arXiv:2601.18502v1 [math.LO] 26 Jan 2026

猜测序列的渐近行为

TOM BENHAMOU 和 SEAN LECLAIR

Abstract. 我们继续研究由来自 [5] 的菱形序列所猜测的实数集的概率论和拓扑性质。我们证明，存在一个具有π 渐近增长的序列，它能无穷多次猜测一个概率为 1 的集合，当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{\pi_{(n)}} 2^n$ 发散。随后，我们利用随机游走给出具有某些较低渐近增长的猜测序列的具体例子。最后，我们证明，来自 [5] 的超滤子构造总能产生超滤子和一个猜测贫集的序列，而使用科恩迫迫的简单构造则给出一个被猜测实数的非贫集。这些结果回答了 [5, 问题 613] ，并部分解决了 [5,问题 68]。

1. Introduction

超滤子的组合性质有广泛的应用，涉及图着色、紧豪斯多夫空间和投票系统等领域。近年来，人们对一个特别值得关注的方面重新产生了兴趣，即研究超滤子的共尾结构，或者更具体地说，研究限制在超滤子上的 Tukey 序结构。

在 [21], Tukey 引入了有向集上的 Tukey 序，以分析拓扑中的摩尔－史密斯收敛。我们将集合 A 上的偏序$\leq_A$ 定义为一种关系，它具有自反性、（弱）反对称性和传递性。若对任意两个不同的 a_0、$a_1 \in A$，都存在 $a_3 \in A$ 使得 $a_1 \leq_A a_3$ 且 $a_2 \leq_A a_3$，则偏序（A，$\leq_A$）称为有向的。我们主要关注超滤子上的反向包含序 $\supseteq$ 。若对每个 $a \in A$，都存在 $x \in X$ 使得 $a \leq x$，则称子集 $X \subseteq A$为共尾子集。若函数$f : A \to B$ 将 A 中的每个共尾子集的像映为B中的共尾子集，则称该函数为共尾映射。若存在共尾映射 $f : A \to B$，则称（B，$\leq_B$）图基可约于（A，$\leq_A$），记作 $B \leq_T A$。若 $A \leq_T B$ 且 $B \leq_T A$，则称 A 与 B Tukey 等价，记作 $A \equiv_T B$。我们将 $\equiv_T$-等价类称为 Tukey 类型。

Date：2025年1月。2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E35, 60G50, 06A07, 54D80。*Key words and phrases.* 超滤子、Tukey序、菱形、随机游走、Fubini。本研究由美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS-2346680。本文源自罗格斯大学新不伦瑞克分校的一项本科生研究项目。

我们研究基数为连续统的有向偏序的 Tukey 类型；这类类型存在一个最大的 Tukey 类型：（$[\mathfrak{c}]^{<\omega}$，$\subseteq$）。此外，Tukey [21] 为基数为连续统的对象具有最大 Tukey 类型给出了组合刻画。

定理 1.1。$(A, \leq_A) \equiv_T ([\mathfrak{c}]^{<\omega}, \subseteq)$ 当且仅当存在一个大小为连续统的子集$X \subseteq A$，使得每个 $B \in [A]^{\omega}$ 在$(A, \leq_A)$中都是无界的。

正如我们已经提到的，本文主要关注自然数集 ω上超滤子的 Tukey 序；这些对象的大小确实是连续统——这一研究方向已在例如 [1, 3, 2, 4, 7, 14, 20] 中得到广泛探讨。这项研究由 Isbell 发起 [15], ，他证明存在一个超滤子与 $([\mathfrak{c}]^{<\omega}, \subseteq)$ Tukey 等价。实现最大 Tukey 类型的超滤子称为*Tukey* 顶。由 Isbell 的工作自然引出一个问题：是否存在非 Tukey 顶超滤子？换言之，所有超滤子是否都 Tukey 等价？这就是著名的 Isbell 问题。

最近，Isbell 问题的完全独立性已得到确立。在 [17], Milovich 证明，p 点低于最大 Tukey 类型。此外，Cancino 和 Zapletal 证明，每个非主超滤子都可能是一致地 Tukey 顶于 [11]。关于超滤子的图基类型，参见 [13]。

在 [5], 中，第一作者和 Wu 运用一种称为 $\diamondsuit^-(\mathcal{U})$的猜测原理，给出了构造 Tukey 顶超滤子的另一种方法，其中$\mathcal{U}$ 是 ω 上的一个超滤子（见定义 2.4）。该定义基于第一作者和 Goldberg [4] 关于可测基数层级上 Tukey 序的早期研究。更具体地说，该原理确保存在一个序列 $\mathcal{A}_n \subseteq P(n)$，使得：

(1) 存在 $\mathfrak{c}$多个实数 x，使得 $B_x := \{n < \omega \mid x \cap n \in \mathcal{A}_n\} \in \mathcal{U}$。(2) $n \mapsto |\mathcal{A}_n|$ 的渐近增长缓慢。

条件 (2) 将在 2.4 节中作出精确定义。随后，作者证明，若超滤子 $\mathcal{U}$ on ω 满足 $\diamondsuit^-$，那么 $\mathcal{U}$ 就是 Tukey 顶。这正是进一步研究菱形序列的动机。

此外，他们运用 Borel-Cantelli 引理证明，由形如 $\diamondsuit^-(\mathcal{U})$ 的序列猜测出的实数集不可能包含所有实数；特别是，原理 from [4] 对 ω 上的超滤子不成立。具体而言，他们证明，若 $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$ 是一列集合，且 $\sum \frac{|\mathcal{A}_n|}{2^{f(n)}}$ 收敛，那么集合

$$\mathrm{G}(\vec{\mathcal{A}}) := \{x \in P(\omega) \mid B_x \text{ is infinite}\}$$

这个集合称为“猜测实数集”，其概率必为零。特别是，对于任意超滤子 $\mathcal{U}$ 以及满足条件 (1) –(2) 的 $\mathcal{A}_n$ 序列，

$$\mathrm{G}_{\mathcal{U}}(\vec{\mathcal{A}}) := \{x \in P(\omega) \mid B_x \in \mathcal{U}\}$$

其概率必须为 0。随后作者询问，集合 $\mathrm{G}_{\mathcal{U}}(\vec{\mathcal{A}})$ 是否在其他意义上也必定很小。由于测度和范畴是

实数集最重要的小性概念（即勒贝格零测理想和疏集理想），因此以下问题值得关注：

问题 1.2 ([5, 6.8])**.** 由超滤子猜测的实数集，其“大小”满足何种限制是相容的？或者说，在由超滤子猜测的实数集上，哪些拓扑性质是相容的?

