arXiv:2601.18436v1 [math.MG] 26 Jan 2026

单纯形和立方体的极值体积投影

CHRISTOS PANDIS

Abstract. 令 Δ_n 和 Q_n 分别表示边长为 $\sqrt{2}$ 、嵌入于 $\mathbb{R}^{n+1}$中的正则 n单纯形，以及位于 $\mathbb{R}^n$中的单位体积立方体。我们推导出 Δ_n的超平面体积投影的闭式公式，并由此得到取得极值体积的方向。此外，我们重新考察了 Q_n的极值平面投影问题。我们还在 L_p投影体的框架下给出推广。

1. Introduction and Results

对凸体低维截面与投影的研究，是渐近几何分析和高维几何中的核心课题。这推动了各种分析、几何和概率技术的发展及其相互交融。有趣的是，研究方法往往因研究截面还是投影而异：涉及截面的问题通常更依赖分析工具，而投影问题则常涉及更多代数和组合方法。鉴于相关主题的文献浩如烟海，我们建议感兴趣的读者参阅近期的综合综述 [22], ，以及 [28]中专门讨论立方体的内容，以了解详细的历史脉络、当前研究进展以及诸多引人入胜的开放问题。全文中，我们用 Δ_n 表示边长为 $\sqrt{2}$、嵌入于 $\mathbb{R}^{n+1}$中的正则n维单纯形， $B_1^n = \mathrm{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的交叉多面体，并用 $B_\infty^n = [-1,1]^n$表示立方体。立方体通常采用体积为 1 的归一化，因为 $Q_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$。

1.1. 单纯形的超平面投影的极值方向 Δ_n。

令 Δ_n 表示边长为 $\sqrt{2}$ 的正则 n 维单纯形，我们将其视为嵌入在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 $\mathcal{H} = \left\{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^- = 1\right\}$ ，即

$$\Delta_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n+1} x_j = 1 \right\}.$$

所关注的问题可描述如下：求

$$\max_H / \min_H \, \mathrm{vol}_{n-1}\left(\mathrm{Proj}_H \, \Delta_n\right),$$

其中，最大值（分别地，最小值）是在所有相对余维数为一的仿射子空间 H of $\mathcal{H}$ 上取得的。由于投影体积在平移下保持不变，我们可以假设这些子空间经过重心 bar(Δ_n)。每个这样的超平面都可以通过取 H 与原点的仿射包，扩展为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个余维数为 1 的子空间，从而得到一个满足 a 的超平面 $a^\perp$

Date: 2026年1月27日。

位于 $\mathcal{H}' = \left\{\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\right\}$。与相应的截面问题（见 [25]）的主要区别在于，重心条件并非先验地施加，而是自然产生的。因此，该问题可改写如下：

$$\max_{a\in\mathcal{H}'\cap S^n} / \min_{a\in\mathcal{H}'\cap S^n} \operatorname{vol}_{n-1}\left(\operatorname{Proj}_{a^\perp\cap\mathcal{H}}\Delta_n\right).$$

Martini 和 Weissbach 在 [27] 中证明，包含最小投影的超平面的法向量与Δ_n 的一条棱平行（见 [27, 第 164-166] 页），而最大的超平面投影是一个带偶数权重的 1-单形的变换（见 [27, 第 165] 页和 [10]）。换言之， Δ_n的最大（$n-1$）维体积可通过沿其任意 $\binom{n+1}{2}$个面的法向量之和的方向投影得到（若 n为奇数）；若 n 为偶数，则沿任意 $\binom{n}{2}$ 个或 $\binom{n+2}{2}$ 个面的法向量之和的方向投影即可。例如， Δ_4 的最大三维投影可沿方向 $a = \frac{1}{\sqrt{30}}(-3, -3, -2, 2, 2)$得到，且该投影位于 $\mathbb{R}^5$ 中与张成空间$\{a, (1, 1, 1, 1, 1)\}$正交的三维平面上。

采用另一种方法， [19] Martini 和 Weissbach 证明，对于任意的 d单纯形S $(d \geqslant 2)$ 以及每个方向 $a \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$\frac{\operatorname{vol}_{d-1}\left(\operatorname{Proj}_{a^\perp} S\right)}{g(DS, a)} = d\operatorname{vol}_d(S), \tag{1.1}$$

其中 $g(K,a) := \min\{\rho > 0 : a \in \rho K\}$ 是距离函数，而 $DK := K - K$ 是差体。他们依据这样一个事实：$g_{DK}(\cdot, a)$ 和 $b(K,a)$ 的极值相同，其中 $b(K,a) := h_K(a) + h_K(-a)$ 表示凸体 K 沿方向 a的宽度，也就是说，$\max b(K,a) = \max g_{DK}(\cdot, a)$，且 $\min b(K,a) = \min g_{DK}(\cdot, a)$。因此，可以利用宽度 $b(S,a)$ 建立界。关于 (1.1) 的一般刻画，见 [18]；关于单纯形的极值宽度，见 [1, 13, 15, 26]。

据猜想，正则单纯形在某些正交互补子空间上的投影分别具有最小和最大体积。

猜想 1.1（Filliman [10], 或见 [22]）。固定 $1 \leq k \leq n$。设 H_* 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维子空间，使得 $T_* = \operatorname{Proj}_{H_*}(\Delta_n)$ 是一个 k维单纯形，且 Δ_n 的顶点仅投影到 T_*的顶点上，并尽可能均匀地分布：对于每个 $i \leq k+1$，令 w_i 表示投影到 T_*的顶点 i 上的 Δ_n 的顶点数，则有

$$w_i = \begin{cases} \ell + 1, & 1 \leq i \leq r, \\ \ell, & r < i \leq k+1, \end{cases}$$

其中，我们将 $n+1$ 除以 $k+1$，余数为 $r \in \{0, \ldots, k\}$, $n+1 = (k+1)\ell + r$。该 n

$$\min_{\substack{H\subset\mathbb{R}^n \\ \dim H = k}} \operatorname{vol}_k(\operatorname{Proj}_H(\Delta_n)) = \operatorname{vol}_k(T_*).$$

