arXiv:2601.18568v1 [cond-mat.quant-gas] 26 Jan 2026

二维 Rashba 自旋轨道耦合自旋-1 凝聚体中的超固相与集体激发

Sanu Kumar Gangwar,[1] Sayan Chatterjee,[1] Rajamanickam Ravisankar,[2] Henrique Fabrelli,[3] PaulsamyMuruganandam,[4] 和 Pankaj Kumar Mishra[1]

[1]印度理工学院古瓦哈提分校物理系，印度阿萨姆邦古瓦哈提 *781039*[2]南方科技大学力学与航空航天工程系，中国深圳 *518055*[3]维也纳工业大学固体物理研究所，奥地利维也纳 *Wiedner Hauptstr. 8-10，1040*[4]巴拉蒂达桑大学物理系，印度泰米尔纳德邦蒂鲁吉拉伯利 *620024*（日期：2026年1月27日）

我们研究了具有 Rashba 型自旋轨道（SO）耦合的准二维自旋-1玻色–爱因斯坦凝聚体的集体激发谱和动力学。通过采用 Bogoliubov-de Gennes 分析，我们解析计算了不同相互作用强度和耦合参数范围内的激发谱。系统改变 SO 耦合和拉比耦合后，我们揭示了量子相变的不同动力学特征，包括模软化、类 roton 极小值的出现，以及铁磁和反铁磁相互作用区域中的互溶性驱动不稳定性。在反铁磁情形下，这些不稳定性会导致动力学不稳定超固相，其特征是密度调制与全局相干性共存。为验证解析预测，我们数值求解了耦合 Gross–Pitaevskii 方程，并分析了凝聚体的动力学稳定性。我们的结果为具有可调自旋轨道耦合的旋量凝聚体提供了可通过实验观测的特征，并展示了非平衡量子流体中自旋依赖相互作用与合成耦合之间丰富的相互作用。

I. 引言

超冷气体为在实验室探索多体物理提供了高度灵活且可控的平台 [1–4], 并作为量子技术前沿发展的指导框架 [5, 6]。玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs）的实现使得对稀薄气体中宏观量子相干性的研究成为可能 [7–9],这一研究后来扩展到自旋or凝聚体，其中原子保留了内部自旋自由度 [10]。这种内部自旋结构使合成规范场的工程化成为可能，其中最引人注目的是自旋–轨道（SO）耦合；该耦合已通过拉曼诱导的等强Rashba–Dresselhaus耦合，在准一维凝聚体中实现 [11–13]并在具有Rashba型耦合的准二维系统中实现 [14, 15]。将合成自旋轨道耦合引入超冷原子气体，为工程化新型准粒子谱和新兴量子相开辟了新的途径，包括类 roton 极小值 [16], 超固体相和条纹相 [17–19], 拓扑纹理 [20], 以及 Zitterbewegung振荡 [21]。

平均场 Gross–Pitaevskii 方程（GPE方程）的数值模拟在理解自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体方面发挥了核心作用，使人们能够详细研究基态相、自旋纹理、集体激发和非平衡动力学 [22]。在准一维自旋-1 玻色–爱因斯坦凝聚体中，已有研究表明，自旋轨道耦合能够诱发丰富的物理现象，包括条纹相 [23], 模软化以及激发谱中具有特征性的类 roton 特征 [24]。特别是，对拉曼诱导自旋轨道耦合自旋-1 凝聚体的 Bogoliubov 分析揭示了平面波相和零动量相中的 roton–maxon 结构，其中 roton 模的软化预示着向条纹相和类超固体序转变的不稳定性 [25, 26]。我们此前的研究进一步表明，在准一维自旋-1 凝聚体中，自旋轨道耦合会在铁磁相和反铁磁相中引发动力学不稳定性，其表现为不稳定的或双重不稳定避免交叉，从而为相变提供清晰的动力学特征 [27–29]。相关研究还揭示了有限温度下准一维系统跨越相边界时的模软化和双 roton 结构 [24]。

在准二维自旋-1 系统中，自旋轨道耦合与原子间相互作用的相互影响促进了自发密度调制以及类超固体相的出现 [30, 31]。Adhikari 等人证明了 Rashba 自旋轨道耦合自旋-1 凝聚体中稳定自束缚超固体孤子的形成，其特征是具有条纹和超晶格密度序 [32, 33]。这一框架后来被扩展到非磁性自旋-1 和自旋-2 凝聚体，在较宽的自旋轨道耦合强度范围内，准简并条纹与超晶格孤子仍保持稳定 [31]。

集体激发是探测条纹态和超固态等复杂量子相的有力且有效手段。它们的谱包含有关动力学稳定性、对称性破缺和量子相变的重要信息，而罗顿模的软化则是密度有序形成的标志 [34–36]。在具有自旋轨道耦合的玻色–爱因斯坦凝聚体中，拉曼耦合或 Rashba 耦合与相互作用之间的相互影响从根本上重塑了 Bogoliubov 谱，产生各向异性声子模、可调的 roton 极小值，以及

相互作用驱动的不稳定性 [37–40]。

大量理论研究表明，自旋轨道耦合可在二维凝聚体和量子液滴中诱导出单个或多个 roton 结构、抑制长波长声子模，并触发动力学不稳定性 [41–43]。此外，自旋轨道耦合会显著改变流体动力学响应和临界速度，凸显其对超流行为的深远影响 [44, 45]。近期关于准二维二元自旋-1/2 凝聚体的研究进一步揭示，拉比耦合往往使系统趋于稳定，而自旋轨道耦合则会在相边界附近形成复杂的不稳定性分布，从而为探索非常规量子相变提供了途径 [39, 40]。

尽管取得了这些进展，对于自旋-1自旋轨道耦合凝聚体中集体激发的全面认识仍明显不足。特别是，具有 Rashba 自旋轨道耦合的均匀二维系统中，自旋依赖相互作用、高自旋自由度与合成规范场之间的竞争最为显著，但这类系统受到的关注相对较少 [15, 26]。因此，自旋-1凝聚体中超条纹相和超固相的激发谱与动力学稳定性，尤其是在铁磁和反铁磁相互作用区域内的情况，尚未得到充分探索。阐明这些复杂相如何体现在集体模中，对于识别实验上可观测的特征，以及区分稳定超固体与动力学不稳定的条纹态至关重要 [30, 33]。

本文通过对具有 Rashba 自旋轨道耦合和拉比耦合的均匀准二维自旋-1玻色–爱因斯坦凝聚体进行系统的 Bogoliubov分析，弥补了这一空白。我们计算了广泛相互作用参数范围内的集体激发谱，涵盖铁磁和反铁磁区域。分析揭示了明显的模软化、罗顿极小值以及由混溶性驱动的不稳定性，这些都是量子相变的清晰动力学特征。值得注意的是，我们证明该系统中的超固相通常具有动力学不稳定性，而超条纹相则表现出特征性的激发特征。我们的结果有助于通过集体激发测量，在实验中观测自旋轨道耦合自旋量凝聚体中的这些超固体和超条纹行为。

本文结构如下。在第 II节中，我们介绍平均场模型，并描述用于研究集体激发的数值框架。第 III节分析单粒子谱，为第 IV节推导集体激发谱奠定基础。在第 V节中，我们给出铁磁相互作用下的稳定性相图，随后分别对有拉比耦合（第 VA节）和无拉比耦合（第 VB节）的情况进行稳定性分析。反铁磁相互作用下的稳定性分析见第 VI节。最后，在第VII节中，我们总结研究结果并给出结论。玻色-

戈利布夫-德热纳方程（BdG）矩阵详见附录 A。在附录 B 中，我们介绍反铁磁相互作用下 SO 耦合与拉比耦合不同组合所产生的不同相。

II. 平均场模型

我们考虑一个沿 z 方向强限域、通过该限域实现自旋-轨道耦合的谐振囚禁准二维（quasi-2D）自旋-1 凝聚体（$\omega_z \gg \omega$），其中 ω_z 和 ω 分别是 z 方向和 $x-y$平面内的角陷阱频率。在此框架下，描述自旋-轨道耦合自旋-1 凝聚体动力学的无量纲耦合 Gross–Pitaevskii 方程（GPE方程）为 [46–49],

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\pm1}(\vec{r}) &= \left[-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\vec{r}) + c_0\rho + c_2\rho_2^{\pm}\right]\psi_{\pm1}(\vec{r}) \\
&\quad + c_2\psi_0^2(\vec{r})\psi_{\mp1}^*(\vec{r}) + \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\psi_0(\vec{r}) \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{k_L}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \pm \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_0(\vec{r})\right], \qquad (1a) \\
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_0(\vec{r}) &= \left[-\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\vec{r}) + c_0\rho + c_2\rho_2^{0}\right]\psi_0(\vec{r}) \\
&\quad + 2c_2\psi_{+1}(\vec{r})\psi_{-1}(\vec{r})\psi_0^*(\vec{r}) + \frac{\Omega}{\sqrt{2}}(\psi_+(\vec{r})) \\
&\quad - \mathrm{i}\frac{k_L}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\psi_+(\vec{r}) - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi_-(\vec{r})\right], \qquad (1b)
\end{aligned}
$$

其中 $\vec{r}=\{x,y\}$, ψ_j； $j=+1,0,-1$ 是对应于超精细态 $F=1$ 的子能级 $m_F=+1,0,-1$ 的旋量凝聚体波函数，并满足归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}\rho\ dxdy = 1$，其中 $\rho_j=|\psi_j|^2$ $\rho=|\psi_{+1}|^2+|\psi_0|^2+|\psi_{-1}|^2$ $\psi_\pm=$, $\psi_{+1}\pm\psi_{-1}$ $\rho_2^{\pm}=\rho_{\pm1}+\rho_0-\rho_{\mp1}$ $\rho_2^0=\rho_{+1}+\rho_{-1}$

且 。此外， ， （） ， （） 。方程（1a）和（1b）分别使用时间、长度和能量 $t=\omega\tilde{t}$、 $x=\tilde{x}/l_0$、 $y=\tilde{y}/l_0$和 $\hbar\omega$ 进行无量纲化。所得凝聚体波函数为$\psi_{\pm1,0} = \frac{l_0}{\sqrt{N}}\tilde{\psi}_{\pm1,0}$, 其中， $l_0=\sqrt{\hbar/m\omega}$是x-y 平面内陷阱频率 ω 对应的振子长度。陷阱强度为 $V(x,y)$ $=(x^2+y^2)/2$，密度-密度相互作用强度为 c_0 $=2N\sqrt{2\pi\kappa}(a_0+2a_2)/3l_0$，自旋交换相互作用强度为 $c_2=2N\sqrt{2\pi\kappa}(a_2-a_0)/3l_0$，其中 $\kappa=\omega_z/\omega$,a_0 和 a_2 分别是总自旋通道 0 和 2 中的 s 波散射长度。通过调节 $c_2<0(c_2>0)$，可以使凝聚体 [46] 具有铁磁（反铁磁）相互作用。自旋-轨道耦合和拉比耦合强度~ ~分别为 $k_L=k_L/\omega l_0$、Ω $=\Omega/(\hbar\omega)$。在上述描述中，带波浪号的量表示有量纲量。在本文中，我们将所有参数均视为无量纲量。

与耦合系统相对应的能量泛函

GPE方程（1a）-（1b）可表示为 [48, 49],

$$E = \frac{1}{2}\int dxdy\Big\{\sum_j(|\partial_x\psi_j|^2+|\partial_y\psi_j|^2)+2V(x,y)\rho + c_0\rho^2+c_2[\rho_{+1}^2+\rho_{-1}^2+2(\rho_{+1}\rho_0+\rho_{-1}\rho_0 - \rho_{+1}\rho_{-1}+\psi_{-1}^*\psi_0^2\psi_{+1}^*+\psi_{-1}\psi_0^{*2}\psi_{+1})] + \sqrt{2}\Omega[\psi_+^*\psi_0+\psi_0^*\psi_+]-\sqrt{2}\mathrm{i}k_L[\psi_+^*\partial_y\psi_0 + \mathrm{i}\psi_-^*\partial_x\psi_0-\mathrm{i}\psi_0^*\partial_x\psi_- +\psi_0^*\partial_y\psi_+]\Big\} \tag{2}$$

这里，我们概述与模拟相关且实验上可行的参数范围。对于铁磁相互作用，我们考虑将含有$N \sim 3\times10^5$个原子的 ^{87}Rb BEC囚禁在频率为（$\omega_\perp$、ω_z）$=2\pi\times$（20Hz、600Hz）的谐振势阱中。相应的特征长度为$l_0=2.4\mu$m和$l_z=0.44\mu$m。对于反铁磁相互作用，我们考虑由 ^{23}Na原子组成的BEC，其特征长度为 $l_0=4.7\mu$m和 $l_z=0.85\mu$m [49, 50]。通过利用Feshbach共振 [51–53]调节 s波散射长度，可以实现自旋相关和自旋无关相互作用。改变 $\{151.19\mu$m至3023。89nm范围内的激光波长$\}$，即可调节自旋轨道耦合强度 $k_L=\{0.1-5\}$。然而，模拟中使用的无量纲拉比频率区间$\Omega=[0,11]$ 可通过将拉曼激光强度调节至 $2\pi\hbar\times\{5-220\}$ Hz范围来实现。

III. 单粒子谱

本节介绍无因禁势、具有自旋轨道耦合和拉比耦合的自旋-1 自旋量玻色–爱因斯坦凝聚体中，非相互作用自旋量凝聚体的单粒子谱。随后，我们将介绍相互作用系统的集体激发谱。

对于 $V(x,y)=0$，以及 $c_0=c_2=0$ 代入平面波解 $\psi_{0,\pm1}=\phi_{0,\pm1}e^{\mathrm{i}(q_xx+q_yy-\omega t)}$ 到方程（1a）-（1b）中，可得:

$$\mathcal{L}_{sp}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_0\\ \phi_{-1}\end{pmatrix}=\omega\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_0\\ \phi_{-1}\end{pmatrix} \tag{3}$$

with

$$\mathcal{L}_{sp}=\begin{pmatrix}\frac{Q^2}{2} & \mathcal{L}_{12} & 0\\ \mathcal{L}_{21} & \frac{Q^2}{2} & \mathcal{L}_{23}\\ 0 & \mathcal{L}_{32} & \frac{Q^2}{2}\end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中，$Q^2=q_x^2+q_y^2$，$\mathcal{L}_{12}=\frac{\Omega}{\sqrt{2}}+\frac{k_L}{\sqrt{2}}(q_y+\mathrm{i}q_x)$，$\mathcal{L}_{21}=\frac{\Omega}{\sqrt{2}}-\frac{k_L}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}q_x-q_y)$，$\mathcal{L}_{23}=\frac{\Omega}{\sqrt{2}}+\frac{k_L}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}q_x+q_y)$以及 $\mathcal{L}_{32}=\frac{\Omega}{\sqrt{2}}-\frac{k_L}{\sqrt{2}}(-q_y+iq_x)$。将式(3)对角化后，我们得到单粒子色散:

$$\omega_0(q_x,q_y)=\frac{Q^2}{2} \tag{5a}$$

$$\omega_\pm(q_x,q_y)=\frac{1}{2}\left(Q^2\pm2\sqrt{k_L^2Q^2+2q_yk_L\Omega+\Omega^2}\right) \tag{5b}$$

单粒子谱的结构通常能直接揭示自旋轨道耦合和拉比耦合如何改变系统的能量景观，进而控制其基态动量。特别是，下分支中简并极小值的出现或消失，决定了系统倾向于处于零动量态还是有限动量态，从而直接决定凝聚体不同的基态相 [29, 39, 54]。在单粒子谱中，我们得到三个不同的分支，分别为 ω_+、ω_0 和 ω_-。其中，ω_0 分支不受自旋轨道耦合和拉比耦合影响，而 ω_+ 和 ω_- 则明显依赖于自旋轨道耦合和拉比耦合。为简化分析，我们首先考虑 $q_y=0.0$ 的情形，并考察谱随q_x的变化。随后，我们反过来固定 $q_x=0.0$，探究谱随 q_y的变化。

方向上。图1上排展示了对于 $q_y=0$，沿 q_x 方向的单粒子色散关系。在不存在自旋轨道耦合和拉比耦合的情况下（$k_L=\Omega=0$），谱由一个非简并的抛物线色散带构成 [，这与式5中的表达式一致]，。仅引入自旋轨道耦合（$k_L=0.7$）便会定性地改变色散关系：下分支 ω_- 在有限动量处形成两个简并极小值 $q_x=\pm0.7$，如图1(b i)所示，这表明自旋轨道耦合会诱导体系趋向有限动量态。相比之下，仅存在拉比耦合时（$k_L=0$，$\Omega=0.5$），简并被解除，且分支之间打开能隙 [，如图1(c i)所示]。ω_0 与 $\omega_\pm$ 之间的能量间隔为Ω，而 ω_+ 与ω_- 之间的能隙为2Ω，这反映了拉比项引起的相干自旋混合。因此，下分支在零动量处呈现一个单极小值。

当两种自旋轨道耦合同时存在（$k_L=0.7$，$\Omega=0.5$）时，依赖于动量的自旋轨道效应与自旋混合之间的竞争，会使 ω_- 分支 [的极小值部分平坦化，见图1(di)]。进一步增大拉比耦合（$\Omega=0.7$）会抑制这种平坦化，并使其恢复为单极小值 [，见图1(ei)]。然而，在固定$k_L=1.0$的$\Omega=0.5$下，若自旋轨道耦合更强（$k_L=1.0$），则尽管存在有限能隙，下分支仍会再次形成明显的双极小值，如图1(f i)所示。双极小值的出现对应着从零动量（ZM）相到条纹波（SW）相的转变，其转变条件为 $k_L^2>\Omega$。

在 q_y 方向。我们现在转而考察沿 q_y 方向的色散，固定 $q_x=0$，如图1底排所示。这里我们发现，谱的动量依赖性发生了变化，从而导致

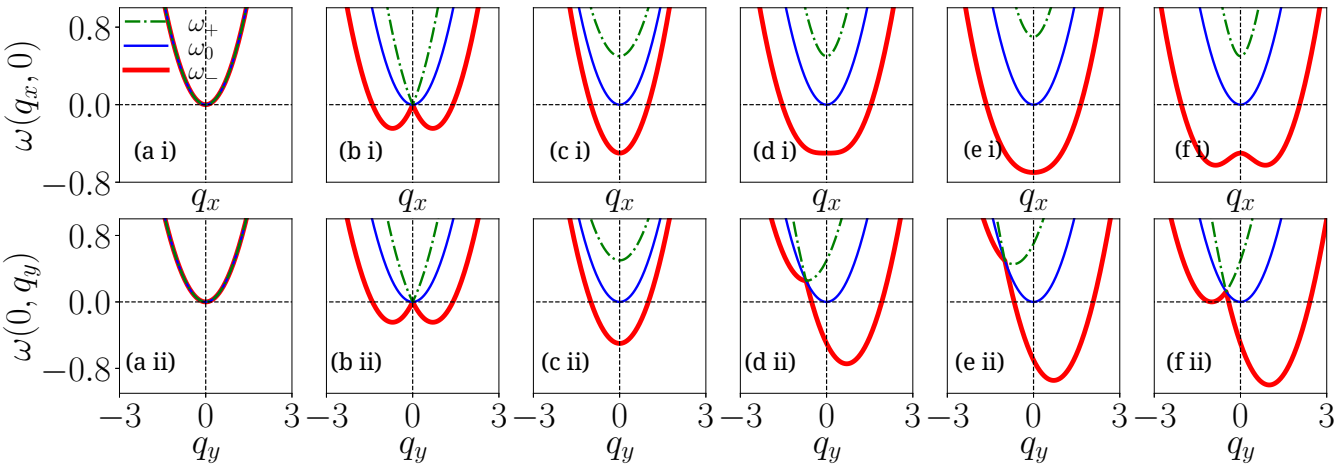

图1. 不同自旋轨道（SO）和拉比耦合强度（k_L, Ω）下，沿 q_x 方向（上排）和沿 q_y 方向（下排）的单粒子能谱：(a)-(f)：(0,0)、(0.7,0)、(0,0.5)、$(0.7, 0.5)$、$(0.7, 0.7)$、$(1.0, 0.5)$。粗实红线、细实蓝线和点划绿线分别表示自旋的 $\{-1, 0, +1\}$ 分量对应的能量本征谱。沿 q_x 方向，本征值色散中出现双极小值，并遵循关系 $k_L^2 > \Omega$，这表明发生了从零动量相到条纹波相的相变。而沿 q_y 方向，在同时存在自旋轨道耦合和拉比耦合时，本征值色散呈现非对称双极小值。

