arXiv:2601.18593v1 [stat.CO] 26 Jan 2026

广义平衡幂图：平坦截面、仿射变换和改进的渲染算法

Felix Ballani*

Helmholtz-Zentrum Dresden – Rossendorf，Helmholtz Institute Freiberg for Resource Technology，Chemnitzer Str. 40，09599 弗赖贝格，德国

摘要

在文献中，广义平衡幂图（GBPD）被视为一种适用于描述具有弯曲晶界的多晶微观结构的几何模型。本文汇总了广义布尔泊松圆盘关于仿射变换和平坦截面的性质。此外，本文将一种已知的功率图数字图像生成算法扩展至广义布尔泊松圆盘；与通常的蛮力法相比，该算法更加高效。

1 引言

本文讨论一种镶嵌类型，它至少在过去十年间已在文献中被引入并应用于 $\mathbb{R}^d$ （或其某个子集），名称既有广义平衡幂图（GBPD），参见 Alpers 等（2015年）；Teferra 与 Graham-Brady（2015年）；Šedivý 等（2016年，2017年），以及 Petrich 等（2021年），也有各向异性幂图（APD），参见 Buze 等（2024年）。这是一种类似 $Voronoi$ 的镶嵌，由 $\mathbb{R}^d$ 中的有限个种子点生成，即空间中的每个点都根据特定给定的距离度量，分配给离它最近的种子点。对于 GBPD，距离度量定义如下：

$$\operatorname{dist}\big(x,s\big)=\operatorname{dist}_G(x,s,M,w):=(x-s)^\top M(x-s)-w,\quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{1}$$

where $s\in\mathbb{R}^d$ 是一个种子点，M 是一个由 $d\times d$ 个实数值构成的正定矩阵，且 $w\in\mathbb{R}$.

迄今为止，绝大多数文献都关注如何重建广义平衡幂图（GBPD），也就是说，如何将以体素图像形式给出的多晶微观结构，尽可能准确地近似为一个具体的 GBPD（Alpers 等，2015年；Teferra 与 Graham-Brady，2015年；Šedivý 等，2016年、2017年、2018年；Teferra & Rowenhorst，2018年；Petrich 等，2021年；Alpers 等，2023年；Buze 等，2024年；Alpers 等，2025年）。此外，Jung & Redenbach（2024年）给出了二维情况下 GBPD 单元的顶点和边的解析表示。

本文关注如何从算法角度尽可能高效地生成 GBPD 的数字图像——通常通过并行化和利用图形处理器进行计算来提升性能，参见例如 Buze 等（2024年）——以及 GBPD 在平坦截面下的表现。鉴于 GBPD 决定性组成部分的可识别性，本文也描述了其在仿射变换下的表现。所有这些方面在使用基于 GBPD 概念的随机模型对多晶微观结构进行建模时都可能发挥作用；不过，本文不涉及此类随机建模。

本文结构如下。第2节给出一些必要的定义；第3节讨论GBPD在某些仿射变换下的行为。第4节考察GBPD在平坦截面下的行为。第5节将一种用于渲染数字图像的改进算法应用于GBPD，随后在第6节以带标记泊松过程为例讨论其复杂度。最后，第7节总结全文。

*电子邮箱：f.ballani@hzdr.de |ORCID-iD：0000-0002-0415-0220

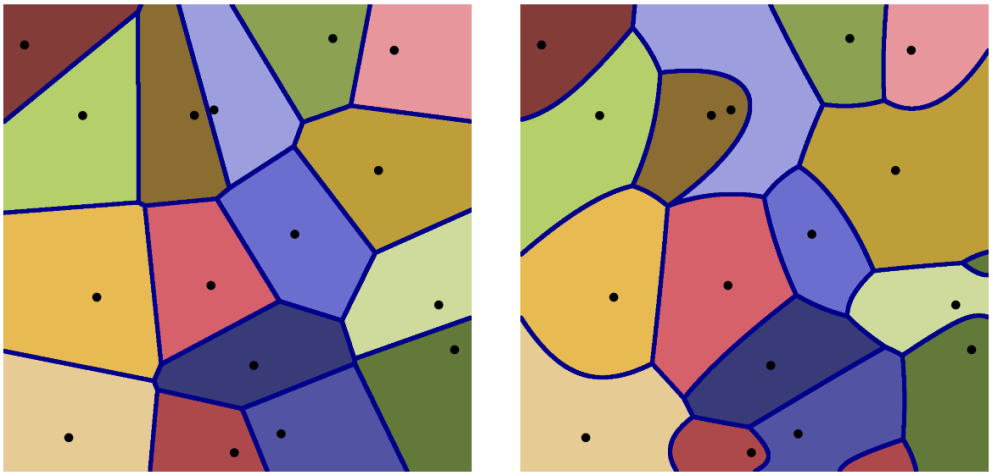

图 1：针对同一组种子点（黑点）且权重相同的拉盖尔镶嵌（左）和 GBPD（右）。即使在拉盖尔镶嵌中，也可能存在所属单元为空或位于其单元之外的种子点。在广义平衡幂图中，单元可以是非凸的，甚至是不连通的。

