arXiv:2601.18452v1 [math.QA] 26 Jan 2026

通过带胶合的守恒荷类型范畴研究高阶表示论

PAUL P. MA RTIN[1], SARAH ALMATEARI[1], 和 ERIC C. RO WELL[1,3]

本文引入矩阵范畴的一个严格幺半子范畴，旨在探讨普通表示理论中根基（非半单性）的高阶表示论类比。我们展示了这一类比在多大程度上具有类似的表示论性质。为作说明，我们将其应用于辫群表示研究中的两个关键问题（即从辫范畴 B 到矩阵范畴的严格幺半函子）：分类问题；以及分析由辫群表示在塔中生成的普通辫群表示的问题。

目录

1. 引言 1 1.1. 记号 2 2. 带粘合的电荷守恒 2 2.1. 引言、动机与预备知识 3 2.2. 主要构造：范畴 Match_g^N 32.3. 面向表示论的胶合演算 6 3. 应用 I：辫群表示 8 3.1. 前言：秩为 $N=2$ 8 的辫群表示3.2. 奇偶性 11 3.3. 秩为 $N=3$ 11 的辫群表示4. 应用 II：表示论 14 4.1. 辫群表示论概述 14 4.2. 秩为 $N=2$ 15 的表示论4.3. 幂零辫表示的表示论 20 5. 讨论 22 参考文献 23

1. 引言

近来，通过控制表示范畴（或目标范畴），对某些严格幺半范畴的表示进行分类已取得进展。具体而言，这种方法采用具有内在刚性的目标范畴，例如矩阵范畴 [MR21], 的 Match子范畴（也称为守荷范畴或 CC范畴）；并研究诸如辫范畴[ML13]这样的源范畴。这类方法的局限在于，某些表示类在给定的刚性框架中可能没有代表元。例如，Hietarinta 的分类 [Hie92] 给出了秩 2 的辫群表示（在范畴表述中，这些表示是自然函子 $F\colon \mathrm{B}\to \mathrm{Mat}^2$，从辫范畴 B [ML13] 映到矩阵范畴 ^{2} 的子范畴 Mat），其中包含没有 Match等价表示的表示。（这一点并不显然，但我们将在分析中给出相关例子。）如果完全放宽对目标范畴的限制，那么一般秩下的分类问题通常会难到无法处理，因此问题在于如何扩大目标范畴，使其包含足够的表示横截面，同时又不至于触及不可处理的边界。朝这个方向的一种尝试是加性守荷（ACC）范畴类 [HMR24]。然而，在秩 2 时，ACC 与 CC 重合；尽管秩 3 的 ACC 辫群表示已得到分类，但到了秩 4，这项工作就已不切实际（例如参见 [Alm25] 对所需拟设复杂度的考察

）。本文将引入对 Match 范畴的另一种扩充，具体而言，这种扩充的动机来自 Hietarinta 分类 [Hie92] 中那些不属于 CC 型的表示。值得注意的是，这种扩充的容量足够大，能够容纳 [Hie92] 中发现的所有类，只有两类除外（相差幺半范畴等价），同时在秩 3 情形下也显示出一定的可行性，正如我们将要证明的那样。

在 §2.2 中，我们构造 CCwg 范畴。在 §2.3 中，我们介绍表示论的核心一般性质。在 §3 中，我们展示该方法的若干应用，包括构造和分类表示，以及分析表示结构。在 §3.3 中，我们运用这一方法，将秩3中辫群表示的 CC 分类扩展到 CCwg。在 §4.2 中，我们运用这一方法确定秩 2 中以及部分秩-3中的表示结构。

高阶表示论有多种不同的研究路径。在普通表示理论中，问题的许多方面彼此契合，因此问题的表述具有很高的规范性（关于这一点与高阶情形的比较，参见例如 [MR21] ）。在高阶表示论中，规范性要弱得多，因此各种研究路径必然从一些重要的假设选择出发，并由此在本质上分道扬镳。Mazorchuk–Miemietz 学派 [MM15, Maz17, MMM+23] 与 Rumynin–Wendland [RW18b] 的研究路径之间的差异很好地说明了这一点（当然，还有其他值得比较的路径）。另一种来自不同方向的研究路径，是 [MR21] 中的“保持电荷守恒／缩窄目标”路径。简言之，不同研究路径之间的差异往往源于其预期应用不同。Mazorchuk–Miemietz 的路径有时被称为大写 T 的表示论（representation Theory），其动机是理解理论本身。其他路径则受到理解“源”范畴（即被表示的对象）的需求驱动，这就是大写 R 的表示论（Representation theory）。例如，理解拓扑量子计算所需的结构 [RW18a]，以及研究拓扑不变量 [Tur88]，都可以成为这类研究的动机。

1.1. **记号**。 我们先回顾 [MR21], 中使用的一些记号，以及Almateari的论文和学位论文 [Alm25, Alm26] 中的一些记号（这些记号又取自许多来源，从 [AHS04] 到 [Mur38]不等）。这也将用于确定一些约定。

对于 N， $n \in \mathbb{N}$，我们有以下记号。
集合 $\underline{N} = \{1, 2, \ldots\ldots, N\}$。
集合 $\Lambda_n^N = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^N : \mathbf{m}.(1, 1, \ldots\ldots, 1) = n\}$。
函数 $\mathsf{f} : \underline{N}^n \to \Lambda_n^N$ 定义如下：令 $\mathsf{f}(w)_i = |\{j | w_j = i\}|$。
Mat是矩阵的幺半范畴（其上的矩阵取自一个固定的基域——我们可以令其为 $\mathbb{C}$）。因此，其对象集为 $\mathbb{N}$ ，幺半积在对象上是乘法，在态射上是克罗内克积。

Mat^N是由对象 N生成的 Mat 的全幺半子范畴；其中对象 N^i重命名为 i，因此对象幺半群变为 $(\mathbb{N}_0, +)$，而不是 $(N^{\mathbb{N}_0}, \times)$。$\mathsf{Mat}^N(i, j)$ 中矩阵的行和列分别由 $\underline{N}^i$ 和 $\underline{N}^j$ 标记。

Match^N 是 Mat^N 中 CC 矩阵构成的幺半子范畴——满足如下条件的矩阵 R ： 若 $R_{vw} \neq 0$，则 $\mathsf{f}(v) = \mathsf{f}(w)$。
Mat^N_{ACC} （有时写作 Matcha^N）是 Mat^N 中 ACC 矩阵（加性 CC 矩阵）构成的幺半子范畴——满足如下条件的矩阵 R ： 若 $R_{vw} \neq 0$ ，则 $\Sigma_i w_i = \Sigma_i v_i$。（这里提及这些范畴，但不使用它们。关于这一对态射的限制如何构成幺半范畴，证明可参见例如 [Alm25] 。）

2. 带粘合的电荷守恒

在本节中，我们将 Almateari 在 [Alm25] 中的方法加以推广，以引入一种新的严格幺半范畴；与范畴 Match^N 和 Mat^N_{ACC} 一样，它同样旨在作为表示论中的目标。

2.1. **引言、动机与预备知识**。注意，对于 $N = 2$，范畴 Match^N （来自[MR21]）与 Mat$^N_{ACC}$ 重合，并且此类矩阵并未涵盖 Hietarinta 的秩-2辫表示分类 [Hie92]中出现的所有类型。下面将要描述的“CCwg”矩阵，其类型更接近于包含该分类中的全部变体。正如 Almateari 的论文所示，ACC 中辫群表示的通用拟设所包含的参数远多于 CC。在这个意义上，相较于已经解决的 CC 情形 [MR21], , ACC 在难度上有了很大的提升；事实上，CC 的优势演算并不能直接以同样的强度提升到 ACC，因此在 $N = 3$ 之后，所有高秩的 ACC 辫群表示分类问题仍未解决。与 ACC 一样，CCwg 也扩展了 CC，但保留了 CC 演算的某些遗迹，因此它兼具两项优势：一是在秩 2 中包含一个更完整的横截集；二是为潜在的全秩解提供更多工具。在高阶表示论中，非半单性的类似物并不直接，甚至也不具有规范性；但 CCwg 也可以被视为一种推广，使某种形式的高阶非半单性得以纳入，正如我们将看到的那样。

在 §2.2 中，我们构造这个新范畴。在 §2.3 中，我们旨在尽可能接近（必然经过刚性化的）高阶表示论框架下，Wedderburn定理在普通阿廷非半单表示论框架中所提供的效用（参见例如 [Coh03]）。该定理利用根基搭建了从非半单性通向 Artin-Wedderburn定理的桥梁，进而得到半单结构。

理想（因而也包括经典根基）在严格幺半范畴表示论中的作用有限，但在所有态射集都是代数的情形下，我们可以逐步引入普通理想结构.....我们将表明，从这个意义上说，胶合就是根基.....

2.2. **主要构造：范畴** Match^N_g.H
良定义性定理，适用于 (2.13) 中带胶合的 CC 范畴 Match^N_g-。我们需要若干输入，首先是字
这里我们给出 在构造中，总结
的序。

(2.1) 反字典序示例（ $\underline{3}^4 \to \Lambda^3_4$ 情形下的序）：

w	1111	2111	3111	1211	2211	3211	1311	2311	3311	1121	...
f(w)	$\underline{400}$	$\underline{310}$	$\underline{301}$	310	$\underline{220}$	$\underline{211}$	301	211	$\underline{202}$	310	...

在 f(w) 这一行中，我们用下划线标出了按此序排列的每种合成的第一个实例　　.