出现了与 q_x 方向相比在定性上截然不同的行为。在两种耦合都不存在或仅存在其中一种时，图1(a ii–c ii) 中的色散与沿 q_x 方向的对应色散 [图1(a i–c i)]非常相似。特别是，在没有拉比耦合时，有限自旋轨道耦合会在下分支产生对称的双极小值 ω_-，反映出简并的有限动量态。

当自旋轨道耦合和拉比耦合均非零时，会出现一种全新的定性特征。对于 $k_L = 0.7$ 和$\Omega = 0.5$[图1(d ii)], 下分支形成非对称双极小值结构。全局极小值位于 $q_y = 0.7$ ，其能量为 $\omega_- = -0.745$，而次级极小值则位于正能量处。将拉比耦合增强至$\Omega = 0.7$ 会进一步使全局极小值降低至 $\omega_- = -0.945$ [图1(e ii)], ，从而加剧两个极小值之间的不对称性。在这两种情况下，两个极小值的能量均不相同，这表明相反动量之间的简并被解除。

对于更强的自旋轨道耦合，$k_L = 1.0$ 当$\Omega = 0.5$ [图 1(fii)], 不对称的双极小值结构仍然存在。一个极小值位于零能量处（$\omega_- = 0$在 $q_y = -1.0$），而另一个仍位于负能量处（$\omega_- = -1.0$ 在 $q_y = 1.0$），这表明正、负动量之间存在显著的不平衡。总体而言，我们发现，虽然对称的双极小值仅由自旋轨道耦合产生，并对应于简并的有限动量态，但自旋轨道耦合与拉比耦合同时存在时会打破这种对称性，并选出一个优先的动量方向。这种不对称性反映了自旋轨道耦合的各向异性，并对动量选择产生重要影响以及基态结构 [26, 39]。

IV. 集体激发谱

在前一节中，我们分析了自旋轨道耦合自旋-1玻色–爱因斯坦凝聚体的单粒子谱，该谱决定了底层能带结构和基态动量构型。然而，凝聚体的稳定性和动力学响应由集体激发决定，而集体激发在很大程度上取决于原子间相互作用。在这一方法中，凝聚体波函数表示为围绕均匀平均场基态的小幅涨落。第 j个自旋分量的激发波函数可写为 [39, 55],

$$\psi_j(x, y, t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_j t}[\phi_j + \delta\phi_j(x, t)] \tag{6}$$

其中，ϕ_j 表示均匀基态波函数，μ_j 是化学势，$\delta\phi_j$ 表示一个小的含时微扰。

涨落项按平面波模展开为

$$\delta\phi_j(x, y, t) = u_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_x x + q_y y - \omega t)} + v_j^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_x x + q_y y - \omega^* t)} \tag{7}$$

其中，u_j，v_j 是 Bogoliubov 振幅，而（q_x，q_y）表示激发动量。旋量的基态取为 $\phi_j = (1/2, -1/\sqrt{2}, 1/2)^T$，对应于均匀密度。此处，$\mu_j$ 表示化学势。指标 $j = +1$、0和 -1 表示自旋-1 凝聚体的三个自旋分量。将式（6）代入耦合的 Gross–Pitaevskii 方程 [式（1a）–（1b）] 并保留涨落的一阶项，可得支配集体激发谱的 BdG 方程，如下所示：

$$\mathcal{L}\left(u_{+1}\ \ v_{+1}\ \ u_0\ \ v_0\ \ u_{-1}\ \ v_{-1}\right)^T = \omega\left(u_{+1}\ \ v_{+1}\ \ u_0\ \ v_0\ \ u_{-1}\ \ v_{-1}\right)^T \tag{8}$$

其中 T表示矩阵的转置， $\mathcal{L}$ 是一个 6×6 矩阵，表示为：

$$\mathcal{L}=\begin{pmatrix} H_+-\mu_+ & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & \mathcal{L}_{14} & \mathcal{L}_{15} & \mathcal{L}_{16} \\ \mathcal{L}_{21} & -H_++\mu_+ & \mathcal{L}_{23} & \mathcal{L}_{24} & \mathcal{L}_{25} & \mathcal{L}_{26} \\ \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & H_0-\mu_0 & \mathcal{L}_{34} & \mathcal{L}_{35} & \mathcal{L}_{36} \\ \mathcal{L}_{41} & \mathcal{L}_{42} & \mathcal{L}_{43} & -H_0+\mu_0 & \mathcal{L}_{45} & \mathcal{L}_{46} \\ \mathcal{L}_{51} & \mathcal{L}_{52} & \mathcal{L}_{53} & \mathcal{L}_{54} & H_--\mu_- & \mathcal{L}_{56} \\ \mathcal{L}_{61} & \mathcal{L}_{62} & \mathcal{L}_{63} & \mathcal{L}_{64} & \mathcal{L}_{65} & -H_-+\mu_- \end{pmatrix} \tag{9}$$

矩阵元 $\mathcal{L}$ 见附录A。Bogoliubov系数满足归一化条件，

$$\int\left(\sum_j\{|u_j|^2-|v_j|^2\}\right)dxdy=1 \tag{10}$$

通过计算矩阵 $\mathcal{L}$的行列式并令其等于零，可得到简化形式的BdG激发谱，即 $det\ (\mathcal{L}-\omega \mathrm{I})\ =0$，其中I为 6×6 单位矩阵。特征方程可写为：

$$\omega^6+b\omega^5+c\omega^4+d\omega^3+e\omega^2+f\omega+g=0 \tag{11}$$

其中系数 b、 c、 d、 e、 f和 g 见附录A。

V. 基于集体激发的铁磁相互作用稳定性相图

凝聚体的动力学稳定性和能量稳定性由相应的本征频率决定。当所有本征频率均为实数且为正时，凝聚体在动力学和能量上均稳定。复本征频率的出现意味着动力学不稳定性，而纯实数但为负的本征频率则表明能量不稳定性 [39, 42, 56]。图2 展示了存在铁磁相互作用时 k_L –Ω平面内的稳定性相图，相互作用强度为 $c_0=50.0$ 和 $c_2=-2.5$ ，沿着 q_x 在$q_y=0.0$处。

根据图 2中的本征谱，我们将k_L –Ω 相平面划分为三个不同的区域：区域I、区域II（进一步分为区域IIa和区域IIb）以及区域 III。带绿色圆点的白色点划线遵循判据 $k_L^2\approx\Omega$ ，并将区域I与区域II分隔开。区域I仅有实数且为正的本征频率，因此在动力学和能量上均稳定；区域II具有复本征谱，因此动力学不稳定。此外，带蓝色圆点的白色实线将区域II分为两部分：IIa和IIb，它们满足关系 $\Omega=-1.6329+0.13k_L^2$ ，原点为（$k_L=3.54$, $\Omega\sim0$）。我们得到有能隙模位于区域IIa的分支之间，而无能隙模位于区域IIb的分支之间。拉比耦合消失的情形（$\Omega\sim0.0$）单独作为区域 III 处理。该区域动力学不稳定，同时存在具有有能隙模的单带不稳定性和具有无能隙模的多带不稳定性。对于更大的自旋轨道耦合（$k_L\gtrsim4.1$）中，区域 III还在低能分支和第一激发分支中同时呈现出声子模和不稳定带，本文后文将对此进行更详细的讨论。

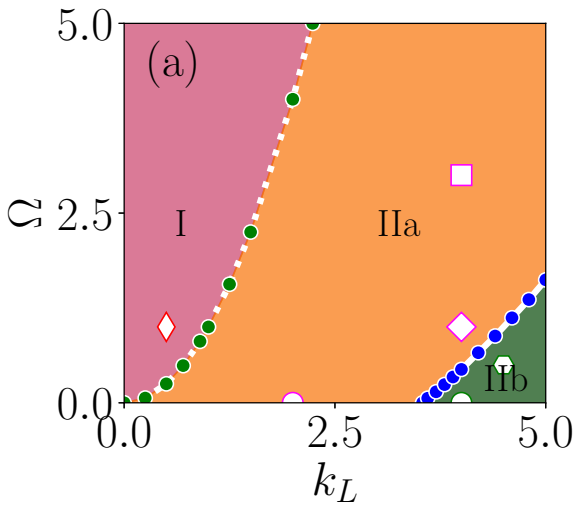

图2. 铁磁相互作用（$c_0=50.0$ 和 $c_2=-2.5$）下 k_L–Ω平面中的稳定性相图。(a) q_x 的完整范围，其中 $q_y=0$。带绿色圆点的白色点划线（$k_L^2\simeq\Omega$）将稳定区域（I）和不稳定区域（II）分隔开。在区域II内，带蓝色圆点的白色实线（$\Omega=-1.6329+0.13k_L^2$）将有能隙（IIa）和无能隙（IIb）谱区分开。$\Omega\sim0$ 的情形处于不稳定区域。不同区域中的标记表示文中已对其进行详细集体激发分析的耦合参数点。

为了更定量地分析这些特征，我们还解析地计算了激发谱，并采用数值方法求解Bogoliubov–de Gennes 方程 [方程 9]。此外，我们还计算了沿准

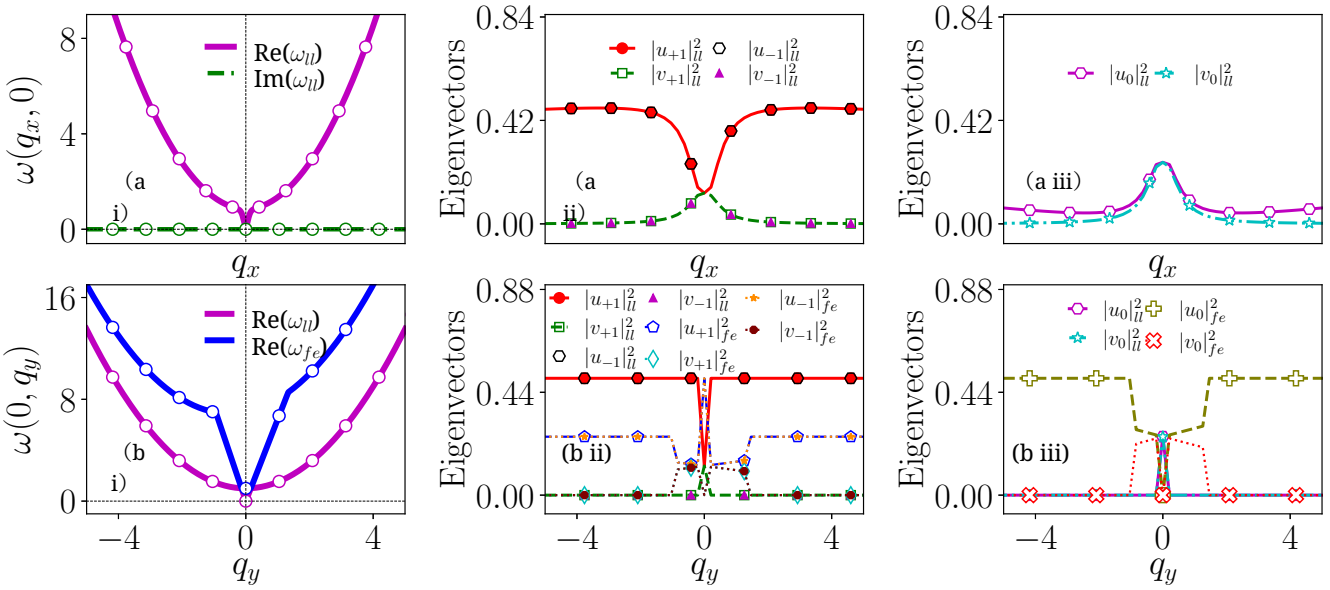

图3. 沿准动量方向 q_x 和 q_y 的本征值谱与本征矢量，对应于 $k_L = 0.5$、$\Omega = 1.0$、 $c_0 = 50$和 $c_2 = -2.5$。上排：低能分支。(a i) 本征值谱，其中 Re(ω_{ll})（洋红色实线）和 |Im(ω_{ll})| （绿色点划线）。(a ii, a iii) 对应的本征矢分量 $|u_{+m}|^2_{ll}$ 和 $|v_m|^2_{ll}$，对应于 $m = 0,\ \pm 1$。下排：第一激发分支。(b i) 本征值谱，其中 Re(ω_{fe})（蓝色实线）。(b ii, b iii) 对应的本征矢分量 $|u_m|^2_{fe}$ 和 $|u_m|^2_{fe}$。所有本征值均为实数且为正，低能分支呈现声子模，表明系统在动力学和能量上均稳定。

动量 q_x 方向（ $q_y = 0$处）以及沿 q_y 方向（ $q_x = 0$处）的本征值谱对应本征矢。首先，我们考虑一个实空间网格$[-300:\ 300][-300:\ 300]$，步长为 $h_x = h_y = 0.05$。随后，我们应用傅里叶配置点法，对BdG方程进行傅里叶变换的数值计算，得到截断后的约化BdG矩阵，再使用LAPACK软件包 [57]对其进行对角化。在动量空间中，我们在 q_x、 q_y 方向上考虑$[-50:\ 50][-50:\ 50]$个模，网格步长为 $h_{q_x} = h_{q_y} = 0.21$。接下来，我们展示与耦合Gross-Pitaevskii方程（GPE方程）（方程（1a）–（1b））的集体激发谱相关的凝聚体时间演化。基态通过虚时间传播法获得，随后采用实时间传播法进行演化。为此，我们使用参考文献 [48, 58, 59]中所述的分步Crank-Nicholson格式。我们考虑了一个包含 $N_x = N_y = 160$ 个空间点的网格，空间步长为 $dx = dy = 0.1$；虚时间传播的时间步长为 $dt = 0.001$，实时间传播的时间步长为 $dt = 0.00025$。首先，我们通过虚时间传播，根据相图 [图 2]中的各个区域求得基态。计算得到基态后，我们通过淬火改变陷阱强度，并采用实时间传播对其进行演化。

由于 k_L –Ω 相平面分为三个不同的区域：区域I、区域II（细分为IIa和IIb）以及区域 III，在接下来的小节中，我们将凝聚态的行为分为两种情况进行分析：（A）存在拉比耦合时（区域I和区域II），以及（B）不存在拉比耦合时（区域 III）。针对每种情况，我们均报告集体激发结果和使用平均场 GP 方程进行的数值模拟。

A. 有限自旋轨道耦合和拉比耦合对集体激发谱的影响

在前一节中，我们给出了稳定性相图。对于有限拉比耦合，该相图分为两个不同的区域：I 和 II（细分为 IIa 和 IIb）；而在没有拉比耦合强度时，则只有一个区域，即 III。接下来，我们将详细分析这些区域中的本征谱和本征矢量。

1. 区域*I*

我们首先考虑耦合参数$(k_L,\ \Omega) = (0.5,\ 1.0)$，它们位于图2中用菱形标记表示的稳定性相图区域 I 内。对于这组耦合强度，我们将分析集体激发谱及其对应的数值模拟。

a. 集体激发谱：图3 展示了以下区域的集体激发谱：$k_L^2 < \Omega$，即 $(k_L,\ \Omega) = (0.5,\ 1.0)$ 相互作用强度为 $c_0 = 50$和 $c_2 = -2.5$，沿准

动量方向 q_x （上排）和 q_y （下排）。在上排中，图 3(a i)显示，谱的低能分支仅由实数且为正的本征频率构成，并支持声子模。对于本征谱中选定的一个分支，我们考察本征矢分量 $|u_{\pm1}|^2$， $|v_{\pm1}|^2$， $|u_0|^2$，以及 $|v_0|^2$。如图 3(a ii)所示，本征矢量呈现同相行为，这是类密度模的特征，并满足条件 [28, 39]，

$$|u_{+1}|^2_{ll} - |u_{-1}|^2_{ll} = 0, \quad |v_{+1}|^2_{ll} - |v_{-1}|^2_{ll} = 0. \tag{12}$$

第零分量（见图 3(a iii)）也表现出独立的同相行为。此外，在长波极限 $q_x \approx 0$下，所有本征矢分量都趋于相同的值，这证实了低能激发具有声子特性。在底部

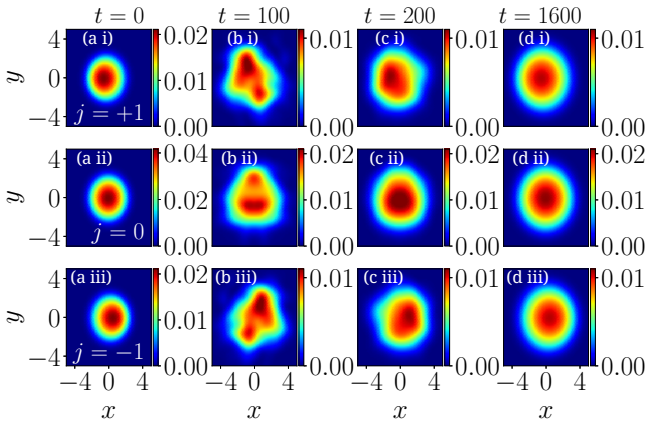

图 4. 伪彩色密度图展示了凝聚体在谐振阱强度从 $\lambda = 1$淬火至 $\lambda = 0.5$后随时间的演化。面板 (a) 显示基态密度分布，而面板 (b-d) 分别对应于 $t = 100$、 200 和 1600 时的演化；耦合参数为 $(k_L, \Omega) = (0。5, 1。0)$，相互作用强度为 $c_0 = 50$, $c_2 = -2.5$。列 (i-iii) 分别表示自旋量凝聚体的 $j = +1$、0、-1 分量。长时间内密度分布保持不变，证明了凝聚体在陷阱淬火下具有动力学稳定性。

行，第 3图 (b i) 同样显示，谱的低能分支（下标为 ll）和第一激发分支（下标为fe）中只有实数且为正的本征频率。低能分支再次包含声子模，而第一激发分支则在动量空间中表现出显著的不对称性。图 3 (b ii) 所示的相应本征矢分量在两个分支中均呈现同相（类密度）行为，满足：

$$\begin{aligned} &|u_{+1}|^2_{ll} - |u_{-1}|^2_{ll} = 0, \quad |v_{+1}|^2_{ll} - |v_{-1}|^2_{ll} = 0, \\ &|u_{+1}|^2_{fe} - |u_{-1}|^2_{fe} = 0, \quad |v_{+1}|^2_{fe} - |v_{-1}|^2_{fe} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

图中所示的第零分量 3(b iii) 对两个激发分支均呈现类密度模，这与先前关于自旋-1/2 SO 耦合玻色–爱因斯坦凝聚体 [39] 的研究一致。对于低能分支，所有本征矢分量在 $q_y \approx 0$ 处收敛至相同数值，证实该模具有声子特性。在第一激发分支中，本征矢分量 $|u_{+1}|^2_{fe}$ 和 $|u_{-1}|^2_{fe}$ 保持有限，而 $|v_{+1}|^2_{fe}$ 和 $|v_{-1}|^2_{fe}$ 在 $q_y < -1.08$ 和 $q_y > 1.48$处趋于零。当 q_y 趋近 -1.08时，类粒子分量 $|u_{\pm1}|^2_{fe}$ 开始减小，同时出现有限的类空穴贡献 $|v_{\pm1}|^2_{fe}$。在 $q_y \approx -0.21$ 处，四个分量的大小均相近，表明存在强烈的粒子–空穴混合。进一步趋近 $q_y \approx 0$时，类粒子分量达到最大值，而类空穴分量再次减小。对于 $q_y > 0$，也观察到类似的演变；然而，由于激发谱固有的不对称性，只有在接近 $qy \approx 1.48$时，有限的 $|u_{\pm1}|^2_{fe}$ 才恢复，而 $|v_{\pm1}|^2_{fe}$ 才趋于零。本征矢量的第零分量也表现出类似行为；值得注意的是，在 $q_y \approx 0$处， $|u_0|^2_{fe}$ 和 $|v_0|^2_{fe}$ 均趋于零。