我们的第一个结果肯定地回答了这个问题，即对于在 [5] 中构造的那类超滤子，$\mathsf{G}_{\mathcal{U}}(\vec{\mathcal{A}})$ 是贫集。随后，我们给出一个简单的模型示例（即添加一个科恩实数），其中存在一个超滤子$\mathcal{U}$，使得 $\mathsf{G}_{\mathcal{U}}(\vec{\mathcal{A}})$ 是非第一纲。

由 [5] 引出的另一个自然问题是，渐近下界 d 对于存在一个猜测序列 $\vec{\mathcal{A}}$ 使得 $\mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}})$ 具有正概率而言，$\sum \frac{\pi(n)}{2^{f(n)}} = \infty$ 是否是紧的。

问题 1.3. 函数 $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 可以渐近地趋于多小，才能存在一个序列 $\langle \mathcal{A}_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ 使得 $|\mathcal{A}_n| \leq \pi(n)$，且集合 $\mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}})$ 的（标准博雷尔）概率为正?

本文回答了这个问题，并证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(n)}{2^n}$ 是一个阈值，即若 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(n)}{2^n} = \infty$，则存在一个序列（事实上有许多序列） $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$，使得 $\mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}})$ 的概率为 1。虽然这个定理是一个存在性定理，但问题在于如何找到具体的序列：

问题 1.4. 给定函数 $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(n)}{2^n} = \infty$。构造 $\mathcal{A}_n$ 的自然例子，使得 $\mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}})$ 的概率为 1。

在第4节中，我们首先构造一些简单的例子。然后，我们说明随机游走可以为函数 $\pi(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}}$ 和 $\binom{n}{\frac{n}{4}}^2$ 提供自然的例子，我们将使用格上的随机游走的性质以及波利亚定理（见定理3.3）。

2. Guessing Principles of Ultrafilters on ω.

鉴于本文具有对偶性质，我们将分别详细介绍集合论和概率论的预备知识。首先引入滤子的概念，它旨在提供一种抽象的“大”这一概念。集合 A 上的滤子 $\mathcal{F}$ 是 X, $P(X)$ 的幂集的一个子集，满足：

(1) $A \in \mathcal{F}, \emptyset \notin \mathcal{F}$(2) 若 $A \in \mathcal{F}$ 和 $A \subseteq B$,
则 $B \in \mathcal{F}$(3) 若 A, $B \in \mathcal{F}$，则
$A \cap B \in \mathcal{F}$

此外，如果滤子 $\mathcal{F}$ 满足以下条件，我们就称其为超滤子：

(4) 对每个 $A \subseteq X$，要么 $A \in \mathcal{F}$，要么 $X \setminus A \in \mathcal{F}$。

每个滤子都会导出一个对偶的小的概念，称为对偶理想。更正式地说，集合 X 上滤子 $\mathcal{F}$ 的对偶理想是集合 $\mathcal{F}^* = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathcal{F}\}$。请注意，如果 $\mathcal{F}$ 是一个非极大的滤子，那么该滤子及其对偶理想并未覆盖 X 的整个幂集。对于滤子 $\mathcal{F}$ 和对偶理想 $\mathcal{F}^*$，正集的集合为 $\mathcal{F}^+ = \{A \subseteq X \mid A \notin \mathcal{F}^*\}$。如果一个滤子不包含任何单元素集，则称其为非主滤子。如果 $\mathcal{U}$ 是一个超滤子，那么它是非主滤子的充要条件是它包含弗雷歇滤子 ´。

设 ´echet 滤子 $\mathcal{FR}$ on X 是一个滤子，其对偶理想为 $[\omega]^{<\omega}$——即 ω 的有限子集的集合。更一般地，设 λ 是基数， A 是任意集合，记:

- $[A]^{\lambda} = \{X \subseteq A \mid |X| = \lambda\}$。
- $[A]^{\leq\lambda} = \{X \subseteq A \mid |X| \leq \lambda\}$。
- $[A]^{<\lambda} = \{X \subseteq A \mid |X| < \lambda\}$。

设 γ 是一个极限序数，若集合 $A \subseteq \gamma$ 无界 于 γ，且 $\sup(A) = \gamma$，则称之为无界集。若对于所有极限 $\alpha < \gamma$，只要 $\sup(A \cap \alpha) = \alpha$，就有$\alpha \in A$，则称集合 $A \subseteq \gamma$ 在 γ 中是闭 的。若 A 在 α中既闭又无界，则称其为闭无界集 。对于一个具有不可数共尾性的序数 κ，我们定义

$$\mathrm{Cub}_{\kappa} = \{X \subseteq \kappa \mid \exists C \text{ a club in } \kappa, C \subseteq X\}.$$

集合 Cub_{κ} 是 κ 上的一个滤子，称为上的闭无界滤子。若集合$S \subseteq \kappa$ 是平稳的，则它是 Cub_{κ}-正的，也就是说，对于每个闭无界集 $C \subseteq \kappa$， $S \cap C \neq \emptyset$。

回顾 [16]中 Jensen 的 $\diamondsuit$ 原理定义：存在一个序列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ ，使得 $A_\alpha \subseteq \alpha$ ，并且对于任意子集 $X \subseteq \omega_1$，集合 $\{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha = A_\alpha\}$ 是平稳的。不幸的是， $\diamondsuit$无法推广到可数序列。不过，Jensen 提出的 $\diamondsuit$的一个较弱形式可以用一种有用的方式推广。首先回顾，对于一个非可数共尾性的基数 κ ：

> 若存在一个序列 $\langle \mathcal{A}_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$，使得 $\mathcal{A}_\alpha \subseteq P(\alpha)$且 $|\mathcal{A}_\alpha| \leq |\alpha|$，则• $\diamondsuit^-(\kappa)$ 成立。对于每个 $X \subseteq \kappa$，集合 $\{\alpha \in \kappa \mid X \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha\}$ 在 κ中是平稳的。
>
> 若对每个 $X \subseteq \kappa$，集合 $\{\alpha \in \kappa \mid X \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha\}$ 还是 κ 中的一个闭无界集，则• $\diamondsuit^*(\kappa)$ 成立。

这些原理显然不适用于 ω ，因为那里没有定义闭无界滤子。不过，在 ω 上用滤子替代闭无界滤子，则是可行的:

定义 2.1。设 $\mathcal{F}$ 是基数 $\kappa \geq \omega$ 上的一个滤子， $\pi : \kappa \to \kappa$ 是一个函数，且 $T \subseteq P(\kappa)$。那么，若存在一个序列 $\langle \mathcal{A}_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 满足以下条件，则 $\diamondsuit^-(\mathcal{F}, \pi, T)$ 成立:

(1) $\mathcal{A}_\alpha \subseteq P(\alpha)$, (2) $|\mathcal{A}_\alpha| \leq \pi(\alpha)$, (3)
$\forall X \in T, \{\alpha < \kappa \mid X \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha\} \in \mathcal{F}^+$,

我们称 $\diamondsuit^*(\mathcal{F}, \pi, T)$ 成立，当且仅当存在一个满足 (1)、(2) 以及

(3*) $\forall X \in T, \{\alpha < \kappa \mid X \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha\} \in \mathcal{F}$.

