsf{a} + \mathsf{b})^*$。我们考虑序列 $(w_i, \mathsf{A}_i)_{i \geq 1}$，其中 w_i 是字 a^i，A_i 是辅助关系；从大小为 i 的空输入词开始，并将所有位置设为 a后，程序会得到这些辅助关系。根据引理 18，存在 $n < m$、$I \subseteq [m]$ 和 π，使得 π是从 (w_n, A_n) 到 $(w_m, \mathsf{A}_m)_{|I}$的保序同构。

序列 $\alpha = \mathsf{set}_b(1) \cdots \mathsf{set}_b(n)$ 和 $\alpha' = \mathsf{set}_b(\pi(1)) \cdots \mathsf{set}_b(\pi(n))$ 是 π相容的，因此根据引理 17，结构 $\Pi_\alpha(w_n, \mathcal{A}_n)$ 和 $\Pi_{\alpha'}(w_m, \mathcal{A}_m)_{|I}$ 也同构，这意味着 Π 对于字是否属于语言 $(\mathsf{a} + \mathsf{b})^*\mathsf{a}(\mathsf{a} + \mathsf{b})^*$，给出的答案相同。但应用这些更改后，第一个字只包含 b，因此不属于该语言；而第二个字仍至少包含一个a，这与 Π 能够维护该语言的假设相矛盾。◀

4.2.2 UDynProp 无法维护任何正则非群语言

现在，我们将引理 19 的不可维护性结果推广到句法幺半群不是群的所有正则语言。首先，我们注意到，UDynProp 无法维护任何非群幺半群的成员资格问题。

▶ **引理 20.** 如果 M 是一个不是群的幺半群，那么 $\textsc{Member}(M)$ 不属于 UDynProp .

证明。语言 $(a+b)^*a(a+b)^*$ 的句法幺半群 U_1 只有元素 1 和 a，其中 1 是单位元，而 a 充当零元：对于每个 $x \in \{1, a\}$，$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ 且 $a \cdot x = x \cdot a = a$。由于 a 没有逆元，U_1 不是群。由事实 6 和引理 19 可知，Member(U_1) 不属于 UDynProp。

现在假设对于某个任意的非群幺半群 M，问题 Member(M) 属于 UDynProp。我们首先断言，U_1 是 M 的子幺半群。为此，注意到 M 必须有一个元素 x，其幂等幂不是单位元。否则，如果对于每个元素 $x \in M$ 都有 $x^\omega = 1$，那么令 $n > 0$ 选取为使得 $x^n = 1$ 是幂等元的元素。于是 $x \cdot x^{n-1} = x^{n-1} \cdot x = 1$ 成立，因此 x 有逆元 x^{n-1}，所以 M 是一个群，这与假设矛盾。因此，M 有一个不同于 1 的幂等元 e，且 $\{1, e\}$ 是 M 的一个同构于 U_1 的子幺半群。

由于 U_1 是 M 的子幺半群，特别地整除 M，假设 Member(M) $\in$ UDynProp 会导致矛盾，因为根据事实 7，将推出错误命题 Member(U_1) $\in$ UDynProp。◀

现在我们需要将引理 20 从幺半群推广到语言，也就是说，我们需要事实 6 的逆命题。因此，我们必须证明：如果 UDynProp 能够维护某个正则语言，那么它也能维护其句法幺半群的成员资格问题。

我们采用（伪）簇理论，该理论可追溯至 Eilenberg [3]。

设 $\mathcal{L}$ 是字母表 Σ 上的一个正则语言类。若对于任意 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$，$L_1 \cup L_2$、$L_1 \cap L_2$ 和 L_1^c 都属于 $\mathcal{L}$，则称其对布尔运算封闭。若对于任意 $L \in \mathcal{L}$ 和 $\sigma \in \Sigma$，$\sigma^{-1}L = \{w \mid \sigma w \in L\}$ 与 $L\sigma^{-1} = \{w \mid w\sigma \in L\}$ 都属于 $\mathcal{L}$，则称其对商封闭。若对于任意 $L \in \mathcal{L}$，$\mu^{-1}(L)$ 都属于 $\mathcal{L}$，则称其对逆态射封闭；其中 Γ 是任意字母表，$\mu : \Gamma \to \Sigma^*$ 是一个逐字母延拓到 Γ^* 的函数。

若一个正则语言类 $\mathcal{V}$ 对布尔运算、商和逆态射封闭，则称其为*(*伪*)*簇 。我们通常省略“伪”字，直接称这类为“簇”。本文将用到以下结果。

▶ **引理 21** ([3], 参见 [14, 定理 XIII.4。10]). 设 V 是一个正则语言簇，且 M 是某个属于 V 的语言 $L \in$ 的句法幺半群。那么，任何由 M 识别的语言也属于 V。

这意味着，事实 6 的逆命题对 UDynProp 成立。

▶**事实 22**。 设 C 是一个公式类，使得满足 $\textsc{Member}(L) \in$UDyn$C$ 的正则语言 L 构成一个簇。设 L 是一个正则语言，M 是其句法幺半群：

Member(L) $\in$ UDyn$\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ Member(M) $\in$ UDyn$\mathcal{C}$.

证明。 假设$\textsc{Member}(L)$ 属于UDyn$\mathcal{C}$，并且 M 是其句法幺半群。对于每个$x \in M$，幺半群 M 识别所有取值为 x的幺半群元素序列所构成的语言，因此根据引理 21，该语言也属于UDyn$\mathcal{C}$。一个动态 UDyn$\mathcal{C}$ 程序可以为 $\textsc{Member}(M)$维护每个 $x \in M$对应的这些语言。◀

定理 15 的“仅当”方向如下：注意，UDynProp 中的正则语言构成一个簇，因为 UDynProp 显然对布尔运算封闭；此外，根据引理 5，它也对商和逆态射封闭。因此，根据事实 22，如果 UDynProp 能够维护某个正则语言，也能够维护其对应句法幺半群的成员资格问题。然而，根据引理 20，对于任何不是群的幺半群，UDynProp 都无法维护这一问题。

5 UDynΣ_1^+ 的正则语言

本节将刻画仅允许使用一元辅助关系时，能够通过正向 Σ_1-公式维护的正则语言。这里，正向Σ_1-公式是指在量词无关部分中不得使用否定的 $\exists^*$-公式，唯一的例外是可以直接在内置线性序 $\leq$ 前使用否定。

对定理 15 的证明进行考察可以发现，正量词自由公式，因此尤其是 Σ_1^+-公式，能够维护所有由群识别的正则语言。已知 Σ_1^+-公式可以表达由有序幺半群类$\mathbf{J}^+$ 识别的所有正则语言（定义见第 5.1 节）。事实证明，在 UDynΣ_1^+ 中可维护的语言，恰好是由来自花环积 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的有序幺半群识别的语言，其中该花环积由 $\mathbf{J}^+$ 和 $\mathbf{G}$ 构成。直观地说，这一类包含这样的幺半群：先进行“群计算”，随后进行“$\mathbf{J}^+$-计算”（形式化定义见第 5.1 节）。

▶ **定理 23** （定理 3 的重述）。 对于任意正则语言 L:

$\textsc{Member}(L) \in$ UDynΣ_1^+ 当且仅当 L 的有序句法幺半群属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$。

我们将在第 5.2 节证明，每个由 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 识别的正则语言都属于 UDynΣ_1^+。然后，我们将在第 5.3 节证明，其他正则语言无法被维护。为此，我们首先将子结构引理推广到 UDynΣ_1^+，并据此证明语言 $\mathtt{b}^*$ 无法被维护。最后，借助对 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$的刻画，我们证明，如果另一种语言能够被维护，那么语言 $\mathtt{b}^*$也能够被维护。因此，我们将考察带有额外顺序信息的幺半群。

5.1 有序幺半群和花环积

对于第 4 节得到的刻画，我们利用了这样一个事实：UDynProp 中可维护语言构成一个簇，因此可以通过考察其中各语言的句法幺半群来研究。不幸的是，UDynΣ_1^+ 语言类并非一个簇，因为它对取补不封闭：我们稍后会看到，语言 $(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\mathtt{a}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$可以被维护，但其补集 $\mathtt{b}^*$ 无法被维护。由于这两种语言都由同一个幺半群 $U_1 = \{1, a\}$识别，仅凭句法幺半群提供的信息不足以理解 UDynΣ_1^+。

有序幺半群 Pin [12] 提出了一种代数理论，用于研究满足簇的所有要求、但不要求取补封闭的正则语言类。在这一理论中，句法幺半群增添了一个额外的序。有序幺半群是一个对 $(M, \leq)$，其中 M 是一个幺半群，$\leq$ 是 M 上与运算相容的偏序，也就是说，只要 $x \leq y$ 和 $x' \leq y'$，就有 $xx' \leq yy'$。我们用 $\uparrow x$ 表示所有满足 $y \geq x$ 的元素 y 所构成的集合。如果 $P \subseteq M$ 在 $\uparrow$下封闭，也就是说，对于所有 $x \in P$，都有 $\uparrow x \subseteq P$，则称 $P \subseteq M$ 为上集。从 $(M, \leq)$ 到 $(N, \leq)$ 的态射是一个从 M 到 N 的幺半群同态，并且对于所有 $x, y \in M$，如果 $x \leq y$，则 $\varphi(x) \leq \varphi(y)$。借助这一新的态射概念，幺半群中的商、子幺半群和除法概念也可以推广到有序幺半群。