注意，词 $w \in \underline{N}^n$ with f$(w) = \lambda = \lambda_1\lambda_2...\lambda_N$ is 的（反字典序）第一个实例，是具有弱递减 w_i的轨道元素:

$$\overline{\mathsf{f}}(\lambda) := \underbrace{N, N, ..., N}_{\lambda_N \ copies}, \underbrace{N-1, N-1, ..., N-1}_{\lambda_{N-1}}, ..., \underbrace{11, , 1}_{\lambda_1} \tag{1}$$

(2.2) 固定 $N \in \mathbb{N}$。对于 $n \in \mathbb{N}$，通过按反字典序排列 $\underline{N}^n$，再应用 f，然后在 λ 于序列 f($\underline{N}^n$) 中首次出现的位置早于 μ 时，对 $\Lambda^N_n, <$排序。
（为便后用，除非 $n = n'$，否则我们规定 $\lambda \in \Lambda^N_n$ 与 $\mu \in \Lambda^N_{n'}$ 不可比。）

（**2.3**）如果 h$w|M|v$i $\neq 0$，则称矩阵 $M \in$ Mat^N 是 秩-N 带胶合的电荷守恒 （CCwg）的，即 f(w) $\leq$ f(v)（也就是说，f(w) $>$ f(v) 蕴含 h$w|M|v$i $= 0$）。 （根据不可比约定，只有零非方形矩阵是 CCwg。）

(2.4) 例子。记 Match$^N_g(n, n)$ 为 CCwg 矩阵的集合。那么

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathsf{Match}^2_g(2, 2)$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & & 1 & 1 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & 1
\end{bmatrix} \in \mathsf{Match}_g^3(2,2)$$

（省略的条目为 0）。事实上，黑色条目位置对应于行 w 和列 v tha t 满足 f(w) =f(v)；而橙色的满足 f(w) $<$ f(v)。
注意到，我们有一种部分排序的上块三角性。

(2.5) 一般来说，我们将矩阵 $M \in \mathsf{Mat}^N(n,n)$ 中满足 f(w) $<$f(v) 的位置 h$w|M|v$i 称为胶合 位置。

我们可以将满足 f(w) =f(v) 的位置称为CC（电荷守恒）位置。

(2.6) 对于每个 N,n,m，我们将 $K'\colon \mathsf{Match}_g^N(n,m) \to \mathsf{Match}_g^N(n,m)$ 记作将所有胶合位置映为零的投影。我们称之为去胶合 映射。我们将 $\overline{K'}$ 记作将所有非胶合（即 CC）位置映为零的余投影。注意， $M \mapsto K'(M)$ 也给出了一个良定义的映射 $K\colon \mathsf{Match}_g^N(n,m) \to \mathsf{Match}^N(n,m)$。当然，所有这些映射都是线性的。

我们将 γ 记作 $\mathsf{Match}_g^N(n,m)$ 上的等价关系，其定义为：若 $a-b$ 至多只在胶合位置上非零，则 $a\gamma b$。因此，$\mathsf{Match}^N(n,m)$ 是 γ 各等价类的横截集。

为了证明下面的主定理2.13，我们需要更深入地理解序 $(\Lambda_n^N, >)$。

(2.7) 定义一个 序 $(\Lambda_n^N, \prec)$：若最左侧的第一个差异对于某个 i, $\lambda_i \neq \mu_i$ 出现，则 $\lambda \prec \mu$ （即序列 $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \prec \mu_1\mu_2\ldots\mu_n$），进而 $\lambda_i > \mu_i$。

(2.8) 例：考虑 $\lambda = 53104$ 和 $\mu = 53203 \in \Lambda_{13}^5$。第一个差异是 $\lambda_3 = 1 < 2 = \mu_3$，因此 $\lambda \succ \mu$。

与 $(\Lambda_n^N, <)$ 比较：在 $\underline{N}^n$ 的反字典序中，词 w 的首次出现满足 f(w) =53104 $>$ （即首次出现的位置在反字典序中晚于）满足 f(v) $=$ 53203的词的首次出现。对于 53104，首次出现的是词 f(53104) $=$ 5555322211111，根据 (1) 可知。对于 53203，首次出现的是 5553322211111。从 5553322211111 开始递增，先到 1114322211111，然后到 2114322211111，……，5554322211111、1115322211111，……，5555322211111。

注意，由于在反字典序中较早的数字变化得更快，因此词的右端（此处为 322211111）在这个序列中不会变化。紧邻其前的字母从 3 开始，逐渐递增至 5。

(2.9) 命题 position. 固定 $N,n \in \mathbb{N}$。(2.7) 中的序 $(\Lambda_n^N, \prec)$ 就是我们在 (2.2) 中的序 $(\Lambda_n^N, <)$.

证明。将 $\underline{N}^n$ 按反字典序排列。记住 (1)。因此，设 $\lambda \prec \mu$，并比较字 f(λ), f(μ)。这些组合除了 λ_{i-1} 之外都相同，其中 i （随后是 $\lambda_i > \mu_i$），所以两个字都以相同的递减模式结尾

$$\underbrace{i,i,\ldots,i}_{\mu_i},\underbrace{i-1,i-1,\ldots,i-1}_{\lambda_{i-1}},i-2,\ldots,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\lambda_1}.$$

注意，紧邻前面的字母对于 f(λ) 是 i，对于 μ 是 $>\overline{i}$ （如 53104 这个例子所示）。不过，显然这里这个数字在反字典序中是逐渐递增的，因此 $\lambda < \mu$。□

(2.10) 对于 $v \in \underline{N}^n$，我们定义 $\#_i(v) = \text{f}(v)_i$，即符号 i 在 v 中出现的次数。例如，$\#_2(1121) = \text{f}(1121)_2 = 1$。

(2.11) 考虑 $v = v_1v_2\cdots v_nv_{n+1}\cdots v_{n+m} \in \underline{N}^{n+m}$。我们将 $\underset{n-}{v} \in \underline{N}^n$ 记作 v的前 n 个符号组成的子词，将 $v \in \underline{N}^m$ 记作其末尾 m 个符号组成的子词，使得 v v $= v_{n--m}$

(2.12) 命题。考虑 $v,\ w\in \underline{N}^{n+m}$。(I) 若 f$(v)$ <f(w)，则 f$(\begin{smallmatrix}v\\ n-\end{smallmatrix})$ <f$(\begin{smallmatrix}w\\ n-\end{smallmatrix})$ 或 f$(\begin{smallmatrix}v\\ -m\end{smallmatrix})$ <f$(\begin{smallmatrix}w\\ -m\end{smallmatrix})$ 至少有一个成立，也可能两者都成立。(II) 若 f(v) =f(w)，则 f$(\begin{smallmatrix}v\\ n-\end{smallmatrix})$ =f$(\begin{smallmatrix}w\\ n-\end{smallmatrix})$ 且f$(\begin{smallmatrix}v\\ -m\end{smallmatrix})$ =f$(\begin{smallmatrix}w\\ -m\end{smallmatrix})$，或者两者均为不等式且方向相反。(III) 若 f(v) >f(w)，则 f$(\begin{smallmatrix}v\\ n-\end{smallmatrix})$ >f$(\begin{smallmatrix}w\\ n-\end{smallmatrix})$ 和 f$(\begin{smallmatrix}v\\ -m\end{smallmatrix})$ >f$(\begin{smallmatrix}w\\ -m\end{smallmatrix})$ 中至少有一个成立。

证明。当然，对任意 $v\in \underline{N}^{n+m}$，f$(\begin{smallmatrix}v\\ n-\end{smallmatrix})$ +f$(\begin{smallmatrix}v\\ -m\end{smallmatrix})$ =f(v)。
(I) 反设 f$(\ v)$ $\geq$f(w) 且 f$(\ v)$ $\geq$f(w)。若两者都相等$_{n-\quad n-\quad -m\quad -m}$，则有 f$(v)$ =f(w)——矛盾。因此，根据 (2.7,2.9)，存在一个最小的 i，使得 #$_i(\begin{smallmatrix}v\\ -\cdot\end{smallmatrix})$ >#$_i(\begin{smallmatrix}w\\ -\cdot\end{smallmatrix})$ 在至少一侧成立，即对于 $\cdot-\cdot$，有 $n-$ 或 $-m$。于是

$$\begin{array}{ccc}\#_j(\underset{n-}{v}) & +\#_j(\underset{-m}{v}) = & \#_j(v)\\ \| & \| & \|\\ \#_j(\underset{n-}{w}) & +\#_j(\underset{-m}{w}) = & \#_j(w)\end{array}\tag{2}$$

对于 $j<i$，且（至少一个 $\leq$ 为严格不等式）

$$\begin{array}{ccc}\#_i(\underset{n-}{v}) & +\#_i(\underset{-m}{v}) = & \#_i(v)\\ \mathsf{V}| & \mathsf{V}| & \mathsf{V}\\ \#_i(\underset{n-}{w}) & +\#_i(\underset{-m}{w}) = & \#_i(w)\end{array}$$

——根据（2.9）所允许的 $(\Lambda^N_n,\ \lessdot)$ 的 $\prec$ 表述，矛盾。
(II) 假设 f$(\begin{smallmatrix}v\\ n-\end{smallmatrix})$ =f$(\begin{smallmatrix}w\\ n-\end{smallmatrix})$。则对于所有 j，(2) 中外侧的两个垂直等式均成立，因此内侧等式也成立。同理，若 f$(\begin{smallmatrix}v\\ n-\end{smallmatrix})$ >f$(\begin{smallmatrix}w\\ n-\end{smallmatrix})$，则存在最小的 i，使得 #$_i(\begin{smallmatrix}v\\ n-\end{smallmatrix})$ <#$_i(\begin{smallmatrix}\ w\end{smallmatrix})$，$n-$而 #$_i(v)$ =#$_i(w)$ 蕴含 #$_i(\begin{smallmatrix}v\\ -m\end{smallmatrix})$ >#$_i(\begin{smallmatrix}w\\ -m\end{smallmatrix})$。不等式反向时也同理。(III) 论证与 (I) 类似。

□

(2.13) 定理。固定 $N\in\mathbb{N}$。Mat^N 的保荷并带胶合态射所构成的子集给出一个严格幺半子范畴（因此记为 Match^N_g）。
证明。我们需要证明它在范畴复合和幺半复合下封闭（注意，单位显然都包含在内）。

对于范畴复合，考虑 $L,M\in$Mat^N，它们可复合，且属于保荷并带胶合态射子集。若其中任一个不是方形，则 $LM=0$，因此无须检查。于是令 $L,M\in$Mat$^N(n,n)$。对于$w,v\in\mathbb{N}^n$

$$\langle w|LM|v\rangle \ =\ \sum_{u\in\mathbb{N}^n}\langle w|L|u\rangle\,\langle u|M|v\rangle\tag{3}$$

我们需要证明，f(w) $\not\leq$ f(v)（即 f(w) >f(v)）意味着 h$w|LM|v$i =0。假设 f(w) >f(v)。我们有

$$\langle w|LM|v\rangle \ =\ \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^n\\ \mathrm{f}(u)<\mathrm{f}(w)}}\overbrace{\langle w|L|u\rangle}^{=0}\langle u|M|v\rangle+\sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^n\\ \mathrm{f}(u)\geq\mathrm{f}(w)}}\langle w|L|u\rangle\overbrace{\langle u|M|v\rangle}^{=0}\ =\ 0$$

如所需　　，其中第一个标出的因子由 L 上的 CCwg 条件可知为 0；而第二个因为 f$(u$　　$)$ $\geq$f(w) >f(v) 蕴含此处 f(u) > f(v)。
对于幺半群合成，取 $L\in$Mat$^N(n,\ n')$、$M\in$Mat$^N(m,\ m')$。若 $n\neq n'$ 或 $m\neq m'$，则 $L\otimes M=0$，因此无需验证；故取 $n=n'$、$m=m'$。对于 $w,\ v\in\underline{N}^{n+m}$，我们需要证明，如果 f$(w)$ >f(v)，则 h$w|L\otimes M|v$i =0。假设 f(w) >f(v)。回想我们有

$$\langle w|L\otimes M|v\rangle \ =\ \langle \underset{n-}{w}|L|\underset{n-}{v}\rangle\,\langle \underset{-m}{w}|M|\underset{-m}{v}\rangle\tag{4}$$

只需证明在已知 f(w) >f(v) 的情况下，f$(\begin{smallmatrix}w\\ n-\end{smallmatrix})$ >f$(\begin{smallmatrix}v\\ n-\end{smallmatrix})$ 或 f$(\begin{smallmatrix}w\\ -m\end{smallmatrix})$ >f$(\begin{smallmatrix}v\\ -m\end{smallmatrix})$ 至少有一个成立。由 (2.12) 可知这一点，因此这里 (4) 中的某个因子为零，故该项如所需地为零。□

(2.14) P 命题。设 $N\in\mathbb{N}$。范畴 Match^N 是 Match^N_g 的幺半子范畴 .