上述 Bogoliubov 谱和本征矢分析揭示了模态混合、旋子软化以及粒子—空穴杂化的明显特征，表明特定动量区域开始出现动力学不稳定性。接下来，我们从平均场基态出发，对耦合 Gross–Pitaevskii 方程进行数值模拟，并通过淬火囚禁势来激发凝聚体的动力学。

b. 数值模拟：我们首先求得耦合参数 $(k_L, \Omega) = (0.5, 1.0)$、相互作用强度 $c_0 = 50$,$c_2 = -2.5$ 下，处于强度为$\lambda = 1.0$的谐振势阱中的凝聚体基态。该态呈现出圆周方向不对称的密度分布 [图 4(a i - a iii)] [49]。为探究凝聚体的时间演化，我们将陷阱强度从 $\lambda = 1.0$ 突然淬火至 $\lambda = 0.5$。起初，凝聚体在 $t = 100$ 个时间单位时改变了形状，如图 4(b i-b iii)所示。随后，密度分布开始恢复；到 $t = 200$ 个时间单位时，原有形状已大致恢复 [图 4(c i-c iii)]。在 $t = 1600$ 个时间单位时[图 4(d i–d iii)]，，凝聚体完全恢复到初始构型。这种复现表明该态在动力学上是稳定的，这与激发谱中仅包含实本征频率相一致。

我们报告了相互作用强度为 $c_0 = 50$,$c_2 = -2.5$ 时，区域I中凝聚体在 $(k_L, \Omega) = (0.5, 1.0)$ 下的总能量。能量起始值为 $E \approx 0.64$，位于 $t = 0$，随后开始下降，并在 $t = 370$ 处达到 $E \approx 0.29$。超过这一点后，凝聚体的密度趋于饱和，呈现出稳定行为（此处未显示）。

2. 区域 *IIa*

在稳定性相图的区域 IIa 中 [图2(a)],我们考虑以下参数范围： $k_L^2 > \Omega$，并在此分析两个不同的点（k_L, Ω） $= (4.0, 1.0)$，以及（4.0，3.0）。对应于

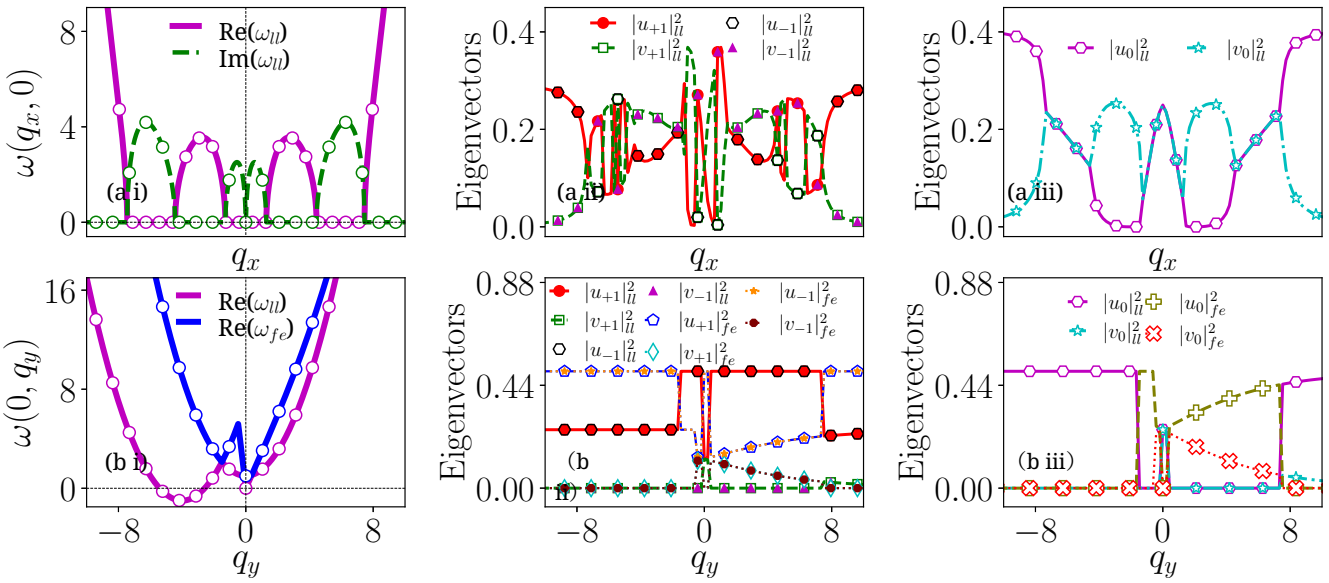

图5。本征值谱 [（a i）、（b i）] 以及相应的本征矢 [（a ii、a iii）和（b ii、b iii）] 对于 $k_L = 2.0$ 和 $\Omega = 3.0$，其相互作用强度为 $c_0 = 50.0$ 和 $c_2 = -2.5$，分别沿准动量方向 q_x 和 q_y绘制。线型和符号遵循图3中的约定。沿 q_x 方向会产生多带不稳定性，导致本征矢分量中出现自旋–密度–自旋混合模，而低能分支沿 q_y 方向表现出负能激发。

这些点，我们分别给出集体激发谱和数值模拟结果。

a. 集体激发谱：在图5中，我们给出了耦合参数（k_L, Ω） = （4.0, 1.0）以及相互作用强度 $c_0 = 50.0$和 $c_2 = -2.5$下的集体激发谱。上方各面板显示沿准动量方 q_x向的谱，而下方各面板对应于 q_y方向。在图5（a i）中，我们得到多带虚本征频率，其延伸覆盖准动量 $q_x \in [0, 1.30]$ 的有限范围，幅度为 $\omega = 4.24$，以及 $q_x \in [4.41, 7.57]$，幅度为 $\omega = 2.55$。不稳定带关于准动量方向呈对称分布。虚本征频率的存在导致本征矢分量 [中出现反相行为（类自旋模），如图5（a ii）],所示，其满足判据 [28, 39],

$$|u_{+1}|^2_{ll} - |u_{-1}|^2_{ll} \neq 0, \quad |v_{+1}|^2_{ll} - |v_{-1}|^2_{ll} \neq 0. \qquad (14)$$

如前一节所述，在本征频率为实数时，本征矢分量呈现类密度模。在此处，由于 Re(ω) →Im(ω)发生转变，类密度模变为类自旋模，而多带不稳定性的存在会产生密度-自旋-密度或自旋-密度-自旋混合模 [27]。本征矢量的第零分量呈现同相行为（类密度模），且与 [图5(a iii)] 无关。

在底行中，图 5(b i) 展示了本征谱的低能分支和第一激发分支仅包含实本征频率，其中低能分支形成了负激发谱。负激发的存在使凝聚体在能量上不稳定 [42]。在$q_y = -1.50$、-0.11和 0。43处出现避免交叉。由于本征频率为实数，图 5(b ii) 中的本征矢分量呈现类密度模，符合式 13给出的判据。在避免交叉点 $q_y = -4.06$、-0.35 和 0。67处，本征矢分量发生翻转 [60]。本征矢量的第零分量独立呈现类密度模 [图 5(biii)]。

在图6中，我们考察区域 IIa 中的第二个点，此处耦合参数为 (k_L, Ω) =(4.0, 3.0)，相互作用强度为 $c_0 = 50.0$和 $c_2 = -2.5$。在图6(a i)中，我们观察到，在某一准动量方向范围 $q_x \in [0, 7.0]$ 内，本征谱的低能分支上存在虚本征频率，其最大振幅为 4.62。该虚本征频率关于准动量 q_x对称。从 Re(ω) → 到 Im(ω)发生了转变。由于存在虚本征频率，如图6(a ii)所示，本征矢分量在准动量范围$q_x \in [0, 7.0]$内呈现类自旋模，满足式 14给出的判据。由于本征谱中存在对称的不稳定带，该现象具有对称性；当 Re(ω) →Im(ω)时，类密度模转变为类自旋模。本征矢的第零分量独立呈现类密度模 [图 6(a iii)]。

在图6（b i）中，eig谱的低能分支和第一激发分支仅产生实的正本征频-

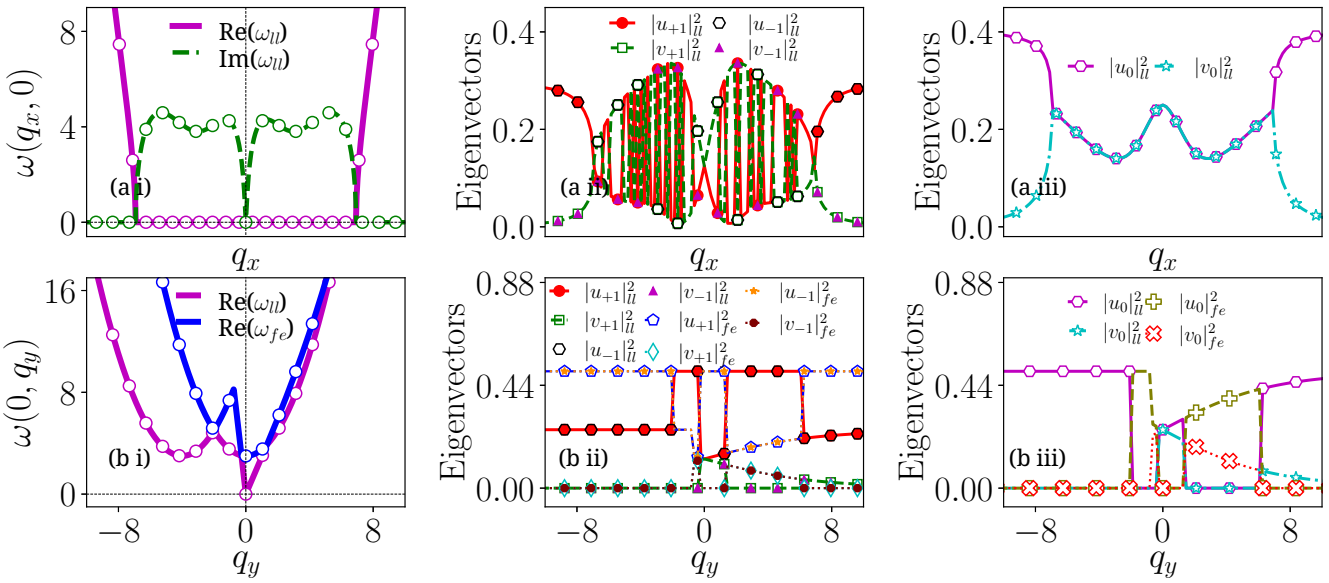

图6. 本征值谱 [(a i), (b i)] 及相应的本征矢量 [(a ii, a iii) 和 (b ii, b iii)] 对于 $k_L = 4.0$ 和 $\Omega = 3.0$ 相互作用强度为 $c_0 = 50.0$ 和 $c_2 = -2.5$时，分别沿准动量方向 q_x 和 q_y绘制。线型和符号遵循图 3中的约定。沿 q_x 方向，低能分支中出现单带不稳定性；而沿 q_y 方向，低能分支中则发展出类旋子-麦克森特征。

率。在低能分支内，激发谱在 $q_y = -4.14$处呈现局部极小值，类似于类旋子特征。因此，该分支包含典型的 maxon-roton 模式。值得注意的是，谱的结构表明，低能分支内存在不对称的类旋子特征。低能分支与eig谱第一激发分支之间的避免交叉分别出现在 $q_y = -2.08$、-0.30和1。39由于本征频率为实数，在图6（b ii）中，本征矢分量显示出类密度模，与公式13中给出的判据一致。在避免交叉点 $q_y = -2.08$、-0.30和1。39处，本征矢分量发生翻转。本征矢的第零分量独立地呈现类密度模，并且也在避免交叉点 [图6（b iii）]处发生翻转。

此外，我们通过固定 $k_L = 4.0$、$c_0 = 50$、$c_2 = -2.5$，并改变拉比耦合强度，进一步分析 maxon 模和 roton 模的变化。图7(a)中，红色右向空心三角形表示 maxon 模，绿色空心菱形表示旋子极小值。当 $k_L = 4.0$时，旋子极小值在$\Omega = 1.50$处仍然存在，其 $\omega_-(0, q_y) = 0.000013$。进一步减小拉比耦合会使激发分支出现负能模。随着拉比耦合增大，maxon 模和 roton 极小值彼此靠近，并在$\Omega = 10.95$处重合，此时二者的大小和位置均相同；超过该点后，旋子极小值不再存在。图7(b)中，蓝色空心六边形表示旋子深度，其定义为 maxon 模与 roton 极小值之差。旋子深度随拉比耦合增大而减小，并最终降为零在$\Omega = 10.95$处。图7(c)展示了 maxon 模（红色空心五边形）和旋子极小值（绿色空心六边形）的位置。随着拉比耦合增大，maxon 模的位置逐渐增大，而旋子极小值始终保持在同一位置。在$\Omega = 10.95$处，maxon 模到达与旋子极小值相近的位置，并与之合并。由于 maxon 模和 roton 模出现在负的 q_y处，我们使用 $-q_y$ 绘制它们。图7(d)中，k_L –Ω 相平面（沿 q_y 方向，在 $q_x = 0.0$处）分为三个不同区域：灰色（蓝色）区域仅包含实数正本征频率，不含（含有）maxon-roton 模式；二者由一条带蓝点的白色虚线分隔，且均为能量稳定区域。红色区域包含负本征频率，因而能量不稳定。蓝色区域和红色区域由一条带红点的白色实线分隔。maxon-roton 模式仅出现在蓝色区域。此外，与图2中的相图比较可知，蓝色区域是区域 IIa 的子集。上述讨论的 $k_L = 4.0$ 情形位于蓝色区域，要使 maxon 模和 roton 模合并，需要相对较大的拉比耦合$\Omega = 10.95$。这些观察结果与此前的实验和理论工作一致 [26, 54, 61–63]。

从上述讨论的各点来看，第一点位于该相的红色区域，能量不稳定；第二点位于蓝色区域，能量稳定；然而，由于存在虚本征频率，两点在动力学上均不稳定。

b. 数值模拟：与上一部分讨论的集体激发类似，我们考虑两个

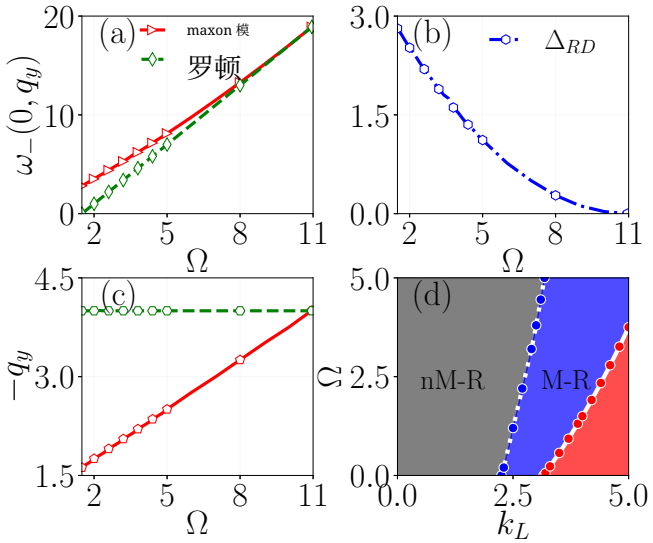

图7. 铁磁相互作用下罗顿-麦克孙模式的变化（$c_0 = 50$, $c_2 = -2.5$）。面板（a-c）展示了随着拉比耦合变化，$k_L = 4.0$ 时得到的结果。面板（a）显示 maxon 模（红色空心右三角形）和罗顿（绿色空心菱形）模式的演化，面板（b）显示相应的罗顿深度 Δ_{RD} 衰减（蓝色空心六边形）。面板（c）展示沿 q_y 方向的 maxon 模（红色空心五边形）和罗顿（绿色空心六边形）模式的准动量位置。面板（d）给出 $q_x = 0.0$时 k_L –Ω平面上的相图，其中灰色、蓝色和红色区域分别表示沿 q_y 方向不存在 maxon–roton 模式（nM–R）、存在 maxon–roton 模式（M–R）以及能量不稳定性（Ener.-U）。

不同的点，在区域 IIa 中进行数值模拟。我们生成耦合参数为 (k_L, Ω) = (4.0, 1.0) 和 (4.0, 3.0)、相互作用强度为 $c_0 = 50$ 和 $c_2 = -2.5$ 时的基态，并通过将陷阱强度突然淬火至初始强度的一半来研究其动力学。

我们首先考虑点 (k_L, Ω) = (4.0, 1.0)，并生成凝聚体的基态，该态呈圆形不对称 [图8(a i-a iii)] [49]。在时间演化过程中，如图8(b i-b iii)所示，陷阱强度突然淬火后，凝聚体的形状最初发生变化（与前述情况类似）。在 t = 200units [图8(c i-c iii)], 时，凝聚体继续变形；到更晚的时刻 $t = 1600$ units，凝聚体发生碎裂，形成一个小畴 [图8(d i-d iii)]。密度分布的碎裂发生于动力学不稳定性开始之时，而这一不稳定性由激发谱中虚频的出现所触发 [64–66]。

对于区域 IIa 中的第二个点，其耦合参数为 (k_L, Ω) = (4.0, 3.0)。我们再次得到一个具有圆周不对称性的态。在动力学过程中，我们将囚禁势淬火至原强度的一半。在时间演化过程中，形状变形开始显现于 $t = 100$ units，并持续加剧。在$t = 200$，变形进一步加剧；而在稍后的时间 $t = 1600$，由于集体激发谱中存在虚本征频率（与前一种情况类似，此处未展示），密度分量开始发生碎裂。

我们计算了上述参数组下凝聚体在时间演化过程中的总能量。对于耦合参数 (k_L, Ω) = (4.0, 1.0)，凝聚体能量初始为 $E = -7.30$ at $t = 0$。陷阱强度淬火后，系统向较低能量构型弛豫，并在 $E = -7.60$at $t = 250$ units 时达到该构型。此后，能量一直稳定至 $t = 1193.50$units。再往后，能量开始上升，在 $E = -5.81$ at $t = 1600$ units 时达到该值（此处未显示）。对于另一组耦合参数 (k_L, Ω) = (4.0, 3.0)，凝聚体的初始能量为 $E = -9.29$ at $t = 0$。在时间演化过程中，能量到 $t = 275.5$ units 时降至 $E = -9.60$，并几乎保持不变直至 $t = 869.5$ units。随后，能量显著上升，在 $t = 1424.5$units 时达到 $E = -0.45$，之后又弛豫至 $E = -1.23$ at $t = 1600$units（此处未显示）。两种情况下观察到的总能量随时间调制，反映了淬火后凝聚体的动力学不稳定性 [39]。

3. 区域 *IIb*

在稳定区域 IIb 中，我们考虑耦合参数为 (k_L,Ω) = (4.5, 0.5) 的点。下一节将展示该情况下的集体激发谱和数值模拟结果。

a. 集体激发谱：图 9 展示了自旋轨道耦合和拉比耦合参数 (k_L, Ω) = (4.5, 0.5) 时的集体激发谱，相互作用强度为 $c_0 = 50.0$ 和 $c_2 = -2.5$。谱沿准动量方向 q_x（上排）和 q_y（下排）给出。在图 9(a i) 中，低能分支的本征谱呈现三个虚本征频率带。第一带延伸至 $q_x \in [0, 0.61]$，振幅为 1.90；第二带延伸至 $q_x \in [0.87, 2.87]$，振幅为 2.20；第三带延伸至 $q_x \in [5.98, 8.65]$，振幅为 4.83。相比之下，第一激发分支仅显示一个虚本征频率带。这是由本征谱中低能分支与第一激发分支之间的避免交叉所致。该带延伸至 $q_x \in [0.87, 2.87]$，振幅为 2.20，与低能分支的第二带重合。由于这一避免交叉产生虚本征频率，因此它对应于不稳定的避免交叉 [27, 67]。由于存在虚本征频率，图 9(a ii) 中低能分支和第一激发分支的本征矢分量呈现反相行为（类自旋模），符合以下判据，

$$|u_{+1}|^2_{ll} - |u_{-1}|^2_{ll} \neq 0, \quad |v_{+1}|^2_{ll} - |v_{-1}|^2_{ll} \neq 0,$$
$$|u_{+1}|^2_{fe} - |u_{-1}|^2_{fe} \neq 0, \quad |v_{+1}|^2_{fe} - |v_{-1}|^2_{fe} \neq 0. \quad (15)$$