此外，有猜想认为，多面体 $T^* = \operatorname{Proj}_{H_*^\perp}(\Delta_n)$ 能使投影到 $n-k$ 维子空间上的投影体积达到最大，

$$\max_{\substack{H\subset\mathbb{R}^n \\ \dim H = n-k}} \operatorname{vol}_{n-k}(\operatorname{Proj}_H(\Delta_n)) = \operatorname{vol}_{n-k}(T^*).$$

Filliman 发展了外代数技巧 [11]，并将其用于 [10]（另见 [8, 9]），从而在以下情形中确认了这一猜想；对于最小值： $k=1$、2、 $n-1$ 以及任意 n，还有 $n \leq 6$ 以及任意 k；对于最大值： $k=1$、2、 $n-1$ 以及任意 n、 $k=n-2$和 $n \leq 8$，以及 $k=3$ 和 $n=6$。

其他多胞体（如单位立方体Q_n 和交叉多胞体 B_1^n）的超平面投影闭式表达式早已为人所知（见下文及 [22]）。相比之下，正则单纯形 Δ_n 尚无已知的闭式公式。

在这项工作中，我们通过闭式体积公式和方向的 ℓ_1-范数，直接证明了单纯形的极值超平面投影；这种方法也确定了实现极值体积的方向。我们的主要定理如下：

定理 1.2. 设 $a \in \mathbb{S}^n \cap \mathcal{H}'$，即 $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0$ 和 $\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = 1$。那么，

$$\operatorname{vol}_{n-1}\left(\operatorname{Proj}_{a^\perp \cap \mathcal{H}} \Delta_n\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{n+1}|a_j|\,, \tag{1.2}$$

命题 1.3. 设 $a_1, \ldots, a_n$ 为满足下列条件的实数

$$a_1 + \ldots + a_n = 0.$$

那么，下列不等式成立：

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j| \geq \sqrt{2}\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)^{1/2}.$$

命题 1.4. 设 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$为满足下列条件的实数，其中 $n \geqslant 2$

$$a_1 + \ldots + a_n = 0 \quad and \quad a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1.$$

那么，该量

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j|$$

在“半正半负”向量处取得最大值

$$\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\frac{n}{2}\ times}, \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, -\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\frac{n}{2}\ times}\right),$$

当 n 为偶数时；而在$\binom{n}{2}-1$, $\frac{n}{2}+1$)分割向量处取得最大值

$$\left(\underbrace{\sqrt{\frac{n+1}{n(n-1)}}, \ldots, \sqrt{\frac{n+1}{n(n-1)}}}_{\frac{n-1}{2}\ times}, \underbrace{-\sqrt{\frac{n-1}{n(n+1)}}, \ldots, -\sqrt{\frac{n-1}{n(n+1)}}}_{\frac{n+1}{2}\ times}\right)$$

当 n 为奇数时。

利用定理 1.2，我们在命题 1.3 和1.4 中证明，最小值在以下位置取得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\ldots,0\right),$$

而最大值在“半正半负”向量处取得

$$\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\frac{n+1}{2}\text{ times}},\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{n+1}},\ldots,-\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\frac{n+1}{2}\text{ times}}\right),$$

当 $n+1$ 为偶数时，而在

$$\left(\underbrace{\sqrt{\frac{n+2}{n(n+1)}},\ldots,\sqrt{\frac{n+2}{n(n+1)}}}_{\frac{n}{2}\text{ times}},\underbrace{-\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+2)}},\ldots,-\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+2)}}}_{\frac{n+2}{2}\text{ times}}\right)$$

当 $n+1$ 为奇数时。直接计算可得极值

$$V_{\min}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!}$$

and

$$V_{\max}=\frac{1}{2(n-1)!}\begin{cases}n+1, & \text{if } n \text{ is odd}\\ \sqrt{n(n+2)}, & \text{if } n \text{ is even}\end{cases}.$$

由于 Δ_n 是置换不变的，这些方向在置换以及根据（1.2）进行的符号反射下均不唯一确定；也就是说，方向 x 和 $-x$ 得到相同的值。

注 1.5。 此外，我们还讨论了如何确定 Δ_n宽度的极值方向这一问题。对于 $a\in\mathbb{S}^n\cap\mathcal{H}'$，即 $\sum_{j=1}^{n+1}a_j=0$ 和 $\sum_{j=1}^{n+1}a_j^2=1$，可得

$$g(D\Delta_n,a)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}|a_j|. \tag{1.3}$$

为此，我们注意到

$$\Delta_n-\Delta_n=\left\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:\sum_{j=1}^{n+1}x_j=0 \text{ and } \sum_{j=1}^{n+1}|x_j|\leqslant 2\right\}\subset\mathcal{H}'. \tag{1.4}$$

对于非显然包含，注意到，如果 $x\in\mathbb{R}^{n+1}$ 使得 $\sum_{j=1}^{n+1}x_j=0$ 且 $\sum_{j=1}^{n+1}|x_j|\leqslant 2$那么

$$x_j=x_j^+-x_j^-=x_j^+-\frac{1}{n+1}(s-1)-[x_j^--\frac{1}{n+1}(s-1)],$$

其中 $x^+:=\max\{x,0\}$， $x^-:=\max\{-x,0\}$且 $s:=\sum x_j^+=\sum x_j^-=\frac{\sum|x_j|}{2}\leqslant 1$。

结合（1.2）和（1.3），我们得到关系式（1.1）对于 Δ_n。

事实上，关系 1.3 与命题 1.3 和 1.4 表明，Δ_n的极值宽度（因为只需考虑与 $\mathcal{H}$平行的方向）在

$$\max_{a\in\mathbb{S}^n\cap\mathcal{H}'}b_{\Delta_n}(a)=\max_{a\in\mathbb{S}^n\cap\mathcal{H}'}\frac{1}{g(D\Delta_n,a)}=\sqrt{2}$$

and

$$\min_{a\in\mathbb{S}^n\cap\mathcal{H}'} b_{\Delta_n}(a) = \min_{a\in\mathbb{S}^n\cap\mathcal{H}'} \frac{1}{g(D\Delta_n,a)} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{n+1}}, & \text{if } n \text{ is odd} \\ 2\sqrt{\frac{n+1}{n(n+2)}}, & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

