arXiv:2601.18709v1 [math.RT] 26 Jan 2026

量子对称对余代数的权模

CATHARINA STROPPEL 和 LIAO WANG

摘要。我们为（$\mathfrak{gl}_4$，$\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$）的一种量子类似物建立权理论，并将其实现为量子对称对余代数。基于 Letzter 三角分解，我们定义 Verma 模。借助与权空间相容的“神奇”算子，我们对权 Verma 模进行分类，并刻画其不可约有限维商表示。随后，我们通过显式构造一些最高权向量，证明张量积中存在权基。这些构造使我们能够模拟经典有限维表示论的重要方面。其应用包括有理表示的定义、BGG 分解、Clebsch–Gordan 公式、Harish-Chandra 同构和中心特征，以及对所有不可约多项式表示的分类与描述。

目录

引言 1

1. 量子对称对预备知识 4 2. 经典对称对（$\mathfrak{gl}_4$，$\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$）6 3. 量子化卡坦子代数与 PBW 定理 8 4. Verma 模与有限维不可约模的分类 12 5. 有理表示与张量积表示 22 6. 中心特征与 Harish-Chandra 同态 35 参考文献 39

引言

在复约化李代数的经典表示论中，透彻理解基本情形 $\mathfrak{sl}_2$ 和 $\mathfrak{gl}_2$ 是整个理论的基石。受此原则启发，我们研究与 $(\mathfrak{gl}_4,\ \mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2)$ 相关联的量子对称对余代数的有限维表示论；这是 AIII 型的一个基本情形。我们的主要目标是发展一种类似于复约化李代数情形的（最高）权理论，其中 $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$ 被视为 $\mathfrak{gl}_4$ 的李子代数，并由一个对合的不动点构成；参见第 2 节。

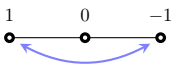
量子对称对由 [Let99]and [Let02] 引入，作为与对称对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\theta)$ 相关的泛包络代数 $U(\mathfrak{g}^\theta) \subset U(\mathfrak{g})$ 的量子类比，其中 $\mathfrak{g}^\theta$ 表示对合 θ 在约化复李代数 $\mathfrak{g}$ 上的不动点李代数。

[Let99], [Let02] 的一项重要成果是以 Serre型表示对 $U_q'(\mathfrak{g}^\theta)$ 作出统一表述；忽略低阶项后，这种表示与约化李代数的量子包络代数的通常表示相平行。代数 $U_q'(\mathfrak{g}^\theta)$ 构造为 $\mathfrak{g}$ 的量子包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 的子代数，并在适当的极限 $q \to 1$ 下特化为 $U(\mathfrak{g}^\theta)$。这些子代数并非 Hopf 子代数，但满足余理想 性质。因此，它们被称为量子对称对余理想子代数。Letzter 的构造已由 [Kol14] 扩展至 Kac–Moody情形，并由 [RV20] 进一步拓展。

随着 [BK15], [BW18], [ES18] 中引入条形对合和典范基，人们对量子对称对余理想子代数有了新的认识。尽管此后相关研究不断开展，量子对称对余理想子代数的 表示论 发展仍出人意料地滞后。尤其是，尽管 [Wat25], [Wat23], [Wat21], [Wat20], 和 [Wen20] 近期取得了进展，但有限维不可约表示的完整分类仍然缺失。与复约化李代数或紧李群的情形不同，目前尚无令人满意的最高权框架。因此，现有方法依赖于其他途径，例如 Gelfand–Tsetlin基类型的构造 [IK05] ，或部分权理论 [?Watanabe], [Wat23], [Wat21], ，后者通常以子代数 $\mathfrak{h}^\theta \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 为基础。由于 $\mathfrak{h}^\theta$ 通常远小于卡当子代数 $\mathfrak{g}^\theta$（例如，在我们的情形中，其维数只有所需维数的一半），因此无法捕捉完整结构。除特殊情形外， [Wen20], [Mol06], [KS25], 目前尚无合适的 Verma 模概念，因为量子对称对缺乏（良好的）三角分解。

二者 [BW18] 和 [ES18], 都考虑了没有黑节点的 AIII 型 Satake 图。根据节点数的奇偶性，相关的量子对称对分为两个截然不同的子族，见 (6)。关于（良好）有限维不可约模分类的先前研究包括：针对交换奇秩1情形的 [SW25], 针对偶秩1情形的 [AKR17],[AKR17], [Wat20, Thm. 3.1.6], 以及针对适当范畴 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}$ 中所有偶秩情形的 [Wat20, Thm.4.3.7]。我们研究奇数子族中最小的例子，尤其完成了所有基本情形下良好有限维模的分类。

为更详细地描述本文的结果，考虑与下列 Satake 图相对应的量子对称对余理想子代数 U_q' 。



$$\begin{array}{ll} \text{generators of } U_q': & \text{possible} \quad Z = [B_1, [B_0, B_{-1}]_{q^{-1}}]_{q^{-1}}, \\ B_0, B_{\pm 1}, \hat{D}_\diamond, \hat{D}_1. & \text{Cartan elements:} \quad W = [B_{-1}, [B_0, B_1]_{q^{-1}}]_{q^{-1}}. \end{array} \tag{1}$$

基于 [Let19], 中关于卡当子代数的概念，我们在推论 3.11 中构造了 $U_-' \otimes U_0' \otimes U_+'$ 的三角分解 U_q'。包含环境量子群的卡当子代数的不动点子代数以及余理想生成元 B_0 的 U_q' 的卡当子代数恰有两种选择。它们分别是由 $D_\diamond, D_1, B_0$ 生成的代数，其中 Z，以及 W。这两种选择——事实上， Z、W 本身——在经典极限下重合。我们偏好的选择 Z 相较于 W，与另一种选择及 Letzter 的选择仅相差一次条形对合的应用。我们的三角分解提升了经典三角分解（见引理 2.1），并有助于定义 Verma 模以及研究有限维 U_q'-模。经过适当的域扩张后，后者可作为 Verma 模的商得到，见命题 4.38。

然而，标准论证在此并不适用，因为 U_q' 的三角部分无法导出权理论，而 Verma 模通常缺少权空间分解。因此，我们将 U_0' 作用可对角化的良好 Verma 模与例外 Verma 模区分开来。

定理 A（定理 4.25）。设良好 *Verma* 模 $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\kappa_\diamond, \kappa_1, [\mu;\ 0], \zeta)$ 具有最高权向量 v。那么，它有一个有限维不可约商 L，当且仅当

$$\zeta = [\mu; \kappa - 2i] - q^{-\kappa}[\mu; 0] \quad \textit{for some } i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \textit{ with } 0 \leq i \leq \kappa. \tag{2}$$

在此情形下，L 是唯一的，并且具有权基 $\{F_+^a F_-^b v \mid 0 \leq a \leq i,\, 0 \leq b \leq \kappa - i\}$.

参数为“整数”的良好有限维不可约模构成有理表示，并提升经典有限维模（见定理 5.4）。尽管例外 Verma 模的有限维商表示对其最高权有一个良好条件（见（41）），但它们可能无法纳入统一理论，正如我们的例子所示。

接下来我们考虑多项式不可约有理表示，也就是说，在将 $U_q(\mathfrak{gl}_4)$ 限制到 U_q' 后，它们出现在自然表示的张量幂 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$中。由于与经典或量子群的情形不同，U_q' 的三角部分并非由本原元或类群元生成，权向量的张量积通常不是权向量，而且余理想生成元的作用难以控制。我们引入趣味（权）向量这一概念，它们是在 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$中归纳定义的权向量；我们通过一族依赖于权空间的神奇算子来描述 U_q' 生成元$B_{\pm 1}$ 的作用，见定义 4.9。这些算子可以由给定的权向量构造新的权向量，见定理 4.17 和定理 A。定理 5.5 表明，它们与张量积结构以一种引人入胜的方式相互作用。利用这一点，我们对 d 的任意两行二分拆（λ，μ），归纳地赋予一个 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$中的权向量 $\Omega(\lambda,\ \mu)$。下面的结果应能表明，我们是在模仿经典权理论：

定理 B. *a.*) 取最高权可得到一个双射

$$\begin{Bmatrix} \textit{isomorphism classes of irreducible} \\ \textit{polynomial representations of } U_q' \end{Bmatrix} \cong \{\ 2\textit{-row bipartitions of } d\}.$$

$$\mathsf{L}(\kappa_\diamond, \kappa_1, [n], [n+\kappa-2i] - q^{-\kappa}[n]) \mapsto \left((\frac{\kappa_\diamond + n}{2}, \frac{\kappa_\diamond + n}{2} - i), (\frac{\kappa_\diamond - n}{2}, \frac{\kappa_\diamond - n}{2} - \kappa + i) \right).$$

b.) *The* 向量 $\Omega(\lambda, \mu)$ 是一个权为 $(\hat{}D_\diamond, \hat{}D_1, B_0, Z, W)$的权向量$(q^{\kappa_\diamond}, q^{\kappa_1}, [n], \zeta, \omega)$ *wi* *th*

$$\kappa = \kappa_\diamond - \kappa_1, \qquad \kappa_\diamond = \lambda_1 + \mu_1, \qquad \kappa_1 = \lambda_2 + \mu_2, \qquad n = \lambda_1 - \mu_1,$$
$$\zeta = [\lambda_2 - \mu_2] - q^{-\kappa}[n], \quad \omega = q^{-2}[\lambda_2 - \mu_2] - q^{\kappa-2}[n].$$

It 是一个不可约直和项的最高权向量，其同构类型由 $(\lambda, \mu$给出).