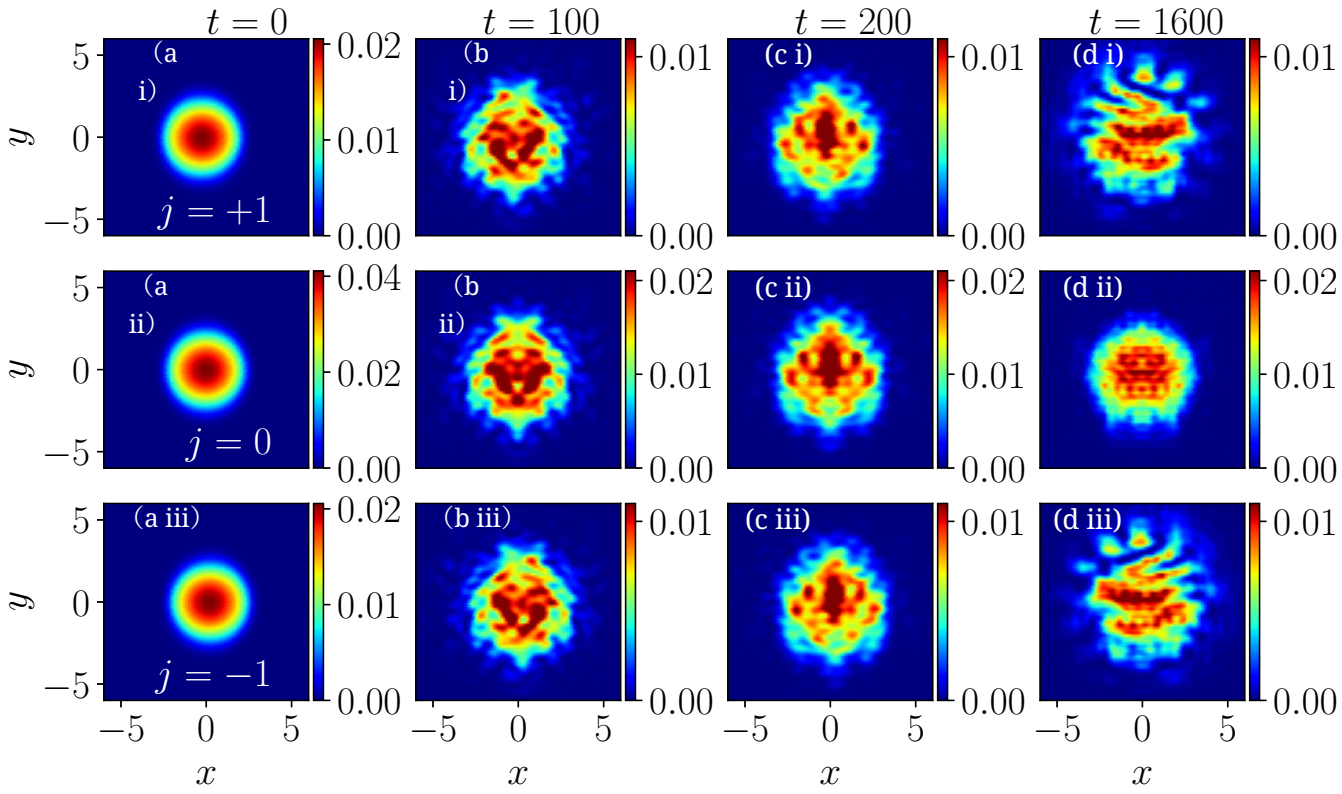

图8. 展示凝聚体在谐振阱强度从 $\lambda = 1$ 变化至 $\lambda = 0.5$后淬火过程中的时间演化的伪彩色密度图。(a) 基态密度分布。(b-d) 分别为时间演化至 t = 100、200、1600 时的快照；耦合参数为 k_L = (, Ω) (4.0,1.0)，相互作用强度为 , $c_0 = 50$ $c_2 = -2.5$。每列表示一个旋量分量，其中 $j = +1$（上）、0（中）和 −1（下）。

在不稳定的避免交叉点，低能分支和第一激发分支的本征矢分量对于 q_x彼此反相

$in[0.87, 2.87]$。低能分支呈现多带不稳定性，导致本征矢分量中出现自旋-密度-自旋混合模。本征矢的第零分量则独立呈现类密度模 [图9(a iii)]。

在底行沿 q_y 方向，图9(b i)显示，谱的低能分支和第一激发分支中均只有实本征频率。这些分支在 $q_y = -1.22$处发生避免交叉。我们还在低能分支中观察到一个负本征频率。实本征频率使图9(b ii)中的本征矢分量呈现同相行为（类密度模），其定义见式13。在避免交叉处，本征矢分量发生翻转 [60]。第零分量独立呈现同相行为 [图9(b iii)]。虚本征频率和负本征频率的存在导致整个 [42]内均出现动力学不稳定性和能量不稳定性。

b. 数值模拟：在本部分研究中，我们展示了区域 IIb 中耦合参数 $k_L = 4.5$和$\Omega = 0.5$以及相互作用强度 $c_0 = 50$ 和 $c_2 = -2.5$下的数值模拟。所得初始基态呈圆形非对称 [图10(a i-a iii)] [49]。为研究凝聚体动力学，囚禁势强度骤然降至原值的一半。如图10(b i-b iii)所示，凝聚体在 $t = 100$ 个单位时发生形变并改变形状。到 $t = 200$ 个单位时，它进一步碎裂，但振幅低于此前 [图10(c i-c iii)]。在之后的时刻，振幅继续减小，凝聚体在所有组分中演化为条纹状结构 [图10(d i-diii)], ，这验证了该区域中凝聚体存在动力学不稳定性 [65, 66]。

在图11中，我们给出了与图10所示密度分布相对应的折线图。顶行显示了在 $y = 0$处沿 x方向的密度，而底行展示了在 $x = 0$处沿 y方向的密度。沿 x方向，图11(a1)描绘了凝聚体的基态；所有组分均呈现单峰密度，$\rho_{\pm 1}$ 略微偏离陷阱中心。在 $t = 100$ 个单位时，由于动力学不稳定性的开始，凝聚体形状发生演化，密度分布中出现多个峰 [图11(a2)]。到$t = 200$个单位时，密度进一步碎片化 [图11(a3)],；在 $t = 1600$ 个单位时，凝聚体形成条纹状结构 [图11(a4)]。沿 y方向，在图11(b1)中，我们给出了所有组分均具有单峰密度分布的基态。在动力学演化过程中，由于动力学不稳定性的开始，

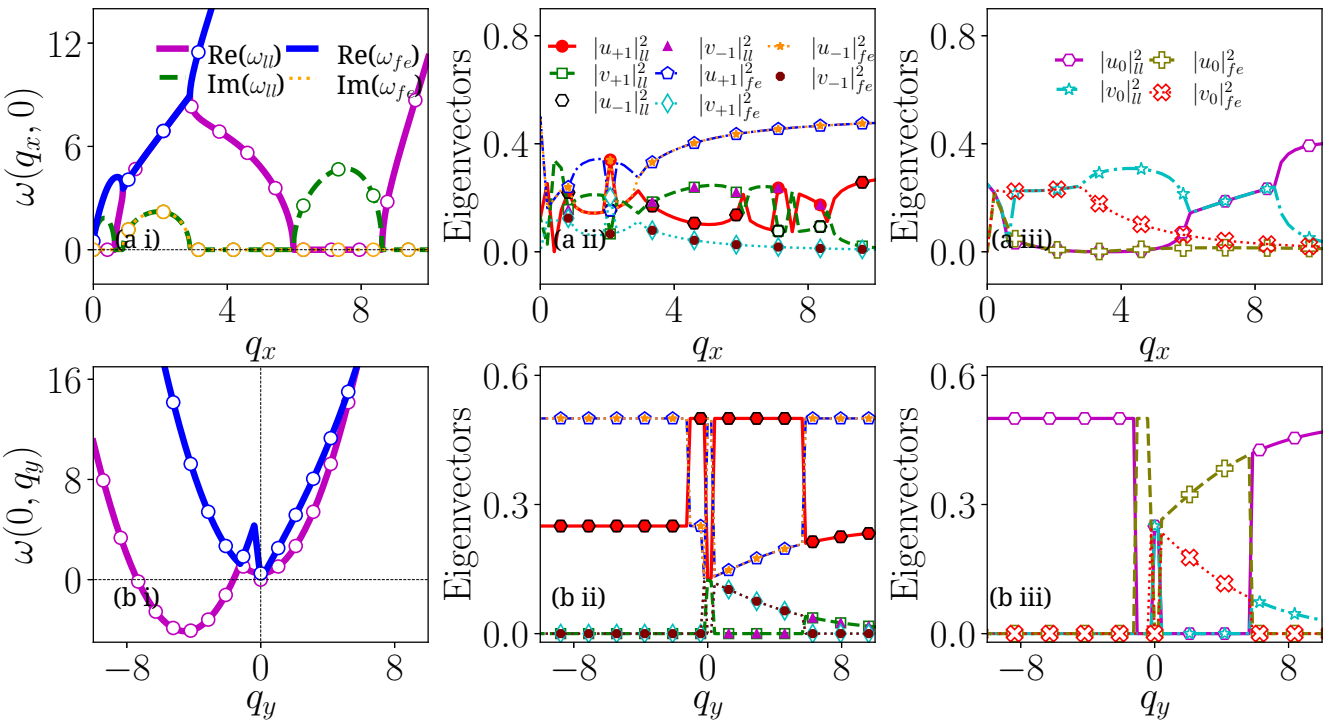

图 9. 展示了自旋量凝聚体的本征谱及其对应的本征矢，其中上排（下排）对应沿 q_x （q_y）方向的准动量，参数为 $(k_L,\ \Omega) = (4.5,\ 0.5)$ 和相互作用强度 $c_0 = 50.0,\ c_2 = -2.5$。面板 (a i) 和 (b i) 显示本征谱，其中 Re(ω) 以实线表示， |Im(ω)| 以虚线或点线表示。低能分支和第一激发分支的本征矢分量分别显示在面板 (a ii, a iii) 和 (b ii, b iii) 中。低能分支中出现多带不稳定性；第一激发分支中的单带不稳定性源于沿 q_x 方向的避免交叉，沿 q_y 方向则观察到负本征频率。

凝聚体的形状发生变化，并碎裂成若干个小畴 [图 11(b2, b3)]。在稍后的时刻，即 $t = 1600$ 个单位时，凝聚体振幅进一步减小，所有组分均呈现条纹状密度分布 [图 11(b4)] [64]。

对于区域 IIb 中上述耦合参数点（$k_L,\ \Omega$） = (4.5, 0.5)，我们报告了动力学过程中凝聚体的总能量。凝聚体的能量初始为 $E = -8.93$ ，在 $t = 0$ 时开始下降；动力学过程中能量持续降低，在 $t = 792$ 个单位时达到 $E = -9.24$，并在 $t = 998$ 个单位时达到 $E = -9.25$ 。到 $t = 1600$ 时，能量进一步降至 $E = -9.26$。能量下降得非常缓慢，并在较晚时刻趋于恒定 [此处未显示]。

B. 无拉比耦合（Ω）时的集体激发谱：区域 III

在前一节中，我们讨论了同时具有 SO 和拉比耦合时的集体激发谱，涵盖稳定性相图[图 2]中的区域 I、IIa 和 IIb。现在，我们聚焦于不含拉比耦合（$\Omega \sim 0$）的情形。我们将这一状态称为稳定性相图中的区域 III，并展示集体激发谱以及相应的数值模拟——数值模拟结果。

在稳定性相图 [图 2], 的区域 III 中，我们考察了两个具有代表性的耦合参数点（$k_L,\ \Omega$） = (2.0，0.0) 和 (4.0, 0.0)，在这两个点上我们有k_L^{Ω}，但考虑 $\Omega \sim 0$。为研究凝聚体在这一状态下的行为，我们分析了集体激发谱，并进行了数值模拟。

a. 集体激发谱：在图12中，我们给出了耦合参数（k_L,Ω） = (2.0,0.0)和相互作用强度 $c_0 = 50.0$、$c_2 = -2.5$下的本征值谱。顶行展示了沿准动量方向 q_x的本征谱，而底行对应于准动量的 q_y 方向。在图12(a i)中，我们在有限范围的准动量方向 $q_x \in [0, 3.55]$ 内得到了谱中的虚本征频率，其能带振幅约为1.56。虚本征频率关于 q_x呈对称分布。图12(a ii)中的相应本征矢量显示，在一定的准动量范围 $q_x \in [0, 3.55]$内存在类自旋模，这与公式14中的判据一致，其原因在于虚本征频率的存在。在 $|u_{+1}|^2_{ll}$ 和 $|v_{+1}|^2_{ll}$ 中， $q_x \approx 0$处出现了类尖点特征，而在存在拉比耦合强度时并未出现该特征。本征矢量的第零分量独立于 |，在图12(a iii)|中呈现出类密度模。在底行中，

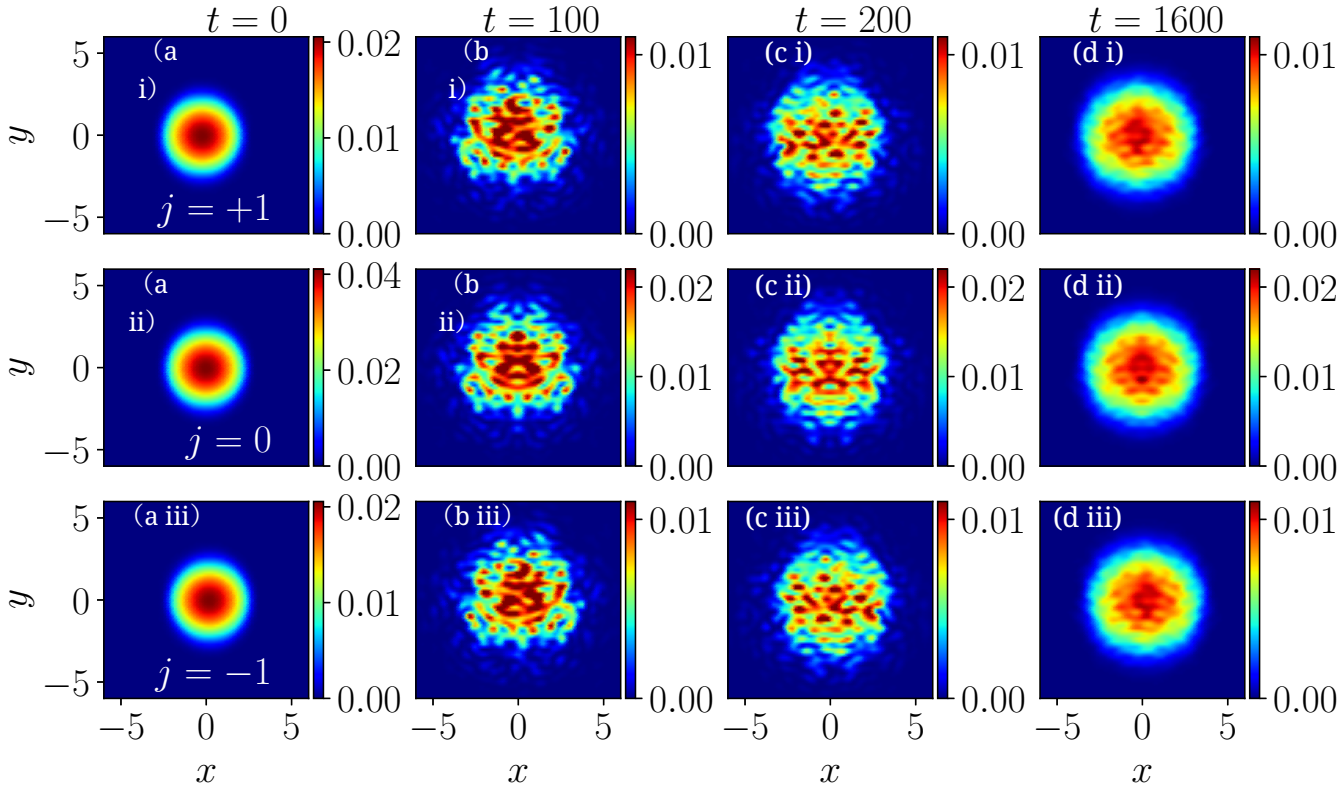

图10. 面板中的伪彩色图分别表示耦合参数 $(k_L,\ \Omega)\ =(4.5,\ 0.5)$ 和相互作用强度 $c_0 = 50,\ c_2 = -2.5$ 下，时刻 $t = 100$、200、1600 的 (a) 基态密度和 (b-d) 时间演化过程中的密度分布。每列 (i–iii) 分别对应旋量分量 $|\psi_{+1}|^2$、$|\psi_0|^2$ 和 $|\psi_{-1}|^2$ 的密度。时间演化过程中，因禁势强度突然减小至原来的二分之一。

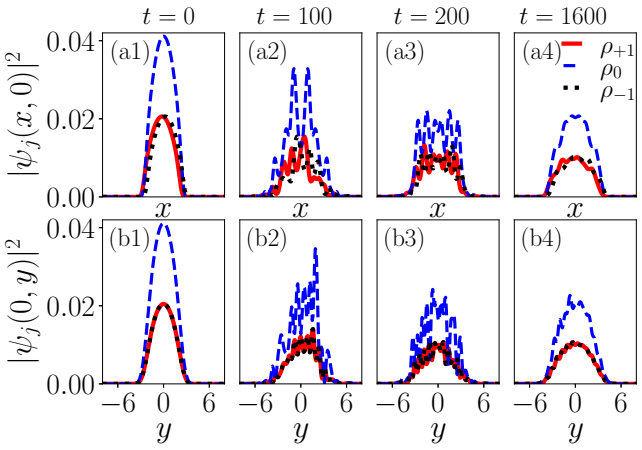

图11. (a) 基态密度分布和 (b-d) 在 $t = 100$、200、1600 时的密度分布。上排描绘沿空间方向 x 在 $y = 0$ 处的密度，下排显示沿空间方向 y 在 $x = 0$ 处的密度。耦合参数和相互作用强度与图 10 中的类似。实红线表示 $|\psi_{+1}|^2$，蓝色虚线表示 $|\psi_0|^2$，点黑线表示 $|\psi_{-1}|^2$。

在图12(b i)中，我们仅得到实的正本征频-

本征谱中低能分支和第一激发分支的频率。在 $q_y = -2.5$ 处，低能分支与第一激发分支之间发生避免交叉。由于本征频率均为实数，在图 12(b ii) 中，本征矢呈现出类密度模，满足式 13 所示的判据。在避免交叉处，本征矢在 $q_y = -2.5$ [60] 处发生翻转。在 $|u_{+1}|^2_{ll}$ 和 $|v_{+1}|^2_{ll}$ 的 $q_x \approx 0$处也出现了类似折 kink 状结构。本征矢的第零分量独立呈现类密度模 [图12(b iii)]。

在图13中，我们报告了耦合参数 $(k_L, \Omega)\ =(4.0,$ 0.0) 且相互作用强度为 $c_0 = 50.0$ 和 $c_2 = -2.5$时的集体激发谱。上图展示了本征值谱随准动量 q_x 的变化，下图则展示了沿 q_y 方向的谱。在图13(a i)中，对于 $q_x \in [0, 3.30]$，本征谱的低能分支呈现出多条带状虚本征频率，其能带振幅为2.93；对于$q_x \in [6.26, 8.74]$，能带振幅为4.74。在本征谱的第一激发分支中，当准动量范围为 $q_x \in [0, 3.30]$ 时，我们发现存在单条带不稳定性，其能带振幅为2.93。这是本征谱低能分支与第一激发分支之间出现不稳定的避免交叉所致 [27, 67]。其位置和振幅与

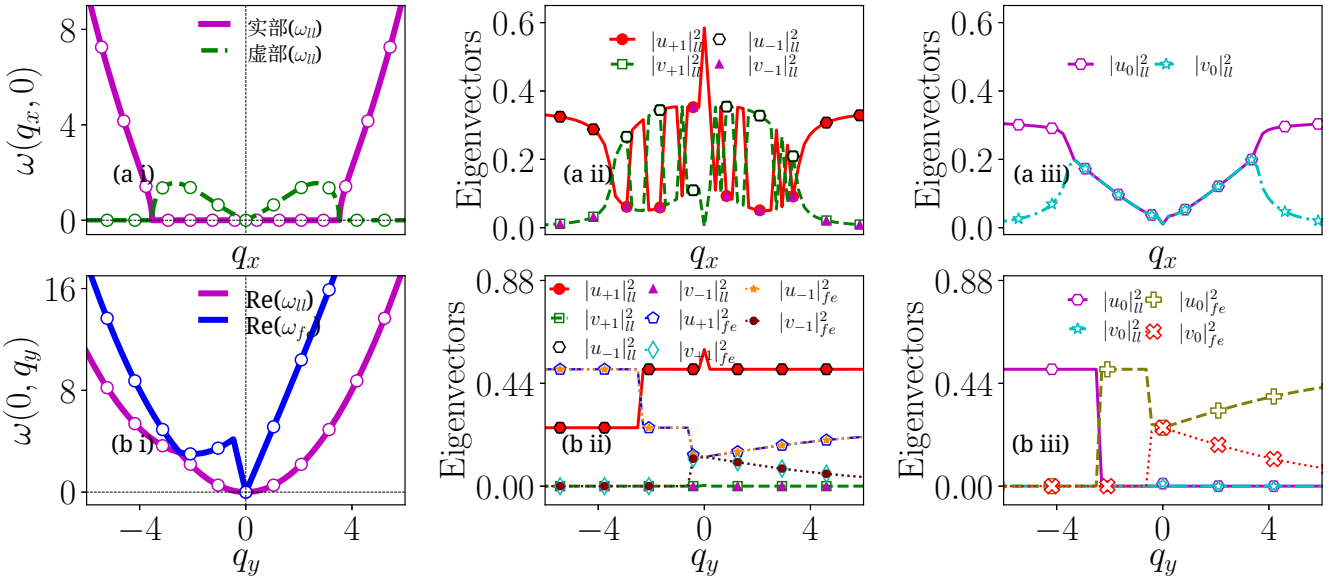

图12. 集体激发谱(a i)和(b i)，以及对应的本征矢(a ii, a iii)和(b ii, b iii)，对应于$k_L = 2.0$，$\Omega \sim 0.0$，采用相互作用强度 $c_0 = 50.0$ 和 $c_2 = -2.5$ 以及准动量方向 q_x 和 q_y，依次对应。顶部行和底部行中的线型和符号遵循图3中的相同约定。