证明。定义 Match^N 的 CC 条件可表示为 $R_{vw} \neq 0$ 蕴含 f(v) = f(w)。 □

(2.15) 注意以下内容来自 (2.12) 以及上文定理 2.13 证明中的表述。

引理。设 $L \in \mathsf{Match}_g^N(n,n)$、$M \in \mathsf{Match}_g^N(m,m)$ 和 $w, v \in \underline{N}^{n+m}$。

(A) 若 f(w) =f(v)，则 (I) 若 f($\binom{w}{n-}$) =f($\binom{v}{n-}$)，则 f($\binom{w}{-m}$) =f($\binom{v}{-m}$)，且 (4) 中 h$w|L \otimes M|v$i 的两个因子都来自 L 和 M 中的“CC 项”。另一方面，(II) 若 f($\binom{w}{n-}$) $\neq$ f($\binom{v}{n-}$)，则其中一个因子是“胶合”，另一个为零。

(B) 另一方面，若 f(w) $<$ f(v)（即我们考察的是胶合位置上的矩阵项 h$w|L \otimes M|v$i），则至少有一个因子来自 L 或 M 中的“胶合项”。□

2.3. **迈向表示论的胶合演算**。

现在考虑针对 R-矩阵的一般胶合拟设——它扩展了一般的守恒荷拟设，后者已被求解，用于分类辫群表示 $F\colon \mathsf{B} \to \mathsf{Match}^N$ in [MR21]。（实际上，也适用于任何其他此类严格幺半范畴中生成元的表示。）我们希望确立约束的某些性质，这些性质取决于一个参数是否为胶合参数（即在 CCgw 中允许非零，但在 CC 中不允许）或非胶合参数。

例如

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ & \gamma \end{bmatrix} \in \mathsf{Match}_g^2(1,1), \qquad M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ & f & g & h \\ & k & l & m \\ & & & r \end{bmatrix} \in \mathsf{Match}_g^2(2,2) \tag{5}$$

胶合部分标为橙色。

基础内容:

$$\langle 11|M = [1,0,0,0]M = [a,b,c,d], \qquad \langle 22|M = [0,0,0,1]M = [0,0,0,r]$$

$$\langle 22|M|12\rangle \;=\; [0,0,0,1]\; M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

- 与 f(22) > f(12) 一致，如 (2.3) 所示。

同时例如

$$D \otimes D = \begin{bmatrix} \alpha\alpha & \alpha\beta & \beta\alpha & \beta\beta \\ & \alpha\gamma & & \beta\gamma \\ & & \gamma\alpha & \gamma\beta \\ & & & \gamma\gamma \end{bmatrix}$$

$$M \otimes M \;=\; \left[\begin{array}{cccc|cccc|c} aa & ab & ac & ad & ba & bb & bc & bd & \dots \\ & af & ag & ah & & bf & bg & bh & \dots \\ & ak & al & am & & bk & bl & bm & \dots \\ & & & ar & & & & br & \dots \\ \hline & & & & fa & fb & fc & fd & \dots \\ & & & & & ff & fg & fh & \dots \\ & & & & & fk & fl & fm & \dots \\ & & & & & & & fr & \dots \\ \hline & & & & ka & kb & kc & kd & \dots \\ & & & & & kf & kg & kh & \dots \\ & & & & & kk & kl & km & \dots \\ & & & & & & & kr & \dots \\ \hline & & & & & & & & \ddots \end{array}\right]$$

(2.16) 令 $L, M \in \mathrm{Match}_g^N(n,n)$，并考虑矩阵元素 $\mathsf{h}w|LM|v\mathsf{i}$。当 $\mathsf{f}(w) = \mathsf{f}(v)$ 时，我们有

$$\langle w|LM|v\rangle = \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^n \\ \mathsf{f}(u)<\mathsf{f}(w)}} \overbrace{\langle w|L|u\rangle}^{=0}\langle u|M|v\rangle + \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^n \\ \mathsf{f}(u)=\mathsf{f}(w)}} \langle w|L|u\rangle\langle u|M|v\rangle + \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^n \\ \mathsf{f}(u)>\mathsf{f}(w)}} \langle w|L|u\rangle \overbrace{\langle u|M|v\rangle}^{=0}$$

由此可见，只有 L、M 中严格电荷守恒元素才会产生贡献。我们得出以下结论。

(2.17) 命题。考虑给定的一组位于第 n 级的秩为 N 的 CCwg 矩阵。将这些矩阵记作 M_1、M_2、... $\in \mathrm{Match}_g^N(n, n)$。任何用矩阵 $\{M_i\}$（例如 $M_1M_2M_1 = M_2M_1M_2$）表示且对这些矩阵成立的恒等式，对投影去除胶合后得到的矩阵 $K(M_i)$ 也成立。□

(2.18) 现在考虑 $\mathsf{f}(w) < \mathsf{f}(v)$——我们有

$$\langle w|LM|v\rangle = \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^n \\ \mathsf{f}(u)<\mathsf{f}(w)}} \overbrace{\langle w|L|u\rangle}^{=0}\langle u|M|v\rangle + \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^n \\ \mathsf{f}(u)=\mathsf{f}(w)}} \langle w|L|u\rangle\langle u|M|v\rangle + \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^n \\ \mathsf{f}(u)>\mathsf{f}(w)}} \langle w|L|u\rangle\langle u|M|v\rangle$$

- 我们看到，每个这样的元素都包含一个带有胶合因子（以 橙色标示）的贡献，来自 L或 M，或两者兼有。

我们推导出以下结论。

(2.19) 定理. [HoG 定理。] (I) 胶合是幂零理想——也就是说，对于每个 n，代数 $\mathrm{Match}_g^N(n,n)$ 中的胶合子集都是幂零理想。因此，对于 $N, n > 1$，代数 $\mathrm{Match}_g^N(n,n)$ 是非半单的。此外，任何满足 $dim(M) > dim(K(M))$ 的子代数 M（如 (2.6) 中所示）都是非半单的。

(II) 此外，若 $\rho\colon \mathrm{A} \to \mathrm{Match}_g^N(n,n)$ 是代数 A 的一个表示，那么去胶合 $K \circ \rho$（同样如 (2.6) 中所示）也是一个表示；其像是对根基的部分（或全部）取商。特别地，ρ(A) 与 $(K \circ \rho)$(A) 的不可约因子相同。

证明. (I) 从 (2.18) 展开式的最后一项可知，胶合元素的乘积仍是胶合元素，且其指标在序中的间隔更大（即 $\mathsf{f}(v) > \mathsf{f}(u) > \mathsf{f}(w)$）。但对于任意有限的 n，有序集都是有限的，因此反复迭代后，所有含有足够多个因子的乘积都会消失。

(II) 由 (2.17) 可得，或者直接计算可得 $(K \circ \rho)(ab) = K(\rho(a)\rho(b)) = (K \circ \rho)(a)$。$(K \circ \rho)(b)$。□

(2.20) 注。注意，一个代数的表示若能通过某个半单代数满射因子分解，并不一定是半单的（因为根基可能包含在核中）。但一个表示若能通过某个非半单代数满射因子分解，则必定是非半单的。

(2.21) 接下来我们可以讨论幺半积。简而言之，演算的这一部分可以直接由 (2.15) 推得。

如何将其表述为雅各布森根基的类比，仍有一些问题——这些问题源于高阶表示论的非典范性。因此，我们在此不展示一个宏大的理论，而只介绍一个应用示例。

例如，我们已经证明了以下结果。

(2.22) 推论。每个形式为 $F : \mathrm{B} \to \mathrm{Match}_g^N$ 的辫群表示都会“限制”（参见 Wedderburn–Malcev 定理）为一个守荷表示。也就是说，令 σ 表示在 B_2 中单独生成 B 的基本辫，则 $R = F(\sigma)$ 是决定 F 的 R 阶矩阵；于是 $K(R)$ 是一个决定守荷表示 F_K 的 R 阶矩阵。此外，对于所有 n，普通表示 $F(B_n)$ 和 $F_K(B_n)$ 的简单成分相同。

接下来我们将讨论例子和应用。

3. 应用 I：辫子表示

给定 CC 限制性质 (2.22)，原则上我们可以通过构造一个拟设来找到所有 CCwg 辫子表示，该拟设由一个 CC 表示（来自完整分类）与一个一般胶合矩阵组合而成。回忆一下，对于任意秩 N 以及任意此类拟设 $R \in \mathrm{Mat}(N^2, N^2)$，辫子异常定义为

$$\mathfrak{A}(R) = R_1 R_2 R_1 - R_2 R_1 R_2 \tag{6}$$

其中 $R_1 = R \otimes 1_N$ 和 $R_2 = 1_N \otimes R$。$\mathfrak{A}(R)$ 的消失，加上 R 的可逆性，给出了胶合参数空间中的一个辫子表示簇（可能为 0）。

这里我们将通过研究秩3的 CCwg 辫子表示来阐明这一方法。CC 方案中已解决这一秩的情形，但一般情况下仍是开放问题。

CC 分类方案是在各种自然等价关系下进行的，主要是所有辫子表示都满足的局部等价，也包括 X 对称性——通过对角矩阵 [MR21], 共轭；这一点是 CC 方案特有的。因此，需要确定扩展到胶合是否取决于 X 轨道中所选的点。我们已经可以在秩2的情形下进行研究，因此会在 (3.5) 中讨论这一点。

关于各种等价概念的详尽讨论，见 [MRT25]。这里简要提及其中几种。用范畴论术语来说，局部等价，即当 $R = (A \otimes A)S(A \otimes A)^{-1}$ 时，对应于幺半群自然等价。我们也常将其称为“规范等价”，因为它相当于局部基变换。更一般地，自然等价与我们所称的 ∞-等价相同，也就是说，对应于 R 和S 的表示 ρ_n^R 和 ρ_n^S 等价。其有限形式是 k-等价，即要求对于所有 $n \le k$，ρ_n^R 和 ρ_n^S 都等价。

3.1. 前言：秩 $N = 2$。

这里回顾 Hietarinta 对秩 2 辫群表示簇的分类（在某种等价概念下——见后文） [Hie92]将很有用。排除平凡表示后，Hietarinta 实际上给出了以下十种情形。

$$R_{\backslash} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}, \qquad R_{/} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$R_f = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kq & 0 \\ 0 & kp & k^2 - pq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}, \qquad R_{fI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{R}_{fII} = \begin{bmatrix} k & q & p & s \\ 0 & 0 & k & q \\ 0 & k & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \quad R_{fIII} = \begin{bmatrix} k^2 & -kp & kp & pq \\ 0 & 0 & k^2 & kq \\ 0 & k^2 & 0 & -kq \\ 0 & 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$R_a = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kq & 0 \\ 0 & kp & k^2-pq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -pq \end{bmatrix}, \qquad R_{ag} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & q & p-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p^2+2\,pq-q^2 & 0 & 0 & p^2-q^2 \\ 0 & p^2-q^2 & p^2+q^2 & 0 \\ 0 & p^2+q^2 & p^2-q^2 & 0 \\ p^2-q^2 & 0 & 0 & p^2-2\,pq-q^2 \end{bmatrix}$$