利用舒尔–韦尔对偶，我们推导出一个更强的结果，即将 $\mathbb{V}_q^{\otimes}$ 显式完整地分解为同型分量。作为应用，我们证明了一个克莱布什–戈丹法则。

在定理 6.5 中，我们为 U_q' 的中心 $Z(U_q')$ 提出一种哈里什–钱德拉同态的类比，并提出韦尔群不变量的一种替代物。在定理 6.1 中，我们将 $Z(U_q')$ 实现为一个多项式代数，从而为 Kolb 和 Letzter [KL08] 的一般结果提供了一个具体体现。我们推导出中心特征可以区分不可约有理表示，见推论 6.3。

致谢。感谢 Stefan Kolb 提供宝贵的反馈并慷慨分享见解，也感谢 Martina Balagović 参与有益的讨论。我们感谢德国研究联合会戈特弗里德·威廉·莱布尼茨奖以及波恩豪斯多夫数学中心的支持。本文的结果是第二作者博士论文的一部分。

1. 量子对称对预备知识

记号 1.1。对于带有端同态 x 的向量空间 W，我们用 $W(x|\lambda)$ 表示 x 的 λ-特征子空间。更一般地，给定一组两两可交换的端同态 $x_1,\dots,x_m$，作用于 W，我们用 $W(x_1,\dots,x_m|\lambda_1,\dots\lambda_m)$ 表示 W 关于 x_i 具有特征值 λ_i 的同时特征子空间。

我们用 $\mathfrak{sl}_r \subset \mathfrak{gl}_r$ 分别表示 $r\times r$ 矩阵构成的复特殊李代数和一般李代数。

1.1. 量子群与量子对称对。我们取 $\mathbb{C}(q)$作为基域，它是关于 q 的有理函数域，并选取一个根 $\iota=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$。对 $n\in\mathbb{Z}$ 定义量子整数

$$[n]:=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}\in\mathbb{Z}[q,q^{-1}]\subset\mathbb{C}(q),\quad \text{and set}\quad \alpha_n=q^n-q^{-n}.$$

对于全序集 J，我们考虑线性定向图 Γ_J，其顶点集为 J，边集为 $I=\{i\to i+1\mid i,i+1\in J\}$，其中 $i+1$ 是 i 的覆盖。具体而言，我们使用

$$\Gamma_r \;=\; \overline{r}\xrightarrow{\ r\ }\cdots\xrightarrow{\ 2\ }\overline{1}\xrightarrow{\ 1\ }\overline{\diamondsuit}\xrightarrow{\ 0\ }\diamondsuit\xrightarrow{\ -1\ }1\xrightarrow{\ -2\ }\cdots\xrightarrow{\ -r\ }r\ ,$$

$$\Gamma'_r \;=\; -r\xrightarrow{\ r+\diamondsuit\ }\cdots\xrightarrow{\ 1+\diamondsuit\ }-1\xrightarrow{\ \diamondsuit\ }0\xrightarrow{\ -\diamondsuit\ }1\xrightarrow{\ -1-\diamondsuit\ }\cdots\xrightarrow{\ -r-\diamondsuit\ }r\ .$$

我们分别将边 e 的起点和终点记为 $\sigma(e)$ 和 $\tau(e)$。

定义1.2。与 Γ_J 相关联的量子群 $U_q(\Gamma_J)\ \cong\ U_q(\mathfrak{gl}_{|J|})$是由 E_i,F_i 生成的 $\mathbb{C}(q)$-代数，其中 $i\in I$ 满足条件 $D_j^{\pm1}$，且 $j\in J$满足以下关系

$$\begin{aligned} &D_jD_j^{-1}=1=D_j^{-1}D_j,\quad D_jE_iD_j^{-1}=q^{\delta_{\sigma(i),j}-\delta_{\tau(i),j}}E_i,\\ &D_jF_iD_j^{-1}=q^{-\delta_{\sigma(i),j}+\delta_{\tau(i),j}}F_i,\quad E_iF_{i'}-F_{i'}E_i=\delta_{ii'}\frac{K_i-K_i^{-1}}{q-q^{-1}}, \end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\text{若 } i-i'\text{:}\qquad E_iE_{i'}=E_{i'}E_i,\qquad\qquad F_iF_{i'}=F_{i'}F_i,\\ &\text{若 } i\not\sim i'\text{:}\ E_i^2E_{i'}-[2]_qE_iE_{i'}E_i+E_{i'}E_i^2=0\text{和}\quad F_i^2F_{i'}-[2]_qF_iF_{i'}F_i+F_{i'}F_i^2=0\quad , \end{aligned}\tag{4}$$

其中 δ 是克罗内克符号，且$K_i=D_{\sigma(i)}D_{\tau\,i\,()}^{-1}\in e_{\tau(i)}$。

对于 $p\in\mathbb{C}(q)^*$, $A,B\in U_q(\Gamma_J)$，令 $[A,B]_p=AB-pBA$。注意到 $[A,B]_p=-p[B,A]_{p^{-1}}$和

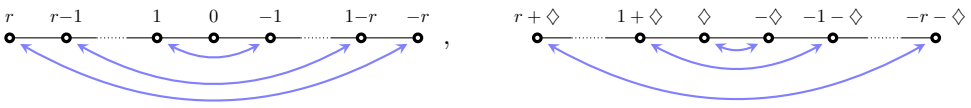
$$[A,[B,C]_p]+[B,[C,A]_p]+[C,[A,B]_p]=0\quad\text{for all } A,\ B,\ C\in U_q(\Gamma_J),\ p\in\mathbb{C}(q).\tag{5}$$

量子群 $U_q(\Gamma_J)$ 是一个 Hopf代数，其余乘法 Δ 由下式给出

$$\Delta(E_i)=E_i\otimes1+K_i\otimes E_i,\quad \Delta(F_i)=F_i\otimes K_i^{-1}+1\otimes F_i,\quad \Delta(D_j)=D_j\otimes D_j.$$

设 $\mathbb{V}_q$是 $U_q(\Gamma_J)$ 的自然表示。它的基为 e_j，$j\in J$，作用 $F_ie_j=\delta_{j,\ \sigma(i)}e_{\tau(i)}$,$E_ie_j=\delta_{j,\ \tau(i)}e_{\sigma(i)}$。因此，线性图 Γ_J 实际上是 $\mathbb{V}_q$的晶体图。

分别与线性图 Γ_r、Γ'_r 相关联的是量子对称对余理想子代数 [。令 99] [，令 02]，对应于没有黑点的 AIII 型 Satake 图：



(6)

由于 Γ_r' 的有限维表示论已在 [Wat20]，中得到详细讨论，我们将范围限定在 Γ_r 的情形，因此只考虑 (6) 中的第一个图。

定义 1.3. 与 (6) 中第一个 Satake 图相关联的量子对称对余理想子代数 $U_q'(\Gamma_r)$，是由以下元素生成的 $U_q(\Gamma_r)$ 的子代数：

$$B_{\pm i} \coloneqq F_{\pm i} + E_{\mp i} K_{\pm i}^{-1} \text{ for } 1 \le i \le r, \quad B_0 \coloneqq F_0 + q^{-1} E_0 K_0^{-1}, \quad \hat{D}_j^{\pm 1} := (D_i D_{\overline{j}})^{\pm 1} \text{ for } j \in J.$$

这些生成元的表示的定义关系如下：

$\{B_i\}_{i\neq 0}$ 和 $\{D_j D_{-j}\}$ 满足 (3)、(4) 中的 $U_q(\Gamma_r)$-关系[1] 、关系 $[B_0, \hat{} D_j] = 0$，以及以下量子 Serre 关系：

$$B_0^2 B_{\pm 1} - [2] B_0 B_{\pm 1} B_0 + B_{\pm 1} B_0^2 = B_{\pm 1}, \quad B_{\pm 1}^2 B_0 - [2] B_{\pm 1} B_0 B_{\pm 1} + B_0 B_{\pm 1}^2 = 0, \tag{7}$$

or e等价地，按 (5) 中的记号，$[B_0, [B_0, B_{\pm 1}]_{q^{-1}}]_q = B_{\pm 1}$、$[B_{\pm 1}, [B_{\pm 1}, B_0]_{q^{-1}}]_q = 0$.