注 2.2。原理 $\diamondsuit^-(\mathrm{Cub}_\kappa,\ id,\ P(\kappa))$ 与 Jensen 的 $\diamondsuit^-(\kappa)$ 相同，而 $\diamondsuit^*(\mathrm{Cub}_\kappa,\ id,\ P(\kappa))$ 即为 $\diamondsuit^*$。此外，如果 $\mathcal{U}$ 是超滤子，那么 $\diamondsuit^-(\mathcal{F},\ \pi,\ T)$ 与 $\diamondsuit^*(\mathcal{F},\ \pi,\ T)$ 一致。

由于我们不限制参数，因此存在平凡的$\diamondsuit^-(\mathcal{F},\ \pi,\ T)$实例，例如，如果 $\pi(\alpha) = 2^\alpha$，则可以取 $\mathcal{A}_\alpha = P(\alpha)$。这些原理的强度取决于将 π 限制得尽可能渐近地小，并使 T 尽可能大。

为了表述我们对 π施加的限制，先引入函数之间的几乎等价关系和几乎支配关系。设 $\mathcal{F}$ 是集合 X上的一个滤子，且 $f,\ g\colon X \to \kappa$。那么，我们定义

- $f =_\mathcal{F} g$当且仅当 $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}$。
- $f \leq_\mathcal{F} g$当且仅当 $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{F}$。
- $f <_\mathcal{F} g$当且仅当 $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \in \mathcal{F}$。

注意到，当且仅当 $\mathcal{F}$ 是超滤子时，$\leq_\mathcal{F}$ 是线性的。在 [5], 中，为了对 π施加非平凡且富有成效的限制，作者采用了由Puritz [19]提出的天穹和星座术语。

定义2.3。（Puritz）设 $\mathcal{F}$ 是 ω上的滤子，$f,\ g:\ \omega \to \omega$。若 $\forall h:\ \omega \to \omega$、$h \circ g <_\mathcal{F} f$，则定义$\mathrm{sky}([g]_\mathcal{F}) < sky([f]_\mathcal{F})$。此外，若 $\exists h:\ \omega \to \omega$、$h \circ g \geq_\mathcal{F} f$，则定义$\mathrm{sky}([g]_\mathcal{F}) \geq \mathrm{sky}([f]_\mathcal{F})$。

注意到，这些是 $\omega^\omega/ =_\mathcal{F}$上的定义良好的传递关系。特别地，预序 $\leq$ 诱导出一个等价关系。我们将每个等价类称为一个天穹。存在一个最大的等价类，即 $sky([id]_\mathcal{F})$，以及一个由常值函数组成的最小等价类。

定义 2.4. 我们称超滤子 $\mathcal{U}$ 在 ω 上满足 $\diamondsuit^-(\mathcal{U})$，如果存在 $\pi, f\colon \omega \to \omega$和 $T \subseteq P(\omega)$，使得

(1) $\diamondsuit^-(\mathcal{U},\ \pi,\ T)$ (2) $|T| = 2^{\aleph_0}$(3) 天空$([\pi]_\mathcal{U}) <$ 天空$([id]_\mathcal{U})$

以下定理说明了这一原理的重要性：

定理 2.5 ([5, 1.14])**.** $\diamondsuit^-(\mathcal{U}) \Rightarrow \mathcal{U}$ 是 *Tukey* 顶。

给定一个猜测序列 $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$，我们考虑猜测实数集：

$$\mathrm{G}(\vec{A}) = \left\{X \mid \text{for infinitely many } n, X \cap n \in \mathcal{A}_n\right\}$$

给定一个滤子 $\mathcal{F}$，我们还令

$$\mathrm{G}_\mathcal{F}(\vec{A}) = \left\{X \mid \{n \mid X \cap n \in \mathcal{A}_n\} \in \mathcal{F}\right\}$$

显然，如果 $\mathcal{U}$是 ω上的非主滤子，则 $\mathrm{G}_\mathcal{F}(\vec{A}) \subseteq \mathrm{G}(\vec{A})$。

在本节中，我们暂且关注拓扑上的小集合，即贫集。回顾一下，拓扑空间 A 的子集 D 是稠密的，当且仅当 D 的闭包

等于 A，记作 $D = \overline{A}$。类似地，如果 $D \cap B$ 在 B 中稠密，我们就说 $D \subseteq A$ 在 $B \subseteq A$ 中稠密。一个集合的闭包的补集就是其内部，记作 D°；它是包含于 D 的最大开集。当不存在开集 $U \subseteq A$ 使得 X 在 U 中稠密时，我们称子集 $X \subseteq A$ 无处稠密。等价地，如果 $(X)^\circ = \emptyset$，则 $X \subseteq A$ 无处稠密。如果集合 A 是无处稠密集合的可数并，我们称集合 $X \subseteq A$ 为贫集。可以证明，集合 X 的贫子集构成一个在可数并运算下封闭的理想。定义余第一纲子集 $A \subseteq X$ 为贫集的补集。回顾一下，如果集合 $A \subseteq X$ 是开集的可数交集，我们就称它为 G_δ。

事实2.6。每个稠密 G_δ 集合都是余第一纲的。

现在我们聚焦于一个特定空间——康托空间 2^ω。令 $2^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} 2^n$，其中 2^n 是有限函数 f 的集合：$n \to 2$。我们将经常把 2^n 与 $P(n)$、以及 $2^{<\omega}$ 与 $P(\omega)$ 在 2^ω下对应起来。对于两个函数 f，g，若 g 是 f 的初始段，或者说 f 扩展 g，则记作 $g \sqsubseteq f$，当且仅当 $f \restriction \mathrm{dom}(g) = g$。$2^\omega$ 上的拓扑由柱集 $C_t = \{f \in 2^\omega \mid f \text{ 扩展 } t\}$（对所有 $t \in 2^{<\omega}$）生成。

事实2.7。设 $\vec{A} = \langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$ 是一个序列，满足 $\mathcal{A}_n \subseteq P(n)$。则 $\mathsf{G}(\vec{A})$ 是 2^ω中的一个 G_δ-集。

下面这个简单的例子表明，猜测实数集可能是余第一纲的。

例 2.8. 枚举 $2^{<\omega} = \{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$，并任取满足 $C_{t_n} = \{X \in 2^\omega \mid t_n \sqsubset X\}$ 的 $x_n \in C_{t_n}$。将 $\mathbb{N}$ 划分为无穷多个无限集合 Y_n，其中 $n < \omega$。对每个 $m \in Y_n$，定义 $\mathcal{A}_m = \{x_n \cap m\}$。因此，$x_n$ 在 Y_n 上被猜测，所以稠密集 $\{x_n \mid n < \omega\}$ 包含于 $\mathsf{G}(\vec{A})$。根据前两个事实，我们得出 $\mathsf{G}(\vec{A})$ 是余第一纲的。

推论 2.9. 对于某个序列 $\vec{A} = \langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$，满足 $|\mathcal{A}_n| = 1$，$G(\vec{A})$是余第一纲的。

现在来讨论问题 1.2。首先，请注意，从 [5] 构造出 $\diamondsuit^-(\mathcal{U})$ 的原始方法行不通。为说明这一点，我们先回顾该构造。先引入一些记号。给定 $S \subseteq 2^{<\omega}$，我们令$\mathcal{L}_n(S) = S \cap 2^n$。如果存在无穷多个 n 使得 $r \restriction n \in \mathcal{L}_n(S)$，我们就称 $r \in 2^\omega$ 是穿过 S 的一条分支，并将分支的集合记为

$$Br(S) = \{r \in 2^n \mid r \text{ is a branch through } S\}.$$

构造 $\diamondsuit^-$ 超滤子时用到了一个特殊的 S，其性质由下面关于 [5]的引理描述：

引理 2.10。设 $\pi : \omega \to \omega$ 是任意一个无穷多对一函数。那么存在两个序列 $\langle S_n \mid n < \omega \rangle$ 和 $\langle m_n \mid n < \omega \rangle$，使得：

(i) $S_n \subseteq 2^{\leq m_n}$.