为这里的各个簇分别命名也会很方便。大多数名称取自 CC 分类 [MR21], ，现结合胶合机制加以说明。簇 $R_\backslash$、R_f、R_a 本身就是 CC。因此，第一个是斜杠型。情形 R_a 是 a 型；情形 R_f 是 f 型——分别对应具有 $U_q gl(1|1)$ 和$U_q sl(2)$ 对称性的表示，但标签 a 和 f 分别指反铁磁和铁磁，这两个术语源自 CC 表示的完全图刻画。上面的表示 $R_/$ 是反斜杠型。情形 R_{fI}、R_{fII}、R_{fIII} 是 f 胶合 I 至 III 型，因为它们都是胶合表示，可投影到或解胶到 f 类簇的不同部分。事实上，它们发生在 f 类簇与斜杠类簇相交的点上，因此这里的命名并非唯一。

按照同样的逻辑，情形 R_{ag} 是“a 胶合”。后两种情形分别称为伊辛和八顶点。这两种情形不符合胶合方案。

（**3.1**）注意，虽然 $R_/$ 在局部上不等价于 CC 情形，但它与 ∞ 等价，事实上，DS 等价于 $R_\backslash$ 的某个特化。确实可以发现，$T\otimes T$ 与 $T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 对易，且与 $R_\backslash$ 中的特化 $R_\backslash^{s=k}$ 与 $s=k$ 对易，因此 $(T\otimes I)R_\backslash^{s=k}(T\otimes I)^{-1}$ 是另一个杨-巴克斯特算子。我们看到，这就是 $R_/$。现在，DS 等价通过 $T_n = I\otimes T\otimes T^2\cdots\otimes T^{n-1}$ 蕴含 ∞ 等价（参见 [MRT25]）。

(3.2) 计算机计算 [映射25] 表明，8 个顶点的情形与一个 CC 情形 3-等价——即R_a 具有 2 个重数均为 2 的特征值的情形。这是否可以推广为一种 ∞-等价?

接下来我们 具体考察上面的簇如何直接关联，即它们的交集 .

(3.3) 注意，若令 $k=1$ 和 $p=q=-1$，那么 R_f 就会坍缩为R_{fI}的去粘合版本。若令 $p=q=k$，那么 R_f 就会坍缩为 R_{fII} 的去粘合版本（或无胶合子簇），相差一个整体标量；并且恰好等于去粘合/无胶合的 R_{fIII}。（注意：在这些交集中，变量名 p、q 等并不对应。）

在 X 对称性下，我们可以将 R_a 变换为

$$R'_a = \begin{bmatrix} k^2 & & & \\ & 0 & k^2 & \\ & pq & k^2-pq & \\ & & & -pq \end{bmatrix}$$

它仅通过 pq依赖于 p、q，而仅通过 k^2依赖于 k。若令 $k^2=p'$ 和 $pq=q'$，那么 R_a 就会坍缩为去粘合的 R_{ag}（为区分参数，将 R_{ag} 中的参数替换为带撇号的形式）。

(3.4) 考虑到向更高秩的推广，一个耐人寻味的问题是：在通过 X 对称性轨道延伸 R_a 原有表述的粘合拟设解的意义下，a 胶合是什么样的？目前，只需考虑轨道中由

给出的部分

$$R^x_{ag} = \begin{bmatrix} a & p & q & r \\ 0 & 0 & ax & s \\ 0 & -\frac{b}{x} & a+b & t \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \tag{9}$$

（在足够强的意义上，即 X 对称性不会改变 11 和 22 通道中的 CC 部分）。注意，这涵盖了 R_a：令 $a = k^2$ 和 $b = -pq$，然后令 $x = q/k$；也涵盖了 R'_a：令$x = 1$。

由反常消失（以及可逆性），我们首先得到

$$(px+q)(a+b) = 0, \quad (px+q)(ax+b) = 0, \quad (s-tx)(a+b) = 0, \quad (s-tx)(ax-b) = 0$$

因此，例如，若 $x \neq 1$，则 $q = -px$ 且 $t = s/x$。令 $q = -px$ 和 $t = s/x$，我们得到

$$s(ax+b) = px(ax-b)$$

所以，若 $(ax+b) \neq 0$，则 q, s, t 都线性依赖于 p。再施加关于 s 的相应恒等式，则当 $(ax-b)(p^2x(x^2a-b)+r(ax+b)^2) = 0.$ 时，反常消失。由于我们假设 $b \neq -ax$，这就确定了 r 关于 p^2 的线性表达式，除非 $b = ax$。我们有辫群表示

$$\begin{bmatrix} a & p & -px & p^2x\frac{x^2a-b}{(ax+b)^2} \\ 0 & 0 & ax & px\frac{ax-b}{ax+b} \\ 0 & -\frac{b}{x} & a+b & p\frac{ax-b}{ax+b} \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

另一方面，假设 $x = 1$。那么 $t = s$ 和 $q = -p$。如果 $b = a$，那么 $s = 0$，我们得到解

$$\begin{bmatrix} a & p & -p & r \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

它在局部上等价于 R_{ag}的等特征值情形。如果 $b \neq a$，分析取决于 $b = -a$是否成立。现在让我们继续采用一种更系统的方案（尽管有些部分不那么直观）。

(3.5) 我们可以为更高秩构造一个拟设，首先设定 (9) 中 R^x_{ag} 的形式。容易验证

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & xa & 0 \\ 0 & -\frac{b}{x} & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{b(-tx+q)}{x(tx+q)} & -\frac{q}{x} & q & -\frac{-t^2x^3-t^2x^2+q^2x-2\,tqx-q^2}{4\,xb} \\ 0 & 0 & \frac{b(-tx+q)}{tx+q} & tx \\ 0 & -\frac{b}{x} & \frac{b(-tx+q)}{x(tx+q)}+b & t \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & -b & -\frac{bt}{a} \\ 0 & a & a+b & t \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -\frac{aq}{b} & q & r \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -a & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

它们都是 R矩阵。使用 Maple [Map25]，在 Gröbner 基上进行计算并求解辫子异常后，我们发现这个列表是完备的。

第一个解已经是 CC形式，而第二个解可以通过以 $T \otimes T$为共轭变换成 CC形式，其中 $T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{tx+q}{2\,b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

第三个和第四个解对应于对 x 的一种特殊选择，即 $x = -a/b$ 和$x = a/b$。通过使用形如 $\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的矩阵，可以将它们规范变换为如下形式：

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \frac{4\,a^2r+at^2-bt^2}{4\,a^2} \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & a & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -\frac{aq^2-4\,b^2r-bq^2}{4\,b^2} \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -a & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

由于 r，t，q都是任意实数，我们可以选择 $t=q=0$ 以得到形如R_{ag}的解。事实上，只要 (1，4) 元素非零，我们就可以通过规范变换将该元素变为 1。实际上，这里的规范选择是一个对角矩阵。此外，完成这一步后，我们可以使这两个解本身规范等价（只需改变符号），而 $a \leftrightarrow b$ 对称性随后给出唯一的非 CC 代表元

$$R_{a,b} := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & a & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

(3.6) 当 $a \neq b$ 时，上述解 $R_{a,\,b}$ 是可对角化的。当 $a=b$ 时，表示论会变得更加微妙；此时若尔当标准形有 2 2×2 个块。为了分析这种情形，将 $a=b=1$ 设为幺幂情形也很方便（而且可能足够一般）。

3.2. **奇偶性**。 在表示论中，利用 §2.2 中方法的一个简单且纯机械的应用会很有用。请注意，对于 CC 构造，只需标记 Match^N(1，1) 的行和列的符号彼此不同 —— 也就是说，该构造在 Σ_N 置换这些标签的作用下具有对称性；而在 Match$_g^N$ 中，符号至少必须完全有序。（从某种意义上说，这在 Match^N 中已经成立，因为我们会先对基底排序，再写出矩阵；但整个构造具有 Σ_N 对称性。）这可以与 Mat$_{ACC}^N$ 相比较，在那里，该构造甚至会用到符号 {1，2，..... N} 的数值。现在我们称 $\underline{N}^n$ 中的两个词具有相同的奇偶性，如果它们的和具有相同的奇偶性（例如，123 和 222 的奇偶性相同；11 和 22 的奇偶性也相同；但 11 和 12 的奇偶性不同）。

(3.7) 固定 N。称矩阵 Min Mat^N 保持奇偶性，如果 $M_{vw}\neq 0$ 意味着词 v，w具有相同的奇偶性。例：（I）CC矩阵保持奇偶性。

(II) Hietarinta 的秩 2 横截面（上文回顾过）中的每个矩阵都保持奇偶性，但 R_{fII} 和 R_{fIII} 除外。

(3.8) 命题。保持奇偶性的矩阵之积保持奇偶性。保持奇偶性的矩阵的克罗内克积也保持奇偶性。

证明。考虑可复合矩阵 L，M，如式（3）所示。假设词 w，v的奇偶性不同。那么，对每个求和项，要么 u 与 w的奇偶性不同，要么与 v的奇偶性不同，因此该项对乘积的贡献为 0，符合要求。现在考虑式（4）中的克罗内克积。不失一般性，假设 w 为奇，v 为偶。如果 w 的 n 部分为奇（则 m 部分为偶），并且如果 v 的 n 部分为偶，那么第一个因子为零，无需再作证明。因此，假设 v 的 n 部分为奇——那么 m 部分为奇，第二个因子为零。□

在下文中，我们将反复应用这一点。例如参见 §4.2.3。

3.3. **秩为 $N=3$ 的辫群表示**。

本节讨论如何将 CC 辫群表示的分类扩展到带胶合情形。策略是使用上文的定理 2.19，因此从 CC 表示入手并在此基础上扩展；首先尝试借助计算机代数改进一般的带胶合拟设。

3.3.1. 胶合矩阵的形态。

关于粘合位置中的变量，首先需要确定合适的名称。秩 2 中有五个这样的变量，暂且可以将它们称为 p、q、r、s、t，例如式（9）所示。然后，通过对 123 的三种限制（即限制到 12、13 和 23），可以将与这些变量对应的胶分量记为 p_{12}、q_{12}、r_{12}、s_{12}、t_{12}，依此类推。我们得到（仅用 1 标记 CC 位置）：

$$\begin{bmatrix}
1 & p_{12} & p_{13} & q_{12} & r_{12} & p_{1123} & q_{13} & p_{1132} & r_{13} \\
 & 1 & p_{1213} & 1 & s_{12} & p_{1223} & p_{1231} & p_{1232} & p_{1233} \\
 & & 1 & & p_{1322} & p_{1323} & 1 & p_{1332} & s_{13} \\
 & 1 & p_{2113} & 1 & t_{12} & p_{2123} & p_{2131} & p_{2132} & p_{2133} \\
 & & & & 1 & p_{23} & & q_{23} & r_{23} \\
 & & & & & 1 & & 1 & s_{23} \\
 & & 1 & & p_{3122} & p_{3123} & 1 & p_{3132} & t_{13} \\
 & & & & & 1 & & 1 & t_{23} \\
 & & & & & & & & 1
\end{bmatrix} \in \mathsf{Match}_g^3(2,2)$$