对于 $i < 0$，我们令 $\hat{} K_i = K_i K_{-i}^{-1}$。以下引理显然可由定义关系得到 :

引理 1.4。 赋值 $\tau(B_i) = B_{-i}$, $\tau(\hat{} D_j) = \hat{} D_j^{-1}$ 在 U_q'上定义了一个代数对合 τ。

对 $(U_q'(\Gamma_r)\ U_q(\Gamma_r))$ 是对称对 $(\mathfrak{gl}_{r+1} \times \mathfrak{gl}_{r+1}, \mathfrak{gl}_{2r+2})$ 的一个量子类似物。与经典情形不同， $U_q'(\Gamma_r)$ 不是 $U_q(\Gamma_r)$ 的 Hopf 子代数，例如，

$$\Delta(B_1) = 1 \otimes B_1 + B_1 \otimes K_1^{-1} + (K_1^{-1} K_{-1} - 1) \otimes E_{-1} K_1^{-1} \notin U_q'(\Gamma_r) \otimes U_q'(\Gamma_r).$$

相反，它是一个右余理想子代数，因此作用于 $\mathbb{V}_q$ 的张量幂。

1.2. **与类型 B Hecke 代数 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$的舒尔–韦尔对偶**。 设 $d \in \mathbb{N}$。

Defi定义 1.5。 Hecke 代数 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$ 由 $H_0, H_1, \ldots, H_{d-1}$ 生成，并满足

$$H_0^2 = 1, \qquad H_0 H_1 H_0 H_1 = H_1 H_0 H_1 H_0,$$
$$H_i H_{i+1} H_i = H_{i+1} H_i H_{i+1}, \qquad H_i H_j = H_j H_i \text{ for } |i-j| > 1.$$

$\mathscr{H}_{1,\ q}(\mathrm{B}_d)$ 的经典对应物是 B型魏尔群 $W(\mathrm{B}_d)$ 的群代数。

定义 1.6 定义。$\mathscr{H}_{1,\ q}(\mathrm{B}_d)$ 代数包含递归定义的*Jucys–Murphy 元*

$$J_1 \coloneqq H_0, \qquad J_i = H_{i-1} J_{i-1} H_{i-1}, \text{ for } 2 \le i \le d.$$

它们两两交换， [AK94]。

定义 1.7 定义。 $\mathbb{K}$-矩阵 是由矩阵 $\mathbb{K} = (\delta_{i,\ 2r-i+2})$ 给出的 $\mathbb{V}_q$ 的端同态。

$\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$在 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$上有如下作用： H_0 通过 $\mathbb{K}$作用于第一个张量因子 $\mathbb{V}_q$ ， 而 H_i 通过 H作用于第 i个和第（$i+1$）个张量因子： $\mathbb{V}_q^{\otimes 2} \to \mathbb{V}_q^{\otimes 2}$定义为

$$H(e_i \otimes e_j) \quad = \quad \begin{cases} e_j \otimes e_i + (q^{-1} - q) \cdot e_i \otimes e_j & \text{if } i \prec\cdots\ j \text{ in } \Gamma, \\ e_j \otimes e_i & \text{if } j \prec\cdots\ i \text{ in } \Gamma, \\ q^{-1} \cdot e_i \otimes e_i & \text{if } i = j, \end{cases} \tag{8}$$

其中， $i \prec\cdots\ j$ 表示在 Γ 中存在一条从 j 到 i的路径。

[1]也就是说 通常的量子群关系，其中 E_i, F_i, D_j 分别替换为 $\{B_{-i}\}_{i>0}$、 $\{B_i\}_{i>0}$、 $\hat{} D_j$ ly.

定理 1.8 (Ehrig–Stroppel, Bao–Wang)。 以下舒尔–韦尔对偶结果成立： U_q' 在 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$上的作用与 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$ 互为中心化子。

推论 1.9. U_q'在 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$上的作用是半单的。

舒尔–韦尔对偶与推论 *1.9* 的证明。 舒尔–韦尔对偶见 [ES18, Thm. 10.4]. 由双中心化子定理可知, U_q' 在 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$上的作用是半单的，因为$\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$是半单的，见 [DJ92, Rk. 5.4, Thm. 5.5]. □

与 $W(\mathrm{B}_d)$-模类似， [GP00, 5.5.4], [MS16, 5.5.4] 上简单模$\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$由 d 的二分拆标记，也称为 Specht 模 $\mathbb{S}(\lambda,\mu)$，参见 [AK94, Thm. 3.10]. 我们用 $\mathbb{S}_q(\lambda,\mu)$表示与二分拆$(\lambda,\mu)$对应的 Specht 模。它有一组以形状为$(\lambda,\mu)$的标准双表为标记的基；这些双表由形状为 λ 和 μ 的表组成，总共有 $\{1,2,\dots,d\}$ 个条目，且每个部分中各行和各列的条目都严格递增。给定一个形状为(λ,μ)的标准双表 T，在 T 中填有 i 的方框的内容（即其列号减去行号）记为 $\mathrm{cont}_T(i)$。Jucys–Murphy 元 J_j 在对应于 T的基向量上的作用为：若 i位于T的第一个分拆中，则为 $q^{-2\,\mathrm{cont}_T(i)}$；若 i位于 T的第二个分拆中，则为 $-q^{-2\,\mathrm{cont}_T(i)}$；详情见 [AK94] 和 [Od12, §5]。

引理 1.10。 *Jucys–Murphy* 元 J_i 在 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$上的作用可同时对角化，且其特征值属于 $\pm q^{\pm 2\mathbb{Z}}$。同时特征值能够区分$\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$的简单模。

证明。 由推论 1.9， $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$在 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$上的表示是半单的；根据简单模的构造，Jucys–Murphy 元可对角化，其特征值编码了二分拆的内容，因而也编码了其形状。详细信息参见 [AK94], [Od12，第 14] 定理。□

1.3. **主要对象**。 在本文余下部分，我们考虑线性定向图 Γ_1，其边标记为 $-1,0,1$，顶点标记为 $\overline{1},\diamondsuit,\overline{\diamondsuit},1$，并配有相应的 Satake 图

$$\Gamma_1 \;=\; \overline{1} \xrightarrow{\;1\;} \overline{\diamondsuit} \xrightarrow{\;0\;} \diamondsuit \xrightarrow{\;-1\;} 1 \qquad\qquad 1 \quad 0 \quad -1 \;. \tag{9}$$

记号 1.11。 我们将 $U_q' = U_q'(\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2)$ 简记为 U_q'，并考虑以下元素：

$$B_0 = F_0 + q^{-1}E_0K_0^{-1}, \quad \hat{K} = K_1^{-1}K_{-1} = \hat{D}_{\diamondsuit}\hat{D}_1^{-1}, \quad \hat{D}_{\diamondsuit} = D_{\diamondsuit}D_{\overline{\diamondsuit}}, \quad \hat{D}_1 = D_1D_{\overline{1}}.$$

N记号 1.12。 根据式 (9)，我们将 $\mathbb{V}_q$ 的标准基记为 e_1，$e_{\overline{\diamondsuit}}$，$e_{\diamondsuit}$，$e_{\overline{1}}$。

2. Classical symmetric pair $(\mathfrak{gl}_4, \mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2)$

接下来，我们从对称对的角度重新审视 $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$ 的经典表示论。特别是，我们为不可约表示提供一个规范的标记集。本节中，我们固定基域 $\mathbb{C}$。 U_q' 的经典对应物是李代数 $\mathfrak{gl}_4^{\theta}$ 的不动点所构成的泛包络代数，其中该李代数由对合 θ 在 $\mathfrak{gl}_4$ 上的作用定义，而该作用是将矩阵旋转 180°得到的。具体而言， $\mathfrak{gl}_4^{\theta}$ 由以下元素生成

$$b_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & & & \\ & & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \\ & 0 & & \end{pmatrix}, \quad d_0 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

存在一个李代数同构 φ： $\mathfrak{gl}_2^+ \times \mathfrak{gl}_2^- := \mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2 \cong \mathfrak{gl}_4^\theta$，其定义如下

$$(x,0) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} JxJ & Jx \\ xJ & x \end{pmatrix}, \quad (0,x) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} JxJ & -Jx \\ -xJ & x \end{pmatrix}, \text{ where } J = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