低能分支上第一能带的位置和振幅相近。图13(a ii)中的相应本征矢分量显示，按照式15给出的判据，由于存在虚本征频率，出现了类自旋模。在$q_x \in [0, 3.30]$的不稳定避免交叉点处，低能分支和第一激发分支的本征矢分量彼此之间以及相互之间均为反相。与前一种情况类似，在 $|u_{+1}|^2_{ll}$ 和 $|v_{+1}|^2_{ll}$ 中，$q_x \approx 0$处出现了折 kink 状结构。低能分支和第一激发分支的第零分量分别呈现类密度模 [图13(a iii)]。在底排中，图13(b i)展示了沿准动量方向 q_y 的本征谱。低能分支和第一激发分支均仅呈现实本征频率。在这两个分支之间，$q_y = -1.09$处出现避免交叉，且低能分支出现负本征值。负激发的存在导致凝聚体发生能量不稳定性 [42]。图13(b ii)中的相应本征矢分量显示，低能分支和第一激发分支均呈现类密度模。在 $|u_{+1}|^2_{ll}$ 和 $|v_{+1}|^2_{ll}$ 中，$q_x \approx 0$处出现折 kink 状结构。在避免$q_y = -1.09$点处，两个分支的本征矢分量均发生翻转。本征矢的第零分量分别呈现类密度模 [图13(b iii)]。该区域始终处于动力学不稳定状态；然而，在更高的自旋轨道耦合强度下，系统在能量和动力学上均不稳定 [图7(d)]。

b. 数值模拟： 本节针对区域 III 展示数值模拟，重点研究两组参数：(k_L，Ω) =(2.0，0.0) 和 (4.0，0.0)，相互作用强度为 $c_0 = 50$ 和 $c_2 = -2.5$。首先，我们报告 $k_L = 2.0$ 在无拉比耦合（$\Omega = 0$）情况下的数值模拟结果。在图 14（a i–a iii）中，我们获得了基态密度分布，该状态在圆周方向上具有高度不对称性。在不存在拉比耦合强度时，对于上述自旋轨道耦合强度，条纹相同样存在，但它是凝聚体的激发态 [33, 49]。为研究淬火动力学，我们将陷阱强度骤然降低至初始值的一半。随着时间演化，凝聚体形状发生变形，并在 $t = 100$ 和 200 个单位时间 [的图 14（b i–b iii、c i–c iii）]中各组分内分裂成若干小畴。在更晚的时刻（$t = 1600$ 个单位时间），如图 14（d i–d iii）所示，各组分的密度 $\rho_{\pm 1}$ 振幅减小，并开始出现条纹状图案 [65, 66]。

接下来，我们考察区域 III 中耦合参数为(k_L，Ω) = (4。0，0。0的第二个点。最初得到的基态密度分布呈圆形不对称。与上述情况类似，在此处提及的自旋轨道耦合存在而拉比耦合不存在时，也存在条纹相，但它同样是一个激发态 [33, 49]。与之前一样，我们将陷阱强度突然减半，以研究凝聚体的动力学。由于图13(a i)中的本征谱包含虚本征频率，凝聚体在演化过程中碎裂成若干较小的畴。经过 $t = 100$个单位后，所有分量中都已出现碎裂，并且在更晚的时刻变得更加明显（$t = 200$ 个单位）。在稍后的时刻，即 $t = 1600$ 个单位时，零分量的密度降低，系统在各分量中呈现出强烈的碎裂结构（此处未展示）。

现在，我们报告凝聚体在区域 III 中时间演化期间的总能量——

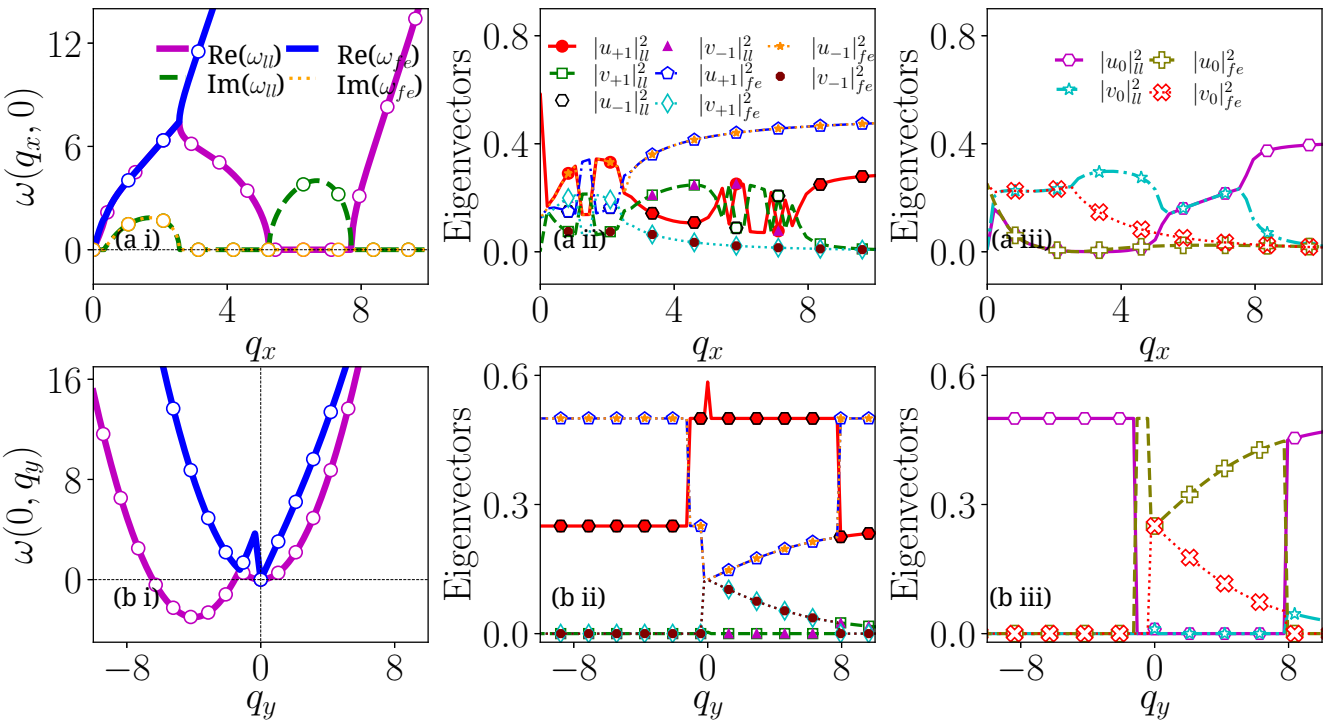

图13。（a i、b i）本征值谱，以及（a ii、a iii、b ii、b iii）对应的本征矢量，用于 $k_L = 4.0$ 在静态极限（$\Omega = 0$）下，相互作用强度为 $c_0 = 50.0$ 和 $c_2 = -2.5$。谱和本征矢量分别绘制为准动量 q_x 和 q_y的函数。顶行和底行中的线型与符号遵循与图9相同的约定。

对于上述点（k_L，Ω）=（2.0，0.0）和（4.0，0.0）。首先，我们考虑 $k_L = 2.0$，$\Omega = 0.0$。能量从$E = -0.31$ 开始，初始为 $t = 0$ 个单位。陷阱强度淬火后，在时间演化过程中，凝聚体的能量弛豫至较低值，在 $t = 1600$ 个单位时达到 $E = -0.64$（此处未显示）。在区域中的另一个点，凝聚体的总能量表现不同；在那里我们考虑（k_L，Ω）=（4.0，0.0）。凝聚体的能量从 $E = -6.4$ 开始，在$t = 0$ 个单位时达到该值。它与前一个点类似地开始下降，在 $t = 253$ 个单位时达到 $E = -6.6$，并保持平坦直至 $t = 1165.75$ 个单位。随后能量再次上升，在 $t = 1600$ 个单位时达到更高值 $E = -3.7$（此处未显示）。

VI. 反铁磁相互作用下的集体激发

到目前为止，我们着重对铁磁相互作用下 k_L –Ω 平面中的稳定性进行了分析，并确定了稳定区域 I 和不稳定的区域 II，后者又细分为 IIa 和 IIb。我们还将零拉比耦合（$\Omega = 0$）对应的线定义为区域 III，该区域始终不稳定。对于 $\Omega \sim 0$，我们最近报道了单维自旋轨道耦合自旋-1玻色-爱因斯坦凝聚体中超条纹的出现并存在反铁磁相互作用 [29]。在此，我们将研究扩展至二维自旋-1玻色-爱因斯坦凝聚体。对于反铁磁相互作用的情况，我们现在考察拉比耦合为零、具有两种不同自旋轨道耦合强度 $k_L = 2.0$ 和 4.0，且相互作用强度为 $c_0 = 50$ 和 $c_2 = 2.5$ 的情形。这些参数选择对应于反铁磁相互作用；当 $\Omega = 0$ 时，基态形成超条纹（类超固态）相 [49]。由于有限拉比耦合往往会抑制该相，将分析限制在 $\Omega = 0$ 可使我们着重考察系统不受拉比耦合诱导的混合影响时的内禀行为。

Case (i): $k_L = 2.0, \Omega = 0.0$

我们首先考虑相互作用强度为 $c_0 = 50, c_2 = 2.5$ 的反铁磁区域。首先聚焦于不存在拉比耦合（$\Omega = 0.0$）时的自旋轨道耦合强度 $k_L = 2.0$，并展示相应的集体激发谱和凝聚体动力学。

a. 集体激发：在图15中，我们报告了耦合参数（k_L，Ω）=(2.0,0.0）对应第一组参数下的本征值谱，相互作用强度为 $c_0 = 50$，$c_2 = 2.5$。在图15(a)中，我们展示了沿准动量方向q_x的激发谱。本征谱揭示了低能分支中的多带不稳定性

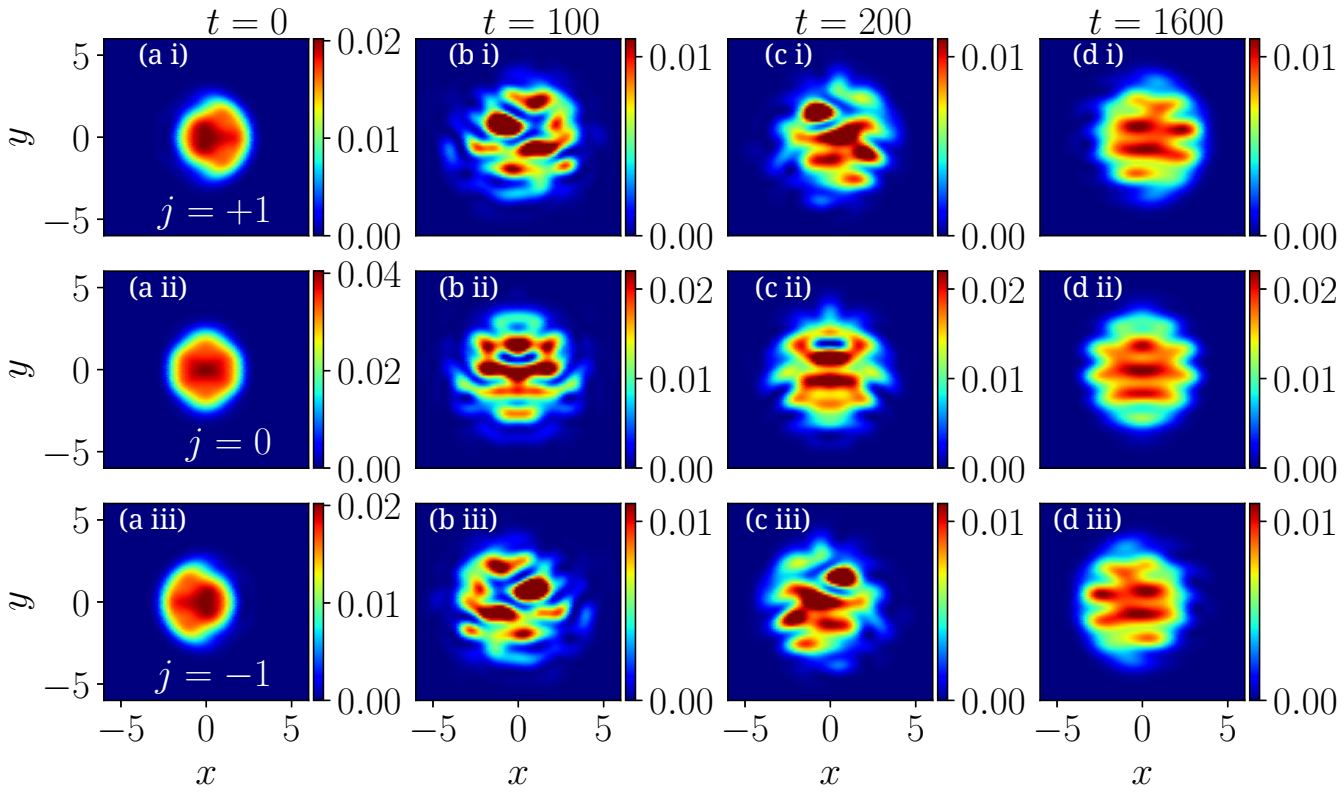

图1 4. 基态和时间演化密度的伪彩色图。(a) 基态呈圆形非对称的密度分布。(b–d) 分别为时间 $t = 100$、200、和 1600 时的密度演化。列 (i)–(iii) 分别对应旋量分量 $j = +1$、0和 -1。参数：晶格耦合 (k_L, Ω) =(2。0，0。0)，相互作用强度为 $c_0 = 50$、$c_2 = -2.5$。

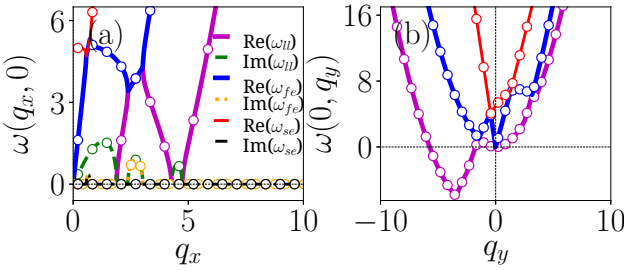

图1 5. 集体激发谱随 (a) 准动量 q_x 和 (b) 准动量 q_y 的变化。参数为晶格耦合强度 $k_L = 2.0$、拉比频率 $\Omega = 0.0$ 和相互作用强度 $c_0 = 50$、 $c_2 = 2.5$。洋红色实线、蓝色实线和红色细线分别表示 Re(ω_{ll})、Re(ω_{fe}) 和 Re(ω_{se})；绿色虚线、橙色点线和黑色点划线表示虚部的相应模值 |Im(ω)|。沿 q_x 出现具有旋子极小值的多带不稳定性，而沿 q_y 可观察到负激发频率。

其位置和振幅分别为（q_x， ω） =(1.29, 1.578)、(2.70,0.920)和(4.50, 0.715)。在三个虚频中，第三条能带表现出旋子不稳定性，其中 Re(ω_{ll}) $\approx$ 0 且 Im(ω_{ll}) $\neq$ 0 [40, 68]。在第一激发分支中本征谱中，我们在$q_x = 0.67$，2.70处得到双带不稳定性，其振幅为 $\omega = 0.352$，0.920。第二个不稳定带是本征谱中低能分支与第一激发分支重叠的结果；上文在铁磁相互作用中也讨论过这一现象，我们将其定义为不稳定的避免交叉。第一个不稳定带则是本征谱中第一激发分支与第二激发分支重叠的结果。因此，第二激发分支仅呈现一个不稳定带，位于 $q_x = 0.67$处，振幅为 $\omega = 0.352$。第一激发分支与第二激发分支之间的重叠定义为双重不稳定避免交叉 [28, 69]。本征谱中不稳定带的分布关于 q_x对称。

在图15(b)中，我们展示了沿准动量方向 q_y的集体激发谱。我们只得到实本征频率；然而，分支之间的能隙在若干点处闭合。低能分支与第一激发分支之间的能隙在 $q_y = -1.44$和3.16处闭合，而第一激发分支与第二激发分支之间的能隙则在 $q_y = -0.43$ 和1.26处闭合。低能分支在 $q_y = -3.45$处出现了大小为 $\omega = -5.95$ 的负本征频率，这导致了凝聚体 [42]的能量不稳定性。

在图 16中，我们展示了与本征值谱对应的本征矢——

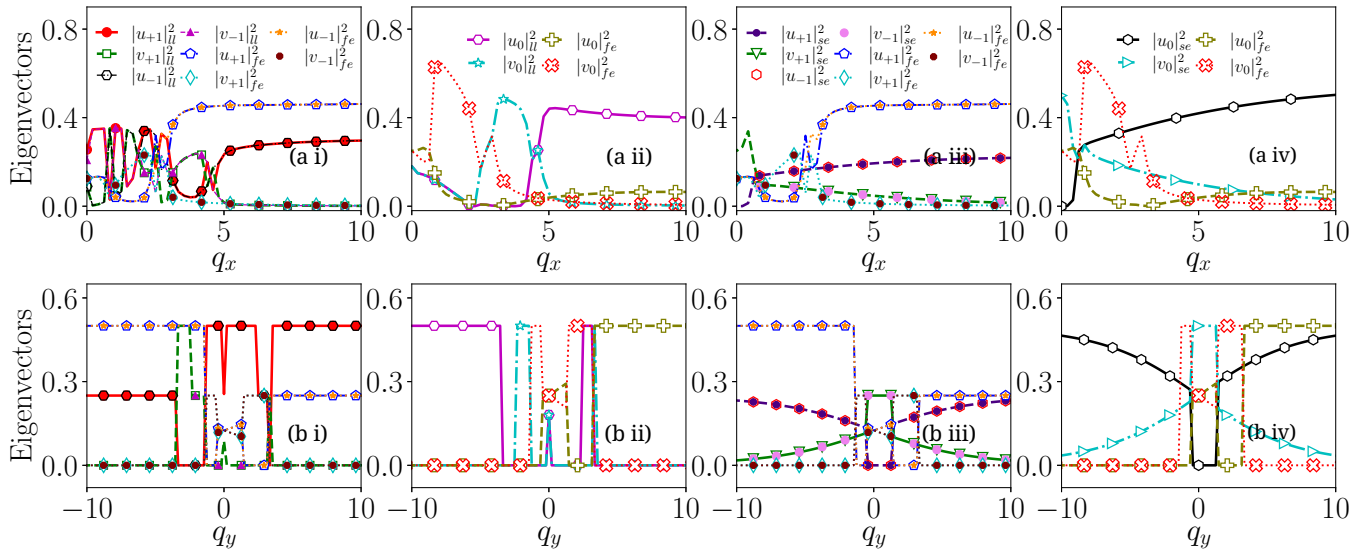

图 16. 准动量方向 (ai–a iv) q_x 和 (b i–b iv) q_y上的激发分支的本征矢分量，对应于图 15 中的本征值。对于每个分支，使用不同标记显示振幅平方 $|u_m|^2$和 $|v_m|^2$（其中 $m = 0$、±1）。低能分支：$|u_{+1}|^2_{ll}$（红色空心圆）、$|u_{-1}|^2_{ll}$（黑色菱形）、$|u_0|^2_{ll}$（洋红色空心六边形）、$|v_0|^2_{ll}$（青色空心星形）、$|v_{+1}|^2_{ll}$（绿色空心方形）、$|v_{-1}|^2_{ll}$（洋红色三角形）。第一激发分支：$|u_{+1}|^2_{fe}$（蓝色空心五边形）、$|u_{-1}|^2_{fe}$（橙色星形）、$|u_0|^2_{fe}$（橄榄色空心加号）、$|v_0|^2_{fe}$（红色空心叉号，点线）、$|v_{+1}|^2_{fe}$（青色空心菱形）、$|v_{-1}|^2_{fe}$（栗色点）。第二激发分支：$|u_{+1}|^2_{se}$（靛蓝色点）、$|u_{-1}|^2_{se}$（红色六边形）、$|u_0|^2_{se}$（黑色六边形）、$|v_0|^2_{se}$（青色左指三角形）、$|v_{+1}|^2_{se}$（绿色空心倒三角形）、$|v_{-1}|^2_{se}$（紫罗兰色点）。