(ii) 如果 $n \leq m$，那么 $S_n = S_m \cap 2^{\leq m_n}$ （因此 m_n 也递增）。*(iii)* 对每个 $k < m_n$， S_n 在第 k 层至多有 $\pi(k)$ 个节点。*(iv)* 对每个 n，$t \in S_{n+1} \setminus S_n$ 中的任意节点都位于 S_n 的某个极大节点之上（如果 S_n 中的一个节点在 S_n中没有真扩展，则称其为极大节点）。*(v)* 如果 n 是偶数，那么 S_n 的每个极大节点都会在 S_{n+1} 中分支（并且在 S_{n+1} 中恰有 *2* 个扩展）。*(vi)* 如果 n 是奇数，那么：*(a)* S_n 的极大节点都不会在 S_{n+1} 中分支（因此， S_{n+1} 中位于该节点之上的部分构成一条 $\sqsubset$-链）。*(b)* 对于 S_n中极大节点集合的任意有限子集 F，存在一个层级 $m_n \leq k < m_{n+1}$，使得 $|F| = \pi(k)$，且 F 中的每个节点在 k层的 S_{n+1} 中都有一个扩展。特别地， $\mathcal{L}_k(S_{n+1})$恰好由这些扩展组成。

构造好 S_n 后，我们令 $S = \bigcup_{n<\omega} S_n$，并令 $\mathcal{F}$ 为由集合 $B_r := \{n < \omega \mid r \restriction n = \mathcal{L}_n(S)\}$ 生成的滤子，其中 $r \in Br(S)$。然后， [5, Cor 1.20] 表明，可以将 $\mathcal{F}$ 扩张为一个超滤子 $\mathcal{U}$，使其满足 $\diamondsuit^-(\mathcal{U})$，其见证为 $\vec{A}$，其中 $\mathcal{A}_n = \mathcal{L}_n(S)$。由于我们确保了 S 的每个分支都在超滤子中的某个集合上被猜中，因此可得 $\mathsf{G}_{\mathcal{U}}(\vec{A}) = \mathsf{G}(\vec{A}) = Br(S)$。令 d_n 表示 S_n 中极大节点的数量。因此：

(I) $d_n = 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ （由 (v) 和 (vi)a) 得出）

(II) $m_{n+1} - m_n \geq 2^{d_n}$。 （由 (vi)b 得出）

定理 2.11. 设 S 是由引理 *2.10* 构造的树，则 $Br(S)$是一个贫集。

证明使用了 2^ω 中贫集的刻画，见 [6, 命题 5.3]。设 $M \subseteq 2^\omega$,

(1) M是余第一纲的，当且仅当 $\exists x \in 2^\omega \exists \Pi = \langle k_n \mid n < \omega \rangle,\ Match(x, \Pi) \subseteq M.$

其中 $Match(x, \Pi)$由所有满足以下条件的 y组成：对于无穷多个 n， $y \restriction [k_n, k_{n+1}) = x \restriction [k_n, k_{n+1})$。

定理的证明。考虑 $k_n = m_{2n+1}$，并定义 x。根据 (vi)b， $S_{2n+1} \subseteq 2^{\leq m_{2n+1}}$ 中的每个极大节点都线性延伸到$[m_{2n+1}, m_{2n+2}$中的层级。设 $x^n_1, ..., x^n_{d_{2n+1}}$枚举 S_{2n+1}中的极大节点。

对于每个 i，令 y^n_i 为 $S_{2n+2} \setminus S_{2n+1}$ 中位于 x_i 之上的极大分支，该分支根据 (vi)a 是唯一的。

由于 x_i 在 S_{2n+2} 中延伸至至少 $2^{d_{2n+1}-1}$ 个层级（根据 (vi)b），因此对于某个 $k \geq m_{2n+1} + 2^{d_{2n+1}-1}$，有 $y^n_i \in \mathcal{L}_k(S)$。由于 $2^{d_{2n+1}-1} > d_{2n+1}$ （事实上为 $d_{2n+1} > 2$），我们可以定义不同于 $x \restriction [m_{2n+1}, m_{2n+1} + 2^{d_{2n+1}-1})$ 的

$$\{y^n_1 \restriction [m_{2n+1}, m_{2n+1} + 2^{d_{2n+1}-1}), ..., y^n_{d_{2n+1}} \restriction [m_{2n+1}, m_{2n+1} + 2^{d_{2n+1}-1})\}$$

这就定义了 x 在区间 $[m_{2n+1}, m_{2n+1} + 2^{d_{2n+1}-1})$ 上的值，并且我们任意延拓 x，使得 $x \in 2^\omega$。

我们声称 $Match(x, \langle k_n \mid n < \omega\rangle)$ 与 $Br(S) = \mathsf{G}_{\mathcal{U}}(\vec{A})$ 不相交。事实上，设 $r \in Br(S)$ 是任意一个分支。由于对无穷多个 m' 有 $r \restriction m \in \mathcal{L}_m(S)$，根据 (iv)，存在 S_{2n+2} 中的一个极大分支 y，使得 $y \sqsubseteq r$。同样根据 (iv)，存在 $1 \leq i \leq d_{2n+1}$，使得 $x_i \sqsubseteq y$。由 (vi)a 以及 y_i^n 的选取可知，对于某个 i，有 $y = y_i^n$。因此

$$x \restriction [m_{2n+1}, m_{2n+1}+2^{d_{2n+1}-1}) \neq y_n^i \restriction [m_{2n+1}, m_{2n+1}+2^{d_{2n+1}-1}) = r \restriction [m_{2n+1}, m_{2n+1}+2^{d_{2n+1}-1}).$$

由此可知，x 在所有区间上都不同于 r，因此 $r \notin Match(x, \langle k_n \mid n < \omega\rangle)$。
□

我们对该问题有如下部分答案：

命题 2.12。添加一个科恩实数后，存在一个 $\mathcal{U}$上的超滤子 $\mathbb{N}$，以及一个序列 $\vec{A}$，证明了 $\diamondsuit^-(\mathcal{U})$，使得 $G_{\mathcal{U}}(\vec{A})$ 是非第一纲的。