2 定义

设 ψ 是由形如 $(s,\ M,\ w)$ 的标记点构成的可数集合，其中 $s \in \mathbb{R}^d$, M 是一个由 $d \times d$ 实数值构成的正定矩阵，且 $w \in \mathbb{R}$。对于每个 $(s,\ M,\ w)$，$\in \psi$ 该（闭）集合

$$C((s,M,w),\psi) := \{x \in \mathbb{R}^d : \mathrm{dist}_G(x,s,M,w) \leq \mathrm{dist}_G(x,s',M',w') \text{ for all } (s',M',w') \in \psi\} \quad (2)$$

定义一个单元，s 称为它的种子点，M 称为它的各向异性矩阵，w 称为它的（拉盖尔）权重；因此，三元组 (s,M,w) 以下称为它的生成元。ψ的所有非空单元组成的集合，

$$\mathcal{G}(\psi) := \{C((s,M,w),\psi) : (s,M,w) \in \psi,\ C((s,M,w),\psi) \neq \varnothing\} \quad (3)$$

是 $\mathbb{R}^d$ 的一个镶嵌（Møller，1989年），即各单元的内部两两不相交，各单元覆盖整个空间，并且 $\mathbb{R}^d$ 的每个有界子集仅与有限多个单元相交。这个镶嵌 $\mathcal{G}(\psi)$ 称为由 ψ 生成的广义平衡幂图（*GBPD*）或各向异性幂图。因此，在下文中，ψ 有时也称为 $\mathcal{G}(\psi)$ 的生成元。

GBPD 扩展了若干类镶嵌。当所有各向异性矩阵 M fromψ 均为单位矩阵，且所有权重 w 均为同一数值时，GBPD 与生成元集合{s的沃罗诺伊镶嵌/图（例如，参见 Okabe 等人，2000年）重合：$(s,\ M,\ w) \in \psi$}。当所有各向异性矩阵 $M$from ψ均为单位矩阵时，GBPD 与生成元集合 {$(s,\ w)$ 的拉盖尔镶嵌/幂图（Aurenhammer，1987；Lautensack，2007；Lautensack 和 Zuyev，2008）重合：$(s,\ M,\ w) \in \psi$}。最后，当所有权重 w 均为同一数值时，GBPD 与生成元集合 {$(s,\ M)$ 的各向异性沃罗诺伊图（Labelle 和 Shewchuk，2003；Jeulin，2013；Altendorf 等人，2014；van Nuland 等人，2021年）重合：$(s,\ M,\ w) \in \psi$}。

图 1 展示了 GBPD 的典型外观；它通常具有弯曲的胞元边界，而拉盖尔镶嵌的单元边界始终是平的。

GBPD $\mathcal{G}(\psi)$ 的生成元 ψ并非唯一。对于所有 $v \in \mathbb{R}$ 生成元 $\{(s,\ M,\ w+v) : (s,\ M,\ w) \in \psi\}$，它们都会得到相同的 GBPD，因为所有距离

$$\mathrm{dist}_G(x,s,M,w+v) = \mathrm{dist}_G(x,s,M,w) + v \quad (4)$$

都会平移相同的量。类似地，对于所有 $a > 0$ 生成元 $\{(s,\ aM,\ aw) : (s,\ M,\ w) \in \psi\}$，它们都会得到相同的 GBPD，因为所有距离

$$\mathrm{dist}_G(x, s, aM, aw) = a \cdot \mathrm{dist}_G(x, s, M, w) \tag{5}$$

按相同的比例缩放。

3 变换

在各种变换下，镶嵌属于 GBPD 这一性质不会改变。这一点连同 (4) 和 (5)，对于研究具有 GBPD 的随机模型中模型参数的可识别性或许有所帮助。下文中，设 ψ 是 GBPD$\mathcal{G}(\psi)$ 的一个生成元。

3.1 平移

对于任意 $y \in \mathbb{R}^d$，平移后的 GBPD $\mathcal{G}(\psi) + y$ 是由下式生成的 GBPD

$$\psi + y := \{(s + y, M, w) : (s, M, w) \in \psi\}.$$

3.2 旋转

设 U 为 $\mathbb{R}^d$ 中的任意旋转矩阵。由于

$$\begin{aligned}
&UC((s, M, w), \psi) \\
&= \{Ux \in \mathbb{R}^d : (x - s)^\top M(x - s) - w \le (x - s')^\top M'(x - s') - w' \ \forall\ (s', M', w') \in \psi\} \\
&= \{y \in \mathbb{R}^d : (U^\top y - s)^\top M(U^\top y - s) - w \le (U^\top y - s')^\top M'(U^\top y - s') - w' \ \forall\ (s', M', w') \in \psi\} \\
&= \{y \in \mathbb{R}^d : (y - Us)^\top UMU^\top (y - Us) - w \le (y - Us')^\top UM'U^\top (y - Us') - w' \ \forall\ (s', M', w') \in \psi\}
\end{aligned}$$

旋转后的 GBPD $U\mathcal{G}(\psi)$ 是由以下对象生成的 GBPD

$$U\psi := \{(Us, UMU^\top, w) : (s, M, w) \in \psi\}.$$

3.3 缩放

设 $a > 0$。由于

$$\begin{aligned}
&aC((s, M, w), \psi) \\
&= \{y \in \mathbb{R}^d : (y - as)^\top (a^{-2}M)(y - as) - w \le (y - as')^\top (a^{-2}M')(y - as') - w' \ \forall\ (s', M', w') \in \psi\} \\
&= \{y \in \mathbb{R}^d : (y - as)^\top M(y - as) - a^2 w \le (y - as')^\top M'(y - as') - a^2 w' \ \forall\ (s', M', w') \in \psi\}
\end{aligned}$$