该本征值谱见图15。顶排展示了图 15(a) 中沿准动量方向 q_x对应的本征矢，底排展示了图 15(b) 中沿准动量方向 q_y对应的本征矢。沿着 q_x，在图 16(a i) 中，低能分支和第一激发分支的本征矢呈现类自旋模，并满足式 15给出的判据，这是由于本征谱中存在虚本征频率。低能分支在准动量范围 $q_x \in [0.0, 1.87]$、$[2.37, 3.04]$、$[4.27, 4.72]$内呈现类自旋模，而第一激发分支则在 $q_x \in [0.56, 0.77]$、$[2.37, 3.04]$处呈现类自旋模。在不稳定的避免交叉点 $q_x \in [2.37, 3.04]$，本征矢分量彼此之间以及与另一参与分支之间均存在相位差。在图 16(a ii) 中，低能分支和第一激发分支的第零分量分别呈现类密度模。由于第二激发分支的本征谱中存在虚本征频率，这是其与第一激发分支发生不稳定避免交叉所致，因此我们报告了这两个分支的本征矢。在图 16(a iii) 中，在准动量范围 $q_x \in [0.56, 0.77]$对应的不稳定避免交叉点处，本征矢分量呈现类自旋模，这是由于本征谱中存在虚本征频率，并且符合以下判据：

$$|u_{+1}|^2_{se} - |u_{-1}|^2_{se} \neq 0, \quad |v_{+1}|^2_{se} - |v_{-1}|^2_{se} \neq 0,$$
$$|u_{+1}|^2_{fe} - |u_{-1}|^2_{fe} \neq 0, \quad |v_{+1}|^2_{fe} - |v_{-1}|^2_{fe} \neq 0. \quad (16)$$

在图 16(a iv) 中，低能分支和第一激发分支的第零分量分别呈现类密度模。沿 q_y 方向，在图 16(b i) 中，谱 $q_y = -1.46$ 和 $q_y = 3.16$中低能分支和第一激发分支的本征矢分量在避免交叉点 [60]处均发生翻转。然而，由于存在实本征频率，本征矢分量呈现类密度模，符合式 13给出的判据。在图 16(b ii) 中，本征矢的第零分量独立地表征类密度模。与 q_x 方向类似，此处我们也分别报告第二激发分支和第一激发分支的本征矢，这是由于二者之间存在避免交叉。在避免交叉点 $q_y = -0.43$ 处，且 1.26 [图16(b iii)]中谱 [60]的第一激发分支和第二激发分支的本征矢分量均发生翻转。然而，由于仅存在实本征频率，本征矢分量呈现类密度模，遵循如下关系，

$$|u_{+1}|^2_{se} - |u_{-1}|^2_{se} = 0, \quad |v_{+1}|^2_{se} - |v_{-1}|^2_{se} = 0,$$
$$|u_{+1}|^2_{fe} - |u_{-1}|^2_{fe} = 0, \quad |v_{+1}|^2_{fe} - |v_{-1}|^2_{fe} = 0. \quad (17)$$

本征矢的第零分量独立地描绘了类密度模 [图 16（b iv）]。

b. 数值模拟：本节介绍了如何通过数值模拟生成凝聚态的基态密度分布，并研究其淬火动力学；所用耦合强度为（k_L，Ω）=(2.0，0.0)，相互作用强度为 $c_0 = 50$、$c_2 = 2.5$。

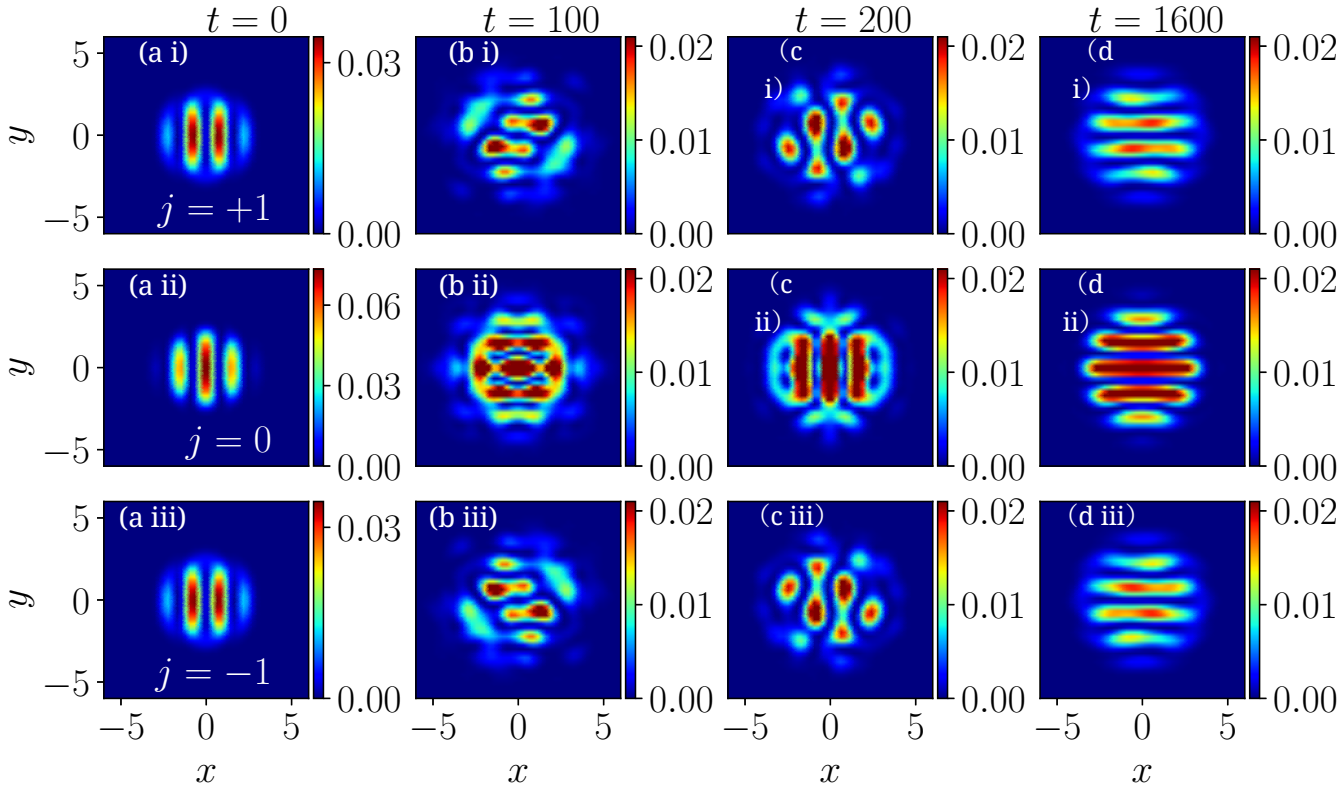

图17. 自旋-1系统凝聚体密度的伪彩色图。(a) 展示超条纹相的基态密度分布；(b–d) 分别展示动力学演化至 $t = 100$、200 和 1600（任意单位）时的密度分布。在每个子图中，(i)、(ii) 和 (iii) 列分别对应 $m_F = +1$、0 和 -1 旋量分量。系统参数固定为 $k_L = 2.0$、$\Omega = 0.0$，相互作用强度为 $c_0 = 50$、$c_2 = 2.5$。

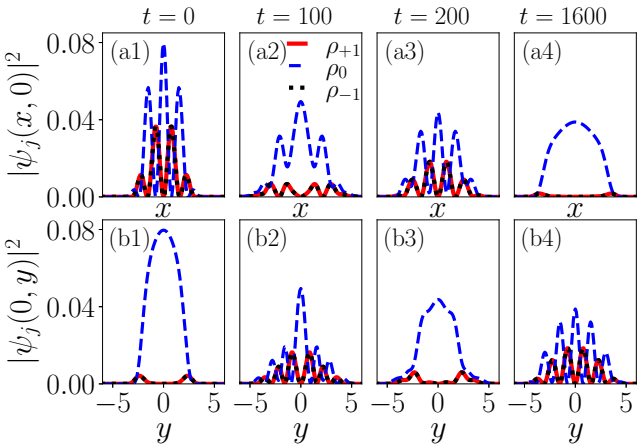

图18. (a1, b1) 基态密度分布。(a2–a4, b2– b4) 演化时间为 $t = 100$、200 和 1600 （任意单位）时的密度分布。上排显示在 x方向上、 $y = 0$处的密度；下排显示在 y方向上、 $x = 0$ 处的密度。耦合参数和相互作用强度与图17相同。实红线表示 $|\psi_{+1}|^2$，蓝色虚线表示 $|\psi_0|^2$，点黑线表示 $|\psi_{-1}|^2$。

在图17(a i-a iii)中，我们展示了基态密度分布，对应于拉什巴型自旋轨道耦合凝聚体中的超条纹相。三个旋量分量，即 $m_F = +1$、0、 -1，均参与了这一相。其中 $m_F = \pm 1$ 分量呈现重叠行为，而 $m_F = 0$ 则填充峰值和谷值，从而形成观测到的密度调制 [32, 49]。为进行淬火动力学研究，我们将陷阱强度（λ）降至原值的一半（$\lambda/2$）。在图17(b i-b iii)中，当 t $= 100$ 个时间单位时，凝聚体密度内部出现微弱调制，轮廓开始分裂成若干亮斑。当达到 $t = 200$ 个时间单位时，调制图样变得更加明显。原本平滑的形状此时分裂为多个局域峰[图17(c i-c iii)]。在更晚的时刻，即 $t = 1600$ 个时间单位时，如图17(d i-d iii)所示，该态已完全重组，凝聚体的第零分量中的条纹数量增加。这表明不稳定模已经演化，并改变了整体构型。

在图18中，我们给出了图17所示密度分布的折线图。上排展示了在 x方向上 $y = 0.0$处的分布，而下排展示了在 y方向上 $x = 0.0$处的分布。沿 x方向，图18(a1) 展示了基态密度分布，对应于由全部三个旋量分量产生密度调制的超条纹相 $m_F = +1$，0，-1。在时间演化过程中，

密度开始发生畸变；超条纹图样消失，并在 $t = 100$ units[图18(a2)]时形成条纹状相。在 $t = 200$ units 时，凝聚体在空间上扩展，$m_F = 0$ 分量中的条纹数量增加，同时三个分量中均保持条纹 [图18(a3)]。在之后的 $t = 1600$units， $m_F = \pm 1$ 分量消失，而 $m_F = 0$分量形成单峰结构 [图18(a4)]。沿 y方向，图18(b1)展示了基态分布，其中 $m_F = 0$ 分量呈单峰结构，而 $m_F = \pm 1$分量呈现两个对称峰。在动力学过程中，$t = 100$ units 时出现条纹型相 [图18(b2)], ，随后 $m_F = 0$分量进一步演化为丝状形状，而 $m_F = \pm 1$ 分量在 $t = 200$ units 时仍保持对称峰 [图18(b3)]。到 $t = 1600$units 时，所有分量中都出现条纹相，且 $m_F = 0$ 分量中的条纹数量增加。这些折线图证实，不稳定模的增长会导致凝聚体构型发生改变。

我们还分析了相互作用强度为$c_0 = 50$、 $c_2 = 2.5$时，凝聚体在反铁磁区域的总能量。我们发现，对于 $k_L = 2.0$ 且 Ω =0的情况，在时间演化过程中，总能量初始值为 $E = -0.26$ ，对应的时间为 $t = 0$个单位。陷阱强度突然变化后，总能量开始下降，并在 $t = 512.50$ 个单位时达到 $E = -0.60$。此后，凝聚体的能量趋于饱和（此处未展示），这表明凝聚体具有动力学稳定性。

附录B讨论的反铁磁区域还呈现出另一个值得注意的特点：我们结合实时方案分析了集体激发。尽管激发的定性特征——例如双重不稳定避免交叉和稳定避免交叉的存在—— [见图B.1 和B.2], 与铁磁情形中的观察结果相似，但相关的不稳定性幅度以及这些现象出现时的准动量范围都显著增大。由于不稳定性增强，凝聚体动力学在早期表现出明显的密度碎裂，随后演变为两个占主导地位的密度瓣出现的构型 [见图B.3 和B.4]。

VII. 总结与结论

在本研究中，我们考察了准二维Rashba自旋–轨道耦合和Rabi耦合自旋-1玻色-爱因斯坦凝聚体的集体激发谱及动力学稳定性。我们结合Bogoliubov-de Gennes分析与淬火动力学，系统分析了铁磁和反铁磁情形下自旋–轨道耦合与相互作用之间的相互影响。

我们首先考察了单粒子谱，并指出拉比耦合会在激发谱的三个分支之间打开能隙，其中 $\omega_{\pm 1}$ 与 ω_0 之间的能隙大小为 Ω，ω_- 与 ω_+之间的能隙大小为 2Ω。最低能量（ω_-）分支会在 $\Omega < k_L^2$时，从单极小值转变为双极小值结构。尽管这一转变通常沿 q_x 方向发生，但沿 q_y 方向时，则需要自旋轨道耦合与拉比耦合同时存在，这凸显了两者之间非平凡的相互作用。

对于铁磁相互作用，集体激发谱在 k_L –Ω参数空间中呈现出丰富的结构，可根据动力学稳定性和能量稳定性划分为三个不同区域。区域I完全稳定，支持定义良好的类密度特征声子模。区域II和区域 III呈现出多种形式的动力学不稳定性，包括单带和多带不稳定性、不稳定反交叉以及maxon–罗顿特征。这些不稳定性伴随着本征矢结构的特征性变化，包括密度–自旋混合、类自旋模，以及避免交叉处的模翻转。值得注意的是，区域 III与区域II的区别在于，前者在低能分支和第一激发分支中均存在与声子模共存的不稳定性。

我们还分析了反铁磁相互作用下的集体激发与动力学。在这种情况下，谱中出现多个不稳定的避免交叉，涉及低能分支、第一激发分支和第二激发分支，从而导致多带和单带不稳定性。相应的本征模主要呈自旋型，并在避免交叉处表现出特征性的相位反转。在动力学方面，在没有拉比耦合时，系统支持一种类超固态基态，其密度调制源自全部三个自旋分量。随着自旋轨道耦合增强，不稳定性会显著改变密度分布，在中等耦合强度下促进条纹形成，并在更大耦合强度下使系统碎裂为彼此分离的空间叶瓣。

综上，我们的研究建立了一个统一图景，揭示Rashba自旋轨道耦合、拉比耦合和自旋相关相互作用如何共同塑造自旋-1凝聚体的激发谱与非平衡动力学。对于铁磁和反铁磁相互作用，动力学不稳定性都与激发谱中避免交叉的结构以及相应本征模特征的演变密切相关。实时动力学始终印证了这些谱特征：不稳定模会在实验可及时间尺度内促成图样形成、密度调制和碎裂。特别是对于反铁磁情形，我们展示了增强的不稳定性振幅和扩大的不稳定动量范围如何促成类超固态结构的出现。

本研究为未来研究提出了几个颇具前景的方向。首先，探索不同的物理几何结构和相互作用，例如三维约束、各向异性自旋轨道耦合

或引入长程偶极相互作用 [70], ，可能会揭示新的不稳定机制和涌现序，包括携带超流电流的超固态相 [71], 。其次，采用Floquet工程使自旋轨道耦合和拉比耦合随时间变化，可为动态调控非平衡相，并探测其在自旋-1玻色–爱因斯坦凝聚体中的实验特征，提供一条有力途径 [72]。最后，考察当前零温平均场模型之外的效应，尤其是三体相互作用 [73]和有限温度涨落 [40] 对集体激发谱和相稳定性的影响，对于将这些理论发现与现实实验条件联系起来至关重要。

致谢

我们衷心感谢 Param-Ishan 和 ParamKamrupa 超级计算设施（IITG），所有数值模拟均在此完成。S.K.G 谨此致谢，感谢印度教育部（MoE）提供的研究奖学金。P.M. 感谢印度教育部通过 RUSA 2.0（巴拉蒂达桑大学 – 物理科学）提供的支持。

附录 A：集体激发的 BdG矩阵相关项

在本附录中，我们给出第 9 式中 BdG矩阵的矩阵元的显式形式，该矩阵用于第 IV 节。

第 9 式的矩阵元为

$$H_+ = \frac{q_x^2+q_y^2}{2} + c_0(2\phi_{+1}^2+\phi_0^2+\phi_{-1}^2) + c_2(2\phi_{+1}^2+\phi_0^2-\phi_{-1}^2) \tag{A1a}$$

$$H_0 = \frac{q_x^2+q_y^2}{2} + c_0(\phi_{+1}^2+2\phi_0^2+\phi_{-1}^2) + c_2(\phi_{+1}^2+\phi_{-1}^2) \tag{A1b}$$

$$H_- = \frac{q_x^2+q_y^2}{2} + c_0(\phi_{+1}^2+\phi_0^2+2\phi_{-1}^2) + c_2(2\phi_{-1}^2+\phi_0^2-\phi_{+1}^2) \tag{A1c}$$

$$\mu_+\phi_{+1} = c_0(\phi_{+1}^2+\phi_0^2+\phi_{-1}^2)\phi_{+1} + c_2(\phi_{+1}^2+\phi_0^2-\phi_{-1}^2)\phi_{+1} + c_2\phi_0^2\phi_{-1}^* + \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\phi_0 \tag{A1d}$$

$$\mu_0\phi_0 = c_0(\phi_{+1}^2+\phi_0^2+\phi_{-1}^2)\phi_0 + c_2(\phi_{+1}^2+\phi_{-1}^2)\phi_0 + 2c_2\phi_0^*\phi_{+1}\phi_{-1} + \frac{\Omega}{\sqrt{2}}(\phi_{+1}+\phi_{-1}) \tag{A1e}$$

$$\mu_-\phi_{-1} = c_0(\phi_{+1}^2+\phi_0^2+\phi_{-1}^2)\phi_{-1} + c_2(\phi_{-1}^2+\phi_0^2-\phi_{+1}^2)\phi_{-1} + c_2\phi_0^2\phi_{+1}^* + \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\phi_0 \tag{A1f}$$