记 $\mathfrak{gl}_2$ 的标准基为 $l_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。则 b_0、 b_1、 b_{-1}、 d_0、 κ_1 在 φ 下分别对应于 $(l_0,-l_0)$、(e,e)、(f,f)、(l_0,l_0)、(l_1,l_1)。因此， $b_{\pm 1}$、 d_0、 κ_1 生成了 $\mathfrak{gl}_2 \subset \mathfrak{gl}_4^\theta$ 的对角嵌入副本。 φ 的逆为

$(l_0,\ 0)$	$(l_1,\ 0)$	$(e,\ 0)$	$(f,\ 0)$
$\frac{1}{2}(d_0 \pm b_0)$	$\frac{1}{2}(\kappa_1 \pm z \pm b_0)$	$\frac{1}{2}(b_1 \pm [d_0, b_1])$	$\frac{1}{2}(b_{-1} \pm [d_0, b_{-1}])$

. (10)

In c在有两个符号的情形下，这里的上/下指的是 $\mathfrak{gl}_2^{\pm}$的 $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$ an 的第一/第二个副本 d

$$z = \varphi(l_1 - l_0, l_0 - l_1) = [b_1, [b_0, b_{-1}]] = \begin{pmatrix} & -1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_4^\theta.$$

稍后我们将对这些元素进行量子化，并同时记录以下显而易见的事实 :

引理 2.1. $\mathfrak{gl}_4^\theta$ 的标准卡当子代数 $\mathfrak{h}$ 以对角卡当元 d_0、 κ_1 和反对角卡当元 b_0、 z为基。

2.1. **经典张量幂分解**。 记 $\mathbb{V}$ 为 $\mathfrak{gl}_4$ 的定义表示，其标准基为e_1、$e_{\diamondsuit}$、 $e_{\diamondsuit}$、 e_{1}。限制到 $\mathfrak{gl}_4^\theta$后， $\mathbb{V}$ 分解为两个不可约直和项:

$$\mathbb{V} = M_+ \oplus M_-, \text{ where } M_\pm = \operatorname{span}\{w_{\diamondsuit}^\pm, w_1^\pm\}, \text{ with } w_{\diamondsuit}^\pm = e_{\diamondsuit} \pm e_{\overline{\diamondsuit}}, \quad w_1^\pm = e_1 \pm e_{\overline{1}}.$$

T因子 $\varphi(\mathfrak{gl}_2^{\pm}) \subset \mathfrak{gl}_4^\theta$ 仅在 $M_\pm$上非平凡作用，后者是 $\mathfrak{gl}_2$的定义表示 .

在 $\mathbb{V}^{\otimes d}$上有 $W(\mathrm{B}_d)$的作用，其中特殊 B 型生成元 $s_0 \in W(\mathrm{B}_d)$通过经典的 K矩阵作用于第一个张量因子，其特征子空间分解为 ± 1 $\mathbb{V} = M_+ \oplus M_-$，而其他生成元则置换张量因子，参见例如 [MS16，第 3 节.3] ，或将 (8) 特化。

定义 2.2. 设 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。如果一个分拆具有如下形式 (λ_1, λ_2)，且满足 $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 = d$，则称其为 d 的两行分拆 λ 。如果二分拆 (λ, μ) 中的 λ 和 μ 都是两行分拆，则称其为两行双分拆 。

回忆一下， $\mathfrak{gl}_2$ 的不可约多项式表示，即自然表示的张量幂的直和项，是由两行分拆 λ标记的最高权模 L_λ 。因此， $\mathfrak{gl}_4^\theta$的不可约多项式表示 ，即某个 $\mathbb{V}^{\otimes d}$的直和项，是 $L(\lambda, \mu)$，其中二分拆 (λ, μ) 为两行双分拆，且作为向量空间 $L(\lambda, \mu) = L_\lambda \boxtimes L_\mu$。

定理 2.3. 张量积 $\mathbb{V}^{\otimes d}$ 中 $L(\lambda, \mu)$ 的重数由下式给出

$$\mathbb{V}^{\otimes d} = \bigoplus_{|\lambda|+|\mu|=d} L(\lambda, \mu) \boxtimes \mathbb{S}(\lambda, \mu). \tag{11}$$

证明。 在此情形下，这可由施尔-韦伊对偶推出，参见例如 [MS16, §3.4]。 □

注 2.4。 可以在 $W(\mathrm{B}_d)$ 的群代数中归纳地定义“经典的”Jucys-Murphy 元为 $J_1 = s_0$ 和 $s_i J_i s_i$。这些元素可同时对角化 $\mathbb{V}^{\otimes d}$ ，其特征值为± 1，但这些特征值不能 区分不可约 $\mathfrak{gl}_4^\theta$ 或 $W(\mathrm{B}_d)$-模。Jucys-Murphy 元的正确经典类比是 $(J_i - 1)/(q - q^{-1})$ 的某些极限，见 [Od12， §6]。

定义以下元素，并注意到 $e_{\pm}$， $f_{\pm}$ 仅对 $M_{\pm}$ 有非平凡作用，并湮灭 $M_{\mp}$，

$$e_+ = \varphi(e,0), \quad e_- = \varphi(0,e), \quad f_+ = \varphi(f,0), \quad f_- = \varphi(0,f) \quad \in \mathfrak{gl}_4^\theta.$$

定理 2.5 (B_0-特征子空间）。 以下结论对 $\mathfrak{gl}_4^\theta$ 的表示 M 成立。

a.) 我们有 $f_\pm M(b_0 \mid \lambda) \subset M(b_0 \mid \lambda \mp 1)$ 以及 $e_\pm M(b_0 \mid \lambda) \subset M(b_0 \mid \lambda \pm 1)$。

b.) b_0 在 $M = \mathbb{V}^{\otimes d}$ 上的作用是可对角化的，其特征值属于 $\mathbb{Z}$。事实上，

$$b_0(w_{i_1}^{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_d}^{\epsilon_d}) = (\sum \epsilon_j \delta_{i_j,\diamondsuit}) w_{i_1}^{\epsilon_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_d}^{\epsilon_d}. \tag{12}$$

c.) $M = L(\lambda,\mu) \boxtimes \mathbb{S}(\lambda,\mu) \subset \mathbb{V}^{\otimes d}$中极大向量的空间，对于 d的任意两行双分拆(λ,μ) ，是由以下元素生成的 $\mathbb{C}S_d$-模（通过置换因子作用）：

$$\omega(\lambda,\mu) \coloneqq (w_\diamondsuit^+ \wedge w_1^+)^{\otimes\lambda_2} \otimes (w_\diamondsuit^- \wedge w_1^-)^{\otimes\mu_2} \otimes (w_\diamondsuit^+)^{\otimes(\lambda_1-\lambda_2)} \otimes (w_\diamondsuit^-)^{\otimes(\mu_1-\mu_2)}.$$

此外，我们有 $b_0 \cdot \omega(\lambda,\mu) = (\lambda_1 - \mu_1)\omega(\lambda,\mu)$。

证明。对于第一部分，注意到 $[b_0, f_\pm] = \mp f_\pm$，且 $[b_0, e_\pm] = \pm e_\mp$。根据定义， b_0 在 $w_\diamondsuit^\pm$ 上的作用由 ± 1 给出，并且它会湮灭 $w_1^\pm$。因此， $w_\diamondsuit^\pm$、 $w_1^\pm$中的纯张量是 b_0的特征向量。直接验证（12）可知，这已经给出了 $\mathbb{V}^{\otimes d}$的一个特征基。由于 $x \in \mathfrak{gl}_4^\theta$ 的作用是 $\sum 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes x\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1$ 在每个张量因子上的作用之和，我们有 $e_\pm\omega(\lambda,\mu) = 0$ 和$b_0\omega(\lambda,\mu) = (\lambda_1 - \mu_1)\omega(\lambda,\mu)$。由于 $\varphi(\mathfrak{gl}_2^\dagger)$会湮灭$(w_\diamondsuit^- \wedge w_1^-)^{\otimes k}$ 以及$(w_\diamondsuit^-)^{\otimes l}$，其中 k、 l任意，因此可得 $\varphi(\mathfrak{gl}_2^\dagger)\omega(\lambda,\mu) \cong \varphi(\mathfrak{gl}_2^\dagger)\omega(\lambda,\emptyset) \cong L_\lambda$；类似地， $\varphi(\mathfrak{gl}_2^-)\omega(\lambda,\mu) \cong \varphi(\mathfrak{gl}_2^-)\omega(\emptyset,\mu) \cong L_{\mu^\circ}$ 由于$\mathfrak{gl}_4^\theta\omega(\lambda,\mu)$不可约，我们得到 $\mathfrak{gl}_4^\theta\omega(\lambda,\mu) \cong L(\lambda,\mu)$。现在， $L(\lambda,\mu)\boxtimes\mathbb{S}(\lambda,\mu)$的极大向量恰好是由 $\omega(\lambda,\mu)$经置换因子得到的向量所张成的空间，因为根据 $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$的施尔-韦伊对偶，(11)实际上是一个双模分解；参见例如 [MS16，第3.4]节。□