缩放后的 GBPD $a\mathcal{G}(\psi)$ 是由以下对象生成的 GBPD

$$\{(as, a^{-2}M, w) : (s, M, w) \in \psi\} \text{ and } \{(as, M, a^2 w) : (s, M, w) \in \psi\}.$$

3.4 线性畸变

令 A 为一个实数值可逆 $d \times d$ 矩阵。那么（更一般地，也包括情形 3.2 和 3.3），变换后的 GBPD $A\mathcal{G}(\psi)$ 是由以下内容生成的 GBPD：

$$A\psi := \{(As, A^{-\top} MA^{-1}, w) : (s, M, w) \in \psi\}.$$

4 GBPD 的平截面

尽管如今在检查自然或技术微观结构时，常常采用能够提供三维图像的扫描方法，但基于平坦截面的方法仍在使用，例如出于速度方面的考虑。因此，下面将概述 GBPDs 在平坦截面下的表现。与前文一样，令 ψ 为（d 维）GBPD $\mathcal{G}(\psi)$ 的一个生成元。

4.1 超平面截面

设 H 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个超平面。根据 3.2，我们可以假设 H 具有如下形式

$$H = \{x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d : x_k = h\}$$

其中 $h \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \{1, \dots, d\}$ 任取。我们关注的对象是镶嵌

$$\mathcal{G}(\psi) \cap H := \{C \cap H : C \in \mathcal{G}(\psi)\}. \tag{6}$$

如果 H 不具有所假设的特定形式，那么存在某个旋转矩阵 U，使得 UH 具有该形式，且由此得到的截面镶嵌为 $U^\top(\mathcal{G}(U\psi) \cap UH)$。

下文中，对于任意（列）向量 $x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$，用 $x_{\not k}$ 表示由 x 的所有分量（除第 k 个分量 x_k 外）组成的（列）向量。类似地，对于某个矩阵 $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$，令 $M_{\not k,\, k} = (M_{i,\, k})_{i\neq k}$ 和 $M_{\not k,\, \not k} = (M_{i,\, j})_{i\neq k,\, j\neq k}$。

令 $(s, M, w) \in \psi$。对于每个 $x \in \mathbb{R}^d$，距离 $\mathrm{dist}_G(x, s, M, w)$ 可按以下方式分解，利用 $y_{\not k} = (x_k - s_k)M_{\not k\, ,\not k}^{-1} M_{\not k,k}$、$M$ 的对称性，以及以下性质：由于 M 是正定的，$M_{\not k,\not k}$ 也正定，因此可逆：

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}_G(x, s, M, w) &= (x - s)^\top M(x - s) - w \\
&= (x_{\not k} - s_{\not k})^\top M_{\not k,\not k}(x_{\not k} - s_{\not k}) + 2(x_k - s_k)M_{\not k,k}^\top (x_{\not k} - s_{\not k}) + (x_k - s_k)^2 M_{k,k} - w \\
&= (x_{\not k} - s_{\not k} + y_{\not k})^\top M_{\not k,\not k}(x_{\not k} - s_{\not k} + y_{\not k}) + (x_k - s_k)^2 (M_{k,k} - M_{\not k,k}^\top M_{\not k,\not k}^{-1} M_{\not k,k}) - w
\end{aligned}$$

因此，在超平面 $H = \{x : x_k = h\}$ 内，距离仍然是 dist_G 形式的距离，

$$\mathrm{dist}_G\big(x_{\not k}, \tilde{s}, \tilde{M}, \tilde{w}\big) = (x_{\not k} - \tilde{s})^\top \tilde{M}(x_{\not k} - \tilde{s}) - \tilde{w}, \tag{7}$$

相对于种子

$$\tilde{s} = s_{\not k} - (h - s_k)M_{\not k,\not k}^{-1} M_{\not k,k}, \tag{8}$$

各向异性矩阵

$$\tilde{M} = M_{\not k,\not k}, \tag{9}$$

和权重

$$\tilde{w} = w - (h - s_k)^2 (M_{k,k} - M_{\not k,k}^\top M_{\not k,\not k}^{-1} M_{\not k,k}). \tag{10}$$

4.2 与 q 维仿射空间的截面，$1 \le q \le d-2$

对于 $d \ge 3$，考虑一个 q 维仿射子空间 $1 \le q \le d-2$，不失一般性地，假设其形式为 $H_K = \{x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d : x_k = h_k, k \in K\}$，其中 $K \subset \{1, \dots, d\}, |K| = d - q$，且 $h_k \in \mathbb{R}, k \in K$。与上一节类似，用 x_K 和 $x_{\not K}$ 分别表示 $x \in \mathbb{R}^d$ 中所有分量 x_k 组成的向量，其中 $k \in K$，以及 $k \notin K$；对于某个矩阵 $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$，令 $M_{K,K} = (M_{i,j})_{i\in K, j\in K}$，$M_{\not K,K} = (M_{i,j})_{i\notin K, j\in K}$，且 $M_{\not K,\not K} = (M_{i,j})_{i\notin K, j\notin K}$。