$\mathcal{L}_{12} = C^+\phi_{+1}^2$; $\mathcal{L}_{13} = C^+\phi_0^*\phi_{+1} + \frac{k_L}{\sqrt{2}}(iq_x+q_y) + 2c_2\phi_0\phi_{-1}^* + \Omega\sqrt{2}$; $\mathcal{L}_{14} = C^+\phi_0\phi_{+1}$; $\mathcal{L}_{15} = C^-\phi_{-1}^*\phi_{+1}$
$\mathcal{L}_{16} = C^-\phi_{-1}\phi_{+1} + c_2\phi_0^2$; $\mathcal{L}_{21} = -C^+\phi_{+1}^{*2}$; $\mathcal{L}_{23} = -C^+\phi_0^*\phi_{+1}^*$; $\mathcal{L}_{24} = -C^+\phi_0\phi_{+1}^* + \frac{k_L}{\sqrt{2}}(-iq_x+q_y) - 2c_2\phi_0^*\phi_{-1} - \Omega\sqrt{2}$; $\mathcal{L}_{25} = -C^-\phi_{-1}^*\phi_{+1}^* - c_2\phi_0^{*2}$; ; $\mathcal{L}_{26} = -C^-\phi_{-1}\phi_{+1}^*$; $\mathcal{L}_{31} = C^+\phi_{+1}^*\phi_0 + 2c_2\phi_0^*\phi_{-1} + \frac{k_L}{\sqrt{2}}(-iq_x+q_y) + \Omega\sqrt{2}$;
$\mathcal{L}_{32} = C^+\phi_{+1}\phi_0$; $\mathcal{L}_{34} = c_0\phi_0^2 + 2c_2\phi_{+1}\phi_{-1}$; $\mathcal{L}_{35} = C^+\phi_{-1}^*\phi_0 + 2c_2\phi_0^*\phi_{+1} + \frac{k_L}{\sqrt{2}}(iq_x+q_y) + \Omega\sqrt{2}$; $\mathcal{L}_{36} = C^+\phi_{-1}\phi_0$;
$\mathcal{L}_{41} = -C^+\phi_{+1}^*\phi_0^* \mathcal{L}_{42} = -C^+\phi_{+1}\phi_0^* + \frac{k_L}{\sqrt{2}}(iq_x+q_y) - 2c_2\phi_0\phi_{-1}^* - \Omega\sqrt{2}$; $\mathcal{L}_{43} = -c_0\phi_0^{*2} - 2c_2\phi_{+1}^*\phi_{-1}^*$;
$\mathcal{L}_{45} = -C^+\phi_{-1}^*\phi_0^*$; $\mathcal{L}_{46} =$
$\mathcal{L}_{53} = C^+\phi_0^*\phi_{-1} + \frac{k_L}{\sqrt{2}}(-iq_x+q_y) + 2c_2\phi_0\phi_{+1}^* + \Omega\sqrt{2}$; $\mathcal{L}_{54} = C^+\phi_0\phi_{-1}$; $\mathcal{L}_{56} = C^+\phi_{-1}^2$;
$\mathcal{L}_{61} = -C^-\phi_{+1}^*\phi_{-1}^* - c_2\phi_0^{*2}$; $\mathcal{L}_{62} = -C^-\phi_{+1}\phi_{-1}^*$; $\mathcal{L}_{63} = -C^+\phi_0^*\phi_{-1}^*$; $\mathcal{L}_{64} = -C^+\phi_0\phi_{-1}^* + \frac{k_L}{\sqrt{2}}(iq_x+q_y) - 2c_2\phi_0^*\phi_{+1} - \Omega\sqrt{2}$; $\mathcal{L}_{65} = -C^+\phi_{-1}^{*2}$.此外,

$$C^+ \equiv c_0 + c_2,\ C^- \equiv c_0 - c_2$$

BdG特征方程（11）的系数如下：

$$b = 0, \tag{A2}$$

$$c = \frac{1}{16}\Big(-4(q_x^2+q_y^2)(3(q_x^2+q_y^2)+8k_L^2) - 48(q_x^2+q_y^2)\Omega - 80\Omega^2 + 4c_0^2 + 4c_2(q_x^2+q_y^2+26\Omega) - 61c_2^2 - 8c_0(q_x^2+q_y^2-2\Omega+c_2)\Big) \tag{A3}$$

$$d = \frac{1}{2}k_L q_y\Big(-8\Omega(q_x^2+q_y^2+2\Omega) - 2c_0^2 + c_0(4(q_x^2+q_y^2+\Omega)-3c_2) + (12(q_x^2+q_y^2)+26\Omega-7c_2)c_2\Big) \tag{A4}$$

$$\begin{aligned} e = \frac{1}{32}\Big(&2(3(q_x^2+q_y^2)^4 + 16(q_x^2+q_y^2)^2k_L^4 + 24(q_x^2+q_y^2)^3\Omega + 8(9(q_x^2+q_y^2)^2 - 4(q_y-q_x)(q_y+q_x)k_L^2)\Omega^2 \\ &+ 96(q_x^2+q_y^2)\Omega^3 + 64\Omega^4) + 4c_0^3(q_x^2+q_y^2+2\Omega-2c_2) - 4((q_x^2+q_y^2)^3 - 2(q_y^2-5q_x^2)(q_x^2+q_y^2)k_L^2 \\ &+ 6(q_x^2+q_y^2)^2\Omega + 4(-13q_y^2+17q_x^2)k_L^2\Omega + 10(q_x^2+q_y^2)\Omega^2 + 52\Omega^2)c_2 - (15q_y^4 + 15q_x^4 - 236\Omega^2 + 4q_x^2(-32k_L^2+29\Omega) \\ &+ 2q_y^2(15q_x^2+52k_L^2+58\Omega))c_2^2 + (71(q_x^2+q_y^2)-210\Omega)c_2^3 + 96c_2^4 - 4c_0^2(3q_y^4 + (q_x^2+4\Omega)(3q_x^2+4\Omega) \\ &+ 2q_y^2(3q_x^2-2k_L^2+8\Omega) + 2c_2(-6(q_x^2+q_y^2+2\Omega)+5c_2)) + c_0(8((q_x^2+q_y^2)^3 - 2(q_y^2-2q_x^2)(q_x^2+q_y^2)k_L^2 \\ &+ 2(3(q_x^2+q_y^2)^2 + 2q_y^2k_L^2)\Omega + 10(q_x^2+q_y^2)\Omega^2 - 4\Omega^3) + c_2(-4(9q_y^4+9q_x^4+42q_x^2\Omega - 6\Omega^2 + 2q_y^2(9q_x^2+5k_L^2+21\Omega)) \\ &+ c_2(85(q_x^2+q_y^2) - 22\Omega + 14c_2)))\Big) \end{aligned} \tag{A5}$$

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{8}q_y k_L\Big(&8\Omega(q_x^2+q_y^2+2\Omega)^3 + 2(q_x^2+q_y^2+2\Omega)^2c_0^2 - 2(6(q_x^2+q_y^2)^3 + (37(q_x^2+q_y^2)^2 + 8q_x^2k_L^2)\Omega + 76(q_x^2+q_y^2)\Omega^2 \\ &+ 52\Omega^3)c_2 + (7q_y^4 + 7q_x^4 + 28\Omega^2 + 14q_y^2(q_x^2+2\Omega) + 4q_x^2(8k_L^2+7\Omega))c_2^2 - c_0(4((q_x^2+q_y^2)^3 + (5(q_x^2+q_y^2)^2 - 4q_x^2k_L^2)\Omega \\ &+ 8(q_x^2+q_y^2)\Omega^2 + 4\Omega^2) - 3(q_y^2+q_x^2+2\Omega)^2c_2)\Big) \end{aligned} \tag{A6}$$

$$\begin{aligned} g = \frac{1}{256}\Big(&-8(q_x^2+q_y^2+2\Omega)^2c_0^3(q_x^2+q_y^2+2\Omega-2c_2) + 4(q_x^2+q_y^2+2\Omega)c_0^2((q_x^2+q_y^2+2\Omega)(5q_x^4+5q_y^4+28\Omega^2 \\ &+ 4q_x^2(-4k_L^2+7\Omega) + 2q_y^2(5q_x^2-4k_L^2+14\Omega)) - 8(3q_y^4+3q_x^4-4q_x^2(k_L^2-3\Omega)+12\Omega^2+6q_y^2(q_x^2+2\Omega))c_2 \\ &+ 20(q_x^2+q_y^2+2\Omega)c_2^2) - 2c_0(4(q_x^2+q_y^2+2\Omega)((q_x^2+q_y^2)(q_y^2+q_x(q_x-2k_L))(q_x^2+q_y^2-4k_L^2)(q_y^2+q_x(q_x+2k_L)) \\ &+ 12(q_x^2+q_y^2)(q_y^2+q_x(q_x-2k_L))(q_y^2+q_x(q_x+2k_L))\Omega + 4(11(q_x^2+q_y^2)^2 + 4(q_y^2-3q_x^2)k_L^2)\Omega^2 + 48(q_x^2+q_y^2)\Omega^3) \\ &+ c_2(8(-5(q_x^2+q_y^2)^4 - (5q_y^2-22q_x^2)(q_x^2+q_y^2)^2k_L^2 - 16q_x^4k_L^4 - (q_x^2+q_y^2)(43(q_x^2+q_y^2)^2 + 4(5q_y^2-22q_x^2)k_L^2)\Omega \\ &- (111(q_x^2+q_y^2)^2 + 4(5q_y^2-22q_x^2)k_L^2)\Omega^2 - 88(q_x^2+q_y^2)\Omega^3 + 4\Omega^4) + (q_x^2+q_y^2+2\Omega)c_2(85(q_x^2+q_y^2)^2 - 160q_x^2k_L^2 \\ &+ 148(q_x^2+q_y^2)\Omega - 44\Omega^2 + 14(q_x^2+q_y^2+2\Omega)c_2))) + (q_x^2+q_y^2+2\Omega)(-4(q_x^2+q_y^2+2\Omega)((q_x^2+q_y^2)(q_x^2+q_y^2-4k_L^2) \\ &+ 4(q_x^2+q_y^2-2q_yk_L)\Omega)((q_x^2+q_y^2)(q_x^2+q_y^2-4k_L^2) + 4(q_x^2+q_y^2-2q_yk_L)\Omega) \\ &+ c_2(4(q_x^2+q_y^2)(q_x^2+q_y^2-4k_L^2)((q_x^2+q_y^2)^2 - 8q_x^2k_L^2) - 64(q_x^2+q_y^2)((q_x^2+q_y^2)^2 + (7q_y^2-3q_x^2)k_L^2)\Omega \\ &- 16(31(q_x^2+q_y^2)^2 + 4(13q_y^2-11q_x^2)k_L^2)\Omega^2 - 704(q_x^2+q_y^2)\Omega^3 + c_2(91(q_x^2+q_y^2)^3 + 16(13q_y^2-22q_x^2)(q_x^2+q_y^2)k_L^2 \\ &+ 658(q_x^2+q_y^2)^2\Omega + 32(13q_y^2-38q_x^2)k_L^2\Omega + 724(q_x^2+q_y^2)\Omega^2 - 456\Omega^3 + 2c_2(-71q_y^4 - 142q_y^2q_x^2 \\ &- 71q_x^4 + 256q_x^2k_L^2 + 68(q_x^2+q_y^2)\Omega + 420\Omega^2 - 96(q_x^2+q_y^2+2\Omega)c_2))))\Big) \end{aligned} \tag{A7}$$

附录B：反铁磁相互作用下的集体激发

在本附录中，考虑相互作用强度$c_0 = 50$、$c_2 = 2.5$ 和自旋轨道耦合强度 $k_L = 4.0$，且不存在拉比耦合（$\Omega \sim 0.0$），我们给出反铁磁区域的集体激发及相应的基态动力学。为了扫描对于上述点的凝聚体行为，我们给出集体激发谱和淬火动力学。

a. 集体激发：图B.1展示了自旋轨道耦合强度 $k_L = 4.0$时，在无拉比耦合的情况下，沿准动量方向 $c_0 = 50$、$c_2 = 2.5$，分别对应相互作用强度 q_x和 q_y时的

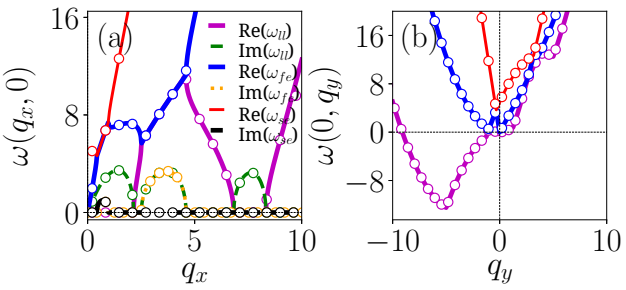

图 B.1. 沿准动量方向的本征值谱 (a) q_x 和 (b) q_y。耦合参数为 $k_L = 4.0$ 和 $\Omega = 0.0$，相互作用强度为 $c_0 = 50$ 和 $c_2 = 2.5$。线型和符号的含义与图 15相同。

准动量方向 q_x上，图 B.1(a) 中，低能分支出现了三个不稳定带，其位置和幅值（q_x， ω） =分别为 (1.42, 3.44)、(3.62, 3.44) 和 (7.61, 3.27)。第二个不稳定带源于与第一激发分支的重叠，表现为不稳定的避免交叉。此时，第一激发分支也出现了一个幅值相同的不稳定带。在第一激发分支中，第二个不稳定带出现在它与第二激发分支重叠时，位置为 $q_x = 0.68$，幅值为 $\omega = 1.01$。该不稳定带为第一和第二激发分支所共有，对应于双重不稳定避免交叉 [69]。这是本征谱的第二激发分支中唯一出现的不稳定带。

沿准动量方向 q_y，在图B.1(b)中，谱的三个分支均只有实本征频率。然而，谱的低能分支、第一激发分支和第二激发分支之间出现了避免交叉。低能分支与第一激发分支在 $q_y = -1.02$、2.63、 3.77处出现避免交叉；第一激发分支与第二激发分支在 $q_y = -0.33$、3.14处出现避免交叉。低能分支在 $\omega = -12.54$ 处$q_y = -5.05$ 发展出振幅为 [42]的激发谱负贡献。这种负激发导致凝聚体出现能量不稳定性。

在图 B.2中，我们给出了与图 B.1所示本征值谱相对应的本征矢量。顶行展示了沿准动量方向 q_x的本征矢量，而底行展示了沿准动量方向 q_y的本征矢量。沿q_x 方向，在图 B.2(a i) 中，根据式 15给出的判据，我们在低能分支和第一激发分支的本征矢分量中得到了类自旋模。在低能分支中，对于准动量范围$q_x \in [0, 2.14]$、$[2.5, 4.60]$、 $[6.80, 8.33]$，本征矢量呈现出类自旋模。对于第一激发分支，在低能分支与第一激发分支重叠的点处出现不稳定性，即$q_x \in [2.5, 4.60]$ （低能分支中的第二能带）。在该不稳定避免交叉点处，本征矢量彼此之间以及与另一分支之间均存在反相。无论 [图 B.2(aii)]如何， 本征矢量的第零分量均呈现类密度模。由于第一激发分支和第二激发分支在本征谱中表现出不稳定的避免交叉，我们还给出了这两个分支对应的本征矢量。在图 B.2(a iii) 中，根据式 16给出的判据，本征矢分量在第一激发分支和第二激发分支的准动量范围$q_x \in [0.41, 0.98]$ 内呈现类自旋模。在不稳定避免交叉点处，分支内的本征矢分量彼此反相，并且与其他分支也反相。本征矢量的第零分量独立地呈现类密度模 [图 B.2(aiv)] [28]。

沿着 q_y 方向，在图B.2(b i)中，低能分支和第一激发分支的本征矢分量呈现同相行为（类密度模），符合式13中给出的判据。在分支之间的避免交叉点处，本征矢分量发生翻转，该点位于 $q_y = -1.02, 2.63, 3.77$ [60]。本征矢的第零分量独立地表征类密度模 [图 B.2(b ii)]。这里，我们还得到了本征谱中第一激发分支和第二激发分支之间的避免交叉，并分别报告了本征矢量。在图 B.2(b iii)中，第一激发分支和第二激发分支的本征矢分量呈现类密度模，符合式17中给出的判据。在分支之间的避免交叉点处，本征矢分量发生翻转，交叉点为 $q_y = -0.33, 3.14$ [60]。本征矢的第零分量独立地表征类密度模 [图 B.2(biv)]。

b. 数值模拟：在本附录这一部分，我们在无拉比耦合（$\Omega = 0$）的情况下，考虑自旋轨道耦合强度 $k_L = 4.0$ ，且相互作用强度为 $c_0 = 50$,$c_2 = 2.5$。首先，我们生成基态密度分布，该分布对应于超条纹波相 [图 B.3(a i-a iii)]。与前文关于反铁磁相互作用的讨论类似，这种超条纹波相也表现出由凝聚体的三个旋量分量共同形成的密度调制。 $m_F = \pm 1$ 分量大部分相互重叠，而 $m_F = 0$ 分量则填充密度峰值和谷值 [32, 49]。为了研究凝聚体的动力学，我们将陷阱强度淬火至原值的一半，即 $\lambda \to \lambda/2$。在 t =100个时间单位时，主要密度峰上开始出现微小起伏，标志着碎裂的开始[图 B.3(b i-b iii)]。在 $t = 200$ 个时间单位时，密度分布不再保持规整形状。由于凝聚体中的不稳定模增长，碎裂进一步加剧 [图 B.3(c i-c iii)]。在稍后的 $t = 1600$ 个时间单位时，如图 B.3(b i-b iii) 所示，凝聚体已完全碎裂，密度分布中仅留下两个垂直叶瓣，这反映了凝聚体的动力学不稳定性 [69]。

在图B.4中，我们绘制了密度剖面的折线图

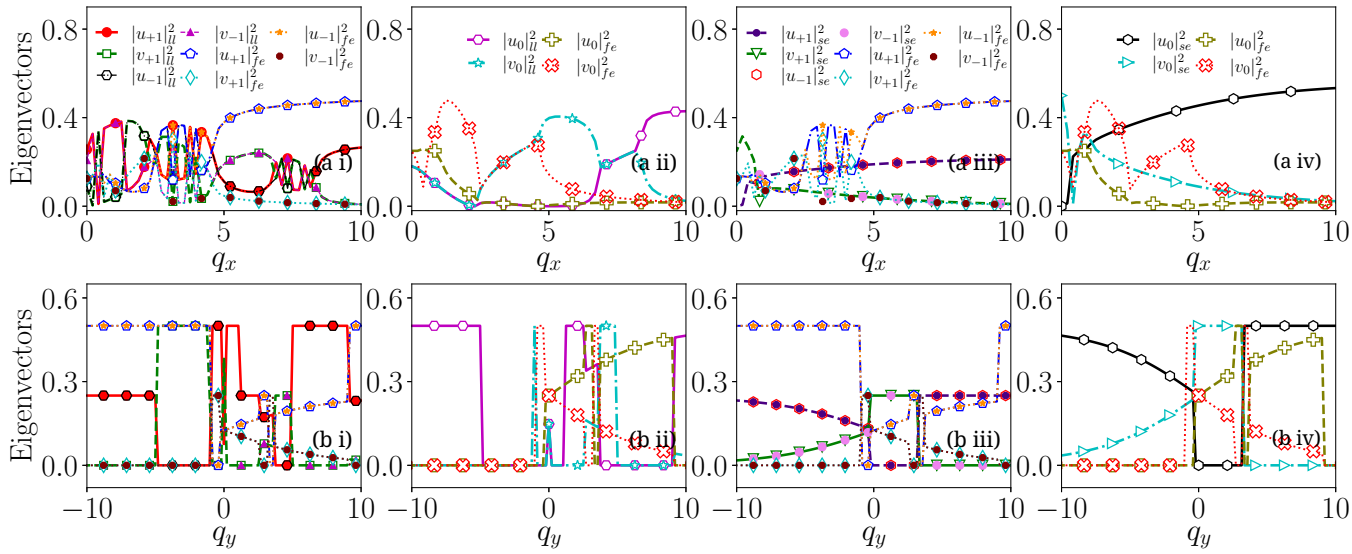

图 B.2. 对应于图 B.1的本征矢；(a i-a iv) 沿准动量方向 q_x，(b i-b iv) 沿准动量方向 q_y。线条和符号的含义与图 16中相同。