2.2. **的有限维表示** $\mathfrak{gl}_4^\theta$。 $\mathfrak{gl}_4^\theta$ 和$\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$ 的有限维表示是半单的。对于 $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$，此类不可约表示的同构类由其最高权确定，而这些最高权与

$$\{(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}^2$$

such 其中 (l_0， 0) (0， l_0) (l_1， 0) (0， l_1)分别以 λ_1、 μ_1、 λ_2、 μ_2 作用于一个极大向量。

回顾引理 2.1 中的卡当子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}_4^\theta$ ，我们总结如下观察结果：

定理 2.6。取最高权 $L \mapsto (\lambda,\mu)$，可诱导一个双射

$$\left\{ \begin{matrix} \textit{isomorphism classes of finite dimensional} \\ \textit{irreducible representations of } \mathfrak{gl}_4^\theta \end{matrix} \right\} \quad \cong \quad \{(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}^2 \tag{13}$$

其逆映射为 $(\lambda,\mu) \mapsto L(\lambda,\mu)$，使得 λ_1、 μ_1、 λ_2、 μ_2 分别是最高权向量上元素$1_2(b_0+d_0)$、$1_2(d_0-b_0)$、$\bar{1}_2(\kappa_1+z+\hbar_0)1_2(\kappa_1-\bar{z}-b_0)$ 作用的特征值。

注 2.7。 b_0、 z、 d_0、 κ_1 对 $L(\lambda,\ \mu)$ 的最高权向量的作用，分别等于乘以 $\lambda_1 - \mu_1$、 $\lambda_2 - \mu_2 - \lambda_1 + \mu_1$、 $\lambda_1 + \mu_1$ 和 $\lambda_2 + \mu_2$。

3. 量子化卡坦子代数与 PBW 定理

我们在 U_q' 中构造引理 2.1 中卡当子代数的量子类似物，并为 U_q' 构造记号 1.11 中的三角分解。这将使我们能够定义 Verma 模。

3.1. **量子化卡坦子代数**。我们将引理 2.1 中的元素量子化，并且 ɦ: **定义 3.1**。在 U_q' 中定义以下元素:

$$X = [B_0, B_1]_{q^{-1}}, \quad Y = [B_0, B_{-1}]_{q^{-1}}, \quad Z = [B_1, Y]_{q^{-1}}, \quad W = [B_{-1}, X]_{q^{-1}} \in U_q'.$$

令 U_0'为由ˆ $D_\diamondsuit$、ˆD_1、 B_0和 Z生成的 U_q'的子代数。

Lemm命题 3.2。以下定义关系直接推出接下来两行中的关系 *es:*

$$\hat{D}_\diamondsuit B_1 = qB_1\hat{D}_\diamondsuit, \quad \hat{D}_\diamondsuit B_{-1} = q^{-1}B_{-1}\hat{D}_\diamondsuit, \quad \hat{D}_1 B_1 = q^{-1}B_1\hat{D}_1, \quad \hat{D}_1 B_{-1} = qB_{-1}\hat{D}_1,$$

$$\hat{D}_\diamondsuit X = qX\hat{D}_\diamondsuit, \qquad \hat{D}_\diamondsuit Y = q^{-1}Y\hat{D}_\diamondsuit, \qquad \hat{D}_1 Y = qY\hat{D}_1, \qquad \hat{D}_1 X = q^{-1}X\hat{D}_1.$$

$$\hat{K}B_1 = q^2B_1\hat{K}, \qquad \hat{K}B_{-1} = q^{-2}B_{-1}\hat{K}, \qquad \hat{K}X = q^2X\hat{K}, \qquad \hat{K}Y = q^{-2}Y\hat{K}.$$

理 **题 3.3**。代数 U_0'是交换的，因为以下关系对于 i、 $j \in J$成立 *:*

$$[\hat{D}_i, \hat{D}_j] = [B_0, \hat{D}_i] = [Z, B_0] = [\hat{D}_i, Z] = 0, \quad \textit{and} \quad [W, \hat{D}_i] = [W, B_0] = [Z, W] = 0. \tag{14}$$

证明。显然， [ˆD_i、ˆD_j] = 0 和 $[B_0, \hat{}D_i] = 0$ 由定义成立。利用后者，我们计算 $[Z, B_0]$ 为

$\underbrace{B_1YB_0}_{3\,4\,5\,6} - \underbrace{q^{-1}B_0B_{-1}B_1B_0}_{} + \underbrace{q^{-2}B_{-1}B_0B_1B_0}_{} - \underbrace{B_0B_1B_0B_{-1}}_{} + \underbrace{q^{-1}B_0B_1B_{-1}B_0}_{} + \underbrace{q^{-1}B_0YB_1}_{}$与$_{1\,2}$

①−④ = $B_1(B_0B_{-1}B_0 - q^{-1}[2][2]^{-1}B_{-1}B_0^2 - [2]^{-1}B_0^2B_{-1} + [2]^{-1}B_{-1}) - [2]^{-1}B_0^2B_1B_{-1}$

= $-[2]^{-1}(q^{-2}B_1B_{-1}B_0^2 + B_0^2B_1B_{-1}$⑥ + ③ = $q^{-2}($(

$q[2][2]^{-1}B_0B_0B_{-1} - B_0B_{-1}B_0 + [2]^{-1}B_{-1}B_0B_0 - [2]^{-1}B_{-1})B_1 + [2]^{-1}B_{-1}B_1B_0^2$)= $[2]^{-1}($

$B_0^2B_{-1}B_1 + q^{-2}B_{-1}B_1B_0^2)$.

我们得到 $[Z, B_0] = -[2]^{-1}(q^{-2}[B_1, B_{-1}]B_0^2 + B_0^2[B_1, B_{-1}]) + q^{-1}B_0[B_1, B_{-1}]B_0 = (\frac{q^{-2}+1}{-[2]} + q^{-1})$

$B_0^2[B_1, B_{-1}]$、ˆ，从而得到 $[Z, B_0] = 0$。展开定义可见， $[D_i, Z] = 0$。因此，U_0'是交换的。

应用 将引理 1.4 中的对合应用于 $[Z, B_0] = 0$ 得到 $[W, B_0] = 0$，且由于 Z， W可交换，原因是

$$\begin{aligned}
[Z, W] &= ZB_{-1}X - q^{-1}ZXB_{-1} - B_{-1}XZ + q^{-1}XB_{-1}Z \\
&= q(B_{-1}Z - q^{-2}[2]\hat{K}^{-1}Y)X - q^{-2}(XZ - [2]\hat{K}^{-1}B_1)B_{-1} - B_{-1}XZ + q^{-1}XB_{-1}Z \\
&= -B_{-1}[X, Z]_q + q^{-1}X[B_{-1}, Z]_{q^{-1}} - q^{-1}[2]\hat{K}^{-1}YX + q^{-2}[2]\hat{K}^{-1}B_1B_{-1} \\
&= [2](-B_{-1}\hat{K}^{-1}B_1 + q^{-3}X\hat{K}^{-1}Y - q^{-1}\hat{K}^{-1}YX + q^{-2}\hat{K}^{-1}B_1B_{-1}) \\
&= [2]\hat{K}^{-1}(q^{-2}[B_1, B_{-1}] + q^{-1}[X, Y]) = 0,
\end{aligned}$$

其中我们使用了下方引理中的 (17) 和 (18)，最后使用了 (16)。 □

引理 3.4。使用记号 *1.11*，以下等式在 U_q'中成立。

$$B_1X = q^{-1}XB_1, \qquad B_{-1}Y = q^{-1}YB_{-1}, \qquad [B_0, X]_q = B_1, \qquad [B_0, Y]_q = B_{-1}, \tag{15}$$

$$[X, Y] = -q^{-1}[\hat{K}; 0], \qquad \hat{K}X = q^2X\hat{K}, \qquad \hat{K}Y = q^{-2}Y\hat{K}. \tag{16}$$

证明。注意到，(15) 与关系式 (7) 等价，例如 $[B_0, X] = [B_0, [B_0B_1]_{q^{-1}}]_q = B_1$。对于 (16)，我们有 ˆ$_{KY}$ = ˆ $KB_0B_{-1} - q^{-1}\hat{}KB_{-1}B_0 = q^{-2}B_0B_{-1}\hat{}K - q^{-1}q^{-2}B_{-1}\hat{}KB_0 = q^{-2}Y\hat{}K$， 而对 X 的类似结论可通过应用引理 1.4 中的对合得到。□