证明。设 π 是一个无穷到一函数，即对于每个 n，$\pi^{-1}[\{n\}]$ 都是无限的。令我们用 Add(ω, 1)进行强迫。我们可以将 Add(ω, 1)与强迫偏序 $\mathbb{P}$等同起来，该强迫偏序由所有函数 f：$n \to P(\omega)$组成，并满足 $f(n) \in [P(n)]^{\leq \pi(n)}$，其序关系由末端延拓给出。显然，$\mathbb{P}$ 的任意泛滤子都会产生一个序列 $\vec{A} = \langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega\rangle$，使得 $\mathcal{A}_n \in [P(n)]^{\leq n}$。根据 [5, 定理 2.1]，扩张中存在一个超滤子 $\mathcal{U}$，使得 A 证明每个基模型实数都在一个 $\mathcal{U}$-大集合上被猜测。众所周知（例如参见 [6]），添加单个科恩函数后，基模型实数的集合是非第一纲的。
□

以下问题仍未解决：

问题 2.13. 是否存在一个非主超滤子 $\mathcal{U}$，使得 $\diamondsuit^-(\mathcal{U})$，并且有 $\vec{A}$ 作为见证，使得 $\mathsf{G}_{\mathcal{U}}(\vec{A})$ 是余第一纲?

3. Probability Preliminaries

与上一节一样，我们常通过示性函数将康托空间 2^ω 的元素与 ω 的子集对应起来。标准 Borel 概率空间 是三元组 $(2^\omega, \Omega_0, \mathbb{P}_0)$，其中 Ω_0 是由柱集 C_t 生成的 σ-代数，其中 $t \in 2^{<\omega}$，也就是康托空间的 Borel 集。概率函数 $\mathbb{P}_0$ 定义为：令 $\mathbb{P}_0(C_t) = \frac{1}{2^{|t|}}$，其中 $|t|$ 是 t 的长度。 —

一个能为猜测序列提供一些见解的定理是 Borel-Cantelli 引理。设 $\langle X_n \mid n < \omega\rangle$ 是一个集合序列。那么，上极限事件是指其中有无限多个 X_n 发生的事件，即 $\limsup X_n := \bigcap_{n<\omega} \bigcup_{m \geq n} X_m$。以下是概率论中的一个基本结果 [8, 12]:

引理 3.1（博雷尔-坎特利引理）。设 $\langle E_n \mid n < \omega\rangle$ 是概率空间 $\langle X$ 中的一列事件，Ω $\mathbb{P}\rangle$。

（1）若 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) < \infty$ 则 $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$。

(2) 如果这些事件两两独立，且 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(E_n)=\infty$，那么$\mathbb{P}$(上极限 E_n) $=1$。$n\to\infty$

Borel-Cantelli 引理给出了对 G$_{\mathcal{U}}$($\vec{A}$) 可能大小的一个基本限制。在 [5, 1.5], 中，人们注意到，给定函数f，$\pi\colon \omega\to\omega$和 $\mathcal{A}_n\in[P(f(n))]^{\leq\pi(n)}$, 要么 $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{\pi_{(n)}}2^{f(n)}=\infty$，要么 $\mathbb{P}$(G($\vec{A}$)) =0。注意，如果 $\mathcal{U}$是一个超滤子，且 sky($[\pi]_{\mathcal{U}}$) <sky($[f]_{\mathcal{U}}$)，那么存在$\pi'\in[\pi]_{\mathcal{U}}$和 $f'\in[f]_{\mathcal{U}}$，使得 $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{\pi'_{(n)}}2^{f'(n)}<\infty$。因此，猜测实数集的概率必为零。然而，利用第二 Borel-Cantelli 引理可知，如果上述级数发散，那么猜测集的概率为一。

定理 3.2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{\pi_{(n)}}2^{n}=\infty$，则存在一个序列 $\vec{A}=\langle\mathcal{A}_n\mid n<\omega\rangle$，满足 $|\mathcal{A}_n|=\pi(n)$，使得 $\mathbb{P}(G(\vec{A}))=1$。

证明。考虑标准 Borel 概率空间 ($\prod_{n\in\mathbb{P}}[P(n)]^{\leq\pi(n)}$, Ω_1, $\mathbb{P}_1$)，其中 Ω_1 是乘积拓扑下离散（有限）空间 $[P(n)]^{\leq\pi(n)}$上的 Borel 集的 σ-代数。概率函数 $\mathbb{P}_1$ 通过设定 $\mathbb{P}_1$(“$\mathcal{A}_n=A_n$”) = $1/\binom{2^n}{\pi(n)}$ 来定义，其中 $\mathcal{A}_0$，$\mathcal{A}_n$，.....是随机序列。

任取 $X\in P(\omega)$，并令 G_X为事件“$X\in$G($\vec{A}$)”（回想一下，这不过是事件“$\exists^{\infty}n$, $X\cap n\in\mathcal{A}_n$”）。注意

$$\mathbb{P}_1(X\cap n\in\mathcal{A}_n)=\frac{\binom{2^n-1}{\pi(n)-1}}{\binom{2^n}{\pi(n)}}=\frac{\pi(n)}{2^n}$$

另请注意，对于 $n\neq m$，事件 $X\cap n\in\mathcal{A}_n$ 和 $X\cap m\in\mathcal{A}_m$ 相互独立，因此根据第二 Borel-Cantelli 引理，$\mathbb{P}_1(G_X)=1$。现在考虑之前的 Borel 概率空间 (2^{ω}, Ω0, $\mathbb{P}_0$)。考虑一个乘积空间，其中我们独立地抽取 $X\in 2^{\omega}$ 和 $\vec{A}\in\prod_{n\in\mathbb{N}}[P(n)]^{\leq\pi(n)}$。也就是说，该空间为 ($2^{\omega}\times($ $\prod_{n\in\mathbb{N}}[P(n)]^{\leq n}$, $\Omega_{\times}$, $\mathbb{P}_{\times}$)，其中 $\Omega_{\times}$ 是由乘积 $A\times B$ 生成的 σ-代数，$A\times B$ 遍历 $A\in\Omega_0$ 和 $B\in\Omega_1$, ，且 $\mathbb{P}_{\times}(A\times B)=\mathbb{P}_0(A)\cdot\mathbb{P}_1(B)$。考虑事件 $E=\{(\vec{A},X)\mid X\in$G($\vec{A}$)$\}$。为证明 $E\in\Omega_{\times}$，注意到 $E=\limsup E_n$, 其中 $E_n=\{(\vec{A},X)\mid X\cap n\in A_n\}$，因此只需证明每个 $E_n\in\Omega_{\times}$。事实上，每个 E_n 都是有限多个柱集的并（遍历所有可能的 $\mathcal{A}_n\in[P(n)]^{\leq\pi(n)}$ 和每个 $Y\in A_n$）。根据 Fubini 定理，我们得到

$$\mathbb{P}_{\times}(E)=\int_{\vec{A}}\mathbb{P}_0(E^{\vec{A}})d\mathbb{P}_1=\int_X\mathbb{P}_1(E_X)d\mathbb{P}_0$$