这里的命名和颜色编码中，黑色表示 CC；橙色表示两个电荷扇区之间的胶合；红色表示三个电荷扇区之间的胶合。不过，最终在下文的每个拟设中，我们对粘合位置只使用 $m_{i,\ j}$。

3.3.2. 回顾秩*3 CC* 分类。 在秩-3 情形下，根据 [MR21], , CC 辫表示簇在局部等价意义下的分类如下。首先要回顾的是，秩3解是由秩 2 构建而成的；而在秩 2 中，按定向区分共有四种解类型，记作 /、a、f 和 0。相应的 R矩阵类型可表示为：

$$R_/ = \begin{bmatrix} a & & & \\ & 0 & b & \\ & c & 0 & \\ & & & d \end{bmatrix}, \quad R_a = \begin{bmatrix} a & & & \\ & a+b & b & \\ & -a & 0 & \\ & & & b \end{bmatrix}, \quad R_f = \begin{bmatrix} a & & & \\ & a+b & b & \\ & -a & 0 & \\ & & & a \end{bmatrix}, \quad R_0 = Id_4$$

在秩-N 中，我们用完全图 K_N 来编码解。可以认为是给每条边关联一个秩 2 解。因此，在秩-3中，我们需要三个秩 2 解作为输入。由此，解可由来自 /,a,f,0 的三元组编码。有些组合是不可能的。总结如下：

/// a//, f//, 0// aa0, fff, , ff0, f
00, aaf, 000

在 [MR21] 中，对这些情形下的 R 矩阵谱已有相当详尽的分析。这里我们暂且从扩张的角度聚焦于几个有趣的情形。

3.3.3. 扩展 *CC* 类型 *aa0* 的辫群表示。 回想一下，最终我们只用 $m_{i,j}$表示胶合位置。一个扩展 aa0 的辫表示簇示例如下，其中我们用 m_i 表示胶变量：

$$\begin{bmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & \frac{bm_1^2}{a^2} - \frac{m_1^2}{a} & -\frac{2bm_1^2m_2}{a^3} + \frac{m_1^2m_2}{a^2} - \frac{m_1m_3}{a} & 0 & \frac{m_1^2m_2}{a^2} + \frac{m_1m_3}{a} & \frac{bm_1^2m_2^2}{a^4} - \frac{m_1^2m_2^2}{a^3} \\
0 & a+b & -\frac{bm_2}{a} & a & -2m_1 & -\frac{bm_1m_2}{a^2} + \frac{m_1m_2}{a} - m_3 & -m_2 & \frac{3m_1m_2}{a} & \frac{bm_1m_2^2}{a^3} - \frac{2m_1m_2^2}{a^2} + \frac{m_2m_3}{a} \\
0 & 0 & a & 0 & 0 & -m_1 & 0 & m_1 & 0 \\
0 & -b & \frac{bm_2}{a} & 0 & \frac{2bm_1}{a} & -\frac{3bm_1m_2}{a^2} & m_2 & m_3 & \frac{bm_1m_2^2}{a^3} - \frac{m_2m_3}{a} \\
0 & 0 & 0 & 0 & b & -\frac{2bm_2}{a} & 0 & 2m_2 & \frac{bm_2^2}{a^2} - \frac{m_2^2}{a} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{bm_1}{a} & a & \frac{bm_1}{a} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & a+b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a
\end{bmatrix}$$

这为每个 aa0 代表元解都给出了一个扩展解的多维簇。不过，一般而言，此处的胶合可以通过局部基变换消去——所得结果就是将所有胶合调至 0 后得到的电荷守恒影子。

另一个例子是 $a=b$，其形式为

$$\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_1 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 2\,b & -m_3 & b & -2\,m_2 & -m_4 & -m_3 & 3\,\frac{m_3 m_2}{b} & -m_5 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & -m_2 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & -b & m_3 & 0 & 2\,m_2 & -3\,\frac{m_3 m_2}{b} & m_3 & m_4 & m_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & -2\,m_3 & 0 & 2\,m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_2 & b & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 2\,b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

它恰好只有一个特征值。这个解簇中的点无法通过局部规范变换到一个电荷守恒矩阵，其一个例子如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意，该矩阵是幺幂的。

(3.9) 我们可以用上述解答来处理秩限制问题。该表示的 12 部分为

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \frac{b m_{3,8}^2}{a^2} - \frac{m_{3,8}^2}{a} \\ 0 & a+b & a & -2m_{3,8} \\ 0 & -b & 0 & \frac{2b m_{3,8}}{a} \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

它确实是一个辫群表示。13 部分为

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & m \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

它不是一个表示。由此可见，电荷守恒表示强大的秩限制性质并不适用于胶合情形。

3.3.4. 扩展 *CC* 型 *fff* 的辫群表示：幺幂情形。这里我们从 fff 的幺幂解开始。经过规范变换后，我们得到一个极其简单的情形，恰好是只有一个胶合片段的幺幂 fff 情形：1 位于 (5,9) 位置。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

This 这个情形非常适合快速进行表示论分析，我们将在 §4.3 中对此进行说明 .

3.3.5. 一些 $a//$ 情形。从一般的 $a//$ 形式出发并加入胶合，我们发现存在有趣的解。为具体起见，我们取以下 CC 解

$$R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意到， R 的若尔当标准形有一个特征值为 1 的 2×2 块，以及 $7\ 1\times 1$ 个块，其中两个的特征值为 -1 ，其余 5 个的特征值为 1。加入胶合并求解后，我们得到例如以下解:

$$R_g := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

可以计算出，若尔当标准形有 $2\ 2\times 2$ 个特征值为 1 的块。此外，不存在将 R_g 变换为电荷守恒矩阵的局部规范选择。

4. 应用 II：表示论

4.1. **辫群表示论概述**。固定 N。令 R 为一个秩为 N R 的矩阵，因此给出一个辫群表示 $F_R : \mathsf{B} \to \mathsf{Mat}^N$ ，其定义为 $F_R(\sigma) = R_\circ$ 事实上，若将 R 记作 R_χ，例如，那么我们可以将辫群表示 F_{R_χ}简记为 F_χ ； 而 ρ_n^χ 则是由此得到的 B_n 的普通表示。

若固定一个 R 矩阵 R ，则记作

$$R_i = Id_N^{\otimes i-1} \otimes R \otimes Id_N^{\otimes n-i-1} \tag{10}$$

记作

$$\mathscr{A}_n^\chi = \langle R_1, R_2, ..., R_{n-1} \rangle \ \subset \mathsf{Mat}^N(n,n)$$

R_χ所给出的 B_n 表示的像代数。我们用 $\mathscr{A}'^\chi_n$ 表示交换子。

(4.1) 固定 $N \in \mathbb{N}$。对于 $j \in \{1,\ 2,\ ...,\ N\}$，定义 $\overline{j} = N+1-j$。对于一个词 $w = w_1 w_2 \cdots w_l \in \{1,\ 2,\ .....,\ N\}^l$，定义 $\overline{w} = \overline{w_1 w_2} \cdots \overline{w_l}$。

固定 N。矩阵 $\mathsf{J} \in \mathsf{Mat}^N(1,\ 1)$ 定义为 $\mathsf{J}_{i,\ j} = \delta_{i,\ N+1-j} = \delta_{i,\ \overline{j}}$。

E.g., for $N=2$ we have $\mathsf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

在方便时，我们可以写作 J_n ， 或带有 $N=n$ 的 J。因此，例如 $\mathsf{J}^{\otimes n} = \mathsf{J}_N^{\otimes n} = \mathsf{J}_{N^n}$.注意，在 $\mathsf{Mat}^N(n,\ n)$ 中以 $\mathsf{J}^{\otimes n}$ 作共轭会将矩阵 R 变换为 $R_{v,\ w} \mapsto R_{\overline{v},\ \overline{w}}$。

例如，当 $N=3$ 时，我们有 $(\mathsf{J}^{\otimes 2} M \mathsf{J}^{\otimes 2})_{13,\ 23} = M_{31,\ }$ 21</style}。

换句话说，如果 $M \mapsto M^T$ 是转置，而对于方阵， $M \mapsto M^\dashv$ 是反对称转置，那么 $\mathsf{J}M\mathsf{J} = (M^T)^\dashv$。

以下结论可能广为人知，至少在秩为 $N=2$ 的情形下如此（例如参见 [Hie92]）：

引理 4.2。设 $N \in \mathbb{N}$。如果杨-巴克斯特算子 $R \in Aut(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N) \subset \mathsf{Mat}^N(2,2)$ 在斜转置 $R_{ij,kl} \mapsto R_{\overline{kl},\overline{ij}}$ 下保持不变，那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，由作用于 B_n 的函子给出的表示 ρ_R，即 $F_R(B_n)$，都等价于其对偶表示 $\rho_{R^T} = \rho_R^T$。该对偶表示由 $(\rho_n^R)^T$ 给出，也可以写作 $\rho_n^{R^T}$。

证明。注意，通过 J_{N^2} 共轭可将任意矩阵变为同时转置和斜转置。因此，用 J_{N^n} 对 R_i 共轭得到 $(R^T)_i$，因为 R 在斜转置下不变。因此，J_{N^n} 交织表示 ρ_R 和 ρ_{R^T}。□

4.2. 秩 $N = 2$ 中的表示论。为准备进入秩 $N = 3$ 的情形，简要从代数视角考察其中一些秩 2 表示将会有所帮助——新增胶合对表示本身的影响。

4.2.1. 小秩 $n = 2$。值得考虑的最简单问题之一，是我们得到的 B_2 表示的等价类。这在很大程度上取决于基本辫像的若尔当标准形，也就是 R 矩阵本身。

Anot另一种思考方式是从“局部关系”入手—— R 的最小多项式 .