引理 3.5。 以下关系成立

$$[B_{-1},Z]_{q^{-1}}=q^{-2}[2]\hat{K}^{-1}Y,\quad [Z,B_1]_{q^{-1}}=-q^{-3}[2]X\hat{K}^{-1}+(q^{-1}-q^{-5})B_1B_0\hat{K}^{-1}, \tag{17}$$

$$[X,Z]_q=[2]\hat{K}^{-1}B_1,\quad [Z,Y]_q=-q[2]B_{-1}\hat{K}^{-1}-(q^3-q^{-1})YB_0\hat{K}^{-1}, \tag{18}$$

$$[B_1,W]_{q^{-1}}=q^{-2}[2]\hat{K}X,\quad [B_{-1},W]_q=q^{-2}[2]Y\hat{K}-(1-q^{-4})B_{-1}B_0\hat{K}, \tag{19}$$

$$[Y,W]_q=[2]\hat{K}B_{-1},\quad [X,W]_{q^{-1}}=q^{-4}[2]\hat{K}B_1+(q^{-1}-q^{-5})B_0\hat{K}X, \tag{20}$$

$$W=q^{-2}Z-q^{-2}(q-q^{-1})[\hat{K};0]B_0-(q^{-2}-1)B_{-1}X-q^{-2}(q-q^{-1})YB_1. \tag{21}$$

证明。 证明可通过应用引理 3.4 进行计算得出。 □

注记 3.6。 定理 3.3 中的构造属于更一般的框架 [设19]„ 其中 Letzter（部分受到与第一作者基于我们的小例子的讨论的启发）为约化李代数的量子对称对余理想子代数引入了卡当子代数的类似物。经过条形对合后，我们的代数与 Letzter 的构造一致。由于定义相当复杂，这些代数尚未得到广泛研究。虽然它们具有量子化卡当子代数和 Borel 子代数的一些理想性质，但并非全部如此，我们将在基本例子中详细说明这一点。

3.2. **PBW型基**。 在 $R=\{B_{-1},Y,\hat{}D_i,B_0,Z,B_1,X\}$ 上固定一个全序，规定为

$$B_{-1}>Y>B_1>X>B_0>Z>\hat{D}_{\diamondsuit}>\hat{D}_1.$$

我们将 $\mathrm{m}_{f,y,e,x,b,z,k_{\diamondsuit},k_1}:=B_{-1}^{f}Y^{y}B_1^{e}X^{x}B_0^{b}Z^{z}\hat{}D_{\diamondsuit}^{k_{\diamondsuit}}\hat{}D_1^{k_1}$简写为 $f,y,b,z,e,x\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k_i\in\mathbb{Z}$，并约定：如果某些 $f,y,b,z,e,x\notin\mathbb{Z}_{\geq 0}$，或某些 $k_i\notin\mathbb{Z}$，则使用 $\mathrm{m}_{f,y,e,x,b,z,k_{\diamondsuit},k_1}=0$。

定理 3.7 （PBW基）。 以下PBW单项式 构成 U_q' 的一组基：

$$\left\{\mathrm{m}_{f,y,e,x,b,z,k_{\diamondsuit},k_1}\mid f,y,b,z,e,x\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\,k_{\diamondsuit},k_1\in\mathbb{Z}\right\}.$$

在 U_q' 上存在一个滤链$\mathcal{F}$，其中 $\mathcal{F}^{\leq i}$ 定义为 $\{\mathrm{m}_{f、y、e、x、b、z、k_{\diamondsuit}、k_1}\mid f+y+e+x\leq i\}$ 的张成空间，其关联分次代数为$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}U_q'\cong\mathbb{C}（q）[\mathtt{f、y、e、x、b、z}][\mathtt{k}_{\diamondsuit}^{\pm 1},\ \mathtt{k}_1^{\pm 1}]$。

证明。 应用引理 3.4 和引理 3.5 中的交换子关系，生成元的任意单项式都可以写成 PBW 单项式的线性组合。我们需要证明这些 PBW 单项式线性无关。为此，令 P $\mathbb{C}(q)$-向量空间以 p_λ 为基，其中 $\lambda=(f,y,b,z,e,x,k_{\diamondsuit},k_1)$ 遍历与 PBW 单项式 m_λ 相同的标记集。

我们通过令生成元作用于 p_λ，对 $\lambda=(f,y,b,z,e,x,k_{\diamondsuit},k_1)$，从而定义 U_q'在 P上的作用：

$$B_{-1}\cdot\mathrm{p}_\lambda = \mathrm{p}_{(f+1,y,e,x,b,z,k_{\diamondsuit},k_1)}, \tag{22}$$

$$\hat{D}_{\diamondsuit}\cdot\mathrm{p}_\lambda = q^{e+x-f-y}\,\mathrm{p}_{(f,y,e,x,b,z,k_{\diamondsuit}+1,k_1)}, \tag{23}$$

$$\hat{D}_1\cdot\mathrm{p}_\lambda = q^{f+y-e-x}\,\mathrm{p}_{(f,y,e,x,b,z,k_{\diamondsuit},k_1+1)}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}B_0\cdot\mathrm{p}_\lambda = {}& q^{x+y-e-f}\,\mathrm{p}_{(f,y,e,x,b+1,z,k_{\diamondsuit},k_1)}+q^{y-f-1}[y]\,\mathrm{p}_{(f+1,y-1,e,x,b,z,k_{\diamondsuit},k_1)}+[f]\,\mathrm{p}_{(f-1,y+1,e,x,b,z,k_{\diamondsuit},k_1)}\\ &+q^{y-f}[e]\,\mathrm{p}_{(f,y,e-1,x+1,b,z,k_{\diamondsuit},k_1)}+q^{y-f-e+x-1}[x]\,\mathrm{p}_{(f,y,e+1,x-1,b,z,k_{\diamondsuit},k_1)},\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}B_1\cdot\mathrm{p}_\lambda = {}& q^{1-2y+2e+2x-f}[f]/(q-q^{-1})\,\mathrm{p}_{(f-1,y,e,x,b,z,k_{\diamondsuit}+1,k_1-1)}\\ &-q^{f+2y-2e-2x-1}[f]/(q-q^{-1})\,\mathrm{p}_{(f-1,y,e,x,b,z,k_{\diamondsuit}-1,k_1+1)}+q^{-y}\,\mathrm{p}_{(f,y,e+1,x,b,z,k_{\diamondsuit},k_1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-q^{2y-2e-2x-3}[y][y-1]\,\mathrm{p}_{(f+1,y-2,e,x,b,z,k_\diamond-1,k_1+1)}+q^{-x-e}[y]\,\mathrm{p}_{(f,y-1,e,x,b,z+1,k_\diamond,k_1)}\\
&-q^{-3e-x-2}((q^{2y}-1)[y-1][x]+[2][y][x])\,\mathrm{p}_{(f,y-1,e+1,x-1,b,z,k_\diamond-1,k_1+1)}\\
&-q^{-2e-2x-1}[e]([2][y]+(q^{2y}-1)[y-1])\,\mathrm{p}_{(f,y-1,e-1,x+1,b,z,k_\diamond-1,k_1+1)}\\
&+(q^{-2e-x-1}(q^e-q^{-e})[2][y]-q^{-3e-x-1}(q^{2y}-1)[y-1])\,\mathrm{p}_{(f,y-1,e,x,b+1,z,k_\diamond-1,k_1+1)}\,. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

We 借助计算机验证了这些公式确实定义了一个表示， [Wan24]。

Note that for $\nu=(0,0,e,x,b,z,k_\diamond,k_1)$ and $\nu'=(0,0,e+1,x,b,z,k_\diamond,k_1)$, $\nu''=(0,1,e,x,b,z,k_\diamond,k_1)$

$$
B_1.\,\mathrm{p}_\nu=\mathrm{p}_{\nu'}\quad\text{and}\quad Y.\,\mathrm{p}_\nu=\mathrm{p}_{\nu''}\,. \qquad (27)
$$

第一个等 式由（26）显然成立。回忆 Y 的定义，第二个等式成立，这是因为

$$
\begin{aligned}
B_0B_{-1}\,\mathrm{p}_\nu&=q^{-1}\,\mathrm{p}_{(1,0,0,0,b+1,z,k_\diamond,k_1)}+\mathrm{p}_{\nu''}+q^{-1}[e]\,\mathrm{p}_{(1,0,e-1,x+1,b,z,k_\diamond,k_1)},\\
q^{-1}B_{-1}B_0\,\mathrm{p}_\nu&=q^{-1}\,\mathrm{p}_{(1,0,0,0,b+1,z,k_\diamond,k_1)}+q^{-1}[e]\,\mathrm{p}_{(1,0,e-1,x+1,b,z,k_\diamond,k_1)}\,.
\end{aligned}
$$