同理，在 H_K 内，距离仍为 dist_G 型距离，

$$\mathrm{dist}_G\big(x_{\not K}, \tilde{s}, \tilde{M}, \tilde{w}\big) = (x_{\not K} - \tilde{s})^\top \tilde{M}(x_{\not K} - \tilde{s}) - \tilde{w}, \tag{11}$$

相对于种子

$$\tilde{s} = s_{\not K} - (h_K - s_K)^\top M_{\not K,\not K}^{-1} M_{\not K,K}, \tag{12}$$

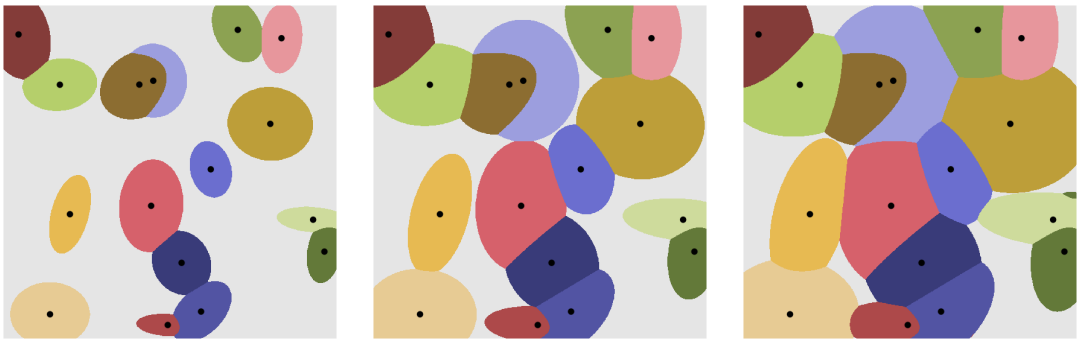

图 2：对于三种不同的距离 t，应用改进算法第一步后分配给种子点的隶属关系（从左向右逐渐增大）。对于距离任意种子点超过 t 的每个像素，即位于彩色区域之外的像素，都必须应用“蛮力”算法。

各向异性矩阵

$$\tilde{M} = M_{K,K}, \tag{13}$$

以及权重

$$\tilde{w} = w - (h_K - s_K)^\top (M_{K,K} - M_{K,K}^\top M_{K,K}^{-1} M_{K,K})(h_K - s_K). \tag{14}$$

5 数字图像的渲染

镶嵌的一项常见用途是将其表示为数字图像。对于有限离散点集 X 中的每个点 x（通常为像素或体素），其中 $X \subset W$ 对某个凸紧仿真窗口 $W \subset \mathbb{R}^d$ 成立，必须确定该点属于镶嵌 x 中的哪个单元。对于 Voronoi 镶嵌和拉盖尔镶嵌，所有单元都是凸多胞体，其相应的确定部分可根据镶嵌的生成元计算得出。随后，很容易评估集合 X 中各点的隶属关系。然而，GBPD 通常具有弯曲的胞元边界，这使其适用于微观结构建模。不过，即使已知胞元边界的解析描述（Jung & Redenbach，2024年），依据这些描述判断胞元归属仍然较为困难，因为单元通常不一定是凸的，也不一定在拓扑上连通（另见图 1）。因此，可能需要通过相应的距离，直接根据生成元确定胞元归属。

5.1“蛮力”算法

最简单的算法有时称为“蛮力”算法，其做法是对每个 $x \in X$ 计算所有生成元 $(s, M, w) \in \psi$ 的距离 $\mathrm{dist}_G(x, s, M, w)$，从而确定最近的种子 s。如果 ψ 包含 n 个生成元，而 X 由 N 个点组成，那么该算法的复杂度为 $\mathcal{O}(Nn)$（van Nuland 等人，2021年；Moulinec，2022年）。

5.2 Moulinec（2022年）针对广义布尔泊松圆盘所作的算法改编

Moulinec（2022年）针对 Voronoi 和拉盖尔镶嵌提出了一种复杂度较低的替代算法，其复杂度为 $\mathcal{O}(N\log(n))$。本节将说明如何将这种替代算法扩展到广义布尔泊松圆盘及其仿射截面。

改进算法的基本原理是，首先检查所有种子点的一个特定邻域，并针对该邻域中的每个 $x \in X$ 判断当前考察的种子是否最近；然后，在第二步中，使用上文所述的“蛮力”算法处理剩余点 $x \in X$（即尚未访问的点）。

下文假设生成元 ψ 的所有权重均为非负数。为了确定改进算法第一步所需的邻域，需要为所有种子点指定一个全局 $t > 0$ 。 t 的选择会影响算法的复杂度，并将在第6节中针对一种特定模型进行讨论。

对于每个生成元 $(s, M, w) \in \psi$，令

$$E_t(s, M, w) = \{x \in \mathbb{R}^d : \mathrm{dist}_G(x, s, M, w) \le t\} \tag{15}$$

为 $\mathbb{R}^d$ 中所有点的集合，这些点按照 dist_G 的意义，与种子点 s 的距离至多为 t 。因此，对于生成元 (s, M, w)，在 X 中需要遍历的 s 邻域恰好为$X \cap E_t(s, M, w)$。由于

$$\mathrm{dist}_G(x, s, M, w) \le t \quad \Leftrightarrow \quad (x-s)^\top M(x-s) \le t + w \quad \Leftrightarrow \quad (x-s)^\top \frac{M}{t+w}(x-s) \le 1 \tag{16}$$