其中，取得这些极值的方向恰好是与相应投影方向相反的方向。

1.2. 立方体的极值平面投影 Q_n。 我们先来看看立方体一个引人注目的显著性质：它在正交互补子空间上的投影具有相同的体积：

定理 1.6 (McMullen [20]; Chakerian–Filliman [5])。 设 $1 \leqslant k \leqslant n$。对于每个 k维子空间 H 中的 $\mathbb{R}^n$，有

$$\mathrm{vol}_k(\mathrm{Proj}_H Q_n) = \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{Proj}_{H^\perp} Q_n).$$

这一结果由 McMullen 和 Chakerian、Filliman 分别独立地采用同一种基于 Shephard 公式的方法得到。特别地，k维投影体积的精确界等价于 $(n-k)$ 维投影体积的精确界。

设 $a \in \mathbb{S}^{n-1}$，那么很容易看出，定理 1.6 表明

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{Proj}_{a^\perp} Q_n) = \sum_{j=1}^{n} |a_j|. \tag{1.5}$$

因此，

$$1 \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{Proj}_{a^\perp} Q_n) \leqslant \sqrt{n}$$

当且仅当 Q_n 投影到一个坐标超平面上时，下界取到；当且仅当 Q_n 投影到一个与主对角线正交的超平面上时，上界取到。

此外，Chakerian-Filliman 证明，对于每个 k 维子空间 H

$$\mathrm{vol}_k(\mathrm{Proj}_H Q_n) \geqslant 1,$$

且在所有 k 处取等号，这些点位于坐标子空间上。

平面问题的上界最初由 [5], 解决；Chakerian 和 Filliman 利用多边形等周不等式，得到了二维投影的精确上界，进而也得到了（$n-2$）维投影的精确上界。

定理 1.7 (Chakerian-Filliman)。 设 $n \geqslant 2$。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个2维子空间 H，有

$$\mathrm{vol}_2(\mathrm{Proj}_H Q_n) \leqslant \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

当$\mathrm{Proj}_H Q_n$是边长为 $\sqrt{\frac{2}{n}}$的正 $2n$边形时，等号成立。

我们的方法通过推导闭式体积公式展开，并辅以尖锐估计。

设 Π 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个平面。该平面由两个正交归一向量 u、$v \in \mathbb{S}^{n-1}$ 唯一确定，使得 $\Pi =$ 张成$\{u, v\}$。在本节中，我们关注以下问题:

$$\max_{\Pi} / \min_{\Pi} \operatorname{vol}_2(\operatorname{Proj}_{\Pi} Q_n),$$

这也涉及 $(n-2)$ 维情形。该问题归结为确定满足以下条件的向量u和 v

$$\sum_{j=1}^{n} u_j^2 = \sum_{j=1}^{n} v_j^2 = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = 0$$

使体积达到极值。与之前一样，我们给出一个闭式公式，它也能得到这些极值。

命题 1.8。 设 $u, v \in \mathbb{R}^n$ 正交，则

$$\operatorname{vol}_{n-2}(\operatorname{Proj}_{span^{\perp}\{u,v\}} Q_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |u_i v_j - u_j v_i|$$

最后，我们给出后一数量的精确界。

命题 1.9。 设 $u, v \in \mathbb{S}^{n-1}$。则，

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |u_i v_j - u_j v_i| \leqslant \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

且当 $(u_i, v_i) = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\cos\left(\frac{(\sigma(i)-1)\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{(\sigma(i)-1)\pi}{n}\right)\right)$ 时取等号，其中 $\{1, \ldots, n\}$ 的任意置换 σ 均可。

此外，如果还有 $\sum_{j=1}^{n} u_j v_j = 0$，那么

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |u_i v_j - u_j v_i| \geqslant 1,$$

且当 u、v 是来自 $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ 的两个不同向量时，等号成立。

1.3. 通过平面截面给出的第二种证明 B_1^n**.** 现在，我们通过利用交叉多胞体的平面截面 B_1^n，并强调它们与凸体的 Mahler 体积 K之间的联系，给出立方体平面投影的另一种证明。Mahler 体积定义为 $\mathcal{P}(K)$ =vol(K) vol(K°)，其中 K° 表示 K的极体。注意，$(B_1^n \cap H)^{\circ} = 2 \operatorname{Proj}_H Q_n$.接下来，我们需要以下工具:

The定理 1.10. [21, 定理 2] 设 P 是一个具有 $2k$ 个顶点的中心对称多边形。 n,

$$\mathcal{P}(P) \leqslant \mathcal{P}(C_{2k}) = 4k^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2k}\right).$$

当且仅当 P 是正 $2k$ 边形 C_{2k} 的仿射像时，等号成立。

定理 1.11 (Nazarov，见 [6])。 设 $n \geqslant 3$。对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意2维子空间 H，我们有

$$\operatorname{vol}_2(B_1^n \cap H) \geqslant \frac{n^2 \sin^3(\frac{\pi}{2n})}{\cos(\frac{\pi}{2n})}.$$

当 $B_1^n \cap H$ 是一个正 $2n$ 边形时，等号成立。

定理 *1.7* 的证明。 我们首先注意到， $B_1^n \cap H$ 是一个中心对称的凸 $2k$边形， $k \leqslant n$。因此，由定理 1.10 可得

$$\operatorname{vol}_2(B_1^n \cap H) \operatorname{vol}_2(\operatorname{Proj}_H Q_n) \leqslant k^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2k}\right) \leqslant n^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

因为 $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ 在 $[0, \pi)$ 上为正且递减。因此，结合定理 1.11

$$\operatorname{vol}_2\left(\operatorname{Proj}_H Q_n\right) \leqslant \frac{n^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\operatorname{vol}_k(B_1^n \cap H)} \leqslant \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