其中 $E^{\vec{A}}=\{X\mid(\vec{A},X)\in E\}=$G($\vec{A}$) 且 $E_X=\{\vec{A}\mid(\vec{A},X)\in E\}=G_X$。根据先前计算，

$$\int_X\mathbb{P}_1(E_X)d\mathbb{P}_0=\int_X 1d\mathbb{P}_0=1.$$

因此 $\int_{\vec{A}} \mathbb{P}_0(\mathsf{G}(\vec{A}))d\mathbb{P}_1 = \int_{\vec{A}} \mathbb{P}_0(E^{\vec{A}})d\mathbb{P}_1 = 1$。特别地，必定存在至少一个序列 $\vec{A}$ 使得 $\mathbb{P}_0(\mathsf{G}(\vec{A})) = 1$，这正是所需的。□

请注意，前一个定理实际上表明，满足$\mathbb{P}_0(\mathsf{G}(\vec{A})) = 1$ 具有 $\mathbb{P}_1$-概率 1 的 A 集合。在下一节中，我们将介绍两种自然的此类构造：第一种具有很强的普适性，能够涵盖所有可能的π；另一种则自然地来源于随机游走。回顾一下，给定任意图，或者在我们的情形下给定任意格，从某个初始顶点开始的随机游走是一列相邻顶点，并且下一步走向某个邻居的概率是均匀的。更形式地说，我们希望描述 d维整数格 $\mathbb{Z}^d$上的随机游走。对于 $n < \omega$，令 X_n 为 $\mathbb{Z}^d$的标准基元素中的一个随机变量，即在某个坐标上分量为 ± 1 、其余分量均为 0 的 $2d$个向量。也就是说，$\mathbb{P}(X_n[i] = 1) = \mathbb{P}(X_n[i] = -1) = \frac{1}{2d}$。这些 X_n将表示游走中的第 n步。于是，我们将具有 n 步的随机游走定义为 $S_n = x + \sum_{i=0}^{n} X_i$，其中 $x \in \mathbb{Z}^d$ 是初始点。

关于随机游走，一个经典问题是它是否会返回原点，以及返回的频率如何。当随机游走以概率1无限次返回原点时，称其为常返的；否则称其为瞬态的。整数格上的随机游走已有深入研究。本文的结果将用到P´olya的一个定理，该定理见 [18]。

定理3.3. *(P´olya)* 假设 S_n 是一个从原点出发的随机游走。那么，如果 $d = 1, 2$，则该随机游走是常返的。否则，如果 $d \geq 3$，则该随机游走是瞬态的。

4. Random Walks and Explicit Guessing Sequences

本节将具体构造猜测序列。作为热身，我们先看几个简单的例子。根据 [5, 1.3], ，这些结果对任意 $g \leq_{\mathcal{FR}} id$都成立，因此我们假设 f 是极大的，即 $f = id$。

例4.1. 设 $\pi(n) = 2^{n-1}$，并考虑 $\langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$, $\mathcal{A}_n = P(n) \setminus P(n-1)$。那么 $|\mathcal{A}_n| \leq 2^{n-1}$ 且 $\mathbb{P}_0(\mathsf{G}(\vec{A})) = 1$.

证明。事实上，$\vec{A}$ 猜测 $[\omega]^\omega$，且 $\mathbb{P}_0([\omega]^\omega) = 1$。 □

接下来，让我们考察 π 中下一个较小且有意义的值。

例 4.2. 设 $\pi(n) = 2^{n-2}$。考虑序列 $\langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$，其中

$$\mathcal{A}_n = \{X \in P(n) \mid n-1 \in x \wedge n-2 \in x\}.$$

那么 $|\mathcal{A}_n| = 2^{n-2}$ 且 $\mathbb{P}_0(\mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}})) = 1$。

证明。显然，$\mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}}) = \{x \in P(\omega) \mid \exists^\infty n(\{n, n+1\} \subseteq x)\}$。我们证明其补集的概率为零。

定义 $E_n = \{x \in P(\omega) \mid \forall m > n(m \notin x \vee m+1 \notin x)\}$。容易看出 $(\mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}}))^c = \bigcup_n E_n$。接下来，我们证明对每个 $n < \omega$, $\mathbb{P}_0(E_n) = 0$。我们来证明 $\mathbb{P}_0(E_0) = 0$，而对于其他 E_n，论证基本相同。

定义 $E_0^N = \{x \in P(N) \mid \forall n \leq N(n \notin x \vee n+1 \notin x\}$。那么，$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} E_0^N = E_0$，只需证明 $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_0(E_0^N)$ 趋于 0。容易看出，$|E_0^N| = F_N$，其中 F_N 是第 N 个斐波那契数。我们有 $F_N = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^N - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^N$，由此可轻易推出 $\lim_{N\to\infty} \frac{F_N}{2^N} = 0$。□

更一般地，我们可以“固定”任意数量的比特，同样的论证也适用。这是对著名的无限猴子定理 [9, 10]的一种简单改述。该定理指出，如果一只猴子无数次随机敲击一个含有有限个字符的键盘，且每个字符被敲击的概率均匀，那么任何给定的有限字符串都将以概率 1 无限次出现。

命题 4.3。设 $k < \omega$ 并考虑 $\pi(n) = 2^{n-k}$。对于任意 $t \in 2^k$，定义序列 $\vec{A}^t$，令其为

$$\mathcal{A}_n^t = \{x \in P(\omega) \mid \forall 0 \leq q \leq k-1, n-q \in x \text{ iff } t(q) = 1\}.$$

于是，$|\mathcal{A}_n^t| = 2^{n-k}$ 且 $\mathbb{P}_0(G(\vec{A}^t)) = 1$。

证明。这是无限猴子定理的直接应用，其中我们将 2^ω 与 $P(\omega)$ 认定为相同对象。注意，$\mathsf{G}(\vec{A}^t)$ 恰好对应于“字符串 t 无限次重复出现”这一事件。□

仅从这些例子出发，我们就可以为更一般的一组 π's 推导出相应的例子。

推论 4.4。如果 $\rho \leq^* \pi$ 和 $\vec{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbb{P}(G(\vec{\mathcal{A}})) = 1$ 的见证序列，其中 $|\mathcal{A}_n| \leq \rho(n)$，那么对 $\vec{\mathcal{A}}$ 进行有限修改后所得的序列仍然是 π的见证序列。特别地，如果 $\lim \frac{\pi(n)}{2^n} > 0$，那么前一个命题中的某个序列 $\vec{\mathcal{A}}^t$ 已经可以作为 π 的见证序列，使得 $\mathbb{P}(G(\vec{\mathcal{A}})) = 1$。

证明。令 $\mathcal{A}$ 如上定义。固定 N，使得对每个 $n \geq N$，$\rho(n) \leq \pi(n)$，并设 $\mathcal{A}'_n = \emptyset$若 $n < N$，否则设为 $\mathcal{A}'_n = \mathcal{A}_n$。那么显然，$|\mathcal{A}_n| \leq \pi(n)$ 且 $\mathsf{G}(\vec{A}') = \mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}})$。