（**4.3**）首先考虑 a 胶合，即 R_{ag}。如果 $p \neq -q$，那么显然无论 k取何值，若尔当标准形都是对角的。另一方面，如果 $p = -q$，那么中央块会变成单个若尔当块（注意它是幺幂矩阵，但不是单位矩阵）；而除非 $k = 0$，此时“外部”块也会变成单个若尔当块。

局部关系总是 $(R-p)(R+q) = 0$这里是二次的，因此我们的辫群表示也总是 Hecke 表示。即使 $p = -q$ 且二次关系退化，这一点依然成立。在 Hecke 参数化中，通常会进行归一化，使特征值为 $p = 1$，另一个特征值为 $-q = -v^2$（事实上，这里的 Hecke 参数称为 v，通常称作 q，但我们在此需要避免歧义，因此使用 v）。因此，$p = -q$ 对应于 $1 = -v^2$，所以 $v = i$ ——“单位根”。于是 $[2] := v + v^{-1} = i - i = 0$。

请注意，这个代数情形表明，按照我们目前的呈现方式，胶合会改变表示论，因为它有时会增加根基。不过，这个例子规模太小，无法探究方方面面。这是一个辫群表示，同时也是 Hecke 表示；像的维数并未增加，因为整个根基已经存在于内部块中。

(4.4) 现在我们来讨论各种 f 情形。

对于 f 本身，局部关系仍然是二次的，因此我们总能得到 Hecke 表示（实际上是 Temperley–Lieb 表示）。这个经典情形在所有秩下、对所有参数取值都已得到充分理解。

然而，对于 f-glue-I，我们看到局部关系是

$$(R-1)^2(R+1) = 0 \tag{11}$$

所以这不是 Hecke。借助 HoG 机制，它有一个商（仅通过对根基的一个子理想取商），该商是 Temperley–Lieb；因此，例如，它的简单部分就是 Temperley–Lieb。但总体而言，它甚至不是 Hecke。我们在 §4.2.2 中讨论所有小秩 n 下的普通表示论。

对于 f-胶合-II，与 (8) 中一样，我们有以下几点。首先，不失一般性地取 $k = 1$。因此，CC 部分与 R_{fI} 的 CC 部分 X-等价，进而根据[MRT25，推论 7.24]，与 ∞-等价；所以根据定理 2.19，R_{fI} 与 R_{fII} 的简单表示论相同——它们由 CC 部分编码。值得注意的是，将 R_{fII} 特化到 $p = q = 0$ 和 $s = 1$（以下称为 $\mathbb{R}_\diamond$）后，与 R_{fI} 完全 ∞-等价，这一点我们将在命题 4.9 中证明。

n	代数 $\mathscr{A}_n^{fI}$	dim	dim $\mathscr{A}_n^{fI}/rad$	dim rad^2	dim rad^3	dim $\mathscr{A}_n^{\spadesuit}$	dim $\mathscr{A}_n^{\spadesuit}/rad$	dim rad^2	dim $\mathscr{A}_n^{\heartsuit}$	dim /rad	dim rad^2
2		3	2	0	0	3	2	0	4	2	1
3		10	5	0	0	10	5	0	20	5	6
4		35	14	1	0	35	14	1	70	14	28
5		126	42	9	0	126	42	9	252	42	120
6		462	132	55	1						

表 1. 表示 fI 的像代数 $\mathscr{A}_n^{fI}$ 各部分的维数，以及 $\mathscr{A}_{\spadesuit}{}_n$和 $\mathscr{A}_n^{\heartsuit}$（部分依据 Magma 计算 [BCP97]），在低小秩 n 下。注意，半单商维数为卡特兰数，符合要求。

该簇上值得考虑的有趣点是

$$R_{\diamondsuit} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{\spadesuit} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{\heartsuit} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{\diamondsuit}$和 $R_{\spadesuit}$的最小多项式为 $(R-1)^2(R+1)$，与 R_{fI}相同；而 $R_{\heartsuit}$的最小多项式为 $(R-1)^3(R+1)$（因此不等价于 R_{fI}，参见 (11)）。

用表格总结一些低秩情形会很方便，如表 1 所示。

4.2.2. 一个案例研究：情形 R_{fI}。首先，我们将说明为何 R_{fI} 是一个值得深入研究的例子；然后分析所有小秩 n下的表示论。关键在于，HoG 定理立刻给出了此处所有 n 的表示的简单成分（而去粘合版本是半单的）。因此，我们可以通过考察非半单结构来展示胶合的影响。

p

Consider the R_{fI} solution: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(4.5) 注意，其去粘合版本是对称群的经典秩 2 张量空间表示，与通常的 sl_2 作用构成 Schur–Weyl 对偶。因此，去粘合版本是半单的，其简单直和项的维数由通常的截断帕斯卡三角形给出；重数则由相应的简单 sl_2-模的维数给出。实际上，我们知道每个 CC 块的不可约成分。CC 块 Y_c 由 n的二部分组合 c 标记——必要时重新排序后，每个这样的组合都对应一个整数分拆 $\overline{c} = \lambda = (n-m,\ m)$。$Y_c$ 的同构类仅取决于 λ，并且

$$Y_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda' \le \lambda} S_{\lambda'}$$

其中 $\lambda' \le \lambda$若 $\lambda' \in \{(n-m,\ m),\ (n-m+1,\ m-1)\ .....\}$。例如 $Y_{(3,1)} = S_{(3,1)} \oplus S_{(4)}$（正如预期，因为 $Y_{(3,1)}$ 与 Σ_4的通常定义表示相同）。

因此，根据 HoG 定理 2.19，由 R_{fI} 给出的表示与上面的去粘合版本具有完全相同的简单成分（简单滤过因子），对所有 n均如此。接下来，我们转而考察胶合仍然存在时的结构——根据定理 2.19，我们知道胶合只能使简单模之和变为非直和。

接下来，我们将确定每个 n对应的不可分解块的大小。

(4.6) 注意，根据 3.8，我们已经知道每种情形下至少有两个不可分解块。也就是说，不同的宇称扇区必定属于不同的块，因为 R_{fI} 本身保持奇偶性。

还可以很容易看出，两个不同的宇称扇区大小相同。

定义 $\mathscr{A}_n = \mathsf{h}R_1$、.....、$R_{n-1}\mathsf{i}$ 为辫群代数在表示$\rho_n = \rho_{R_{fI}、\ n}$下的像。定义 $\mathscr{A}'_n$ 为该张量空间代数的交换子。

(4.7) 命题 由 R_{fI} 得到的 $n \geq 3$ 表示 ρ_n 分解为两个维数为 2^{n-1} 的不可分解表示的直和。

证明。定义 $D_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$。对于任意一个系数属于函数域 $\mathbb{C}(a,\ b)$ 的矩阵 M，这里将 M' 定义为 M 在由 $a \leftrightarrow b$ 定义的自同构下的像。因此，例如，$D'_1 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$。对于 $n \geq 2$，定义 $D_n = \begin{bmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & D'_{n-1} \end{bmatrix}$。对于 $n \geq 3$，我们现在将用归纳法证明:

(1) 若 $T \in \mathscr{A}'_n$，则存在 N_1 和严格上三角的 N_2 与 $B \in \mathscr{A}_{m-1}$，使得

$$T = \begin{bmatrix} D_{n-1} + N_1 & B \\ 0 & D'_{n-1} + N_2 \end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{bmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & D'_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathscr{A}'_n.$

直接计算可知，任意 $T \in \mathscr{A}'_3$ 都具有如下形式:

$$\begin{bmatrix} a & h & -h & c & h & -c & c & d \\ 0 & b & 0 & f & 0 & -f & e & g \\ 0 & 0 & b & -f & 0 & e & -f & -g \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & e & b & -f & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

因此，这两个结论对 $n = 3$ 都成立。

假设该结论对 $\mathscr{A}_{n-1}$ 成立，并考虑 $\mathscr{A}_n$。对于 **(1)**: 若 T 与 $I \otimes \mathscr{A}_{n-1} \subset \mathscr{A}_n$ 对易，那么根据假设，T 具有分块结构，且每个块都具有给定形式。然后，与 R_1 对易即可得到所需形式。

对于 (2): 根据假设，给定的对角矩阵与 $I \otimes \mathscr{A}_{n-1}$ 对易；通过直接验证块 4×4 矩阵，也可得出其与 R_1 对易。

由 **(1)** 可知，表示 ρ_n 至多分解为两个不可分解直和项，因为 $\mathscr{A}'_n$ 中的任意矩阵至多有 2 个不同的特征值。由 **(2)** 可知（参见 **4.6**），它至少分解为 2 个不可分解直和项；观察到特征值 a, b 各自的重数均为 2^{n-1}，即可确认这一点。□

（**4.8**）注意到，这给出了根基维数的一个下界，表明它正随着 n 迅速增长（使块中的和不可分解的维数最经济方式，是将每个直和项——在通常的根基意义下——胶合到某个一维直和项上）。由于去胶合情形对任意 n 都没有根基，这是一个很好的例子，说明添加胶合会产生深远的影响。

下面给出一个有趣的算法纠缠例子——一个辫群表示的自然同构（在本例中是在 R_{fI} 和 $R_\diamondsuit$ 之间），其中该变换并非由局部矩阵构成（如果不存在这样的局部变换，我们就称这些表示不具有局部等价性，或不“规范”等价）。

附带说明：很容易验证，R_{fI} 和 $R_\diamondsuit$ 不规范等价。

(4.9) 命题。由 R_{fI} 和 $R_\diamondsuit$ 给出的辫群表示（对应普通表示序列 ρ^{fI} 和 $\rho^\diamondsuit$）是 ∞-等价的，因为在每个小秩 n 中都存在一个对角交织算子。

证明。我们将为交织算子集合定义一个具体的候选方案，然后利用其构造的性质证明该方案可行；这些性质将先行展示。

定义 4 个对角矩阵 $A = diag(1, -1, 1, 1)$ $B = diag(1, 1, -1, 1)$ $C = diag(-1, -1, 1, -1)$ 和 $D = diag(-1, 1, -1, -1)$。注意，对于 $X \in$ X $= \{A, B, C, D\}$，我们有 $R_{fI}\, X = X\, R_{\diamondsuit}$。对于 $X_i \in$ X，将直和 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ 记作词 $X_1 X_2 \cdots X_n$。

接下来，定义 X 中各词上的映射如下。在生成元上规定： $\varphi(A) = BA$, $\varphi(B) = AC$, $\varphi(C) = DB$ 以及 $\varphi(D) = CD$，然后按乘法地方式扩展。接下来，递归地定义各词： $w_1 = A$ 以及 $w_n = \varphi(w_{n-1})$。例如， $w_2 = BA$ 以及 $w_3 = ACBA$。设 T_n 为与词 w_{n-1}对应的 2^n 阶对角矩阵。

我们断言，对于所有 $\beta \in B_n$，都有 $\rho_n^{fI}(\beta)T_n = T_n\, \rho_n^{\diamondsuit}(\beta)T_n$，也就是说， T_n 交织 ρ_n^{fI} 和 $\rho_n^{\diamondsuit}$。只需验证生成元 R_i 即可。在小秩 $n = 2$ 的情形下，我们已如前所述证明了 R 矩阵具有交织算子性质。为处理所有秩，采用如下方法建立一些工具会很方便。

记 g 为从 X 中的字到 {±1} 中的字的映射，该映射由显然的替换给出： $g(A) = 1x11$（为便于将 -1 作为字符串的一部分解析，我们将其写作 x），依此类推。当然， g 是单射，且 $g(wv) = g(w)g(v)$。当 {±1} 中的一个词属于 g 的像时， g 的形式逆 g' 就是“良定义”的。