显然，正则 $2n$ 边形处等号成立。 □

1.4. 推广到 L_p-投影体。 凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的超平面投影体积与其投影体ΠK之间也存在公认的联系。后者是一个对称凸体，其支撑函数定义为

$$h_{\Pi K}(a) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, a\rangle| \, S_{n-1}(K, dx) = \operatorname{vol}_{n-1}(\operatorname{Proj}_{a^\perp} K).$$

最后，我们考虑（1.2）、（1.5及相应的交叉多胞体公式（见[22]）在以下情形中的推广：凸体 L_p 的-投影体， $p \geqslant 1$ 其中凸体 K 位于 $\mathbb{R}^n$ 且$0 \in \operatorname{int}(K)$ 定义为

$$h^p_{\Pi_p K}(a) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle x, a\rangle|^p dS_p(K, x).$$

注意，当 $\Pi_1 K = \Pi K$ 时。

另设 $\Delta_c^n := \Delta_n - \operatorname{bar}(\Delta_n)$ 为中心化单纯形。我们证明以下公式：

定理 1.12。设 $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ 则

$$h^p_{\Pi_p Q_n}(a) = \frac{1}{2^{1-p}} \sum_{j=1}^n |a_j|^p, \tag{1.6}$$

$$h^p_{\Pi_p B_1^n}(a) = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j \right|^p, \tag{1.7}$$

且对于 $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0$ 和 $\sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 = 1$

$$h^p_{\Pi_p \Delta_c^n}(a) = \frac{(n+1)^{\frac{2p-1}{2}}}{2(n-1)!} \sum_{j=1}^{n+1} |a_j|^p. \tag{1.8}$$

注意，对于 $p = 1$ ，我们可以得到已知的公式。

1.5. **尖锐估计**。 对（1.7）的尖锐估计可归结为经典的 Khintchine 不等式，其最优界由 Haagerup 确定 [14]。

Let,

$$F_p(a) := \sum_{j=1}^n |a_j|^p.$$

在仅满足归一化条件 $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$ 的情况下，从 $1 < p < 2$ 情形转到 $p > 2$情形时，极值界的顺序会反转。注意， $F_2(a) = 1$。

命题 1.13. 设 $p \geqslant 1$ 和 $a_1, \ldots, a_n$ 为实数，使得 $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$。

- 对于 $1 < p < 2$， $F_p(a)$ 在 $(1, 0, \ldots, 0)$ 处取最小值，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 处取最大值。
- 对于 $p > 2$，极值的情况正好相反：当 $1 < p < 2$ 时使 $F_p(a)$ 取得最大值的构型，此时取得最小值；反之，先前的最小值变为最大值。

求出 F_p 在约束条件 $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$ 和 $\sum_{j=1}^n a_j = 0$ 下的极值也具有独立的研究价值。在近期的一篇文章中 [4] (或参见 [23] ，了解其在组合学背景下的应用），作者研究了一个密切相关的量以及其他对称多项式。

$$p_k(a) = \sum_{j=1}^n a_j^k,$$

即幂和。他们基本上证明了（结合一个简单的论证，将形如 $\left(a, \ldots\ldots, \underset{\gamma_1}{a}, b, \ldots\ldots, \underset{\gamma_2}{b}, c, \ldots\ldots, \underset{\gamma_3}{c}\right)$，

其中 $\gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c = 0$、 $\gamma_1 a^2 + \gamma_2 b^2 + \gamma_3 c^2 = 1$ 和 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = n$的三元组中的极值化简为）上界在 n 为偶数和奇数两种情况下，均在除一个以外的所有 a_i 都相等时取得。当 n 为偶数时，对于 p_k，下界在一半为正、一半为负的向量处取得，这是幂平均不等式的直接应用。

2. Notation and background

我们在 $\mathbb{R}^n$ 上赋予标准内积： $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 与 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ 之间的标准内积，并用 $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ 表示由此诱导的标准欧几里得范数。对于 $p \geqslant 0$ 及 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ，我们将其 ℓ_p 范数定义为 $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$。 $\mathbb{R}^n$ 的闭中心单位球记为 B_2^n，单位球面记为 $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_2^n$。此外，我们用 $e_1, \ldots, e_n$ 表示标准基向量： $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ 、 $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ 等。按照惯例，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的集合 A， $A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle = 0 \ \forall a \in A\}$ 表示其正交补；约定对于 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 u ， $u^\perp = \{u\}^\perp$ 表示垂直于 u的超平面。到 $\mathbb{R}^n$ 中仿射或线性子空间 H 的正交投影记为 Proj_H。体积，即 $\mathbb{R}^n$ 中的 k维勒贝格测度，记为 $\mathrm{vol}_k(\cdot)$，并将其视为 k维豪斯多夫测度（归一化后边长为 1 的立方体体积为 1）。回顾一下， $\mathbb{R}^n$ 中的凸体是具有非空内部的紧集。若 $0 \in \mathrm{int}(K)$，我们将其极体定义为 $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, \text{对所有 } x \in K\}$ 均成立。设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 非空且为凸集，我们将凸集 A的支撑函数 $h_A : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ 定义为$h_A(u) = \sup_{x \in A} \langle x, u\rangle$ ，其中 $u \in \mathbb{R}^n$。

令 Δ_n 表示边长为 $\sqrt{2}$的正则 n维单纯形，我们通过其在超平面 $\mathcal{H}:=\left\{\sum_{i=1}^{n+1} x_i=1\right\}$ 中的通常嵌入来考察它，该超平面位于 $\mathbb{R}^{n+1}$中，即

$$\Delta_n=\left\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:x_j\geqslant 0,\sum_{j=1}^{n+1}x_j=1\right\}.$$

集合 Δ_n的 n维体积等于 $\frac{\sqrt{n+1}}{n!}$，其质心位于 $\mathrm{bar}(\Delta_n):=\left(\frac{1}{n+1},\ldots,\frac{1}{n+1}\right)$。各面的法向量由 $(-n,\ 1\ldots,1)$ 的置换给出。这是显然的，因为各面的中心是 $\left(0,\ \frac{1}{n},\ \ldots,\ \frac{1}{n}\right)$ 的置换；由对称性，从 $\left(\frac{1}{n+1},\ldots,\frac{1}{n+1}\right)$ 指向 $\left(0,\ \frac{1}{n},\ \ldots,\ \frac{1}{n}\right)$ 的向量垂直于这些面。