令 $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_1(n)}{2^n} = L$。于是我们可以取足够大的 k，使得 $\frac{1}{2^k} < L$，由此可知 $\pi_0(n) = 2^{n-k}$ 满足 $\pi_0 \leq^* \pi_1$。□

例 4.5。设 $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是任意满足以下条件的函数：对于每个n，$\pi(n) \leq 2^n$，且 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(n)}{2^n} = \infty$。我们来构造一个 $\mathcal{I}_n$ 的序列，使得 $|\mathcal{I}_n| = \pi(n)$，且 $\mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}}) = P(\mathbb{N})$。考虑 2^n上的字典序。对于每个 $t \in 2^n$，令 $0 \leq p_n(t) < 2^n$ 表示 t 在线性序中的位置。注意，

$$p_{n+1}(t^\frown 0) = 2p_n(t) \text{ and } p_{n+1}(t^\frown 1) = 2p_n(t) + 1. \tag{2}$$

我们分别用 0 和 1 表示取值为 0 和 1 的常值序列。我们归纳地定义 2^n 在字典序下的区间 $\mathcal{I}_n$，以及 2^n中的t_n 和 s_n。令 $s_0 = \bar{0}$ 和$t_0 = \pi(0)$（即 $\bar{0}$ 或 $\bar{1}$）。给定 s_n 和 t_n，令

$$s_{n+1} = t_n^\frown\langle 0\rangle$$
$$t_{n+1} = p_{n+1}^{-1}\Big(\big(p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1)\big) \bmod 2^{n+1}\Big)$$

以及集合

$$\mathcal{I}_{n+1} = [s_{n+1}, t_{n+1}) \bmod 2^{n+1}.$$

更具体地说，如果 $p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1) < 2^{n+1}$ 那么

$$p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1) \bmod 2^{n+1} = p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1).$$

根据定义，t_{n+1} 是越过 s_{n+1} 后的第 $\pi(n+1)$ 个元素，而 $\mathcal{I}_{n+1} = [s_{n+1}, t_{n+1})$.

否则，$2^{n+1} \le p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1)$，那么

$$p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1) \bmod 2^{n+1} = p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1) - 2^{n+1}.$$

因此，我们覆盖区间 $[s_{n+1}, \bar{1}]$ 的剩余部分，并用余数开始新的一“轮次”。也就是说，$\mathcal{I}_{n+1} = [s_{n+1}, \bar{1}] \cup [\bar{0}, t_{n+1})$，其中 t_{n+1}是 2^{n+1} 的字典序中的第 $p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1) - 2^{n+1}$ 个元素。

注意，在两种情况下，$|\mathcal{I}_{n+1}| = \pi(n+1)$。事实上，在第二种情况下，

$$|\mathcal{I}_{n+1}| = [2^{n+1} - p_{n+1}(s_{n+1})] + [p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1) - 2^{n+1}] = \pi(n+1).$$

还需证明，对于每个 $f \in 2^\omega$，都存在无穷多个 n's 使得 $f \restriction n \in \mathcal{I}_n$。首先用归纳法证明，

(i) $p_n(t_n) = (2^n \sum_{i=0}^{n} \pi(i)\, 2^i)$ 模 2^n。（ii）每两轮次之间，每个 $f \in 2^\omega$ 都被猜测过一次。（iii）经过 n 步后的轮次数为 $\lfloor \sum_{i=0}^{n} \pi(i)\, 2^i \rfloor$

由 (iii) 以及我们的假设可知，轮次是无限多的；根据 (ii)，我们得出每个 $f \in 2^\omega$ 都会被猜中无限多次，从而证明了结论。三个条目的证明均采用归纳法。条目 (i) 可由方程 (2) 直接得到。为证明 (ii)，假设 $n_k < n_{k+1}$ 是我们开始新连续轮次的步骤。令 $f \in 2^\omega$。如果 $f \restriction n_k < t_{n_k}$，那么 $f \restriction n_k \in [\bar{0}, t_{n_k})$，这由 $\mathcal{I}_{n_k}$所涵盖。否则，假设 $n_k \le n < n_{k+1}$ 是满足 $t_n \le f \restriction n$的最大值。那么$s_{n+1} \le f \restriction n+1$。如果 $n+1 < n_{k+1}$，则由最大性可知 $f \restriction n+1 < t_{n+1}$和 $f \in \mathcal{I}_n$。如果 $n+1 = n_{k+1}$，则 $f \in [s_{n_k}, \bar{1}] \subseteq \mathcal{I}_{n_{k+1}}$。因此，每个 f都会在某个步骤 $n_k \le n \le n_{k+1}$被猜中。最后，为证明 (iii)，我们再次使用归纳法。在归纳步骤中，我们希望证明新轮次已被添加，即 $p_{n+1}(s_{n+1}) + \pi(n+1) \ge 2^{n+1}$ 当且仅当 $\lfloor \sum_{i=0}^{n+1} \pi(i)\, 2^i \rfloor = \lfloor \sum_{i=0}^{n} \pi(i)\, 2^i \rfloor + 1$。要看出两者的等价性，只需注意前者等价于 $2(2^n(\sum_{i=0}^{n} \pi(i)\, 2^i - \lfloor \sum_{i=0}^{n} \pi(i) \frac{}{2^i} \rfloor)) + \pi(n+1) \ge 2^{n+1}$，而后者

等价于 $\pi_{(n+1)}\,{}_{2^{n+1}} \leq 1 - (\sum_{i=0}^{n} \pi_{(i)}\,{}_{2^i} - \lfloor \sum_{i=0}^{n} \pi_{(i)}\,{}_{2^i} \rfloor)$。至此，证明完成。

现在我们进一步缩小 π，并处理满足 $\lim_{n\to\infty} \pi_{(n)}\,{}_{2^n} = 0$ 的类（但仍满足 $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{(n)}\,{}_{2^n} = \infty$）。考虑 $\pi(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}}$ 注意，这个函数满足我们所需的条件。

事实 4.6。 $\binom{n}{\frac{n}{2}} \sim \frac{2^n}{\sqrt{n}}$。特别地，$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{\frac{n}{2}}\,{}_{2^n} = 0$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\frac{n}{2}}\,{}_{2^n} = \infty$。

证明。 利用斯特林公式（$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$），可得

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{(\frac{n}{2}!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{(\sqrt{2\pi\frac{n}{2}}(\frac{\frac{n}{2}}{e})^{\frac{n}{2}})^2} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

□

一个自然的大小为 $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ 的集合是集合 $\mathcal{A}_n = \{X \in P(n) \mid |x| = \frac{n}{2}\}$。我们指出，与前面的例子不同，$\pi$ 是定义在一个非余有限集上的偏函数。因此，超滤子必须对此加以考虑。——我们可以定义 $|x| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$，这样它便处处有定义。函数 $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 仍然适用于我们。