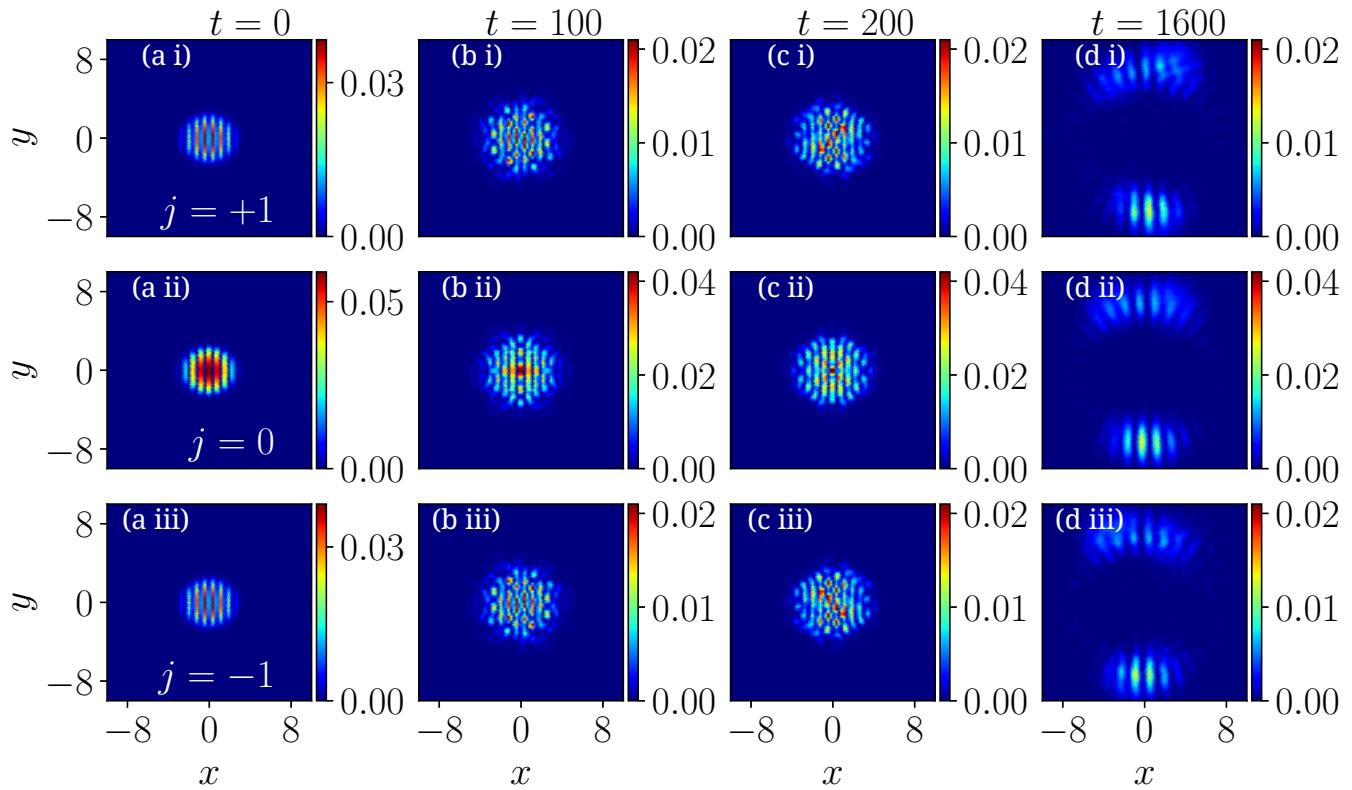

图 B.3. 自旋-1 凝聚体的密度分布。(a) 初始基态分布，显示超条纹相。(b–d) 演化时间分别为 $t = 100$、200 和 1600（模拟单位）时的动态密度分布。对于每个状态 (a–d)，三列 (i)、(ii) 和 (iii) 分别对应旋量分量 $m_F = +1$、0 和 -1。系统参数为 $k_L = 4.0$、$\Omega = 0.0$、$c_0 = 50$ 和 $c_2 = 2.5$。

对应于图B.3。在上排中，我们考察沿空间 x方向的变化，同时保持 $y = 0$不变；而在下排中，我们展示沿空间 y-保持方向 $x = 0$。在上排的图 B.4(a1) 中，我们得到具有多峰密度分布的基态密度分布，其中 $m_F = \pm 1$ 分量重叠

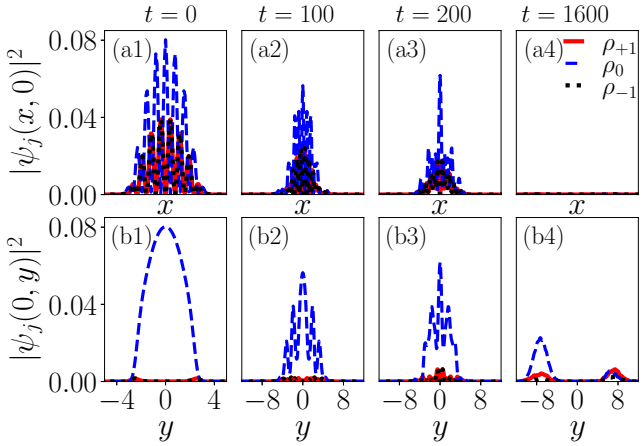

图 B.4. (a) 显示基态密度分布，(b–d) 显示时间演化过程中 $t = 100$、200、和1600 个时间单位时的密度分布。上排显示 x 方向上 $y = 0$处的密度分布，下排显示 y方向上 $x = 0$处的密度分布。耦合参数和相互作用强度与图B.3相同。线型表示旋量分量：红色实线表示 $|\psi_{+1}|^2$，蓝色虚线表示 $|\psi_0|^2$，黑色点线表示 $|\psi_{-1}|^2$。

较大，而零阶分量填充峰值和谷值，从而产生密度调制，这与.....相符

对应超条纹相。在 $t = 100$ 个时间单位的时间演化过程中，密度分布开始变形，并沿空间 [方向收缩]图 B.4(a2)= 200 。随后，它继续收缩并逐渐碎裂，在 t = 200 个时间单位时 [图 B.4(a3)]。在图 B.4(a4)所示的更晚时刻 $t = 1600$ 个时间单位时，密度分布的所有分量沿空间方向 x消失。在下排的图 B.4(b1)中，我们获得了沿空间 y方向的基态，其中 $m_F = 0$ 呈现单峰密度分布，而$m_F = \pm 1$ 呈现可忽略的双峰密度分布。在 $t = 100$ 个时间单位的动力学过程中，变形开始，三个分量均形成多峰密度分布 [图 B.4(b2)]。密度分布持续变形，在 $t = 200$个时间单位时峰的数量减少 [图 B.4(b3)]。在图 B.4(b4)所示的更晚时刻 $t = 1600$个时间单位时，三个分量均在 $y \approx 8$处形成双峰密度分布。凝聚体密度分布沿空间方向的演化行为证实了该凝聚体具有动力学不稳定性 [65, 69]。

无拉比耦合时，反铁磁相互作用（$c_0 = 50$, $c_2 = 2.5$）下凝聚体的总能量在 k_L =4。0 时，在陷阱强度淬火后呈现逐渐演化。从 $E = -6.26$ （无量纲单位）开始，在$t = 0$时，能量弛豫至较低的 $E = -6.5$ ，到$t = 213.50$ 时达到该值（数据未显示），这反映了凝聚体在其动力学演化过程中的调整。

[1] I. Bloch、J. Dalibard 和 W. Zwerger，《超冷气体中的多体物理》，《现代物理评论》80，885（2008）。[2] I. M. Georgescu、S. Ashhab 和 F. Nori，《量子模拟》，《现代物理评论》86，153（2014）。[3] M. S. Safronova、D. Budker、D. DeMille、D. F. J. Kimball、A. Derevianko 和 C. W. Clark，《利用原子和分子寻找新物理》，《现代物理评论》90，025008（2018）。[4] L. Chomaz、I. Ferrier-Barbut、F. Ferlaino、B. Laburthe-Tolra、B. L. Lev 和 T. Pfau，《偶极物理：磁性量子气体实验综述》，《物理进展报告》86，026401（2022）。[5] P. Krantz、M. Kjaergaard、F. Yan、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver，《超导量子比特工程师指南》，《应用物理评论》6，10 1063 1 5089550 2019 . / . ( )。[6] A. M. Kaufman 和 K.-K. Ni，《超冷原子和分子光镊阵列的量子科学》，《自然物理》17，1324（2021）。[7] M. H. Anderson、J. R. Ensher、M. R. Matthews、C. E. Wieman 和 E. A. Cornell，《稀薄原子蒸气中玻色–爱因斯坦凝聚的观测》，Science 269，198（1995）。[8] K. B. Davis、M. O. Mewes、M. R. Andrews、N. J. van Druten、D. S. Durfee、D. M. Kurn 和 W. Ketterle，《钠原子气体中的玻色–爱因斯坦凝聚》，《物理评论快报》75，3969（1995）。[9] N. P. Proukakis，《玻色–爱因斯坦凝聚一个世纪——

tion, Commun. Phys. 8, 264 (2025). [10] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle，《玻色–爱因斯坦凝聚体的光学囚禁》，Phys. Rev. Lett. 80, 2027 (1998). [11] Y.-J. Lin, K. Jiménez-García, and I. B. Spielman，《自旋-轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体》，Nature 471, 83 (2011). [12] D. Campbell, R. Price, A. Putra, A. Valdés-Curiel, D. Trypogeorgos, and I. Spielman，《自旋-轨道耦合玻色气体的磁相》，Nat. Commun. 7, 10897 (2016). [13] X. Luo, L. Wu, J. Chen, Q. Guan, K. Gao, Z.-F. Xu, L. You, and R. Wang，《利用调制梯度磁场合成可调控的原子自旋-轨道耦合》，Sci. Rep. 6, 10.1038/srep18983 (2016). [14] Z. Wu, L. Zhang, W. Sun, X.-T. Xu, B.-Z. Wang, S.-C. Ji, Y. Deng, S. Chen, X.-J. Liu, and J.-W. Pan，《实现玻色–爱因斯坦凝聚体的二维自旋-轨道耦合》，Science 354, 83 (2016). [15] W. Sun, B.-Z. Wang, X.-T. Xu, C.-R. Yi, L. Zhang, Z. Wu, Y. Deng, X.-J. Liu, S. Chen, and J.-W. Pan，《量子气体中高度可控且稳健的二维自旋-轨道耦合》，Phys. Rev. Lett. 121, 150401 (2018). [16] S.-C. Ji, L. Zhang, X.-T. Xu, Z. Wu, Y. Deng, S. Chen, and J.-W. Pan，《自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中旋子和声子模的软化》，Phys. Rev. Lett. 114, 105301 (2015). [17] X.-W. Luo and C. Zhang，《可调控的自旋-轨道耦合

以及玻色–爱因斯坦凝聚体中的磁性超条纹相，Phys. Rev. A 100, 063606 (2019). [18] J.-R. Li, J. Lee, W. Huang, S. Burchesky, B. Shteynas, F. v. Top, A. O. Jamison, and W. Ketterle, 《自旋-轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中具有超固体性质的条纹相》，Nature 543, 91 (2017). [19] T.-L. Ho and S. Zhang, 《具有自旋–轨道相互作用的玻色–爱因斯坦凝聚体》，Phys. Rev. Lett. 107, 150403 (2011). [20] T. Kawakami, T. Mizushima, M. Nitta, and K. Machida, 《SU(2)规范玻色–爱因斯坦凝聚体中的稳定斯格明子》，Phys. Rev. Lett. 109, 015301 (2012). [21] C. Qu, C. Hamner, M. Gong, C. Zhang, and P. Engels, 《在自旋-轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中观测到颤动》，Phys. Rev. A 88, 021604 (2013). [22] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, 《玻色–爱因斯坦凝聚》（牛津大学出版社，牛津，2003）。[23] Y. Chen, H. Lyu, Y. Xu, and Y. Zhang, 《自旋-轨道耦合自旋-1玻色–爱因斯坦凝聚体中的元激发》，New J. Phys. 24, 073041 (2022). [24] Rajat, P. Banger, and S. Gautam, 《自旋-轨道耦合自旋-1玻色–爱因斯坦凝聚体的集体激发与普适粗化动力学》，Phys. Rev. A 111, 033316 (2025). [25] Z.-Q. Yu, 《拉曼诱导自旋轨道耦合自旋-1玻色气体中的相变与元激发》，Phys. Rev. A 93, 033648 (2016). [26] K. Sun, C. Qu, Y. Xu, Y. Zhang, and C. Zhang, 《相互作用的自旋-轨道耦合自旋-1玻色–爱因斯坦凝聚体》，Phys. Rev. A 93, 023615 (2016). [27] S. K. Gangwar, R. Ravisankar, H. Fabrelli, P. Muruganandam, and P. K. Mishra, 《自旋-轨道耦合自旋-1玻色–爱因斯坦凝聚体集体激发中的不稳定避免交叉的出现》，Phys. Rev. A 109, 043306 (2024). [28] S. K. Gangwar, R. Ravisankar, H. Fabrelli, P. Muruganandam, and P. K. Mishra, 《自旋-轨道耦合自旋-1凝聚体中的双重不稳定避免交叉与复合畴图案形成》，Phys. Rev. A 111, 063303 (2025). [29] S. K. Gangwar, R. Ravisankar, P. Muruganandam, and P. K. Mishra, 《自旋-轨道耦合自旋-1凝聚体中自旋混合超条纹相的出现》，Phys. Rev. A（2026）。[30] S. K. Adhikari, 《二维囚禁自旋-轨道耦合自旋-1凝聚体中的类超固态》，J. Phys. Condens. Matter 33, 265402 (2021). [31] P. Kaur, S. Gautam, and S. Adhikari, 《二维非磁性自旋–轨道耦合自旋-1和自旋-2凝聚体中的类超固态孤子》，Phys. Lett. A 455, 128507 (2022). [32] S. K. Adhikari, 《自旋-轨道耦合自旋-1凝聚体中的多环、条纹和超晶格孤子》，Phys. Rev. A 103, L011301 (2021). [33] S. Adhikari, 《二维铁磁自旋-轨道耦合均匀自旋-1凝聚体孤子中的自发空间有序》，Phys. Lett. A 388, 127042 (2021). [34] N. Bogoliubov, 《论超流性的理论》，J. Phys 11, 23 (1947). [35] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, 《稀薄气体中玻色–爱因斯坦凝聚体的集体激发

77, 420 (1996). [36] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, 和 W. Ketterle, 《磁阱中玻色–爱因斯坦凝聚体的集体激发》，《物理评论快报》77, 988 (1996). [37] J. Higbie 和 D. M. Stamper-Kurn, 《周期性缀饰的玻色–爱因斯坦凝聚体：具有各向异性且可变临界速度的超流体》，《物理评论快报》88, 090401 (2002). [38] G. I. Martone, Y. Li, L. P. Pitaevskii, 和 S. Stringari, 《自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体的各向异性动力学》，《物理评论A》86, 063621 (2012年). [39] R. Ravisankar, H. Fabrelli, A. Gammal, P. Muruganandam, 和 P. K. Mishra, 《 Rashba 自旋轨道耦合和拉比耦合对二元玻色–爱因斯坦凝聚体激发谱的影响》，《物理评论A》104, 053315 (2021年). [40] R. Ravisankar, S. K. Gangwar, H. Fabrelli, Y. Zhang, P. Muruganandam, P. K. Mishra, E. Kengne, G. Xianlong, 和 B. A. Malomed, 《具有三体相互作用的自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的稳定超固体和玻色子团》，《物理评论研究》7, 023317 (2025年). [41] T. Ozawa 和 G. Baym, 《Rashba自旋轨道耦合超冷原子玻色凝聚体抵抗量子和热涨落的稳定性》，《物理评论快报》109, 025301 2012( ). [42] T. Ozawa, L. P. Pitaevskii, 和 S. Stringari, 《自旋轨道耦合超冷玻色气体的超流电流和动力学不稳定性》，《物理评论A》87, 063610 (2013年). [43] S. Sahu 和 D. Majumder, 《液相中具有自旋轨道耦合的二维玻色–爱因斯坦凝聚体的集体激发》，Jour. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 53, 095301 (2020). [44] W. Zheng 和 Z. Li, 《自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体的集体模：流体动力学方法》，《物理评论A》85, 053607 (2012年). [45] Y.-C. Zhang, Z.-Q. Yu, T. K. Ng, S. Zhang, L. Pitaevskii, 和 S. Stringari, 《自旋轨道耦合玻色气体的超流体密度》，《物理评论A》94, 033635 (2016年). [46] Y. Kawaguchi 和 M. Ueda, 《自旋or玻色–爱因斯坦凝聚体》，Phys. Rep. 520, 253 (2012年). [47] V. I. Yukalov, 《偶极和自旋or玻色系统》，Laser Phys. 28, 053001 (2018). [48] R. Ravisankar, D. Vudragović, P. Muruganandam, A. Balaž, 和 S. K. Adhikari, 《自旋-1自旋轨道及拉比耦合玻色–爱因斯坦凝聚体求解器》，Comput. Phys. Commun. 259, 107657 (2021年). [49] S. K. Adhikari, 《二维囚禁自旋轨道耦合自旋-1凝聚体中的类超固态》，J our. Phys.: Conden. Matt. 33, 265402 (2021年). [50] K. Fujimoto 和 M. Tsubota, 《囚禁自旋-1自旋or玻色–爱因斯坦凝聚体中的自旋湍流》，《物理评论A》85, 053641 (2012年). [51] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, 和 W. Ketterle, 《在玻色–爱因斯坦凝聚体中观测到 Feshbach 共振》，Nature 392, 151 (1998). [52] A. Marte, T. Volz, J. Schuster, S. Dürr, G. Rempe, E. G. M. van Kempen, 和 B. J. Verhaar, 《铷-87中的Feshbach共振：精密测量与分析》，《物理评论快报》89, 283202 (2002). [53] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, 和 E. Tiesinga, 《超冷气体中的Feshbach共振》

1225（2010）。
[54] HLyu 和 Y. Zhang，《自旋轨道耦合辅助的 roton 软化及里德堡缀饰玻色–爱因斯坦凝聚体中的超条纹》，《物理评论A》102，023327（2020）。[55] Q.-L. Zhu、L. Pan 和 J. An，《塞曼场存在时自旋轨道耦合自旋-1 玻色–爱因斯坦凝聚体流经障碍物》，《物理评论A》102，053320（2020）。[56] E. V. Goldstein 和 P. Meystre，《多组分原子凝聚体中的准粒子不稳定性》，《物理评论A》55，2935（1997）。[57] E. Anderson、Z. Bai、C. Bischof、L. S. Blackford、J. Demmel、J. Dongarra、J. Du Croz、A. Greenbaum、S. Hammarling、A. McKenney 等，《LAPACK 用户指南》（SIAM，费城，1999）。[58] P. Muruganandam 和 S. K. Adhikari，《全各向异性阱中含时 Gross–Pitaevskii 方程的 Fortran 程序》，Comput. Phys. Commun. 180，1888 2009( )。[59] L. E. Young-S、D. Vudragović、P. Muruganandam、S. K. Adhikari 和 A. Balaž，《用于求解各向异性阱中含时 Gross–Pitaevskii 方程的 OpenMP Fortran 和 C 程序》，Comput. Phys. Commun. 204，209（2016）。[60] M. Abad 和 A. Recati，《相干耦合双组分玻色–爱因斯坦凝聚体研究》，Eur. Phys. J. D 67，148（2013）。[61] M. A. Khamehchi、Y. Zhang、C. Hamner、T. Busch 和 P. Engels，《自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中集体激发的测量》，《物理评论A》90，063624（2014）。[62] L.-C. Ha、L. W. Clark、C. V. Parker、B. M. Anderson 和 C. Chin，《摇晃光学晶格中玻色凝聚体的 roton-maxon 激发谱》，《物理评论快报》114，055301（2015）。[63] H. Lyu、Y. Zhang 和 T. Busch，《利用运动势垒探测自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的 roton 和声子激发》，《物理评论A》106，013302 2022( )。[64] K. Kasamatsu 和 M. Tsubota，《多重畴 For-由调制不稳定性诱导的形成，Phys. Rev. Lett. 93, 100402 (2004). [65] L. Sadler, J. Higbie, S. Leslie, M. Vengalattore, and D. Stamper-Kurn，淬火铁磁旋量玻色–爱因斯坦凝聚体中的自发对称性破缺，《自然》443, 312 (2006). [66] T. Mithun and K. Kasamatsu，调制不稳定性相关的自旋–轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体非线性动力学，物理学杂志B：原子、分子与光学物理 52, 045301 (2019). [67] N. R. Bernier, E. G. Dalla Torre, and E. Demler，耦合自旋or凝聚体中的不稳定避免交叉，《物理评论快报》113, 065303 (2014). [68] R. M. Wilson, C. Ticknor, J. L. Bohn, and E. Timmermans，双组分偶极玻色气体中的旋子不互溶性，《物理评论A》86, 033606 (2012). [69] J. Kronjäger, C. Becker, P. Soltan-Panahi, K. Bongs, and K. Sengstock，反铁磁量子气体中的自发图样形成，《物理评论快报》105, 090402 2010( ). [70] Y. Li, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari，自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的量子三临界性与相变，《物理评论快报》108, 225301 (2012). [71] M. Lewkowicz, T. Karpiuk, M. Gajda, and M. Brewczyk，耦合费米子诱导的偶极玻色–爱因斯坦凝聚体超固性，《物理评论A》111, L011301 (2025). [72] H. Lyu, Y. Chen, Q. Zhu, and Y. Zhang，自旋轨道耦合玻色–爱因斯坦凝聚体中的超流携带超固体，物理评论研究 6, 023048 (2024). [73] N. Goldman and J. Dalibard，周期驱动量子系统：有效哈密顿量与人工规范场，物理评论X 4, 031027 (2014). [74] Ritu, Rajat, A. Roy, and S. Gautam，自旋–轨道耦合自旋-1 玻色–爱因斯坦凝聚体中的热放大与相熔化，《新物理学杂志》27, 043005 (2025)。