$E_t(s, M, w)$ 是一个以 s 为中心的 d 维椭球，其主轴由 $M/(t+w)$ 的特征向量给出，半轴则由 $M/(t+w)$ 特征值的正根的倒数给出。

由于点 x 隶属于邻域 $X \cap E_t(s, M, w)$，其定义恰好由性质 $\mathrm{dist}_G(x, s, M, w) \le t$ 给出；但在改进算法中应避免不必要的距离 $\mathrm{dist}_G(x, s, M, w)$ 计算，因此可以采用以下步骤，尤其是在 X 是像素或体素的规则网格时。该步骤基于以下性质： $E_t(s, M, w)$ 的最小轴对齐包围盒为

$$B_t(s, M, w) = s + \sqrt{t+w}\,\big\{(y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d : |y_i| \le \sqrt{(M^{-1})_{i,i}},\, i = 1, \ldots, d\big\}, \tag{17}$$

因为（非退化）椭球 $\{x \in \mathbb{R}^d : x^\top Ax \le 1\}$ 沿方向 $u \in \mathbb{R}^d, \|u\| = 1$ 的宽度由 $2\sqrt{u^\top A^{-1} u}$ 给出（Boyd & Vandenberghe, 2004年，第 461 页）。

对于每个生成元 $(s, M, w) \in \psi$，都必须遍历集合 $X \cap B_t(s, M, w)$，该集合本质上可以通过对 M^{-1} 进行一次求值来确定。对于每个 $x \in X \cap B_t(s, M, w)$，都必须计算距离 $\mathrm{dist}_G(x, s, M, w)$；如果 $\mathrm{dist}_G(x, s, M, w) \le t$，则可能需要更新 x 的隶属关系。图 2 展示了二维示例中若干 t 取值下第一步之后的情况。

5.3 超平面截面的细节

如果 GBPD 只需在超平面 $H = \{x = (x_1, \ldots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d : x_k = h\}$,$h \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, \ldots, d\}$ 内进行渲染（另见第 4.1 节），则改进算法的第一步可按如下方式执行。

由于 $B_t(s, M, w)$ 是椭球 $E_t(s, M, w)$ 的最小轴对齐包围盒，因此当且仅当满足以下条件时，后者与截面超平面 H 的交集测度大于 0：

$$(h - s_k)^2 < (t+w)(M^{-1})_{k,k}. \tag{18}$$

采用第 4.1 节的记号，这等价于

$$\frac{(h-s_k)^2}{(M^{-1})_{k,k}} = (h-s_k)^2 (M_{k,k} - M_{\not k,k}^\top M_{\not k,\not k}^{-1} M_{\not k,k}) < t + w, \tag{19}$$

因为根据 M 的舒尔补 $M_{k,k} - M_{\not k,k}^\top M_{\not k,\not k}^{-1} M_{\not k,k}$（例如参见 Boyd & Vandenberghe, 2004，A.5.5），我们有

$$(M^{-1})_{k,k} = (M_{k,k} - M_{\not k,k}^\top M_{\not k,\not k}^{-1} M_{\not k,k})^{-1}. \tag{20}$$

对于所有 $x \in H$，等价地有 $\mathrm{dist}_G(x, s, M, w) \le t$，$\mathrm{dist}_G(x_{\not k}, \tilde{s}, M, \tilde{w}) \le t$ 并且

$$(x_{\not k} - \tilde{s})^\top \frac{\tilde{M}}{t+\tilde{w}}(x_{\not k} - \tilde{s}) = (x_{\not k} - \tilde{s})^\top \frac{M_{\not k,\not k}}{t + w - (h-s_k)^2 (M_{k,k} - M_{\not k,k}^\top M_{\not k,\not k}^{-1} M_{\not k,k})}(x_{\not k} - \tilde{s}) \le 1 \tag{21}$$

根据（16）。上述条件（18）与（20）共同确保（21）中的分母为正。（21）定义的正是 H 内的（$(d-1)$ 维）椭球 $E_t(s,\ M,\ w) \cap H$，即截面椭球与 H 内的生成椭球重合。与（17）中一样，可以利用其相对于坐标轴的极值，限制生成元 $(s,\ M,\ w)$ 的距离计算次数。

6 带标记泊松过程的复杂度估计

在下文中，我们假设 GBPD $\mathcal{G}(\psi)$ 的生成元 ψ 是一个独立标记的平稳泊松点过程 Ψ 的实现。也就是说，种子点 s 的集合在 $\mathbb{R}^d$ 中构成一个强度为 λ 的齐次泊松点过程（Chiu 等人，2013）$0 < \lambda < \infty$，并且每个种子点都独立地带有一个随机标记（$M,\ w$），该标记由一个各向异性矩阵 M 和一个权重 $w \geq 0$ 组成。