语言 L 可由 $(M, \leq)$ 识别，当且仅当存在一个（幺半群）态射 $\varphi\colon \Sigma^* \to M$ 以及一个上集 P，使得 $L = \varphi^{-1}(P)$。正则语言 L 的句法有序幺半群 $(M, \leq)$由最小自动机的转移幺半群 M 以及一个序关系 $\leq$ 组成，其中$\delta_1 \leq \delta_2$ 对 $\delta_1, \delta_2 \in M$，若存在某个 $\delta_3 \in M$，且对最小自动机的任意状态 q，只要 $\delta_3(\delta_1(q))$ 是接受状态，$\delta_3(\delta_2(q))$ 也必定是接受状态。

▶ **例 24**。 回顾一下， $U_1 = \{1, a\}$ 是 $(a+b)^*a(a+b)^*$ 的句法幺半群，因此也是其补集 b^* 的句法幺半群。不过，这些语言可以通过它们的句法有序幺半群加以区分。令 U_1^+（分别令 U_1^-）为配备序关系 $1 \leq a$（分别配备序关系 $1 \geq a$）的有序幺半群 U_1。那么，U_1^+是 $(a+b)^*a(a+b)^*$ 的句法有序幺半群，而 U_1^-是 b^* 的句法有序幺半群。注意， b^* 不能由U_1^+识别，因为它是 1 的逆像，而 1 不是上集。

一个通过有序幺半群定义的语言类的著名例子是 $\mathbf{J}^+$。

▶**定义 25.** 我们用 $\mathbf{J}^+$ 表示所有满足以下性质的语言组成的类：其句法有序幺半群具有如下性质： $1 \leq x$ 对每个 $x \in M$均成立。

已知[2] [2, 定理 3.4] 该类恰好是可由 Σ_1-公式表示的正则语言类。简单检查证明即可发现，所有公式还都是 Σ_1^+-公式。

有序 wreath 乘积 wreath 乘积的一个成功应用，是将语言分解为更简单的语言，例如 Krohn 和 Rhodes [7]提出的著名分解定理。这类乘积的一种直观理解来自有限状态自动机的级联。假设 $\mathcal{A}_1$ 是一个以 Σ为字母表、状态集为Q的确定性有限状态自动机，而 $\mathcal{A}_2$ 是一个以 $Q \times \Sigma$为字母表的确定性有限状态自动机。输入 w时，它们的级联乘积 $\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1$ 首先用$\mathcal{A}_1$运行过程中到达的状态标注 w。然后将得到的增强字输入$\mathcal{A}_2$ ，以检查是否接受。

这种级联乘积的代数对应物是幺半群的半直积。在这里，我们采用 Pin 和 Weil 引入的有序幺半群版本 [15]。设 $(M, \leq)$ 和 $(N, \leq)$ 是两个有序幺半群。为简化记号，我们采用常见的记号约定，以加法形式表示 M 的运算。[3] $(M, \leq)$ 和 $(N, \leq)$ 的半直积是相对于给定的左作用定义的。$(N, \leq)$ 在 $(M, \leq)$ 上的左作用 $\cdot$ 是一个映射 $(y, x) \mapsto y \cdot x$，其定义域为 $N \times M$，值域为 M，并满足：对任意 x、 $x_1 x_2 \in M$ 以及 y、 y_1、 $y_2 \in N$，以下公理成立：(1) $(y_1 y_2) \cdot x = y_1 \cdot (y_2 \cdot x)$；(2) $y \cdot (x_1 + x_2) = y \cdot x_1 + y \cdot x_2$；(3) $1 \cdot x = x$；(4) $y \cdot 1 = 1$；(5) 若 $x_1 \leq x_2$，则 $y \cdot x_1 \leq y \cdot x_2$；(6) 若 $y_1 \leq y_2$，则 $y_1 \cdot x \leq y_2 \cdot x$。

关于左作用 $\cdot$，$(M, \leq) * (N, \leq)$ 是 $(M, \leq)$ 和 $(N, \leq)$ 的半直积，它是定义在 $M \times N$上的有序幺半群，其运算定义为：对于任意 $x_1, x_2 \in M$和 $y_1, y_2 \in N$，$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + y_1 \cdot x_2, y_1 y_2)$。直积上的序按分量定义，也就是说，$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ 当且仅当 $x_1 \leq x_2$ 和 $y_1 \leq y_2$。

展开较长直积的定义，有助于理解幺半群上的半直积与自动机上的级联积之间的联系。对于 $x_1, \ldots, x_n \in M$和 $y_1, \ldots, y_n \in N$， $M * N$中的积为（利用定义左作用的公理）：

$$(x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n) = (x_1 + y_1 \cdot x_2 + (y_1 y_2) \cdot x_3 + \cdots + (y_1 \cdots y_{n-1}) \cdot x_n, y_1 \cdots y_n) \qquad (1)$$

事实上，在级联乘积中，读取第一个自动机中的一个字母时，转移函数会根据第二个自动机目前已实现的转移函数而改变。读取 i^{th} 字母时，注释由 $y_1 \cdots y_{i-1}$ 决定，而作用 $(y_1 \cdots y_{i-1}) \cdot x_i$ 给出所使用的转移函数。

两个有序幺半群类 $\mathbf{V} * \mathbf{W}$ 的 $M\mathbf{W}$ 花环积包含所有可整除某个如下形式的半直积的有序幺半群：$(M, \leq) * (N, \leq)$，其中 $(M, \leq) \in \mathbf{V}$，且 $(N, \leq) \in \mathbf{W}$。

---

[2] 在该参考文献中，所有序关系都是反过来定义的。特别是，识别是通过 下集 来定义的。[3] 请注意，这并不意味着 M 是交换的。

▶ 备注 26。为求简洁，我们采用了这个 wreath 乘积的定义。尽管该定义已见于文献中，但$\mathbf{V} * \mathbf{W}$ 更常见的定义是：取所有可整除 $M^N \times N$ 的有序幺半群，并赋予特定的序和运算，其中 $(M, \leq) \in \mathbf{V}$，且 $(N, \leq) \in \mathbf{W}$。事实上，当$\mathbf{V}$ 和$\mathbf{W}$都对直积封闭时，这两个定义等价。本文研究的类正是如此，即$\mathbf{J}^+$ 和$\mathbf{G}$。此外，唯一直接用到的 wreath 乘积结果是 [15] 中的定理 4.11（本文将其表述为定理 31）。该文证明了各种定义之间的等价关系（参见其中的命题 3.5；我们的定义是 (1)，另一种定义是 (2)）。

5.2 使用正 Σ_1-公式维护 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 中的正则语言

我们现在将证明，一元辅助关系和正 Σ_1-公式足以维护 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 中有序幺半群的求值问题。定理 23 的上界由下面的事实 27 推出；它是有序幺半群情形下事实 6 的对应结果。对于有序幺半群 $(M, \leq)$，定义 Member$(M, \leq)$ 为这样一个问题：对于一个会发生变化的字 w，维护一个专用位 q_x，使其当且仅当$w \in \uparrow x$ 对每个 $x \in M$ 都成立时取值为 1。

▶**事实 27.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个对 $\vee$ 封闭的公式类。再设 L 是一个正则语言，且 $(M, \leq)$ 是它的句法有序幺半群。那么：

Member$(M, \leq) \in \mathrm{UDyn}\mathcal{C} \Rightarrow$ Member$(L) \in \mathrm{UDyn}\mathcal{C}$。

▶ **引理 28**。 若$(M, \leq) \in \mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$，则$\textsc{Member}(M, \leq)$ 属于$\mathrm{UDyn}\Sigma_1^+$。

证明概要。 我们说明如何维护 $\textsc{Member}(M, \leq)$ 当 $(M, \leq) = (J, \leq) * (G, \leq)$ 在固定左作用下，其中 $(J, \leq) \in \mathbf{J}^+$ 且 G 是一个群。结论由事实 7 得出，该结果可以很容易地推广到有序幺半群。

令 $w = (x_1, g_1) \cdots (x_n, g_n)$ 为输入词，其中 $x_i \in J$ 且对所有 $i \leq n$ 都有 $g_i \in G$。令 $P = \uparrow(p, q) = (\uparrow p, \uparrow q)$ 为 $(M, \leq)$ 的一个上集，其中 $p \in J$ 且 $q \in G$。我们描述如何维护 w 是否在 P 中求值。

根据引理 16，我们可以在 UDynProp 中维护 $g_1 \cdots g_{i-1}$（即 w 在 G 对应分量上的投影的所有严格前缀的求值），以及 $g_1 \cdots g_n$ 是否在 $\uparrow q$ 中求值的信息。相应的更新公式实际上是正的：[4] 中原有的更新公式是正的，而且引理 16 的证明改编不会引入否定。因此，可以使用正量词自由公式维护值 $(g_1 \cdots g_{i-1}) \cdot x_i \in J$。

根据方程 1，我们仍需确定 $x_1 + g_1 \cdot x_2 + (g_1 g_2) \cdot x_3 + \cdots + (g_1 \cdots g_{n-1}) \cdot x_n$ 是否在 $\uparrow p$ 中求值。由于 $(J, \leq)$ 的成员资格问题可以表示为一个 Σ_1^+ 公式 [2, 定理 3]，Σ_1^+ 更新公式可以执行该求值。◀

5.3 不属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的正则语言的下界

我们要证明引理 28 是最优的，并且任何其有序句法幺半群不属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的语言都无法在 $\mathrm{UDyn}\Sigma_1^+$ 中维护。证明分为两步。首先，我们证明正则语言 $\mathtt{b}^*$ 无法在 $\mathrm{UDyn}\Sigma_1^+$ 中维护。然后，我们引入 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的一种刻画，由此可知，如果一种不能被 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 识别的语言能够被维护，那么语言 $\mathtt{b}^*$ 也能够被维护。