接下来，我们断言，对于任意 PBW 单项式，我们都可以将其作用于 $1\in P$，并恰好得到 P 中相应的基元素。用公式表示为

$$
\mathrm{p}_\lambda.1=\mathrm{p}_\lambda\,. \qquad (28)
$$

这表明 PBW单项式 线性无关。显然，对于 $\lambda=(0,0,0,0,0,0,k_\diamond,k_1)$，该断言成立。若对于 $\lambda'=(0,0,0,0,0,0,z,k_\diamond,k_1)$ 该断言成立，则根据 Z 的定义及（27），对于 $\lambda=(0,0,0,0,0,0,z+1,k_\diamond,k_1)$ 该断言也成立。因此，（28）对于 $\lambda=(0,0,0,0,0,0,z,k_\diamond,k_1)$ 成立，进而根据（25），对于 $\lambda=(0,0,0,0,0,b,z,k_\diamond,k_1)$ 也成立。接下来，假设（28）对于 $\lambda'=(0,0,0,x,b,z,k_\diamond,k_1)$ 成立，我们证明（28）对于 $\lambda=(0,0,0,x+1,b,z,k_\diamond,k_1)$ 成立。事实上，

$$
\begin{aligned}
B_0B_1\,\mathrm{p}_{\lambda'}&=q^{x-1}\,\mathrm{p}_{(0,0,1,x,b+1,z,k_\diamond,k_1)}+\mathrm{p}_{(0,0,0,x+1,b,z,k_\diamond,k_1)}+q^{x-2}[x]\,\mathrm{p}_{(0,0,2,x-1,b,z,k_\diamond,k_1)}\\
q^{-1}B_1B_0\,\mathrm{p}_{\lambda'}&=q^{-1}(q^x\,\mathrm{p}_{(0,0,1,x,b+1,z,k_\diamond,k_1)}+q^{x-1}[x]\,\mathrm{p}_{(0,0,2,x-1,b,z,k_\diamond,k_1)}
\end{aligned}
$$

这就意味着这一点。然后，由 (26) 可得关于 $\lambda=(0,0,e,x,b,z,k_\diamond,k_1)$ 的断言。利用以下对 (26) 的轻微推广，适用于 $\nu=(0,y,e,x,b,z,k_\diamond,k_1)$，其中 $\nu=(0,y+1,e,x,b,z,k_\diamond,k_1)$

$$
\begin{aligned}
B_0B_{-1}\,\mathrm{p}_\nu&=q^{x+y-e-1}\,\mathrm{p}_{(1,y,e,x,b+1,z,k_\diamond,k_1)}+q^{y-2}\,\mathrm{p}_{(2,y-1,e,x,b,z,k_\diamond,k_1)}+\mathrm{p}_{\nu''}\\
&\quad+q^{y-1}[e]\,\mathrm{p}_{(1,y,e-1,x+1,b,z,k_\diamond,k_1)}+q^{y-1-e+x-1}[x]\,\mathrm{p}_{(1,y,e+1,x-1,b,z,k_\diamond,k_1)},\\
q^{-1}B_{-1}B_0\,\mathrm{p}_\nu&=q^{-1}(q^{x+y-e}\,\mathrm{p}_{(1,y,e,x,b+1,z,k_\diamond,k_1)}+q^y[e]\,\mathrm{p}_{(1,y,e-1,x+1,b,z,k_\diamond,k_1)}\\
&\quad+q^{y-1-e+x}[x]\,\mathrm{p}_{(1,y,e+1,x-1,b,z,k_\diamond,k_1)}\,.
\end{aligned}
$$

断言 (28)　　对 λ成立　　$=(0,y,e,x,b,z,k_\diamond,k_1)$. 最后，对 λ显然成立　　$=(f,y,e,x,b,z,k_\diamond,k_1)$ 。公式 (22)–(26) 表明 $\mathrm{F}^{\leq i}\mathrm{F}^{\leq j}_{\leq j}\subset\mathrm{F}^{\leq(i+j)}$。由此得到 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}U_q'$ 的描述。 □

ˆ ˆ**注 3.8.** 令 deg $B_{-1}=$deg $Y=-1$,deg $D_\diamond=$deg $D_1=$deg $B_0=$deg $Z=0$, 和 deg $B_1=$deg $X=1$ 定义 U_q' 上的一个 $\mathbb{Z}$-分次。

定义 3.9. 令 U_-'和 U_+'为由 B_{-1},Y以及 B_1,X分别生成的 U_q'的子代数。

推论 3.10. 子代数 U_-'和 U_+' 的基分别为 $\left\{B_{-1}^fY^y\right\}_{f,y\in\mathbb{Z}_{\geq0}}$以及 $\{B_1^eX^x\}_{e,x\in\mathbb{Z}_{\geq0}}$。

证明。 根据引理 3.4， $qB_1X=XB_1$ 和 $qB_{-1}Y=YB_{-1}$，所提出的元素张成该空间，因此根据定理 3.7，它们构成一组基。□

T子代数 U'_-、 U'_+ 与卡当子代数 U'_0给出三角分解 s:

推论 3.11 （三角分解）。 乘法定义了向量空间同构$U'_- \otimes U'_+ \otimes U'_0 \cong U'_q$和 $U'_- \otimes U'_0 \otimes U'_+ \cong U'_q$，其对应的子代数为 U'_-、 U'_+、 U'_0。

证明。 第一个断言直接由推论 3.10 和定理 3.3，并结合定理 3.7 得出。对于第二个断言，我们还要用到引理 3.2 和交换子关系 (17)、(18)。□

定义 3.12。 给定一个 U'_q-模 M，我们称 U'_0 的同时特征子空间为权空间，其元素为权向量，其特征值为权。 M 中的一个极大向量 是一个被 B_1 和 X湮灭的权向量。

记号 3.13。 我们将权空间 $M(\hat{}D_\diamond$、$\hat{}D_1$、 B_0、 $Z \mid q^a$、 q^b、 c、 $d)$ 简写为 $M(a$、 b、 c、 $d)$。

4. Verma 模与有限维不可约模的分类

接下来我们为 U'_q 定义 Verma 模，并研究其不可约商模。

4.1. **定义与基础知识**。 令 $U'_{>0}$ 为由 $\{B_1^e X^x\}_{e+x>0}$ 张成的 U'_+ 的子空间。

引理 4.1。 子空间 $U_{\geq 0} = U'_+ U'_0$ 是 U'_q 的子代数，而 $I = U'_{>0} U'_0$ 是 $U_{\geq 0}$ 中的双边理想。此外，$U_{\geq 0}/I \cong U'_0$ 作为代数同构，且 U'_q 是一个自由 $U'_+ U'_0$-模。

证明。 由 (15)、(17)、(18) 可立即得出 $U_{\geq 0}$ 是子代数。这些关系也意味着 I 是双边理想。根据定理 3.7，商代数同构于 U'_0，且 U'_q 是以 $\{B_{-1}^f Y^y \mid f, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 为基的自由 $U'_+ U'_0$-模。□

定义 4.2。 设 $\beta, \zeta \in \mathbb{C}(q)$ 且 $\kappa_\diamond, \kappa_1 \in \mathbb{Z}$。那么，最高权为 $(\kappa_\diamond, \kappa_1, \beta, \zeta)$ 的 Verma 模是 U'_q-模

$$\mathbb{M}(\kappa_\diamond, \kappa_1, \beta, \zeta) := U'_q \otimes_{U'_+ U'_0} \mathbb{C}(q)_{(\kappa_\diamond, \kappa_1, \beta, \zeta)},$$

其中 $\mathbb{C}(q)_{(\kappa_\diamond, \kappa_1, \beta, \zeta)}$是一维的 $U'_+ U'_0$-模，具有 $U'_+ \cdot 1 = 0$；并且 $\hat{} D_\diamond, \hat{}D_1, B_0, Z$ 分别通过与 $q_\diamond^\kappa, q_1^\kappa, \beta, \zeta$ 相乘而作用。记作 $\kappa = \kappa_\diamond - \kappa_1$。我们将 Verma 模的最高权向量 称为 $1 \otimes 1 \in \mathbb{M}(\kappa_\diamond, \kappa_1, \beta, \zeta)$ 的任一非零标量倍数。

注记 4.3. 根据定义， $\mathbb{M}(\kappa_\diamond,\ \kappa_1,\ \beta,\ \zeta)$ 的最高权向量是定义 3.12 意义下权为 $(\kappa_\diamond,\ \kappa_1,\ \beta,\ \zeta)$ 的极大向量。请注意它与记号 3.13 的相容性。