对于每个 $t > 0$，每个标记（$M,\ w$）都与一个关联的椭球 $E_t(M,\ w)$ 相关：$= E_t(o,\ M,\ w)$，其中心位于原点 o。平移后的椭球 $E_t(M,\ w) + s$ 仅表示区域 $E_t(s,\ M,\ w)$，在上述渲染算法的第一步中，必须在该区域内评估点的隶属关系（见第 5.2 节）。假设条件（Schneider & Weil，2008，（4.14））成立

$$\mathsf{E}[V_d(E_t(M,w) \oplus B^d)] < \infty \tag{22}$$

满足该条件，其中 $\mathsf{E}[\cdot]$ 表示期望，$V_d(\cdot)$表示 d维体积，$\oplus$表示 Minkowski 和，B^d 表示d维单位球，

$$\Psi_t = \{(s, E_t(M,w)) : (s,M,w) \in \Psi\} \tag{23}$$

是一个平稳的泊松芽粒过程，其典型粒为 $E_t(M,\ w)$。为确保上述条件 (22) 成立，以下假设所有权重 w 均有上界 $w_{\max} < \infty$，且存在一个 $r_{\max}$、$0 < r_{\max} < \infty$，使得对于所有各向异性矩阵 M，$\{x \in \mathbb{R}^d : x^\top M x \leq 1\} \subseteq r_{\max} B^d$ 均成立；综合而言，这意味着 $E_t(M,\ w) \subseteq \sqrt{t + w_{\max}}\, r_{\max} B^d$ 成立。

6.1 简化的复杂度估计

首先，我们考虑这样一种情况：在第 5.2 节渲染算法的第一步中，仅在椭球体 $E_t(s,\ M,\ w) = s + E_t(M,\ w)$ 内进行距离计算。这对应于 Moulinec（2022年）采用的方法，但并不完全正确，因为即使点 x 属于 $E_t(s,\ M,\ w)$ 的轴对齐包围盒 $B_t(s,\ M,\ w)$，但不属于 $E_t(s,\ M,\ w)$，仍必须确定其距离；至少在无法通过其他方式作出判定 $x \in E_t(s,\ M,\ w)$ 时是如此。

对于每个点 $x \in X$，算法第一步中的距离计算次数等于

$$n_1(x) = \sum_{(s,E_t) \in \Psi_t} \mathbf{1}_{E_t + s}(x), \tag{24}$$

其中$\mathbf{1}$ 表示示性函数。根据坎贝尔定理（Chiu 等，2013），每个点的平均距离计算次数因此为

$$\overline{n}_1 = \mathsf{E}[n_1(x)] = \lambda \mathsf{E}[V_d(E_t(M,w))]. \tag{25}$$

在算法的第二步中，对于所有 $s + E_t$ 的并集之外的每个点 $x \in X$，$(s,\ E_t) \in \Psi_t$，必须计算相对于 Ψ 中所有被视为相关的标记点的距离。实际操作中，这意味着我们固定某个 $R \geq 0$，并将 Ψ 限定为那些种子点 s 包含在 $W \oplus RB^d$ 中的生成元 $(s,\ M,\ w)$，其中 $W \supset X$ 是凸且紧的。将此限制记为 $\Psi^{(R)}$。如果 $R = 0$，这意味着只考虑 W 内的种子点；若对于某个 $0 < t_{\max} < \infty$ 有 $R = \sqrt{t_{\max} + w_{\max}}\, r_{\max}$，则（~~至少~~一考虑所有满足 $s + E_{t_{\max}}(M,\ w) \cap W \neq \varnothing$ 的 $(s,\ M,\ w)$。$\Psi^{(R)}$ 又是一个带标记泊松过程。

此外，假设 $t \le t_{\max}$，并令

$$\Psi^{(x,t)} = \{(s, M, w) \in \Psi : x \in s + E_t(M, w)\}. \tag{26}$$

$\Psi^{(x,t)}$ 和 $\Psi^{(R)} \setminus \Psi^{(x,t)}$ 因此是相互独立的带标记泊松过程（Schneider & Weil，2008年；Chiu 等人，2013）。据此，我们可以估算渲染算法第二步中每个点的平均距离计算次数。

For each 点 $x \in X$ 在第二步中的距离计算次数等于

$$\begin{aligned} n_2(x) &= \mathbf{1}\{|\Psi^{(x,t)}| = 0\} \cdot |\Psi^{(R)}| = \mathbf{1}\{|\Psi^{(x,t)}| = 0\} \cdot (|\Psi^{(R)} \setminus \Psi^{(x,t)}| + |\Psi^{(x,t)}|) \\ &= \mathbf{1}\{|\Psi^{(x,t)}| = 0\} \cdot |\Psi^{(R)} \setminus \Psi^{(x,t)}|, \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $|\cdot|$ 表示基数。由于 $\Psi^{(x,t)}$ 和$\Psi^{(R)} \setminus \Psi^{(x,t)}$ 相互独立且具有泊松性质，我们得到

$$\begin{aligned} \overline{n}_2 &= \mathsf{E}[n_2(x)] = \mathsf{E}\big[\mathbf{1}\{|\Psi^{(x,t)}| = 0\} \cdot |\Psi^{(R)} \setminus \Psi^{(x,t)}|\big] = \mathsf{E}[\mathbf{1}\{|\Psi^{(x,t)}| = 0\}] \cdot \mathsf{E}[|\Psi^{(R)} \setminus \Psi^{(x,t)}|] \\ &= \mathrm{e}^{-\mathsf{E}[|\Psi^{(x,t)}|]} \cdot \big(\mathsf{E}[|\Psi^{(R)}|] - \mathsf{E}[|\Psi^{(x,t)}|]\big) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda \mathsf{E}[V_d(E_t(M,w))]} \cdot \big(\overline{n}_R - \lambda \mathsf{E}[V_d(E_t(M,w))]\big) = \mathrm{e}^{-\overline{n}_1}\big(\overline{n}_R - \overline{n}_1\big), \end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$\overline{n}_R = \mathsf{E}[|\Psi^{(R)}|] = \lambda V_d(W \oplus RB^d). \tag{29}$$