5.3.1 一个不属于 UDynΣ_1^+ 的正则语言

我们通过将子结构引理从 DynProp 推广到 UDynΣ_1^+，并将其应用于 b^*，证明语言 b^* 不属于 UDynΣ_1^+。

UDynProp 的子结构引理依赖于无量词公式无法访问同构子结构之外的元素这一性质。我们对该引理作出调整，通过放宽对子结构同构的要求，使其允许在更新公式中使用存在量词。为此，设 (w, A)、(w', A') 分别是长度为 $n \leq m$、并分别用一元辅助关系集合 A、A′ 标注的字。对于 $i \in [n]$，$(w, \mathrm{A})|_i$ 的类型由 w_i 和 A 中所有包含 i 的关系集合构成。设 π 是从 $[n]$ 到 $[m]$ 的映射。若对于所有 $i \in [n]$，$(w, \mathrm{A})|_i$ 的类型都是 $(w', \mathrm{A}')|_{\pi(i)}$ 的类型的子集，我们就称 π 为类型单调；也就是说，若 $R^{\mathcal{A}}(i)$ 成立，则 $R^{\mathcal{A}'}(\pi(i))$ 也成立。在这种情况下，我们称 (w, A) 和 $(w', \mathrm{A}')|_{\pi([n])}$ 经由 π 类型单调。

▶ **引理 29**（UDyn 的子结构引理Σ_1^+）。设 Π 是一个动态 UDynΣ_1^+-程序，$w \in \Sigma^n$ 和 $w' \in \Sigma^m$ 是字母表 Σ上的两个字。进一步，设 A 和 A' 是论域 w 和 w' 上的至多一元辅助关系集合，并且具有模式 Π。

假设存在 $I \subseteq [m]$，使得 (w, A) 和 $(w', A')|_I$ 通过某个保序映射 π而类型单调。那么，对于任意 π-相容的变更序列 α和 α'，π 也是从 $\Pi_\alpha(w, A)$ 到$\Pi_{\alpha'}(w', A')|_I$的类型单调映射。

证明。我们先证明只有一次变更 $\alpha =$（设置$_\sigma$（i））和 $\alpha' =$（设置$_\sigma$（π（i））时$i \in [n]$的情形；一般情形可通过对变更序列的长度应用归纳法得出。

为证明 $\Pi_\alpha(w, \mathrm{A})$ 和 $\Pi_{\alpha'}(w', \mathrm{A}')|_I$ 借助 π 是类型单调的，考虑一个由公式 $\varphi(x; y)$ 定义、在 σ 发生变化时进行更新的一元关系符号 R。假设通过将 $z_1, \ldots, z_k$ 分别选为 $j_1, \ldots, j_k$，$\varphi(j; i)$ 在 (w, A) 中的求值结果为真。那么，将 $z_1, \ldots, z_k$ 分别选为 $\pi(j_1) \ldots, \pi(j_k)$ 后，$\varphi(\pi(j); \pi(i))$ 在 (w', A') 中的求值结果为真，因为 (w, A) 和 $(w', \mathrm{A}')|_I$ 借助 π 是类型单调的，而且 ψ 仅包含正原子。◀

总之，我们以与第 4 节类似的方式应用 Higman 引理。

▶ **引理 30**。语言 $\mathtt{b}^*$ 不属于 UDynΣ_1^+。

证明。反设存在一个动态 UDynΣ_1^+-程序 Π，能够维护 $\mathtt{b}^*$。我们考虑序列 $(w_i, \mathrm{A}_i)_{i \geq 1}$，其中 w_i 是字 $\mathtt{a}^i$，A_i 是在从大小为 i 的空输入词开始并将所有位置设为 $\mathtt{a}$时，Π所获得的辅助关系。根据引理 18，存在 $n < m$、$I \subseteq [m]$ 和 π，使得 π 是从 (w_n, A_n) 到 $(w_m, \mathrm{A}_m)|_I$的保序同构。特别地，这意味着π 在 (w_n, A_n) 和 $(w_m, \mathrm{A}_m)|_I$上是类型单调的。

序列 $\alpha = \mathsf{set}_b(1) \cdots \mathsf{set}_b(n)$ 和 $\alpha' = \mathsf{set}_b(\pi(1)) \cdots \mathsf{set}_b(\pi(n))$ 是 π相容的，因此根据引理 29，结构 $\Pi_\alpha(w_n, \mathcal{A}_n)$ 和 $\Pi_{\alpha'}(w_m, \mathcal{A}_m)|_I$ 也是类型单调的。但由于第一个字在应用这些更改后属于该语言，程序对于第二个字在应用这些更改后也必须给出肯定结果（因为它在答案位上必须是单调的）。这就产生了矛盾，因为第二个字在应用这些更改后不属于该语言。◀

5.3.2 UDynΣ_1^+无法维护任何非 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 正则语言

为了将引理 30 的不可维护性结果推广到所有其句法幺半群不属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的正则语言，我们首先证明 UDynΣ_1^+ 无法维护这类幺半群的成员资格问题，然后将这一结果推广到所有由它们识别的语言。

我们已经看到，使用花环积定义 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$，有助于仅使用低复杂度的公式来设计算法并获得上界。然而，为了理解哪些幺半群不属于该类，Pin 和 Weil [15] 给出的一个等价刻画很有帮助。记 $\mathbf{EJ}^+$ 为这样一类[4] 语言：其句法有序幺半群对每个幂等元 e 都满足 $1 \leq e$。例如，$(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*\mathtt{aa}(\mathtt{a}+\mathtt{b})^*$ 不属于 $\mathbf{J}^+$，但属于 $\mathbf{EJ}^+$；而 $(\mathtt{ab})^*$ 两者都不属于。此外，每个群都属于 $\mathbf{EJ}^+$，因为它们只有一个幂等元，即单位元。

▶ **定理 31** (Pin 和 Weil [15, 定理 4.11])。 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G} = \mathbf{EJ}^+$

这一刻画立即给出 U_1^- 作为不属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的见证。

▶ **引理 32**。 **</style}如果(**$M, \leq) \notin \mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$，那么 U_1^- 整除 $(M, \leq)$。

证明。 根据 $\mathbf{EJ}^+$ 的定义，我们可以找到一个幂等元 $e \in M$ 使得 $1 \not\leq e$。这尤其意味着 e 不等于单位元。我们考虑子幺半群 $(U_1, \leq)$，它属于 $(M, \leq)$，且满足 $U_1 = \{1, e\}$ 并对 $\leq$ 进行分类讨论：

- 如果 $1 \geq e$，那么 $(U_1, \leq)$ 恰好是 U_1^-。如果 1 和 e 不可比较，那么将序 $\leq$ 限制到 U_1
- 上后就是等号关系 $=$。最后注意到，U_1^- 是 $(U_1, =)$ 的一个商，这是由恒等函数得到的。

◀

▶ **引理 33.** 如果 $(M, \leq)$ 是一个不属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的有序幺半群，那么 $\textsc{Member}(M, \leq)$ 不属于 $\mathsf{UDyn}\Sigma_1^+$。

证明。 我们首先注意到 $\mathsf{UDyn}\Sigma_1^+$ 无法维护 $\textsc{Member}(U_1^-)$，这是由事实 27 和引理 19 得出的，并且因为 U_1^- 是语言 $\mathtt{b}^*$ 的有序句法幺半群。

现在反设 $\mathsf{Member}(M, <)$ 属于 $\mathsf{UDyn}\Sigma_1^+$，其中幺半群 $(M, <)$ 不属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$。由引理 32，$U_1^-$ 是 $(M, \leq)$ 的子幺半群，因此由事实 7（将其直接推广到有序幺半群即可；只需注意，上集在态射下的逆像仍是上集），$\mathsf{Member}(U_1^-)$ 属于 $\mathsf{UDyn}\Sigma_1^+$，这与我们之前的观察矛盾。◀

现在，我们需要将前面的有序幺半群引理转化为关于语言的引理，也就是说，我们需要事实 27 的逆命题。为此，我们证明：如果 $\mathsf{UDyn}\Sigma_1^+$ 能够维护一个正则语言，那么它也能够维护该语言的句法有序幺半群的成员资格问题。

为此，我们使用一种不要求对补运算封闭的簇变体。正则语言类 $\mathcal{V}$ 称为正（伪）簇，如果它对正布尔运算、商和逆态射封闭。

正簇的例子包括：当 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ 都是正簇时，$\mathbf{V} * \mathbf{W}$ [15,命题 3.5]。此外，$\mathsf{UDyn}\Sigma_1^+$ 是一个正簇，因为它对正布尔运算封闭（因为 Σ_1^+ 对 $\vee$ 和 $\wedge$ 封闭），并且对商和逆态射封闭（根据引理 5）。Eilenberg 定理可推广到正簇：

▶**定理 34** (Pin [14, 定理 4.12])。 设 V 是一个正则语言的正簇，且 $(M, \leq)$ 是语言 $L \in V$ 的句法有序幺半群。那么，任何由 $(M, \leq)$ 识别的语言也属于 V。

这意味着事实 27 的逆命题对正簇成立。

[4] 注意，Pin 和 Weil 用 $\mathbf{EJ}^+$ 表示，$\mathbf{BG}^+$ 则反之。

▶**事实 35**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个公式类，使得UDyn$\mathcal{C}$ 的正则语言构成一个正簇。设 L 是一个正则语言，且$(M, \leq)$ 是其句法有序幺半群：

$$\textsc{Member}(L) \in \mathsf{UDyn}\mathcal{C} \Rightarrow \textsc{Member}(M, \leq) \in \mathsf{UDyn}\mathcal{C}.$$

证明。假设 Member(L) 属于 UDynC。令 $\varphi : M^* \to M$ 为在 M^* 上计算字的态射，也就是说，它将 $x_1 \cdots x_n$ 映射为 $1 \leq i \leq n$ 对应的 x_i 的直积。对于任意固定的 $x \in M$，注意到 $\uparrow x$ 是 M 的上集。因此，根据定理 34，对于每个 $x \in M$，Member($\varphi^{-1}(\uparrow x)$) 都属于 UDynC。一个用于 Member(M) 的动态程序会用这些程序分别生成一个输出位。◀

定理 23 的“当且仅当”中的“仅当”方向现在就得到了证明。根据事实 35，并且由于 UDynΣ_1^+ 的正则语言构成一个正变种：如果 UDynΣ_1^+ 能够维护某个正则语言，那么它也能维护其有序句法幺半群的成员资格问题。但是，根据引理 33，对于任何不属于 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的有序幺半群，UDynΣ_1^+ 都无法维护这个问题。

6 结论

我们通过（有序）句法幺半群的性质刻画了 UDynΣ_1^+ 和 UDynProp 中的正则语言。DynFO 中最重要且其刻画仍未解决的片段是 UDynΣ_1 （另请参阅本文完整版中的讨论）。

▶ **开放问题**。 哪些正则语言属于 UDynΣ_1，也就是说，哪些正则语言可以通过 $\exists^*$更新公式和一元辅助关系来维护?