2.1. 主序。 给定 $x=(x_1,\ldots,x_n)$，我们用 $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ 表示其按降序重新排列后的结果，即，

$$x_1^*\geq x_2^*\geq\cdots\geq x_n^*.$$

对于任意两个向量 x、$y\in\mathbb{R}^n$，若 x 被 y主序，记作 $x\prec y$，则

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\quad\text{and}\quad\sum_{i=1}^{k}x_i^*\leq\sum_{i=1}^{k}y_i^*\quad\text{for every } k=1,2,\ldots,n-1.$$

因此直接可得，对于每个满足 $\sum_i a_i=1$ 的向量 $a=(a_1,\ \ldots,\ a_n)\in\mathbb{R}_+^n$，我们有

$$\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)\prec(a_1,\ldots,a_n)\prec(1,0,\ldots,0). \tag{2.1}$$

主序理论中一个广为人知的不等式归功于卡拉马塔 [16]:

定理 2.1。 设 $f\colon\ I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 I 上的凸函数。若 $a_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ \ldots,\ b_n\in I$满足 $(a_1,\ \ldots,\ a_n)\prec(b_1,\ \ldots,\ b_n)$，则

$$\sum_{j=1}^{n}f(a_j)\leqslant\sum_{j=1}^{n}f(b_j).$$

关于主序与舒尔凸性的简明介绍，可参见[3]第二章。

2.2. 内在体积与曲率积分。 闵可夫斯基定理和混合体积的定义表明，若 $K_1,\ \ldots,\ K_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空、紧致的凸子集，则 $\lambda_1K_1+\cdots+\lambda_mK_m$ 的体积是关于 $\lambda_i>0$ 的 n 次齐次多项式。可以写作

$$\mathrm{vol}_n(\lambda_1K_1+\cdots+\lambda_mK_m)=\sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant m}V(K_{i_1},\ldots,K_{i_n})\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n},$$

其中，系数 $V(K_{i_1},\ldots,K_{i_n})$ 在其自变量的置换下保持不变。系数 $V(K_{i_1},\ldots,K_{i_n})$ 是 $K_{i_1},\ldots,K_{i_n}$ 的混合体积。特别地，若 K 和 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸体，则函数 $\mathrm{vol}_n(K+\lambda D)$ 是关于 $\lambda\in[0,\infty)$ 的多项式:

$$\mathrm{vol}_n(K+\lambda D)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V_{n-j}(K,D)\,\lambda^j,$$

其中， $V_{n-j}(K,D) = V(K[n-j], D[j])$ 是 K和 D 的第 j阶混合体积（我们用记号 $D[j]$ 表示 $D, \ldots, D$ j次）。若 $D = B_2^n$，则定义 $W_j(K) := V_{n-j}(K, B_2^n) = V(K[n-j], B_2^n[j])$；这是 K 的第 j阶拟柱体积分。 K 的内在体积 $V_j(K)$ 对于 $0 \leqslant j \leqslant n$ 定义如下

$$V_j(K) = \frac{\binom{n}{j}}{\omega_{n-j}} W_{n-j}(K). \tag{2.2}$$

设 K， K_1，……， K_{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体。混合表面积测度 $S(K_1, \ldots, K_{n-1}, \cdot)$ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的一个博雷尔测度，由下式唯一确定：

$$V(K_1, \ldots, K_{n-1}, K) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(u) dS(K_1, \ldots, K_{n-1}, u).$$

我们定义 $S_j(K, \cdot) = S(K[j], B_2^n[n-1-j])$，并在适当情况下定义 $S(K, \cdot) := S_{n-1}(K, \cdot)$。表面积测度是凸体理论中的一个基本概念；凸体即 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧凸子集。给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸多胞体 P，其表面积测度定义为

$$S(P, \cdot) := S_{n-1}(P, \cdot) = \sum_{u \in \mathcal{N}(P)} \mathrm{vol}_{n-1}(F_u) \delta_u, \tag{2.3}$$

其中， $\mathcal{N}(P)$ 表示 P 的所有单位面法向量组成的集合， δ_u 是支撑于 u 的狄拉克概率测度。

2.3. **投影体与 L_p-投影体**。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体。 K 的投影体 ΠK 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个对称凸体，其定义通过支撑函数给出

$$h_{\Pi K}(a) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle a, x \rangle| dS_{n-1}(K, x)$$

表面积测度处于布伦-明可夫斯基理论的核心。基于 Firey 对凸体的 L_p加法，Lutwak 证明经典的布伦-明可夫斯基理论可以扩展为一种 L_p 布伦-明可夫斯基理论。关于 [24, 12] 理论的更多信息，请参见 L_p。

设 $1 \leqslant p < \infty$ 和 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体。Lutwak、Yang 和 Zhang 在 [17] 中引入了L_p-投影体 $\Pi_p K$，其定义采用了不同的归一化方式：

$$h_{\Pi_p K}(a) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle a, v \rangle|^p \, dS_p(K, dv), \tag{2.4}$$

对于 $a \in \mathbb{S}^{n-1}$，其中 L_p 表面积测度 $S_p(K, \cdot)$是布伦-明可夫斯基 L_p 中表面积测度的类似物，其定义如下：

$$dS_p(K, \cdot) = h_K^{1-p} \, dS_{n-1}(K, \cdot).$$

对于具有 $0 \in \mathrm{int}(P)$的凸多胞体 P，表面积测度 $L_p(P, \cdot)$定义为：

$$S_p(P, \cdot) = \sum_{u \in \mathcal{N}^*(P)} h_P^{1-p}(u) \, \mathrm{vol}_{n-1}(F_u) \delta_u, \tag{2.5}$$

其中， $\mathcal{N}^*(P)$表示 P中与不包含原点的面相对应的单位面法向量集合。

2.4. **投影体积公式**。

定理 2.2 (Cauchy–Minkowski)。 设 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个凸体。那么，对于每个单位向量$a \in \mathbb{S}^{n-1}$, 有