在这种情况下，要计算 $G(\vec{\mathcal{A}})$ 的概率，将问题转化为 $\mathbb{Z}^d$上的随机游走会很方便。随机游走与实数猜测的对应关系如下：给定一个集合 $X \in P(\omega)$，与之对应的随机游走由一个序列 $\langle s_n \mid n < \omega \rangle$ 给出，使得若 $n \in X$，则 $s_n = 1$，否则 $s_n = -1$。因此，$X \cap n$ 对应于 $\sum_{i=0}^{n} s_i$，而当游走返回原点时，X 由 $\mathcal{A}_n$ 猜中。由于这是在 $\mathbb{Z}$上的一维随机游走，游走会无限次访问原点。以下推论对此作了总结

推论 4.7. 序列 $\mathcal{A} = \{X \in P(n) \mid |X| = \frac{n}{2}\}$ 满足：$\pi(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}}$，且 $\mathbb{P}(G(\vec{\mathcal{A}})) = 1$。

注意，$\pi(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}}$ 依赖于 $\mathbb{Z}$上的一维随机游走。因此，我们可以缩小 π，使随机游走发生在 $\mathbb{Z}^2$上。这就得到$\pi(n) = \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{4}}^2$，它与$\frac{2^n}{n}$渐近等价。

与前面的命题一样，我们希望将猜测集归约为在 $\mathbb{Z}^2$上的简单随机游走。将 ω 划分为偶数和奇数，分别记为$\mathbb{N}_e$ 和 $\mathbb{N}_o$。那么，对于每个 $X \in P(\omega)$，都有一个对应的二维随机游走：首先，我们将每个 X 拆分 X 为 $X \cap \mathbb{N}_e$ 和 $X \cap \mathbb{N}_o$，这反过来编码了两个独立随机游走，如同前面的情形。众所周知，两个一维随机游走构成一个二维随机游走。注意，在这种转换下，要求二维随机游走经过 n 步后返回原点，与要求$|X \cap \mathbb{N}_e \cap n| = \frac{n}{4} = |X \cap \mathbb{N}_o \cap n|$是等价的。因此，在这种情形下，我们也有

一个与该随机游走对应的猜测集的自然例子。具体而言，考虑 $\langle \mathcal{A}_n \mid n < \omega \rangle$，其中

$$\mathcal{A}_n = \{X \in P(n) \mid |X \cap \mathbb{N}_e| = \frac{n}{4} = |X \cap \mathbb{N}_o|\}.$$

$\mathcal{A}_n$的大小为 $\pi(n) = \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{4}}^2$，– 以下命题表明$\mathbb{P}(\mathsf{G}(\vec{\mathcal{A}})) = 1$

命题 4.8。 设 $\vec{\mathcal{A}}$为由 $\mathcal{A}_n = \{X \in P(n) \mid |X \cap \mathbb{N}_e| = \frac{n}{4} = |X \cap \mathbb{N}_o|\}$. 定义的序列。那么 $|\mathcal{A}_n| = \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{4}}^2$ 且 $\mathbb{P}(G(\vec{\mathcal{A}})) = 1$.

证明。 那么，我们可以将 $X \in T$ 中的一个元素表示为二维随机游走。使用前面介绍的方法，设 $\langle s_n^X \mid n \in \omega \rangle$ 为与 X对应的随机游走。根据波利亚定理，概率为一地，每个随机游走都会无限多次返回原点。设 $T = \{X \in P(\omega) \mid |\{n < \omega \mid X \cap n \in \mathcal{A}_n\}| = \aleph_0\}$。这是一个概率为一的集合。□

4.1. **致谢**。 我们非常感谢 G. Amir 对本文提出的意见，尤其感谢他帮助证明定理 3.2 和例 4.5。我们也要感谢 Fanxin Wu 与我们进行了富有成效的讨论。

References

1. Tom Benhamou, *Saturation properties in canonical inner models*, 即将刊载（2025），《数理逻辑杂志》。2. Tom Benhamou 和 Natasha Dobrinen, *Cofinal types of ultrafilters over measurable cardinals* 2024 1 34 , 《符号逻辑杂志》（），–。3. , *On the Tukey types of Fubini producs*, 《美国数学会论文集》**12**（2025），103–117。4. Tom Benhamou 和 Gabriel Goldberg, *The Ostaszewski property under the ultrapower axiom* **77** 2025 5, 1686 1717 , 《加拿大数学杂志》（），第–期。5. Tom Benhamou 和 Fanxin Wu, *Diamond principles and Tukey-top ultrafilters on a countable set* 2026 , 《拓扑学及其应用》（），即将刊载。6. Andreas Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, 《集合论手册》（Matthew Foreman 和 Akihiro Kanamori 编），《集合论手册》第1卷，施普林格，多德雷赫特，2010年，第395–489页。7. Andreas Blass、Natasha Dobrinen 和 Dilip Raghavan, *The next best thing to a p-point* **80** 15 3, 866 900 , 《符号逻辑杂志》（），第–期。8. M. ´Emile Borel, *Les ~~probabi~~lités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, 《巴勒莫数学学会会刊》（1884–1940）**27**（1909），247–271。9. , *La mécanique statique et l'irréversibilité*, 《理论与应用物理学杂志》（1913）。10. , *Le hasard*, 巴黎：F´élix Alcan（1914）。11. Jonathan Cancino-Manr´ıquez 和 Jindrich Zapletal, *On the isbell problem*, 2025年。12. Francesco Cantelli, *Sulla probabilità come limite della frequenza*, 《林琴国家科学院院刊》**26**（1917），39–45。13. Natasha Dobrinen, *Survey on the Tukey theory of ultrafilters*, 《论文集》**17**（2015），第25期，53–80。

14. Natasha Dobrinen 和 Stevo Todorcevic, *Tukey types of ultrafilters*, 《伊利诺伊数学杂志》**55** （2011），第3期，907–951。15. John R. Isbell, *The category of cofinal types. II*, 《美国数学会汇刊》**116** （1965），394–416。16. Ronald Bjorn Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, 《数学逻辑年刊》（1972），229–308。17. David Milovich, *Tukey classes of ultrafilters on ω*, 《拓扑学论文集》**32** （2008），351–362。18. Georg P
´ *Über eine aufgabe der wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die irrfahrt* olya, , *im straßennetz* **84** 1921 149 160
《数学年刊》（），–。19. Christian w. Puritz, *Skies, constellations and monads*, 《非标准分析文集》（W.A.J. Luxemburg 和 A. Robinson 编），《逻辑与数学基础研究》第69卷，爱思唯尔，1972年，第215–243页。20. Dilip Raghavan 和 Stevo Todorcevic, *Cofinal types of ultrafilters*, 《纯粹与应用逻辑年刊》**163** （2012），第3期，185–199。21. John W. Tukey, *Convergence and uniformity in topology*，普林斯顿大学出版社，1940年。

(TOM BENHAMOU) Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick,NJ USA*Email address*: tom.benhamou@rutgers.edu

(SEAN LECLAIR) Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick,NJ USA*Email address*: sean.leclair@rutgers.edu