分别用 $g_o(w)$ 和 $g_e(w)$ 表示 $g(w)$ 的奇数位置子序列和偶数位置子序列。并且 $g_-(w) = g_o(w)g_e(w)$。例如，由于 $g(BA) = 11x11x11$，我们有 $g_e(BA) = 11x1$；而 $g_-(BA) = 1x1111x1$，它满足 $g'(g_-(BA)) = AB$。事实上， $g'(g_-(A)) = B$，且 $g'(g_-(B)) = A$，由此可得前面的恒等式。

若词 w 属于 X，且其长度为 1；或者 $g'(g_e(w))$ 和 $g'(g_o(w))$ 均定义良好（因此 $g'(g_-(w))$ 也定义良好），并且 $g'(g_-(g'(g_-(w))))$ 也定义良好，依此类推——不断迭代，直到各部分 $g'(g_e(g'(g_e...(w))))$ 等的长度均为 1，则称该词为“梳理良好”。

在 $n = 3$ 处的完整序列为 $g(BA) = 11$x11x11。由于 $R_1 = R \otimes 1_2 = R \oplus R$，候选交织算子适用于 R_1。对于 $R_2 = 1_2 \otimes R$，其 R-块分别占据位置 1357 和 2468，即 $g_o(BA) = 1$x$11 \sim A$ 和 $g_e(BA) = 11$x$1 \sim B$，它们也都是逐块交织算子。我们可以概括如下：

$$BA \overset{g_-}{\rightsquigarrow} AB$$

对于 $n = 4$，我们有 ACBA，得到 1x11xx1x11x11x11。对于 $R_1 = R \otimes 1_4 = R \oplus R \oplus R \oplus R$，同样没有其他需要检查的内容。对于 $R_2 = 1_2 \otimes R \otimes 1_2 = 1_2 \otimes (R \oplus R)$，我们提取位置 13579135（为对齐而删除第二个数字），得到 $g_o(ACBA)$= 11x11x11，这是有效的——它是 $g'(g_o(ACBA)) = BA$；提取位置 24680246，得到 x1xx11x1，这也是有效的——它是 $g'(g_e(ACBA)) = CB$。对于 $R_3 = 1_4 \otimes R$，我们从原始的 16 位词中提取位置 1593，得到 1x$11 \sim A$；提取位置 2604，得到 xx1x $\sim C$；提取位置 3715，得到 11x$1 \sim B$；提取位置 4826，得到 1x$11 \sim A$，这些结果全都有效。

注意，由于 g_o 提取奇数位置项， $g_o(ACBA)$ 中的奇数位置项对应原始序列中的 1593 项： $g_o(g_o(ACBA)) = g_o(11x11x11) = 1x11$ （略微滥用记号）；而偶数位置对应 3715 项： $g_e(g_o(ACBA)) = g_e(11x11x11) = 11x1$。与此同时， $g_o(g_e(ACBA))$ 从偶数位置子集中取奇数位置，因此对应原始序列中的位置 2604： $g_o(g_e(ACBA)) = g_o(x1xx11x1) = xx1x$；最后， $g_e(g_e(ACBA)) = g_e(x1xx11x1) = 1x11$ 得到位置 4826。

我们可以总结如下：

$$ACBA \overset{g_-}{\rightsquigarrow} BACB \overset{g_-}{\rightsquigarrow} ACBA$$

对于 $n = 5$，我们得到 BADBACBA，结果为 11x1 1x11 x1xx 11x1 1x11 xx1x 11x1 1x11（这里只是为了便于计数而分隔）。将 R_2 分解为奇偶部分，得到：1x11 xx1x 11x1 1x11 和 11x1 1x11 x1xx 11x1，这是有效的。（它们分别重新编码为 ACBA 和 BADB。）对于 R_3，模 4 的分解可以通过反复应用奇偶分解来完成，得到 11x1 1x$11 \sim BA$，x1xx 11x$1 \sim DB$，1x11 xx1x $\sim AC$，11x1 1x$11 \sim BA$。最后，对于 R_4，模 8 的分解为 1x11、11x1、xx1x、1x11、11x1、x1xx、1x11、11x1。总结如下：

$$BADB\ ACBA \overset{g_-}{\rightsquigarrow} ACBA\ BADB \overset{g_-}{\rightsquigarrow} BADB\ ACBA \overset{g_-}{\rightsquigarrow} ABCA\ BDAB$$

总的来说，我们看到，只要所有必要的 g_{-} 应用都有定义（每个应用都验证了相应 R_i 的交织关系），我们所声称的交织算子就成立。剩下只需证明 g_{-} 的每次应用都有定义——也就是说，它会产生一个属于 g 的像的词。

注意到， $g_{-}(X_1X_2X_3..)$中的第一个（4 项）因子来自原序列中的第 1357 个位置（回想一下， g_o 会选取第 135791357.....个位置上的因子），因此只取决于 X_1X_2。下一个因子（对于足够长的词）来自第 9135 个位置，因此只取决于 X_3X_4。依此类推，直到： g_e 部分中的第一个因子来自第 2468 个位置，因此只取决于 X_1X_2。下一个取决于 X_3X_4，依此类推。因此，要证明 g_{-} 的每次应用都有良好定义，我们只需证明每个长度为 2 的词（可能出现的）的像都有良好定义。考虑$g_{-}(BB) = g_o(11x111x1)$ $g_e(11x111x1) = 1x1x...$，它没有良好定义，我们必须证明 BB 以及其他某些序列不会作为 $X_{2i-1}X_{2i}$出现。但从 φ 可明显看出——每一对这样的序列都作为单个符号的像出现，因此可能性的全集为 BA、AC、DB、CD。所以只需检查这些情况。BA、AC 已经检查过了。对于 DB，我们有 x1xx 11x1，得到 xx1x 和 1x11。对于 CD，我们有 xx1x x1xx，得到 x1xx 和 xx1x。□

4.2.3. 比较案例： $R_{\diamondsuit}$ 在 R_{fII}中的点。

容易验证，这里所有形如

$$\begin{bmatrix} a & h & h & c & h & c & c & d \\ 0 & b & 0 & f & 0 & f & e & g \\ 0 & 0 & b & f & 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & e & b & f & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \tag{12}$$

的矩阵都属于交换子。（或许将它与上文命题 4.7 中的 fI 交换子进行比较会很有启发。）事实上，我们断言交换子中的每个元素都具有这种形式。这是一个更强的断言，因此也更难验证。不过暂且让我们相信这一点。那么显然， $\mathscr{A}'$ 有一个 2 维半单部分（a, b）；以及一个 6 维根基（c, d, e, f, g, h）。这似乎表明 $\mathscr{A}$中有两个非同构不可分解直和项。

根据奇偶性（如 (3.8) 中所述），这两个块分别是 111、122、212、221 块；以及 112、121、211、222 块。

这两个块的简单成分都是 1/2/1（将简单模仅记作其维数），只是顺序可能不同。让我们尝试为其中一个块采用以下底层级数拟设：

$$\mathfrak{I}'_{odd} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

- 注意，这允许一个可能大于同构类的类。这将允许两个自映射：自同构和顶到底映射。然而，由于每个不可分解块模都是另一个块模的逆变对偶（通过 4.2 中的转置同构），且该结构是自对偶的，这将意味着存在两个同构的模，进而使交换子中出现一个 2×2 矩阵代数，这与 (12) 的完备性矛盾。因此，我们必须否定这一拟设。

相反，我们可以尝试

$$\mathfrak{I}_{odd} = \begin{matrix} 1 \oplus 2 \\ 1 \end{matrix}, \qquad \mathfrak{I}_{eve} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \oplus 2 \end{matrix}$$

同样，每个都有两个自映射——同构，以及一个将顶端的 1 映到底端的 1 的映射。它们之间不存在同构。相反，两个方向上都有顶到底 1-映射；并且存在一个从奇到偶的顶到底 2-映射。这与我们在 12 中看到的部分一致，其中 a 扇区有 a 和 c；而 b 扇区有 b 和 g。

4.2.4. 情形 $R_{\heartsuit}$。 在这种情形下，我们也可以确定所有秩的不可分解块。具体步骤如下

直接计算可得， $T \in (\mathscr{A}_3^{\heartsuit})'$ 具有如下形式：

$$\begin{bmatrix} a & b & b & c & b & c & c & d \\ 0 & a & 0 & b & 0 & b & 0 & c \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

这为以下命题的归纳证明提供了基础情形：

引理 4.10. 任意 $T \in (\mathscr{A}_n^{\heartsuit})'$ 对于 $n \geq 3$ 都具有如下形式：

$$\begin{bmatrix} aI+N & B \\ 0 & aI+N \end{bmatrix}$$

其中 N 是一个严格上三角矩阵。

证明。 沿用我们如今已熟悉的策略，注意到与 $I_2 \otimes \mathscr{A}_{n-1}^{\heartsuit}$ 可交换这一条件表明，$T \in (\mathscr{A}_n^{\heartsuit})'$ 具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a_1I+N_1 & B_1 & a_2I+N_2 & B_2 \\ 0 & a_1I+N_1 & 0 & a_2I+N_2 \\ a_3I+N_3 & B_3 & a_4I+N_4 & B_4 \\ 0 & a_3+N_3 & 0 & a_4I+N_4 \end{bmatrix}$$

其中 a_i 是非零常数， N_i 是上三角矩阵， I 是大小为 2^{n-2}的单位矩阵。接下来，与

$$R_{\heartsuit} \otimes I_{2^{n-2}} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

这意味着 $a_1 = a_4$、 $a_3 = 0$、 $N_3 = B_3 = 0$ 和 $N_1 = N_4$ ，正如所要求的那样。 □

由此我们推得：

推论 4.10.1. 代数 $\mathscr{A}_n^{\heartsuit}$ 是不可分解的。

证明. 设 E 是 $\mathscr{A}_n^{\heartsuit}$ 中任意一个中心幂等元。由引理 4.10 E 可知，它具有 $aI+N$ 的形式，其中 N 是幂零元，因此 $a \in \{0,1\}$，所以 E 是平凡的。□

4.3. **幺幂辫群表示的表示论**。每个 R 矩阵都带来了普通表示论中需要分析的问题。将范围限制在幺幂表示上，便得到一个相对易于处理、同时也颇能说明相关特征的研究场景。因此，我们最后考察这一领域。如上所述，Type-f 有一个幺幂情形，对应于 $[2] = 0$ 处的 Temperley–Lieb。其本身已有充分研究 [Mar92, MW98]。这里我们将简要概述，因为它通过 HoG 定理奠定了基础，供我们研究本文及更高秩中的胶合扩张。我们有

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

如上所述，整个带胶合扩张都由以下情形所刻画

$$R = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

在下　　表中，我们列出了所有相关代数维数，涵盖小秩至 $n = 6$　　.

n	维数 $\mathfrak{A}^0$	维数 $\mathfrak{A}^0$/根基	维数 $\mathfrak{A}$	维数 $\mathfrak{A}$/根基
3	5	5	6	5
4	14	5	20	5
5	42	42	70	42
6	132	42	252	42