UDynΣ_1 的代数刻画面临两个障碍：（1） Σ_1 不关于复合封闭，因此 UDynΣ_1 先验地并非（正）簇；（2）缺乏针对 UDynΣ_1 的下界技术。解决（1）的一条途径是考虑正 lp-簇，它只要求关于正布尔运算以及保长度态射逆元的商封闭。 [16] 对于（2），似乎有必要开发超越子结构引理（及其用于 UDynΣ_1^+ 的变体）的新下界技术。

我们简要讨论 UDynΣ_1 的表达能力。考虑由 Σ_1-公式的布尔组合描述的语言类 $\mathbf{J}$ 。该类等于分段可测试语言类 [21]。通过考察 $\mathbf{J}^+ * \mathbf{G}$ 的无序对应类，我们可以证明 UDynΣ_1 的能力严格强于 UDynΣ_1^+。

▶ **引理 36. </style}如果 是 $\mathbf{J} * \mathbf{G}$ 中的正则语言，那么 $\textsc{Member}(L)$ 属于 UDynΣ_1。**

遗憾的是，$\mathbf{J} * \mathbf{G}$ 并未提供精确刻画，因为语言$\Sigma^*\mathsf{aa}\Sigma^*$ 属于 UDynΣ_1，但其有序句法幺半群不属于 $\mathbf{J} * \mathbf{G}$。

▶**猜想 37. </style}设 V 是满足 Member**(L) 属于 UDynΣ_1 的正 *lp*-簇正则语言 L 。那么 $\mathbf{J} * \mathbf{G} \subsetneq V \subseteq \Sigma_2 * \mathbf{G}$。特别地，$(\Sigma^*\mathsf{aa}\Sigma^*)^c$ 不属于[5] V。

另一个研究方向是探索上下文无关语言类（的片段）。已知每种上下文无关语言都可以在 DynFO 中维护 [4], ，但已知的动态程序需要 Σ_1更新公式和四元辅助关系。

▶ **开放问题**。维护上下文无关语言需要哪些动态资源（量词交替、辅助关系的元数等）？

[5] 请注意，可以使用 MeSCaL 软件 [18]检查 $\Sigma_2 * \mathbf{G}$ 中的非成员关系。

参考文献

1 J. Büchi. 弱二阶算术与有限自动机。《数学逻辑季刊》，6:66–92, 1960. doi:10.1007/978-1-4613-8928-6_22. 2 Volker Diekert、Paul Gastin 和 Manfred Kufleitner. 有限字上一阶逻辑小片段综述。Int. J. Found. Comput. Sci., 19(3):513–548, 2008. doi:10.1142/S0129054108005802. 3 Samuel Eilenberg.《自动机、语言与机器》，B卷。Academic Press Inc, 1976. URL: https://www.sciencedirect.com/bookseries/pure-and-applied-mathematics/vol/59/part/PB. 4 Wouter Gelade、Marcel Marquardt 和 Thomas Schwentick. 形式语言的动态复杂性。ACM Trans. Comput. Logic, 13(3), 2012. URL: 10.1145/2287718.2287719, doi:10.1145/2287718.2287719. 5 J. A. Green. 关于半群的结构。《数学年刊》，54(1):163–172, 1951. URL: http://www.jstor.org/stable/1969317. 6 William Hesse.《动态计算复杂性》。博士论文，马萨诸塞大学阿默斯特分校，2003. 7 Kenneth Krohn 和 John Rhodes. 机器代数理论。一、有限半群与机器的素分解定理。《美国数学会汇刊》，116:450–464, 1965. URL: http://www.jstor.org/stable/1994127. 8 M. Lothaire.《字组合学》。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，第2版，1997. 9 Robert McNaughton 和 Seymour A. Papert.《无计数器自动机》（麻省理工学院研究专著第65号）。麻省理工学院出版社，1971. 10 Sushant Patnaik 和 Neil Immerman. Dyn-FO：一个并行动态复杂性类。《计算机系统科学杂志》，55(2):199–209, 1997. doi:10.1006/jcss.1997.1520. 11 Jean-Eric Pin. BG=PG：一个成功案例。北约ASI系列C：数学与物理科学-高级研究所，466:33–48, 1995. 12 Jean-Éric Pin. 一个无需取补的簇定理。《俄罗斯数学》（Izvestija vuzov. Matematika），39:80–90, 1995. 13 Jean-Eric Pin. 连接层级的桥梁。载于《自动机、语言与编程国际研讨会》第25届会议论文集，ICALP '98，第431–442页，柏林、海德堡，1998. 施普林格出版社。14 Jean-Eric Pin. 自动机理论的数学基础。2014. URL: http://www.irif.fr/~jep/PDF/MPRI/MPRI.pdf. 15 Jean-Eric Pin 和 Pascal Weil. 有序半群的半直积。《代数通讯》，30(1):149–169, 2002. 16 Jean-Éric Pin 和 Howard Straubing. 关于 c-簇的一些结果。《RAIRO：理论信息学与应用》，39(1):239–262, 2010年3月。URL: http://eudml.org/doc/92759. 17 Thomas Place 和 Marc Zeitoun. 基于群的连接层级的分离与覆盖。载于2019年第34届ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会（LICS）论文集，第1–13页，2019. doi:10.1109/LICS.2019.8785655. 18 Thomas Place 和 Marc Zeitoun. 初识 MeSCaL：一个用于解决正则语言成员资格问题的工具。载于Giuseppa Castiglione和Sabrina Mantaci编，《自动机的实现与应用——第29届国际会议，CIAA 2025》，意大利巴勒莫，2025年9月22日至25日，论文集，《计算机科学讲义》第15981卷，第281–298页。Springer，2025. doi:10.1007/978-3-032-02602-6_20. 19 M. P. Schützenberger. 一种编码代数理论。Dubreil研讨班：代数与数论，9:1–24, 1955. URL: http://eudml.org/doc/111094. 20 M.P. Schützenberger. 关于仅含平凡子群的有限幺半群。《信息与控制》，8(2):190–194, 1965. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019995865901087, doi:10.1016/S0019-9958(65)90108-7.

21 Imre Simon。分段可测试事件。载于 H. Brakhage（编），自动机理论与形式语言，第 214–222 页，柏林、海德堡，1975 年。施普林格柏林海德堡。doi:10.1007/3-540-07407-4_23。22 Gudmund Skovbjerg Frandsen、Peter Bro Miltersen 和 Sven Skyum。动态字问题。《*ACM* 杂志》，44(2):257–271，1997 年。网址：10.1145/256303.256309，doi:10.1145/256303.256309。23 Thomas Zeume。小型动态复杂性类。博士论文，多特蒙德工业大学，德国，2015 年。网址：https://hdl.handle.net/2003/34163。24 Thomas Zeume 和 Thomas Schwentick。可达性的无量词动态复杂性。《信息与计算》，240:108–129，2015 年。MFCS 2013。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0890540114001205，doi:10.1016/j.ic.2014.09.011。

第 2 节的证明

▶ **引理 5.** 设 L 是字母表 Σ 上的一种语言，且 Dyn$\mathcal{C}$ $\in \{$UDynProp,UDyn$\Sigma_1^+\}$。若 $\textsc{Member}(L)$ 可在Dyn$\mathcal{C}$ 中维护，则以下性质也成立：
(a) 对于任意映射，Member$(L))$ 均成立：$h : \Gamma \to \Sigma^*$ 以及任意字母表 Γ，**(b)** $\textsc{Member}(L\sigma^{-1})$ 和$\textsc{Member}(\sigma^{-1}L)$对于任意 $\sigma \in \Sigma$。

证明。 设 L 是某个字母表 Σ 上的一种语言，并设 Π是用于Dyn$\mathcal{C}$的动态一元程序 $\textsc{Member}(L)$。
(a) 固定一个映射 $h : \Gamma \to \Sigma^*$，并令 $s \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\gamma\in\Gamma} |h(\gamma)|$ 表示映射 h 的像中字符串的最大长度。我们构造一个动态一元 Dyn$\mathcal{C}$ 程序 Π'，用于 Member$(h^{-1}(L))$，该程序使用以下辅助关系：