总计，平均为

$$\overline{n} = \overline{n}_1 + \overline{n}_2 = \overline{n}_1 + \mathrm{e}^{-\overline{n}_1}\big(\overline{n}_R - \overline{n}_1\big) \tag{30}$$

每个点的距离计算次数。由于 n_R 不依赖于 t，当针对 n_1进行最小化时， n 也达到最小值。计算表明，最优的 $n_{1,\min}$ 为

$$\mathrm{e}^{\overline{n}_1} + \overline{n}_1 = \overline{n}_R + 1. \tag{31}$$

由于 $\overline{n}_1$ 随 t 单调变化，必要时可使用（31）确定最优的 t 。

由（31）还可得出，最优的 $n_{1,\min}$ 满足

$$\overline{n}_{1,\min} \le \log(\overline{n}_R + 1). \tag{32}$$

最后，将（31）代入（30），可得到 n 最小值的以下估计：

$$\overline{n}_{\min} = \overline{n}_{1,\min} + 1 - \mathrm{e}^{-\overline{n}_{1,\min}} \le \log(\overline{n}_R + 1) + 1. \tag{33}$$

因此，总复杂度等于 $|X|(\log(n_R + 1) + 1)$，其数量级为 $\mathcal{O}(|X|\log(n_R))$ 。“蛮力”方法的总复杂度将为 $\mathcal{O}(|X|n_R)$。

这些推导的实用结果是，可以根据（31）确定一个 t 的值，从而确保这种改进后的复杂度，并且至少在平均情况下减少距离计算次数，提高总体渲染性能。

6.2 完成复杂度估计

如果我们将距离计算计入 B_t 而非 E_t，那么在假设存在常数 c, $1 \le c < \infty$，使得可以从上方估计 $\mathsf{E}[V_d(B_t)]$与 $\mathsf{E}[V_d(E_t)]$ 之比的情况下，复杂度类保持不变。事实上，在上述假设 $w \le w_{\max} < \infty$和 $\{x \in \mathbb{R}^d : \ x^\top M x \le 1\} \subseteq r_{\max} B^d$对 $0 < r_{\max} < \infty$成立时，我们有 $B_t(M, w) \subseteq \sqrt{t} + w_{\max}\{y \in \mathbb{R}^d : \ |y_i| \le r_{\max}, i = 1, \ldots, d\}$，这意味着 $\mathsf{E}[V_d(B_t)] \le v_{\max} < \infty$, $v_{\max} = (2r_{\max}\sqrt{t} + w_{\max})^d$。由于假设 M 为正定且 $t > 0$，因此也有 $V_d(B_t) \ge V_d(E_t) > 0$，从而 $\mathsf{E}[V_d(B_t)] \ge \mathsf{E}[V_d(E_t)] = v_{\min} > 0$。综上，这保证了 $c := v_{\max}/v_{\min}$ 是一个可行的此类常数。

那么，在第一步中，每个点平均进行的距离计算次数不超过 $c \cdot n_1$。由于与 6.1 相比，第二步没有变化，因此每个点的距离计算总平均次数 n'可估计为

$$\overline{n'} \le c \cdot \overline{n}_1 + \mathrm{e}^{-\overline{n}_1}\left(\overline{n}_R - \overline{n}_1\right). \tag{34}$$

不等式 (34) 的右侧在以下情况下取最小值

$$c\,\mathrm{e}^{\overline{n}_1} + \overline{n}_1 = \overline{n}_R + 1. \tag{35}$$

由此可得，最优的 n_1 （针对 (34) 的右侧）不大于 $\log(n_R + 1) - \log(c)$，且每个点的平均距离计算次数下界不大于 $c(\log(n_R + 1) + 1 - \log(c))$。因此，总复杂度仍为 $\mathcal{O}(|X| \log(n_R))$ 量级。

7 结论

本文旨在汇总 GBPD 的一些其他性质，这些性质涉及仿射变换和平坦截面，尚未在文献中得到明确讨论，并且可能会在今后基于 GBPD 的随机建模中发挥作用。例如，结合第 3.4 节的结论与泊松点过程的映射定理，可以简单地得出：对于强度为 λ 的标记平稳泊松点过程 Ψ，如第 6 节所述，某个可逆 $d \times d$ 矩阵 A 所变换得到的 GBPD $A\mathcal{G}(\psi)$ 也由一个标记平稳泊松点过程 $A\Psi$ 生成，其强度为 $\lambda / |\det(A)|$。此外，本文展示了如何将一种优于蛮力法的算法应用于 GBPD，并以标记平稳泊松点过程为例证明了复杂度的改进。