请注意，所有这些维数都直接或通过 HoG 定理源自经典结构，唯独带胶合情形中的总代数维数例外。显然，胶合极大地扩张了根基，但对于该带胶合情形下一般的 n，我们尚无闭式表达。

在秩 $N = 3$ 中，我们有一个幺幂 fff 表示；以及相应的代表性胶合扩张：

$$R^0_{fff} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R^g_{fff} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

截至小秩 6 的维数如下：

n	维数 $\mathfrak{A}^0$	维数 $\mathfrak{A}^0$/根	维数 $\mathfrak{A}^g$	维数 $\mathfrak{A}^g$/根
3	6	5	6	5
4	23	5	24	5
5	103	42	120	42
6	513	513-215 =298	695	695-397 =298

这里的大多数维数再次来自经典结构，但带胶合的总维数并非如此；后者远大于经典幺幂 fff 情形。见图1。维数计算如下。

在小秩 $n = 3$ 中，Specht模标签为 $3, 21, 1^3$ （我们交替使用整数分拆和杨图）。21 是单的，并且属于一个单块（在其仿射反射群轨道中，这里它是唯一的），表示维数为 2，因此对代数维数贡献 4。3 和 1^3 是一维的，但在这里同构；该模可以自扩张，因此我们为半单部分的维数增加 1，并为总维数增加 $1{+}1$ 。

在小秩 $n = 4$ 中，标签为 $4, 31, 2^2, 21^2$。根据 [Mar92] ， R^0_{fff} 是经典“TLM”代数 [BK95], 的平坦变形；后者是 S_4 的群代数，但缺少一维的 1^4 模，因此维数为 24-1=23。这里半单商来自 TL部分。

在小秩 $n = 5$ 中，标签为 $5, 41, 32, 31^2, 2^21$。也就是说，省略了分拆 21^3 和 1^5 。请记住，它们的表示维数分别为 4 和 1，因此 R^0_{fff} 的维数为 120-17=103。半单维数来自 TL部分 [MW98、Soe97b、Soe97a] ——根据 HoG 定理，带胶合情形的维数也相同。

在小秩 $n = 6$ 中，轨道结构以紫色标示于图中。计算过程类似。标签及其下方的表示维数如下：

6	51	42	33	411	321	222	3111	2211	21^4	1^6
1	5	9	5	10	16	5	10	9	5	1

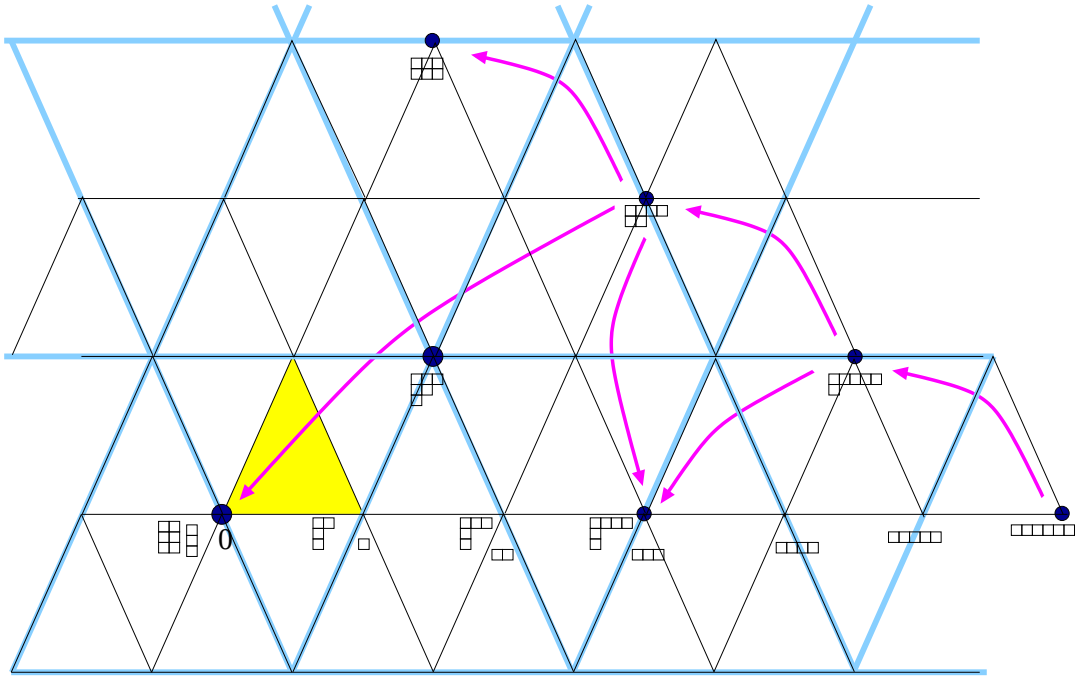

图 1. 幺幂 fff 的仿射室几何框架。这是沿着 (1,1,1) 直线投影的最近邻格点；仿射反射壁之间的间距为 2（蓝色）。原点和主导区域的起点（李论术语）以黄色三角形标出。

（我们也列出了在 $N = 3$处省略的标签，它们位于竖线右侧。）因此，对于一般（故为半单的）Hecke，CC R矩阵 fff 的像的维数是平方和：513；但根据 [Mar92]，幺幂情形是平坦变形，因此具有相同的维数，尽管其结构并不相同。该结构的 TL部分是从 $\lambda = (6)$ 到 (33) 的连线，Specht模态射以紫色标示，展开后可得

$$(6) \to (51) \to (42) \to (33)$$

（仿射 Wely 群中短反射的链）给出 Specht模洛伊结构（即根基级数）

$$1 \to \frac{4}{1} \to \frac{5}{4} \to \frac{0}{5}$$

块中的其余标签为 411 和 222。它们对半单部分没有贡献（例如，可通过将幂等元局部化到小秩 $n = 3$ 来考察；或应用 Kazhdan–Lusztig理论）。最后，我们有表示维数为 16 的 321，在这里它是一个简单单例。因此，半单商维数总计为 $1^2 + 4^2 + 5^2 + 16^2 = 298$。根据 HoG 定理，这也是带胶合情形下的半单商维数。

R^0_{fff} 情形中的模式，以及带胶合情形的半单部分，现在应该已经清楚了。还请注意，这足以表明胶合扩张对根基有着显著的贡献。我们将把对这一新结构的分析留待另文探讨（这里幂等元局部化与 R矩阵塔统一之间会有很好的相互作用，但这绝非易事）。

5. 讨论

我们已经证明，Match$_g$ 中存在一些辫群表示，按照各种不同的解释，它们都不等价于已知分类中出现的那些表示。目前，这项工作实现的是构造，而非分类。秩3的分类并非不可行，

而且，秩2中的证据表明，CCwg情形涵盖了这类表示中的很大一部分，模去 ∞-等价关系后亦然。这些表示的像也颇为引人关注，值得未来进一步研究。

致谢。PM 感谢英国工程与自然科学研究委员会通过项目 EP/W007509/1 提供资助；并感谢英国皇家学会资助 ER 在利兹的沃尔夫森奖学金，为本研究作出贡献。PM 还感谢 Jarmo Hietarinta、Fiona Torzewska 和 Paula Martin 的有益讨论。ER 的工作也部分得到了美国国家科学基金会项目 DMS-2205962 的资助。ER 在英国皇家学会沃尔夫森奖学金资助下访问利兹大学期间，开展了本研究的部分工作；他感谢该校的热情接待与支持。

参考文献

[AHS04] Jiˇr´ı Ad´amek、Horst Herrlich 和 George E Strecker。《抽象范畴与具体范畴》。范畴之乐。Citeseer，2004年。[Alm25] S Almateari。《表示论范畴》。博士论文，数学，利兹大学，2025年。[Alm26] S Almateari。加性守荷矩阵范畴中态射空间的维数及整数数列的统一。即将出版，2026年。[BCP97] Wieb Bosma、John Cannon 和 Catherine Playoust。Magma 代数系统 I：用户语言，1997年。[BK95] T Brzezinski 和 J Katriel。表示论方法推导 Temperley–Lieb–Martin 代数。《物理学杂志 A：数学与一般》，28(18):5305–5312，1995年9月。[Coh03] P. M. Cohn。《进阶代数及其应用》。伦敦：施普林格，《代数》第2版（1982–1991）的修订版，2003年。[Hie92] Jarmo Hietarinta。二维常数型量子杨–巴克斯特方程的所有解。《物理快报 A》，165(3):245–251，1992年。[HMR24] Jarmo Hietarinta、Paul Martin 和 Eric C. Rowell。常数型杨–巴克斯特方程的解：三维中的加性守荷。《英国皇家学会会刊 A：数学、物理与工程科学》，480(2294):20230810，2024年。[Map25] Maplesoft，Waterloo Maple Inc. 的一个部门。Maple。Maplesoft，加拿大安大略省滑铁卢，2025年。[Mar92] P Martin。关于舒尔–外尔对偶、 A_n Hecke 代数和量子 $sl(N)$，发表于 C^N.....《国际现代物理学杂志 A》7，页码 645–673，1992年。[Maz17] Volodymyr Mazorchuk。2-表示论中的分类问题，2017年。arXiv:1703.10093。[ML13] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。施普林格科学与商业媒体，2013年。[MM15] Volodymyr Mazorchuk 和 Vanessa Miemietz。有限型 2-范畴的传递 2-表示，2015年。arXiv:1404.7589。[MMM+23] Marco Mackaay、Volodymyr Mazorchuk、Vanessa Miemietz、Daniel Tubbenhauer 和 Xiaoting Zhang。有限 Coxeter 类型下 Soergel 双模的简单传递 2-表示。《伦敦数学学会会刊》，126(5):1585–1655，2023年2月。[MR21] Paul Martin 和 Eric C Rowell。自旋链辫群表示的分类。arXiv 预印本 arXiv:2112.04533，2021年。[MRT25] P. P. Martin、E. C. Rowell 和 F. Torzewska。辫群表示的范畴论视角。arXiv 2506.07950，2025年。[Mur38] Francis D Murnaghan。《群表示论》。约翰斯·霍普金斯出版社，1938年。[MW98] Paul P Martin 和 David Woodcock。单位根处量子自旋链谱以及 Hecke 代数与 q-群的结构。《物理学杂志 A：数学与一般》，31(50):10131，1998年。[RW18a] Eric C. Rowell 和 Zhenghan Wang。拓扑量子计算的数学。《美国数学会通报》，55(2):183–238，2018年。[RW18b] Dmitriy Rumynin 和 Alex Wendland。2-群、2-特征与 Burnside 环。《数学进展》，338:196–236，2018年。[Soe97a] W. Soergel。Kac–Moody 代数上 Kipp 模的特征公式。表示论，：–。 1 115 132, Soe97b[1997 W. Soergel。Kazhdan–Lusztig 多项式与倾斜模的一种组合学。《表示论》，1:83–114，1997年。] Tur[Vladimir G. Turaev。杨–巴克斯特方程与纽结不变量。《数学创作》，92(3):527–553，1988年。

[1]利兹大学

[3]德州农工大学