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{Proj}_{a^\perp} K) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle a, \xi\rangle|\, dS(K,\xi).$$

让我们以多胞体为例，直观地说明这个公式。假设给定凸多胞体 P in $\mathbb{R}^n$ ，我们要将其投影到超平面 $a^\perp$ 上，其中 a 是单位向量。设 $\mathscr{F}_P$ 为 P 的面的集合。若 $F \in \mathscr{F}_P$ ，则

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{Proj}_{a^\perp}(F)) = \mathrm{vol}_{n-1}(F)\cdot|\langle a, n(F)\rangle|,$$

其中 $n(F)$ 是 F 的单位外法向量。注意，在 $\mathrm{Proj}_{a^\perp}(P)$ 中，每个点都被覆盖两次，因此投影体积可表示为

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{Proj}_{a^\perp} P) = \frac{1}{2}\sum_{F\in\mathscr{F}_P} \mathrm{vol}_{n-1}(F)\cdot|\langle a, n(F)\rangle|. \tag{2.6}$$

柯西–闵可夫斯基公式 2.2属于一类更广泛的积分表示，称为***Kubota***公式。Kubota积分公式将凸体K 的拟柱体积分表示为其（$n-j$）维投影体积的平均值。关于更多背景和详细证明，请参阅 [12, 定理 8.1.10 和 (A.49)] ，或参阅 [2, 附录 B]。

设 F 是 $\mathbb{R}^n$的 m维子空间，其中 $1 \leqslant m \leqslant n$。那么，对于 $\mathbb{R}^n$中的任意凸体 K ，有

$$\mathrm{vol}_{n-m}(L)\,\mathrm{vol}_m(\mathrm{Proj}_F K) = \binom{n}{m} V(K[m], L[n-m]) \tag{2.7}$$

其中 L 是子空间 $F^\perp$中的任意凸体。（见 [24, 定理 5.3。1]）

关系（2.7现在表明，对于任意正交归一系统 $u_1, \ldots, u_r$

$$\mathrm{vol}_{n-r}(\mathrm{Proj}_{\mathrm{span}^\perp\{u_1,\ldots,u_r\}} K) = \frac{n!}{(n-r)!} V(K[n-r], [0,u_1], \ldots, [0,u_r]),$$

其中，$\mathrm{span}\{u_1,\ldots,u_n\}$ 表示 $u_1, \ldots, u_n$的线性张成。

3. 证明

如前所述，我们可以假设 $\mathcal{H}$ 中每个相对余维数为一且经过 $\mathrm{bar}(\Delta_n)$ 的仿射子空间 H 都满足这一条件，因为投影体积在平移下保持不变。通过取H 与原点的仿射包，每个这样的超平面 H 都可扩展为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的余维数为一的子空间，从而得到一个超平面 $a^\perp$ ，使得 $\mathrm{bar}(\Delta_n) \in a^\perp$。因此，$a$ 属于$\mathcal{H}' = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\right\}$.

定理 *1.2* 的证明。 根据 Cauchy多胞体公式（2.6），我们得到

$$\mathrm{vol}_{n-1}\left(\mathrm{Proj}_{a^\perp\cap\mathcal{H}} \Delta_n\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{n+1}\left|\left\langle a + \frac{1}{n+1}\mathbf{1}, \nu_i\right\rangle\right|, \tag{3.1}$$

其中 $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$。Δ_n 的单位法向量为

$$\nu_i=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left(1,\ldots,1,\underbrace{-n}_{i},1,\ldots,1\right)$$

对于 $i=1,\ldots,n+1$，且由于 $\sum_{j=1}^{n+1}a_j=0$，可得

$$\sum_{j\neq i}a_j=-a_i,$$

因此

$$\left|\sum_{j\neq i}a_j-na_i\right|=(n+1)|a_i|.$$

这就完成了证明。 □

命题 *1.3* 的证明。对于 $n=3$，不失一般性，假设 $a_3\neq 0$ 且 se t

$$x=\frac{a_1}{a_3},\quad y=\frac{a_2}{a_3}.$$

那么所需的不等式可写为

$$\frac{|x|+|y|+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\geq\sqrt{2},$$

但由于 $x+y+1=0$，这等价于写成

$$\frac{|x|+|x+1|+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\geq 2.$$

容易验证，这个不等式成立。

我们对 n 使用归纳法。假设该命题对某个 n 成立，接下来证明它对 $n+1$ 也成立。设 $a_1,\ldots,a_{n+1}\in\mathbb{R}$ 满足

$$a_1+\ldots+a_{n+1}=0.$$

将最后两项合并后，可得

$$|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|+|a_n|+|a_{n+1}|\geq|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|+|a_n+a_{n+1}|.$$

对 n 项 $a_1,\ldots,a_{n-1},a_n+a_{n+1}$（其和为零）应用归纳假设，可得

$$|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|+|a_n+a_{n+1}|\geq\sqrt{2}\left(a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2+(a_n+a_{n+1})^2\right)^{1/2}.$$

为保证

$$a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2+(a_n+a_{n+1})^2\geq a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2+a_n^2+a_{n+1}^2,$$

我们需要 $2a_na_{n+1}\geq 0$；当 a_n 和 a_{n+1} 均非零且同号时，这一条件成立 .