- s 一元关系 $Q_{\sigma,\,1}, \ldots, Q_{\sigma,\,s}$，对每个 $\sigma \in \Sigma$ 均有，以及
- s 一元关系 $R_1, \ldots, R_s$，对应于每个 Π 的一元辅助关系 R。

形式为 $Q_{\sigma,\ell}$ 的关系用于存储大小至多为 sn 的字 $h(w)$，其中 $w \in \Gamma^*$ 是当前输入字 Π'，而 n 是输入字的定义域大小。如果 $i \in Q_{\sigma,\ell}$，那么字母 σ 位于 $h(w)$ 的第 $(i-1)\,s+\ell$ 个位置。因此，我们将 $h(w)$ 按每块 s 个位置存储，每个 w 符号对应一个块。如果 $|h(w_i)| < s$，那么直观来说，剩余位置会用 ϵ“填充”。关系 R_ℓ 直接充当针对 L 的、在所维护输入字 $h(w)$ 上的辅助关系 R。

辅助关系按如下方式更新。假设发生了一个变更集$\gamma(i)$。令$\sigma_1 \cdots \sigma_s \stackrel{\text{定义}}{=} h(\gamma)$，其中 $\sigma_j \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$，为存储字 $h(w)$ 中发生变化的符号块。直观来说，Π' 针对相应的变更模拟 Π。由于 s 是常数，因此可以通过对 Π 的更新公式进行少量修改并嵌套应用来实现。

更新公式分阶段构造。第一阶段的公式模拟第一次更改后的更新，将位置 $(i-1)\,s+1$ 处的符号设为 σ_1，具体如下。索引 i 被加入 $Q_{\sigma_1,\,1}$，并从任何其他形式为 $Q_{\sigma',\,1}$ 的关系中移除，这很容易用无量词公式表达。辅助关系 R_ℓ 的公式由 Π 中的更新公式 $\varphi^R_\gamma(x;y)$ 得到，方法是

- 将每个形如 $S(x)$ 的原子公式替换为 $S_\ell(x)$，因为变量 x 表示被更新的位置；将每个形如 $S(y)$ 的原子公式替换为 $S_1(y)$，因为 y 表示被更改的位置；迭代地将每个
- 公式 $\exists z\psi$ 替换为 $\exists z \bigvee_{\ell_z=1,\ldots,s} \psi_{\ell_z}$，其中 ψ_{ℓ_z} 是通过将 ψ 中每个形如 $S(z)$ 的原子
- 公式替换为 $S_{\ell_z}(z)$ 得到的；若满足 $\ell_z > \ell_{z'}$，则将原子公式 $z \le z'$ 替换为 $z < z'$，
- 否则保持不变。
-

对于剩下的 $s-1$ 个阶段，公式的构造方式类似，但凡提及原子公式 R_ℓ 或 $Q_{\sigma,\ell}$ 的地方，都替换为定义上一阶段该关系的公式。

(b) 我们构造一个动态一元 Dyn$\mathcal{C}$ 程序 Π' 来处理 $\textsc{Member}(L\sigma^{-1})$，论证$\textsc{Member}(\sigma^{-1}L)$ 的情况类似。该构造与 (a) 非常相似，但更简单。动态程序 Π' 使用以下辅助关系：

- 两个一元关系 $Q_{\tau,\,1}$ 和 $Q_{\tau,\,2}$ 对应每个 $\tau \in \Sigma$，两个一元关系 R_1 和 R_2 对应
- 每个 R 的 Π一元辅助关系，以及一个额外的一元关系 Max。
-

关系$Q_{\tau,\,1}$ 和 $Q_{\tau,\,2}$ 编码一个字，借此模拟 Π，方式与 (a) 中相同。关系 $Q_{\tau,\,1}$ 将用于存储 w。关系 $Q_{\tau,\,2}$ 将仅用于存储最后一个 σ。

关系 $Q_{\sigma,\,2}$ 初始化为 $\{n\}$，这意味着初始时，符号 σ 写在所维护字的最后位置上。此外，Max 初始化为 $\{n\}$。随后，根据 Π 的更新公式，将关系R_1 和 R_2 初始化为最后一个字母被设为 σ时的相应值。无需对该位置进行存在量化，因为更新公式中涉及变更位置变量 x 的任何原子公式 $x \le y$ 都可以用 Max 替换，而任何原子公式 $R_i(x)Q_{\tau,\,i}(x)$ 都可以分别替换为 $\top$ 或 $\bot$。在变更集$\gamma(i)$中，索引 i 被加入 $Q_{\gamma,\,1}$。关系 R_1 和 R_2 按照 (a) 中的方式维护。由于 w 的变更只会导致关系 $Q_{\tau,\,i}$所表示的字发生一次变更，因此无需复合公式。◀

▶**事实 6.** 设 C 是一个对 $\vee$封闭的公式类。设 L 是一个句法幺半群为 M 且 k 为某个数的正则语言，那么

$$\textsc{Member}(M) \in k\text{-}ary\ \text{Dyn}\mathcal{C} \Rightarrow \textsc{Member}(L) \in k\text{-}ary\ \text{Dyn}\mathcal{C}.$$

证明。假设 Member(M) 属于 DynC，且 L 可由带有态射 φ的某个子集 $P \subseteq M$识别。用于 Member(M) 的动态程序 Π 为每个 $x \in M$ 存储一个位 q_x，记录当前维护的字是否取值为 x 。我们可以通过一个输出位 b 来维护 Member(L)，该位通过对满足 $x \in P$的 q_x 的更新公式进行析取来更新。由于 C 对 $\vee$ 封闭，这个新程序证明 Member(L) $\in$ DynC。◀

▶**事实 7.** 设 C 是一个对 $\vee$ 和 k 任意多个对象封闭的公式类。设 M 是一个幺半群，使得 $\textsc{Member}(M) \in k$-元 Dyn$\mathcal{C}$。则对于每个 N，只要它整除 M，就有$\textsc{Member}(N) \in k$-元 Dyn$\mathcal{C}$。

证明。 取 M 使得 $\textsc{Member}(M) \in$ Dyn$\mathcal{C}$。我们只需证明以下情形的结果： N是 M的子幺半群或商 M。

首先，设 N是 M的子幺半群。这意味着，对 M的元素进行重新标记后，N可以看作是 M的子集。因此，通过使用 Member(M) 的算法，我们可以直接得到用于 Member(N) 的算法。

其次，设 N 是 M 和 μ的一个商： $M \to N$ 是一个满射同态。这意味着，对于每个 $x \in N$，我们都能找到 $y_x \in M$，使得 $\mu(y_x) = x$。我们可以使用针对 Member(M) 的算法，其中输入词 $x_1 \cdots x_n \in N^*$被视为字 $y_{x_1} \cdots y_{x_n} \in M^*$。为此，我们将公式中每个字母关系 W_{y_x} 的出现替换为 W_x，其中 $x \in N$。不属于这种形式的关系 W_y 则替换为假。最后，对于 $x \in N$，通过对 $\varphi^{-1}(x)$ 中所有元素对应的更新公式进行析取，来维护输出位。

◀

这个证明也可以调整为涵盖有序幺半群。唯一的区别在于对商的闭包性，此时我们必须利用有序态射保序这一事实。因此，$\varphi^{-1}(\uparrow x)$ 是一个上集，可以通过对满足 $y \in \varphi^{-1}(\uparrow x)$ 的 $\uparrow y$ 所对应的所有更新公式进行析取来维护。

B 第3节的证明

B.1 引理 13 的证明

▶ **引理 13.** 设 w 是来自 M^* 的一个大小为 n 的字，且 $j \leq n$ 是一个位置。那么存在整数 $j = \ell_0 < \ell_1 < \cdots < \ell_m = n+1$，满足 $m \leq |M|$：

i) 对于 $0 \leq s < m$ 和 $\ell_s \leq i < \ell_{s+1}$，$w[j, \ell_s] \mathcal{J} w[j, i]$，

ii) 对于 $0 \leq s < m-1$，$w[j, \ell_{s+1} - 1] \not\mathcal{J} w[j, \ell_{s+1}]$。

从右向左也有一个对称命题。也就是说，存在整数 $0 = \ell_m < \cdots < \ell_1 < \ell_0 = j$，其中 $m \leq |M|$ 满足：

i) 对于 $0 \leq s < m$ 和 $\ell_{s+1} < i \leq \ell_s$，$w[\ell_s, j] \mathcal{J} w[i, j]$，

ii) 对于 $0 \leq s < m-1$，$w[\ell_{s+1} - 1, j] \not\mathcal{J} w[\ell_{s+1}, j]$。

证明。 我们只证明命题的第一部分，第二部分的证明类似。我们令 $\ell_0 = j$ 并迭代地确定数 ℓ_s，其中 $s > 0$。令 ℓ_{s+1} 为大于 ℓ_s 且满足 $w[j, \ell_{s+1} - 1] \not\mathcal{J} w[j, \ell_{s+1}]$的最小下标。根据定义，性质 ii) 成立。由极大性可知，对于每个 $\ell_s < i < \ell_{s+1}$，都有 $w[j, i-1] \mathcal{J} w[j, i]$。通过归纳法可得 $w[j, \ell_s] \mathcal{J} w[j, \ell_s + 1] \mathcal{J} \cdots \mathcal{J} w[j, \ell_{s+1} - 1]$，从而得到性质 i)。

剩下要证明的是，该过程会在少于 $|M|$ 次迭代内终止。令 $x_s = w[j, \ell_{s+1} - 1]$，对每个 $0 \leq s < m$ 均如此。根据定义，x_s 是 x_{s+1} 的前缀，因此 $x_s \geq_{\mathcal{J}} x_{s+1}$。于是 $x_s \not\mathcal{J} x_s w_{\ell_{s+1}}$，并且不可能 x_{s+1} 和 x_s 属于同一个 $\mathcal{J}$-类。这意味着我们有一条由严格关系构成的链 $x_0 >_{\mathcal{J}} x_1 >_{\mathcal{J}} \cdots >_{\mathcal{J}} x_{m-1}$。这样的链的长度不超过 M 的大小，证毕。◀