参考文献

Alpers, A., Brieden, A., Gritzmann, P., Lyckegaard, A., & Poulsen, H. F. (2015年). 用于多晶体三维表示的广义平衡功率图。《哲学杂志》, 95(9), 1016–1028. https://doi.org/10.1080/14786435.2015.1015469 Alpers, A., Fiedler, M., Gritzmann, P., & Klemm, F. (2023). 将晶粒图转换为图表。《*SIAM*成像科学杂志》, 16(1), 223–249. https://doi.org/10.1137/22M1491988 Alpers, A., Furat, O., Jung, C., Neumann, M., Redenbach, C., Saken, A., & Schmidt, V. (2025).将镶嵌拟合至三维图像数据的算法比较分析. https: //doi.org/10.48550/arXiv.2507.14268 Altendorf, H., Latourte, F., Jeulin, D., Faessel, M., & Saintoyant, L. (2014). 通过各向异性镶嵌模型重建多尺度微观结构。《图像分析与立体学》, 33, 121–130. https://doi.org/10.5566/ias.v33.p121-130 Aurenhammer, F. (1987). 功率图：性质、算法与应用。《*SIAM*计算杂志》, 16(1), 78–96. https://doi.org/10.1137/0216006 Boyd, S. P. & Vandenberghe, L. (2004). 凸优化. 剑桥大学出版社. https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441 Buze, M., Feydy, J., Roper, S. M., Sedighiani, K., & Bourne, D. P. (2024年). 用于多晶体建模的各向异性幂图：通过最优传输高效生成曲面晶粒。《计算材料科学》, 245, 113317. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2024.113317 Chiu, S. N., Stoyan, D., Kendall, W. S., & Mecke, J. (2013). 《随机几何及其应用》(第3版). 约翰·威立父子出版公司. https://doi.org/10.1002/9781118658222

Jeulin, D. (2013). 随机镶嵌与布尔随机函数。《数学形态学及其在信号与图像处理中的应用》, 25–36. https://doi.org/10.1007/ 978-3-642-38294-9_3Jung, C. & Redenbach, C. (2024年). 二维广义平衡幂图的解析表示。计算几何：理论与应用, 121, 102101. https: // doi.org/10.1016/j.comgeo.2024.102101 Labelle, F. & Shewchuk, J. R. (2003). 各向异性沃罗诺伊图及有质量保证的各向异性网格生成。第十九届计算几何年度研讨会论文集, SCG '03, 191–200. https://doi.org/10.1145/777792.777822 Lautensack, C. (2007年). 随机拉盖尔镶嵌. 博士论文, 卡尔斯鲁厄大学（TH）. https://doi.org/10.5445/IR/1000006484 Lautensack, C. & Zuyev, S. (2008年). 随机拉盖尔镶嵌。应用概率进展（*SGSA*）, 40(3), 630–650. https://doi.org/10.1239/aap/1222868179 Møller, J. (1989年). $\mathbb{R}^d$中的随机镶嵌。应用概率进展, 21, 37–73. https://doi.org/ 10.2307/1427197 Moulinec, H. (2022 年). 一种用于计算点的离散沃罗诺伊图、Johnson-Mehl图或拉盖尔图的简单快速算法。工程软件进展, 170, 103150. https: // doi.org/10.1016/j.advengsoft.2022.103150 Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., & Chiu, S. N. (2000年). 《空间镶嵌：沃罗诺伊图的概念与应用》(第2版). 约翰·威立父子出版公司, 奇切斯特. https://doi. org/10.1002/9780470317013 Petrich, L., Furat, O., Wang, M., Krill III, C. E., & Schmidt, V. (2021年). 将三维镶嵌高效拟合至弯曲多晶晶界。材料前沿, 8, 760602. https: // doi.org/10.3389/fmats.2021.760602 Schneider, R. & Weil, W. (2008年). 随机几何与积分几何. 施普林格, 柏林. https: //doi.org/10.1007/978-3-540-78859-1 Teferra, K. & Graham-Brady, L. (2015年). 多晶微观结构的镶嵌生长模型。《计算材料科学》, 102, 57–67. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2015.02. 006 Teferra, K. & Rowenhorst, D. J. (2018年). 广义平衡幂图的直接参数估计。哲学杂志快报, 98(2), 79–87. https://doi.org/10.1080/09500839.2018. 1472399 van Nuland, T., van Dommelen, J., & Geers, M. (2021年). 一种用于生成具有优先生长方向的多晶微观结构的各向异性沃罗诺伊算法。《计算材料科学》, 186, 109947. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2020.109947 Šedivý, O., Brereton, T., Westhoff, D., Polívka, L., Beneš, V., Schmidt, V., & Jäger, A. (2016年). 使用具有弯曲晶界的镶嵌模型重建多晶材料中的晶粒。《哲学杂志》, 96(18), 1–24. https://doi.org/10.1080/14786435.2016.1183829 Šedivý, O., Dake, J., Krill III, C. E., Schmidt, V., & Jäger, A. (2017年). 使用由椭球体生成的镶嵌模型描述铝合金中晶界的三维形态。《图像分析与立体学》, 36(1), 5–13. https://doi.org/10.5566/ias.1656 Šedivý, O., Westhoff, D., Kopeček, J., Krill III, C. E., & Schmidt, V. (2018年). 数据驱动选择用于描述多晶微观结构的镶嵌模型。统计物理学杂志, 172(5), 1223– 1246. https://doi.org/10.1007/s10955-018-2096-8