因此，通过适当选择满足 $a_na_{n+1}\geq 0$ 的 a_n 和 a_{n+1}，归纳步骤成立，证明得证。□

命题的证明*1.4*。当 n 为偶数时，应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)^{1/2} = \sqrt{n},$$

因为平方和等于 1。当所有分量 $|a_j|$ 相等且满足约束条件时，等号成立，此时

$$\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\frac{n}{2}\text{ times}},\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,-\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\frac{n}{2}\text{ times}}\right).$$

对于奇数情形，不妨设 $a_1,\dots,a_k \geqslant 0$ 和 $a_{k+1},\dots,a_n \leq 0$。于是，连续两次应用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\sum_{i=1}^{k}a_i^2 \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2}{k} \quad\text{and}\quad \sum_{i=k+1}^{n}a_i^2 \geqslant \frac{\left(\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right)^2}{n-k}. \tag{3.2}$$

令 $S:=\sum_{i=1}^{k}a_i$。将关系式（3.2）相加，得到

$$S \leqslant \sqrt{\frac{k(n-k)}{n}},$$

因为 $\sum_{i=1}^{n}a_i = 0$。于是，

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i| = 2S \leqslant 2\sqrt{\frac{k(n-k)}{n}}, \tag{3.3}$$

且（3.3）右端显然在 $k=(n-1)/2$ 或 $k=(n+1)/2$ 时取得最大值。当 $a_1=\ldots=a_{(n-1)/2}=\pm\sqrt{{}^{n+1}_{n\ n-1}()}$ 且 $a_{(n-1)/2+1}=\ldots=a_n=\mp\sqrt{{}^{n-1}_{n\ n+1}()}$ 时，等号成立。

□

定理 *1.8* 的证明。由于投影体积在平移下保持不变，我们可以改为研究平移后的单位立方体 $[0,1]^n=\sum_{i=1}^{n}[0,e_i]$。由（2.7）以及混合体积的多重线性性可得，

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_{n-2}(\mathrm{Proj}_{\mathrm{span}^{\perp}\{u,v\}}[0,1]^n) &= \frac{n!}{(n-2)!}V\left([0,1]^n[n-2],[0,u],[0,v]\right)\\
&= \frac{n!}{(n-2)!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{n-2}=1}^{n}V\left([0,e_{i_1}],\dots,[0,e_{i_{n-2}}],[0,u],[0,v]\right)\\
&= \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{n-2}=1}^{n}|\det(e_{i_1},\dots,e_{i_{n-2}},u,v)|\\
&= \sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=n-2}}|\det(u,v,(e_i)_{i\in I})|\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|u_iv_j-u_jv_i|.
\end{aligned}$$

□

为了证明命题 1.9 ，我们需要以下引理。

引理 3.1。 [7, 引理 7] 设 d_1，…， $d_n \geqslant 0$ 和 ω_1，…， $\omega_n \in \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = 1\}$。那么，

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} d_i d_j |\omega_i - \omega_j| \leqslant \frac{2}{n} \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 .$$

当 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 是所有 n 次单位根构成的集合且 $d_1 = \cdots = d_n$时，等号成立。

命题 *1.9* 的证明。 对于下界，注意到拉格朗日恒等式表明

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (u_i v_j - u_j v_i)^2 = \|u\|_2^2 \|v\|_2^2 - \langle u, v \rangle^2 = 1. \tag{3.4}$$

因此，显然有

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |u_i v_j - u_j v_i| \geqslant \left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |u_i v_j - u_j v_i|^2 \right)^{1/2} = 1.$$

当且仅当 $|u_i v_j - u_j v_i|$ 中恰有一个非零时，等号成立；设该项为 (p, q)，其中 $p \neq q$，即对于 (i, j)，$|u_i v_j - u_j v_i| = 0 \ \neq (p, q)$，且 $|u_p v_q - u_q v_p| \neq 0$。最后一个条件表明，$(u_p, v_p)$ 与 (u_q, v_q) 不共线。但第一个条件推出，对于 $i \neq p, q$，(u_i, v_i) 同时与 (u_p, v_p) 和 (u_q, v_q) 共线。由此可得，对每个 $i \neq p, q$，$(u_i, v_i) = 0$，进而 $u_p^2 = 1$ 和$v_q^2 = 1$，或 $v_q^2 = 1$ 和 $v_p^2 = 1$。

对于上界，我们使用如下三角参数化：由于 $(u_i, v_i) \in \mathbb{R}^2$，那么 $(u_i, v_i) = r_i(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$，其中 $r_i \geqslant 0$ 且 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$。于是， $u_i v_j - u_j v_i = r_i r_j \sin(\theta_j - \theta_i)$, 因此所关注的量变为

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} r_i r_j \left| \sin(\theta_j - \theta_i) \right|, \tag{3.5}$$

这里我们还有 $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 2$ 因为 u, v 均为单位向量。现在应用引理 3.1 于 $d_i = r_i$ 和 $\omega_i = e^{2i\theta_i} \in \mathbb{S}^1$，得到

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} r_i r_j \left| \sin(\theta_j - \theta_i) \right| \leqslant \frac{1}{2n} \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2 \leqslant \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{3.6}$$

最后一步用到了柯西-施瓦茨不等式。 □

定理 *1.12* 的证明。 由 L_p-测度（公式（2.5））可知，对于一个 P 中的$\mathbb{R}^n$ 满足 $0 \in \operatorname{int}(P)$ 的多面体：

$$h^p_{\Pi_p P}(a) = \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}_{n-1}} \operatorname{vol}_{n-1}(F) |\langle a, \nu_F \rangle|^p \, h_P^{1-p}(\nu_F), \tag{3.7}$$

其中 ν_F 是面 F 的单位法向量。

对于单位立方体 $Q_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$，公式（1.6）立即成立，因为所有面 F的（$n-1$）维体积均为 **1**，面的外单位法向量由 $2n$ 向量 $\{\pm e_j$ 给出： $1 \leq j \leq n\}$，且支撑函数为 $h_{Q_n}(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |u_i|$。

交叉多胞体 $B_1^n = \mathrm{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ 有 2^n 个全等的单纯形面，每个面的（$n-1$）维体积为 $\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}$，外单位法向量为 $\frac{1}{\sqrt{n}}(\pm 1, \dots, \pm 1)$，支撑函数 $h_{B_1^n}(u) = \max_{i=1,\dots,n} |u_i|$。因此，

$$h_{B_1^n}^p(a) = \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |\langle a, \varepsilon \rangle|^p = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j \right|^p ,$$

其中，期望是对独立随机符号 ε_j, $\mathbb{P}(\varepsilon_j = \pm 1) = 1/2$ 取的。

最后，中心化单纯形 $\Delta_c^n := \Delta_n - \mathrm{bar}(\Delta_n) \subseteq \mathcal{H}' := \{ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 容易验证，其顶点是 $\frac{1}{n+1}(n, -1, \dots, -1)$ 的置换，并且置换

$$\left(-\sqrt{\frac{n}{n+1}}, \sqrt{\frac{1}{n(n+1)}}, \dots \sqrt{\frac{1}{n(n+1)}} \right)$$