B.2 引理 9 的证明

▶**引理 9。** 设 M 是一个有限幺半群。存在一个动态程序 Π，它在模式 τ_M 上维护一元辅助关系，使得

i) Π 仅使用 Σ_2 更新公式，并且**ii)** 对于每个 $x \in M$ 都存在一个 Σ_2 公式 $\psi_x(j, k)$ 定义在 Π 的模式上，当且仅当输入词的因子 $w_{j+1} \cdots w_{k-1}$ 的值为 w 时，该公式成立 x。

我们在 B.2.1 节证明第 ii) 部分，在 B.2.2 节证明第 i) 部分。

B.2.1 证明因子的求值可以用 τ_M 中的关系表示

我们首先证明引理的第 ii) 部分，即 τ_M 中的辅助关系足以表示因子的求值；随后，我们证明这些关系可以用 Σ_2-公式更新。我们将反复用到以下事实：在一个 $\mathcal{J}$-类中，将序关系加强为等价关系。

▶ **事实 38.** 设 $x, y \in M$ 满足 $x \mathcal{J} y$ 且 $x \leq_{\mathcal{R}} y$。则 xRy。对偶地，若 $x \mathcal{J} y$ 且 $x \leq_{\mathcal{L}} y$，则 xLy。

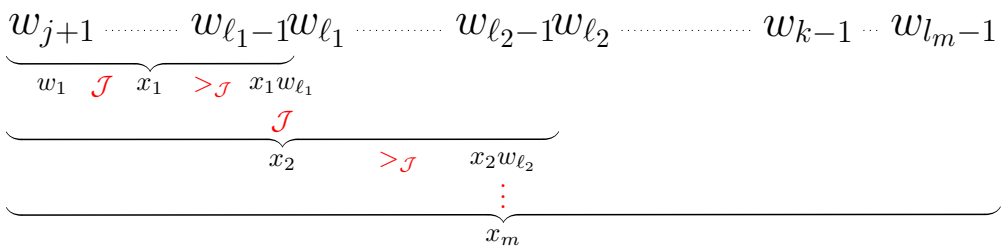


图 1 引理 40 证明中情形的表示

证明。根据定义，若 $x \leq_{\mathcal{R}} y$，则存在 $\alpha \in M$ 使得 $x = y\alpha$。结合另一个假设，可得 $y\mathcal{J}\ y\alpha$。因此，存在 $\beta, \gamma \in M$ 使得 $y = \beta y\alpha\gamma$。于是，我们也有 $y = \beta^2 y(\alpha\gamma)^2$。我们可以重复这一过程，直到左右两边都有幂等元：$y = \beta^\omega y(\alpha\gamma)^\omega$。因此，$y\alpha[\gamma(\alpha\gamma)^{\omega-1}] = \beta^\omega y(\alpha\gamma)^{2\omega} = y$。所以 $y \leq_{\mathcal{R}} y\alpha = x$，这意味着 $x\mathrm{R}y$。◀

B.2.1.1 因子的求值

理解在何种情况下两个幺半群元素的乘积会导致 $\mathcal{J}$-类下降，这一点很重要。Green 引理的第一部分给出了这一结论。

▷ 断言 39（见 [14, Prop V.1.10]）。设 $x, y \in M$ 满足 $x\mathcal{L}y$，且它们都属于 $\mathcal{J}$-类 J。那么对于任意 $z \in M$：

$$xz \in J \Leftrightarrow yz \in J.$$

证明。 该结论具有对称性，因此只需证明一个方向。根据假设，存在 $\alpha \in M$ 使得 $y = \alpha x$。设 $xz \in J$，也就是说 $xz\mathcal{J}x$。由于$xz \leq_{\mathcal{R}} x$ 总是成立，根据事实 38 可得 $xz\mathcal{R}x$。因此存在 $\beta \in M$ 使得$xz\beta = x$。于是，$yz\beta = \alpha xz\beta = \alpha x = y$。这意味着 $yz\mathcal{R}y$，特别是 $yz \in J$，因为 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$。◀

这使我们能够获得一种代数刻画，用于求值因子的$\mathcal{R}$-类和$\mathcal{L}$-类。

▶ 引理 *40.* </style>设 M 是一个幺半群，且 $w \in M^*$。设 $j < k$ 是两个位置，R 是一个 R-类。那么，当且仅当存在 $x_1, \ldots, x_m \in M$ 和 $j = \ell_0 < \ell_1 < \cdots < k \leq \ell_m$，使得 $m \leq |M|$ 时，$w[j+1, k-1]$ 求值为 R 中的一个元素：

i) $x_m \in R$，*ii)* 对于 $1 \leq s < m$，$R_{\geq\mathcal{J}(x_s)}(j) = x_s$，*iii)* 对于 $0 \leq s < m$ 和 $\ell_s < i < \ell_{s+1}$，$L_{\geq\mathcal{J}(x_{s+1})}(i) \cdot w_i \mathcal{J}\ x_{s+1}$，*iv)* 对于 $1 \leq s < m$，$x_s \cdot w_{\ell_s} \not\geq_{\mathcal{J}} x_s$ 和 $x_s \cdot w_{\ell_s} \mathcal{J}\ x_{s+1}$。

对于 L-类，也有类似的结论。

证明。 首先，假设 $w[j+1, k-1]$的计算结果为某个 $x \in R$。令 $j = \ell_0 < \cdots < \ell_{m-1} < k \leq \ell_m$ 其中 $m \leq |M|$ 如引理 13 所述。注意，我们舍弃了 k之后第一个索引之后的所有索引。对于 $1 \leq i \leq m$，令 $x_i = w[j+1, \ell_i - 1]$。情况如图 1 所示。对于 i)，我们注意到 x_m和 x 都与 $\mathcal{J}$-等价于 $w[j+1, \ell_m - 1]$，这是由索引 ℓ_i 的选取以及 x_m的定义得出的。根据定义，$x_m \leq_{\mathcal{R}} x$ 成立，因此由事实 38 可得 $x_m\mathcal{R}x$。

引理 13 的第一个性质断言 $w[j+1,l_s]\mathrm{J}\ w[j+1,l_{s+1}-1]$，这恰好是 iv) 的第二部分。引理 13 的第二个性质表明，对于任意 s，x_s 和 $x_s\cdot w_{l_s}$不为 J-等价。由于 $x_s\cdot w_{l_s}\leq_{\mathcal{J}} x_s$，这推出了 iv) 的第一部分。这也意味着，对于 $i\geq l_s$，任何更靠后的前缀 $w[j+1,i]$ 都不可能在 J 序上大于 x_s（事实上，乘法只会使 J 类降低）。因此，从 $j+1$ 开始，与 x_sJ-等价的最大前缀是 $w[j+1,l_s-1]$，由此得到 ii)。现在证明 iii) 成立。设$1\leq s<m$ 和 $\ell_s<i<\ell_{s+1}$。引理 13 给出 $w[j+1,l_s]\mathrm{J}\ w[j+1,i-1]\mathrm{J}\ x_{s+1}$。令 i'为定义 $L_{\geq\mathcal{J}(x_{s+1})}$ 的索引，使得 $w[i',i-1]$。若 $i'>j+1$，则根据 L的定义，$w_{i'-1}\cdot w[i',i-1]$ 不大于 x_{s+1}（按 J 序）。但是，$w_{i'-1}\cdot w[i',i-1]$ 是 $w[j+1,i-1]$的一个后缀，且属于 J (x_{s+1})。这就产生了矛盾，因为乘法只会使 J 类降低。因此 $i'\leq j+1$。根据定义，$w[i',i-1]$ 在 J 序上大于 $x_{s+1}\mathrm{J}\ w[j+1,i-1]$。反过来也成立，因为 $w[j+1,i-1]$ 是 $w[i',i-1]$的后缀：二者 J-等价。由事实 38，它们在 L 序下可比较（其中一个是另一个的后缀），因此它们 L-等价。引理 13 给出 $w[j+1,i-1]w_iJx_{s+1}$，故由断言 39 得出结论。

反过来，假设性质 i) 至 iv) 均成立。通过归纳法，我们证明对于每个 s，$w[j+1,\ell_s-1]$ 都是 $w[j+1,|w|]$ 中可在 J (x_s) 中求值的最长前缀，且其求值结果为 x_s。我们再对 $\ell_s<i\leq\ell_{s+1}$ 进行嵌套归纳，以证明 $w[j+1,i-1]$ 属于 J (x_{s+1})。根据 iv) 的第二部分，假设 $i=\ell_s+1$ 这一情形成立。现在假设 $w[j+1,i-1]$ 属于 J (x_{s+1})。由此可得，对于定义 $L_{\geq\mathcal{J}(x_{s+1}}$的索引 i'，有 $i'\leq j+1$，其中 $w[i',i-1]$。根据定义，$w[i',i-1]$ 在 J 的次序下大于 x_{s+1}；而根据嵌套归纳假设，x_{s+1}与 $w[j+1,i-1]$ 本身是 J-等价的。此外，$w[j+1,i-1]$ 也是$w[i',i-1]$ 的后缀，因此反向关系也成立。于是，$w[i',i-1]$ 和 $w[j+1,i-1]$ 是 J-等价的，但其中一个是另一个的后缀，因此根据事实 38，它们还是 L-等价的。根据断言 39，$L_{\geq\mathcal{J}(x_s)}(i)\cdot w_i$ 属于 J (x_s)，意味着 $w[j+1,i]$ 属于 J (x_s)。至此，嵌套归纳完成。根据 iv)，$w[j+1,\ell_{s+1}]$ 不属于 J (x_{s+1})。因此，根据 ii)，从 $j+1$ 开始、在 J 的次序下大于 x_{s+1} 的最长字必定是 $w[j+1,\ell_{s+1}-1]$，其求值结果为 x_{s+1}。至此，归纳完成。由于 x_m 与 $w[j+1,k-1]$ 的求值结果 R-等价（根据事实 38），证明得证。

◀

这立即给出了一个用于计算因子的公式。

▶ **推论 41.** 设 M 是一个幺半群，且 $w\in M^*$。对于 M 的每个 R-类 R，存在一个Σ_2-公式 $\psi_R(j,k)$，其定义在 τ_M上，当且仅当 $w[j+1,k-1]$ 的计算结果属于 R时，该公式成立。

对于 L-类也有类似的结论，给出公式 $\psi_L(j,k)$。

证明。 公式 ψ_R是对所有满足 $x_1,\ldots,x_m\in M$的 $x_m\in R$取析取。随后，它对位置 $\ell_0,\ldots,\ell_m$进行存在量化，并检查以下条件：

- $j=\ell_0<\ell_1<\cdots<k\leq\ell_m$，对于每个 $1\leq s<m$, $R_{\geq\mathcal{J}(x_s)\,x_s}(j)$,
- 对于每个 $0\leq s<m$, $\forall\ell_s<i<\ell_{s+1}$, $\bigvee_{y\cdot z\mathcal{J}(x_s)}\ L_{\geq\mathcal{J}(x_s)\,y}(i)\ \wedge W_z(i)$,
- 对于每个 $1\leq s<m$, $\bigvee_{x_s\cdot y\not\geq_{\mathcal{J}}\mathcal{J}(x_s)}W_y(\ell_s)$。其正确性由引理 40 给出。

◀

这样我们就能找到每个因子的$\mathcal{R}$类和$\mathcal{L}$类，但无法确定$\mathcal{H}$类中的确切元素。要做到这一点，我们需要 Green 引理的第二部分。

▷ 命题 42（参见 [14, Prop V.1.10]）。设 $x, z \in M$，使得 x 和 xz 分别属于 H_1和 H_2这两个$\mathcal{H}$类。假设 H_1 和 H_2 属于同一个$\mathcal{J}$类，则函数

$$m_z : \begin{cases} H_1 & \to & H_2 \\ y & \mapsto & yz \end{cases}$$

定义良好，且是一个双射。

证明。 注意，根据事实 38，由于 $xz \leq_{\mathcal{R}} x$ 始终成立，我们有 $xz\mathcal{R}x$。

首先，我们需要证明，对于每个 $y \in H_1$，像 $m_z(y) = yz$ 属于 H_2。一方面，x 和 y 特别地是 $\mathcal{L}$- 等价的，因此存在 α，$\beta \in M$，使得 $\alpha x = y$ 和 $\beta y = x$。因此 $\alpha xz = yz$ 和 $\beta yz = xz$，这意味着 $xz\mathcal{L}yz$。另一方面，$yz \leq_{\mathcal{R}} y$ 和 $yz\mathcal{J}y$（由前一点可知）。根据事实 38，我们有 $yz\mathcal{R}y$。因此，存在一个等价链 $yz\mathcal{R}y\mathcal{R}x\mathcal{R}xz$。综上可知，$yz\mathcal{H}xz$，进而属于 H_2。

剩下的就是证明 m_z 是一个双射。由于 $xz\mathcal{R}x$，存在 $t \in M$ 使得 $x = xzt$。我们考虑函数 $m_t : H_2 \to H_1; x \mapsto xt$，按照与之前相同的理由，该函数是良定义的。对于 $y \in H_1$，取 α 使得 $\alpha x = y$。我们有 $m_t(m_z(y)) = yzt = \alpha xzt = \alpha x = y$。类似地，对于所有 $y \in H_2$，都有 $m_z(m_t(y)) = y$。因此，m_z 和 m_t 互为逆元，并且 m_z 是一个双射。◀

▶ **引理 43.** 设 M 是一个幺半群，且 $w \in M^*$。设 $j < k$ 和 H 分别是两个位置和 J-类 J中的一个 H-类。设 t 是 H中的任意元素。若 $w[j+1, k-1] \in H$，则 $w[j+1, k-1] = m_z^{-1}(R_{\geq J}(j))$，其中 $z = \bar{R}_{\geq J,\, t}(k)$，且 m_z 是命题 *42* 中定义的函数。

证明。 假设将 $R_{\geq J}(j)$ 定义为 $w[j+1, i]$的求值结果。则必然有 $i \geq k$ as$w[j+1, k-1]$ 已经在 J 中完成求值。令 $w = xyzt$ 满足 $x = w[1, j]$、$y = w[j+1, k-1]$、$z = w[k, i]$ 和 $t = w[i+1, |w|]$。因此 $R_{\geq J}(j) = yz$。此外，对于任意 $y' \in H$，尤其是对于 $y' = y$ 或 $y' = t$，在 中有 $R_{\geq J,\, y'}(k) = z$。事实上，令 i' 为满足以下条件的最大索引：$y' \cdot w[k, i']$ 求值为一个大于 J 的 $\mathcal{J}$ 类。根据断言 42，$y'z$ 与 yz 是 $\mathcal{H}$-等价的，因此 $i' \geq i$。此外，$yzw_{i+1} \notin J$，故根据断言 39 有 $y'zw_{i+1} \notin J$，从而得到 $i' = i$。

最后，命题 42 告诉我们，m_z 是从 H 到 yz的$\mathcal{H}$类的一个双射。因此，既然我们现在知道了 z 和 yz的值，就可以用公式$y = m_z^{-1}(yz)$求出所需的 y 值。◀

我们终于证明引理的第二部分 9.

▶ **推论 44.** 设 M是一个幺半群，且 $w \in M^*$。对于每个 $x \in M$，都存在一个 Σ_2-公式$\psi_x(j, k)$，其定义在 τ_M 上，当且仅当 $w[j+1, k-1]$ 求值为 x 时成立。

证明。 令 R 和 L 分别为 $\mathcal{R}$-类和 $\mathcal{L}$-类 x，并令 $\psi_R(j, k)$，$\psi_L(j, k)$ 为推论 41 给出的公式。利用这些公式，我们可以确定$\mathcal{H}$-类；求值结果为$w[j+1, k-1]$：它是 $H = R \cap L$。令 t 为 H 中的任意元素。为了进一步确定该$\mathcal{H}$-类中的元素，我们使用引理 43。这给出了公式：

$$\psi_x(j, k) = \psi_R(j, k) \wedge \psi_L(j, k) \wedge \bigvee_{x = m_z^{-1}(y)} R_{\geq J, y}(j) \wedge \bar{R}_{\geq J, t, z}(k).$$

公式 ψ_x 是由 Σ_2 中的公式构成的有限布尔组合，且不含否定，因此也属于 Σ_2。◀

B.2.2 证明可以维护 τ_M 中的关系

现在证明引理 9 的第 i) 部分。为此，我们使用上一小节中介绍的用于计算因子的公式。

▶ **引理 45.** 对于任意幺半群 M， τ_M 中的关系都可以用 Σ_2 公式维护 .

证明。 我们只证明 $R_{\geq J,y,x}$ 的情形，其中 J 是 M 的某个 $\mathcal{J}$-类，且 $x, y \in M$； L 的情形以及带横线的版本证明类似。设 ψ_x^σ 是定理 8 的证明中给出的、经过修改后用于因子求值的公式。假设出现了一个操作集 $\sigma\,(i)$ 。更新公式只需找出因子属于 J 的最大位置：

$$\varphi_\sigma^{R_{\geq J,y',y}}(j;i) = \exists k > j \Big[\bigvee_{\substack{y=tz \;\; y'tz \geq_{\mathcal{J}} J \\ y'tzt' \not\geq_{\mathcal{J}} M}} \psi_y^\sigma(j,k;i) \wedge W_t(j) \wedge W_{t'}(k) \Big].$$

由于只使用了存在量词，且 Σ_2-公式 ψ_y^σ 不在否定的作用域内，因此整个公式也属于 Σ_2。 ◀

C 第 5 节的证明

▶**事实 27.** 设 C 是一个在 $\vee$ 下封闭的公式类。进一步设 L 是一个正则语言，且 $(M, \leq)$ 是其句法有序幺半群。那么：

$$\textsc{Member}(M, \leq) \in \mathsf{UDyn}\mathcal{C} \Rightarrow \textsc{Member}(L) \in \mathsf{UDyn}\mathcal{C}.$$

证明。 假设 Π 是一个用于 M 的动态程序，它在辅助位 $w \in \uparrow x$ 中存储 q_x 对所有 $x \in M$是否成立。那么 $\textsc{Member}(L)$ 可以通过添加一个新的辅助位 q来维护，该辅助位以 q_x 对应于 $x \in P$ 的更新公式的析取进行更新。事实上，由于P是一个上集，它是 $\uparrow x$ 对应于 $x \in P$的并集。 ◀

D 讨论：UDynΣ_1 的正则语言

我们讨论 UDynΣ_1 的代数刻画方法，并在正文讨论的基础上进一步展开。UDynΣ_1 的代数刻画面临两个障碍：（1） Σ_1 在复合下不封闭，因此 UDynΣ_1 先验地并非一个（正）簇；（2）缺乏针对 UDynΣ_1 的下界技术。解决（1）的一种途径是考虑正 lp-簇，它只要求在正布尔运算以及保长度态射的逆元之商下封闭。对于（2），似乎有必要发展超越子结构引理（及其用于 UDynΣ_1^+ 的变体）的新下界技术。