是单纯形 Δ_c^n 各面的外单位法向量。其支撑函数为 $h_{\Delta_c^n}(u) = \max_{i=1,\dots,n+1} \langle u, x_i \rangle$，其中 x_i 是顶点，公式（1.8）的推导与定理1.2的证明类似。□

命题 *1.13* 的证明。函数 $x \mapsto |x|^{p/2}$ 在 $p \geq 2$ 和 $x \in \mathbb{R}$ 上是凸的，在 $p \leq 2$ 和 $x \geq 0$ 上是凹的。由卡拉马塔不等式 2.1 可立即得到结论，因为（2.1）表明

$$\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \prec (a_1^2, \dots, a_n^2) \prec (1, 0, \dots, 0).$$

□

致谢 作者感谢希腊研究与创新基金会（H.F.R.I.）通过国家复苏与韧性计划“希腊 2.0”下的“基础研究资助（全面支持所有科学领域）”项目提供资助。该计划由欧盟的下一代欧盟（H.F.R.I. 项目编号：15445）资助。作者特别感谢 Silouanos Brazitikos 的多次富有成果的讨论，以及他对本文最终呈现形式的帮助；同时也感谢 Dimitris–Marios Liakopoulos 提供的有益交流。

References

1. R. Alexander, *The width and diameter of a simplex*, Geometriae Dedicata**6**(1977), 第1期, 87–94. 2. Shiri Artstein-Avidan, Apostolos Giannopoulos, and Vitali D. Milman, *Asymptotic geometric analysis, vol. i*, 数学调查与专著, 第202卷, 美国数学学会, 普罗维登斯（罗得岛州）, 2015. 3. Rajendra Bhatia, *Matrix analysis*, 第169卷, 施普林格科学与商业媒体, 2013. 4. Silouanos Brazitikos and CHRISTOS PANDIS, *Sharp inequalities for symmetric polynomials, hunter's conjecture, and moments of exponential random variables*, arXiv 预印本 arXiv:2512.12254 (2025). 5. G Donald Chakerian and Paul Filliman, *The measures of the projections of a cube*, Studia Sci. Math. Hungar**21** (1986), 第1–2期, 103–110. 6. Giorgos Chasapis, Piotr Nayar, and Tomasz Tkocz, *Slicing ℓ_p-balls reloaded: stability, planar sections in ℓ_1*, 概率年刊**50** (2022), 第6期, 2344–2372. 7. Mostafa Einollahzadeh and Mohammad Ali Nematollahi, *Minimum trace norm of real symmetric and hermitianmatrices with zero diagonal*, Special Matrices**13** (2025), 第1期, 20250040.

8. P. Filliman, *The largest projections of regular polytopes*, 《以色列数学杂志》64 (1988), 第2期, 207– 228. 9. , *Exterior algebra and projections of polytopes*, 《离散与计算几何》5 (1990), 第3期, 305–322. 10. , *The extreme projections of the regular simplex*, 《美国数学会汇刊》317 (1990), 第2期, 611–629. 11. , *The volume of duals and sections of polytopes*, 《Mathematika》39 (1992), 第1期, 67–80. 12. R. J. Gardner, *Geometric tomography*, 第58号, 剑桥大学出版社, 2006. 13. P. Gritzmann and V. Klee, *Inner and outer j-radii of convex bodies in finite-dimensional normed spaces*, 《离散与计算几何》7 (1992), 第3期, 255–280. 14. Uffe Haagerup, *The best constants in the khintchine inequality*, 《数学研究》70 (1981), 第3期, 231–283. 15. S. Har-Peled and E. W. Robson, *On the width of the regular n-simplex*, arXiv 预印本 arXiv:2301.02616 (2023). 16. Jovan Karamata, *Sur une inégalité relative aux fonctions convexes*, 《数学研究所出版物》1 (1932), 第1期, 145–147. 17. Erwin Lutwak, Deane Yang, and Gaoyong Zhang, *Lp affine isoperimetric inequalities*, 《微分几何杂志》56 (2000), 第1期, 111–132. 18. H. Martini, *Convex polytopes whose projection bodies and difference sets are polars*, 《离散与计算几何》6 (1991), 第1期, 83–91. 19. H. Martini and B. Weissbach, *On quermasses of simplices*, 《匈牙利数学科学研究》27 (1992), 213–221. 20. Peter McMullen, *Volumes of projections of unit cubes*, 《伦敦数学会通报》16 (1984), 第3期, 278–280. 21. Mathieu Meyer and Shlomo Reisner, *On the volume product of polygons*, Abhandlungen aus dem Mathematistischen Seminar der Universit¨at Hamburg, 第81卷, 施普林格, 2011, 第93–100页. 22. P. Nayar and T. Tkocz, *Extremal sections and projections of certain convex bodies*, 《调和分析与凸性》9 (2023), 343. 23. Igor Rivin, *Counting cycles and finite dimensional lp norms*, 《应用数学进展》29 (2002), 第4期, 647–662. 24. Rolf Schneider, *Convex bodies: the brunn–minkowski theory*, 第151卷, 剑桥大学出版社, 2013. 25. S. P. Webb, *Central slices of the regular simplex*, 伦敦大学, 伦敦大学学院（英国）, 1996. 26. B. Weissbach, *Schranken für die dicke der simplexe*, Beitr¨age zur Algebra und Geometrie = Contributions to Algebra and Geometry 26 (1988), 5–12. 27. B. Weissbach and H. Martini, *Zur besten beleuchtung konvexer polyeder*, Beitr¨age zur Algebra und Geometrie= Contributions to Algebra and Geometry 17 (1984), 151–168. 28. Chuanming Zong, *What is known about unit cubes*, 《美国数学会通报》- BULL AMER MATH SOC 42 (2005), 181–212.

Department of Mathematics & Applied Mathematics, University of Crete, Voutes Campus, 70013 Heraklion, Greece

Email address: chrpandis@gmail.com