在本节的其余部分，我们首先讨论目前所知的关于 UDynΣ_1 表达能力的内容，然后提出一些关于为何 lp-簇可能有助于刻画 UDynΣ_1 的想法。

D.1 UDynΣ_1 的表达能力。

我们简要讨论 UDynΣ_1 的表达能力。考虑语言类 **J** ，其中的语言可以表示为 Σ_1-公式的布尔组合，即形如 $\Sigma^* a_1 \Sigma^* \cdots \Sigma^* a_k \Sigma^*$ 的语言的布尔组合，其中 $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$。该类等于分段可测试语言类 [21]。

接下来我们将证明，UDynΣ_1 足以维护 $\mathbf{J} * \mathbf{G}$ 中的所有正则语言。这个类也可以等价地刻画为群单项式的布尔组合，

也就是说，形如 $L_1a_1L_2\cdots a_nL_{n+1}$ 的语言，其中 $a_1,\ldots,a_n\in\Sigma$ 和 $L_1,\ldots,L_{n+1}$ 是由有限群识别的 Σ^* 上的语言 [11, 定理 6.1]。

▶ **引理 36.** 如果 L 是 $\mathbf{J}*\mathbf{G}$中的正则语言，那么 $\textsc{Member}(L)$ 属于 $\mathsf{UDyn}\Sigma_1$。

证明。我们知道， L 是群单项式的布尔组合。我们可以将否定推到叶节点，并利用 $\mathsf{UDyn}\Sigma_1$ 对正布尔运算封闭这一性质。因此，我们只需处理 L 等于 $L_1a_1L_2\cdots a_nL_{n+1}$ 的情形，其中对于 $1\leq i\leq n+1$， L_i 由群 G_i识别；或者处理其补集的情形。我们先考虑第一种情况。令 G 为所有 G_i的直积：显然，它能识别所有具有某个态射 μ的 L_i 。 L 的前缀子单项式是形如 $L_1a_1\cdots L_ka_k\mu^{-1}(g)$ 的语言，其中 $0\leq k\leq n$ 和 $g\in G$满足相应条件。类似地， L 的后缀子单项式是形如 $\mu^{-1}(g)a_kL_{k+1}\cdots a_nL_{n+1}$ 的语言，其中 $1\leq k\leq n+1$和 $g\in G$满足相应条件。我们使用若干辅助关系：

- $P_{k,\ g}$ 包含 StrictPrefix(L')，其中 L' 是 L 与k 相关联的前缀子单项式，且 $gS_{k,\ g}$ 包含 StrictSuffix(L')，其中 L' 是与 L 和 k相关联的后缀子单项式，且 g

注意，$P_{0,\ g}$ 和 $S_{n+1,\ g}$ 分别包含 StrictPrefix(G) 和 StrictSuffix(G)，并且可以用引理 16 维护。令集合$_a$(i)发生一次改变。存在一个无量词公式 $\varphi_g^a(j,k;\,i)$，用于表示新的因子 $w_{j+1}\cdots w_{k-1}$的值是否为 g。它使用已经维护的 $P_{0,g}$ 。我们描述如何在此改变下更新 $P_{k,g}$ (j)（另一种情况是对称的），其中 k,j 和 g。这可以通过一个公式完成：该公式对 $1\leq x_1<\cdots<x_k<j$进行存在量化，并断言：(1) 每个位置 x_l上都有一个字母 a_l；(2) 对于每个 $0\leq l<k$，存在某个 $h\in\mu(L_l)$使得 $\varphi_h^a(x_l,x_{l+1};i)$ 成立；以及 (3)$\varphi_g^a(x_k,j;i)$ 成立。

现在，答案位通过对以下内容进行析取来维护：

- 所有 $1\leq k\leq n$，以及所有 $g\in\mu(L_k)$ 和 $g'\in\mu(L_{k+1})$，其中的 $P_{k-1\ g}\wedge S_{k+1,\ g'}$、
- 所有 $1\leq k\leq n+1$，以及所有 $g\cdot\mu(a)\cdot g'\in\mu(L_k)$，其中的 $P_{k\ \ g}\wedge S_{k,\ g'}$。

事实上，如果 w在 L中，则存在一个因式分解 $w=w_1a_1w_2\cdots a_nw_{n+1}$，其中有 $w_k\in L_k$。于是，要么某个 a_k 落在位置 i ，要么不落在该位置。第一种情况由公式的第一部分检测，第二种情况由公式的第二部分检测，因为从位置 i开始的严格前缀和后缀不会因该变化而改变。

请注意，答案位由无量词公式维护。因此，对于群单项式的补集，我们只需使用相同的动态程序，并将答案位的公式取反。◀

有人可能会猜想，$\mathbf{J}*\mathbf{G}$ 给出了精确刻画。遗憾的是，事实并非如此，因为语言 $\Sigma^*\mathtt{aa}\Sigma^*$ 属于 $\mathsf{UDyn}\Sigma_1$（见例4），但其有序句法幺半群不属于 $\mathbf{J}*\mathbf{G}$。

然而，我们猜想，除了 $\Sigma_2*\mathbf{G}$之外，不可能有更强的表达能力；其中Σ_2 是能够识别由 $\Sigma_2[<]$ 句子定义的语言的有序幺半群的正变种。

▶**猜想 37.** 设 V 是满足以下条件的正则语言正 lp-簇： L $\textsc{Member}(L)$属于$\mathsf{UDyn}\Sigma_1$。那么$\mathbf{J}*\mathbf{G}\subsetneq V\subseteq\Sigma_2*\mathbf{G}$。特别地，$(\Sigma^*\mathtt{aa}\Sigma^*)^{\mathsf{c}}$ 不属于[6] V。

[6] 请注意，可以使用 MeSCaL 软件 [18]检查是否不属于 $\Sigma_2*\mathbf{G}$ 。

这个问题颇具挑战性。下界很少，而类 $\Sigma_2 * \mathbf{G}$ 尚未得到充分理解。尽管已知它对应于基于群的连接层次 [13], 的 3/2 层，且可判定 [17], ，但是否能像许多其他情形一样简化为 $\mathbf{E}\Sigma_2$，尚不清楚。此外，UDynΣ_1 在 $\Sigma_2 * \mathbf{G}$中的计算能力似乎十分微妙；这从它不是一个簇、而是一个研究较少的 lp-簇这一事实便可见一斑，因此难以对其进行精确定位。

D.2 为 UDynΣ_1^+量身定制的簇

如上所述，UDynΣ_1 并非先验地构成一个簇，因为 Σ_1 对复合不封闭。因此，引理 5 无法推出其对逆态射封闭。尽管如此，该引理的证明思路仍可推出其对商封闭，也可推出其对保长度态射 h封闭：可以证明 $\Gamma \to \Sigma$ 。

这促使我们为这些较弱的闭包性质寻找簇理论。事实证明， [16]中已经研究过这类簇。若一个语言类对正布尔运算以及保长度态射的逆元的商封闭，则称其为 正 *lp*-簇 。

►**事实 46**。 在 UDynΣ_1 中可维护的语言类是一个正 *lp*-簇。

与簇不同，lp-簇可能不包含句法有序幺半群相同的两个语言。

▶ 例 47。考虑正则语言类 M L，其中语言的成员关系只取决于长度，也就是说，对于所有满足 $|w| = |w'|$ 的 w、w'，我们都有 $w \in L$ 当且仅当 $w' \in L$。显然，M 对布尔运算和商封闭。根据定义，保长度态射会保持字的长度，因此 M 也对保长度态射封闭。然而，考虑 $L = ((\mathtt{a}+\mathtt{b})(\mathtt{a}+\mathtt{b}))^* \in \mathrm{M}$ 和 $\mu\colon \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$，它们由 $\mu(a) = a$ 和 $\mu(b) = aa$ 定义。于是 $L' = \mu^{-1}(L) = (\mathtt{b}^*\mathtt{a}\mathtt{b}^*\mathtt{a}\mathtt{b}^*)^*$ 不属于 M。这说明 M 不是一个簇，而是一个 lp-簇。

但是， L 和 L' 的句法幺半群都是群 $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ 。要从代数上区分它们，我们必须考察识别它们的态射。事实上， L 由$\mu(a) = \mu(b) = 1$ 识别，而 L' 由 $\mu(a) = 1$ 和 $\mu(b) = 0$识别。

这促使我们使用更精细的句法对象，以保留关于语言的更多信息。有序印章是一个态射 $\mu\colon \Sigma^* \to (M, \leq)$，其中 Σ 是一个有限字母表，而 $(M, \leq)$ 是一个有限有序幺半群。设 L 是一个正则语言，并回顾一下，句法有序幺半群 $(M, \leq)$ 定义为 $\delta(\Sigma^*)$，其中 δ 是 L 的最小自动机的转移函数。我们将句法有序印章定义为态射$\mu\colon \Sigma^* \to (M, \leq)$，使得对于每个 $a \in \Sigma$、 $\mu(a)$，都有 $= \delta(a)$。引理 21 和定理 34 也有相应的结论。

▶ **引理 48** ([16,定理 5。1])。 设 V 是一个正则语言的正 *lp*-簇，并设μ 是语言 $L \in V$ 的句法有序印章。那么，任何由 μ 识别的语言也属于 V。

因此，正 lp-变种与句法有序印章相结合，或许是刻画 UDynΣ_1^+ 的良好起点。