定理 3.7 直接推出以下基定理。

命题 4.4. *Verma* 模 $\mathbb{M}(\kappa_\diamond, \kappa_1, \beta, \zeta)$ 有一组由以下向量构成的基

$$\{B_{-1}^f Y^y v \mid f, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \quad \textit{where } v \textit{ is a highest weight vector.}$$

张量积的定义及其泛性质推出如下结论：

引理 4.5 (泛性质)。 设 M 是一个具有权为 $(\kappa_\diamond, \kappa_1, \beta, \zeta)$ 的极大向量 v 的 U'_q-模。那么存在唯一的 U'_q-模态射 $\mathbb{M}(\kappa_\diamond, \kappa_1, \beta, \zeta) \to M$，将 $1 \otimes 1$ 映到 v。

由泛性质可知，两个 Verma 模 $\mathbb{M}(\kappa_\diamond, \kappa_1, \beta, \zeta)$ 和 $\mathbb{M}(\kappa'_\diamond, \kappa'_1, \beta', \zeta')$ 同构，当且仅当 $\kappa_\diamond = \kappa'_\diamond$，$\kappa_1 = \kappa'_1$, $\beta = \beta'$ 和 $\zeta = \zeta'$。

命题 4.6. 任意 *Verma* 模都有唯一的不可约商模。

ˆ证明。 命题 4.4 中的基是一个 $D_\diamondsuit$-特征基，而任何最高权向量都必须具有 ˆ最大的 $D_\diamondsuit$-权。根据引理 3.2，Verma 模有唯一的极大真子模。□

注 4.7。 注意，命题 4.6 的证明与通常的 Verma 模方法相似，ˆ利用了命题 4.4 中的基是一个 $D_\diamondsuit$-权基这一事实，即关于作用 ˆ $D_\diamondsuit$的特征基。然而，这个基并不是整个 Cartan 卡当子代数的权基（事实上，不可能将ˆ $D_\diamondsuit$, ˆD_1 的伴随作用扩展到整个卡当子代数）。

4.2. **神奇算子**。 我们处理注 4.7 中提出的问题，并定义 U_q' 生成元的变体，以便为良好 Verma 模构造权空间分解。

记号 4.8. 对于 $\mu \in \mathbb{C}(q)^*$，记作 $[\mu;\ n] = (q-q^{-1})^{-1}(q^n\mu - q^{-n}\mu^{-1})$。注意，$[\mu q^i;\ 0] = [\mu;\ i]$。特别地，$[q^i;\ n] = [i+n]$ 是通常的量子整数。对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，有 $[\iota;\ n] = [\iota;\ -n]$。

定义 4.9（神奇算子）。 对于任意的 $\eta \in \mathbb{C}(q)^*$，令

$$E_\pm(\eta) \coloneqq B_1 \pm \eta^{\pm 1} X, \quad F_\pm(\eta) \coloneqq B_{-1} \mp \eta^{\mp 1} Y.$$

神奇算子具有一些出人意料的良好性质，下面我们将予以展示。

命题 4.10. 以下交换关系在 U_q' 中成立。

$$F_\pm(\eta)\hat{K} = q^2 \hat{K} F_\pm(\eta), \quad E_\pm(\eta)\hat{K} = q^{-2}\hat{K}E_\pm(\eta).$$

证明。 由 (16) 以及 ˆK 与 B_0 交换这一事实，结论立即成立。 □

命题 4.11. 设 M 是一个 U_q'-模。若 $\eta \in \mathbb{C}(q)^*$ 且 $v \in M(B_0 \mid [\eta;\ 0])$，则 n

$$E_\pm(\eta)v \in M(B_0 \mid [\eta; \pm 1]), \quad F_\pm(\eta)v \in M(B_0 \mid [\eta; \mp 1]).$$

证明。 我们直接计算

$$\begin{aligned} B_0 E_\pm(\eta)v &= B_0 B_1 v \pm \eta^{\pm 1} B_0 X v = (q^{-1}B_1B_0 + X)v \pm \eta^{\pm 1}(qXB_0 + B_1)v \\ &= (q^{-1}\beta \pm \eta^{\pm 1})B_1 v + (1 \pm q\eta^{\pm 1}\beta)Xv = [\eta; \pm 1]E_\pm(\eta)v. \end{aligned}$$ □

引理 4.12。 以下交换关系在 U_q' 中成立。

$$\begin{aligned} E_+(q^{-1}\eta)E_-(\eta) = E_-(q\eta)E_+(\eta), \quad E_+(q\eta)F_-(\eta) = F_-(q\eta)E_+(\eta), \\ F_+(q^{-1}\eta)E_-(\eta) = E_-(q\eta)F_+(\eta), \quad F_+(q\eta)F_-(\eta) = F_-(q^{-1}\eta)F_+(\eta). \end{aligned} \tag{29}$$

证明。 利用 (15)，我们有

$$\begin{aligned} E_+(q^{-1}\eta)E_-(\eta) &= (B_1 + q^{-1}\eta X)(B_1 - \eta^{-1}X) = B_1^2 - \eta^{-1}B_1X + q^{-1}\eta X B_1 - q^{-1}X^2 \\ &= B_1^2 - q^{-1}\eta^{-1}XB_1 + \eta B_1 X - q^{-1}X^2 = (B_1 - q^{-1}\eta^{-1}X)(B_1 + \eta X) \\ &= E_-(q\eta)E_+(\eta). \end{aligned}$$

利用引理 1.4 中的对合，我们得到 $F_+(q\eta)F_-(\eta) = F_-(q^{-1}\eta)F_+(\eta)$。简记$[E_+, F_-](\eta) = (E_+(q\eta)F_-(\eta) - F_-(q\eta)E_+(\eta))$，我们有

$$[E_+, F_-](\eta) = ([B_1, B_{-1}] - \eta[B_{-1}, X]_q + \eta[B_1, Y]_q + q\eta^2[X, Y])$$

$$\begin{aligned} &= [\hat{K};0](1-\eta^2)+\eta(qB_0[\hat{K};0]-q^{-1}[\hat{K};0]B_0) \\ &= \eta[\hat{K};0](\eta^{-1}-\eta+(q-q^{-1})B_0)=\eta[\hat{K};0](\eta^{-1}-\eta+(q-q^{-1})[\eta;0])=0. \end{aligned}$$

在第二个等式中，我们使用了 (16) 和 $[B_1,Y]_q-[B_{-1},X]_q=(q-q^{-1})[\hat{K};\ 0]B_0$.

对 $[E_-,F_+]$ 的计算类似。 □

注 4.13。 算子 $E_\pm,F_\pm$ 的定义具有一定的自由度。也就是说，算子 $E_\pm$ 与 $F'_+(\eta)=F+\eta^{-1}Y'$, $F'_-(\eta)=F-\eta\,Y'$, 连同 $Y'=[B_0,B_{-1}]_q$，构成一族满足与引理 4.12 中相同交换关系的算子。我们也可以改用它们。或者，我们也可以固定 $F_\pm$，并以类似的方式修改 $E_\pm$。

记号 **4.14.** 设 $\mathbb{1}_\eta$ 为到权空间 $V(B_0\mid[\eta;0])$ 的投影。我们定义算子

$$E_\pm:=\sum_\eta E_\pm(\eta)\mathbb{1}_{[\eta;0]},\quad F_\pm:=\sum_\eta F_\pm(\eta)\mathbb{1}_{[\eta;0]}. \tag{30}$$

注意 t 帽 $E_+^i w=E_+(q^{i-1}\eta)\cdots E_+(q\eta)E_+(\eta)w$，对于 $w\in V(B_0\mid[\eta;0])$，E_-，$F_\pm$ 也同理。

引理 4.15. 以下交换子关系成立：

$$\begin{aligned} [E_+,F_+]\mathbb{1}_\eta &= \left((1+q^{-2})[\hat{K};0]-\eta^{-1}Z-\eta W\right)\mathbb{1}_\eta, \\ [E_-,F_-]\mathbb{1}_\eta &= \left((1+q^{-2})[\hat{K};0]+\eta Z+\eta^{-1}W\right)\mathbb{1}_\eta. \end{aligned} \tag{31}$$

证明. 我们计算：

$$\begin{aligned} [E_+,F_+]\mathbb{1}_\eta &= (E_+(\eta q^{-1})F_+(\eta)-F_+(\eta q)E_+(\eta))\mathbb{1}_\eta \\ &= ([B_1,F]-\eta^{-1}[B_1,Y]_{q^{-1}}-\eta[F,X]_{q^{-1}}-q^{-1}[X,Y])\mathbb{1}_\eta. \end{aligned}$$

利用 (16) 中最后一个等式以及引理 1.4 中的对合，即得结论。 □

引理 4.16. 设 $\eta\in\mathbb{C}(q)$，并设 v 是 B_0、Z 的同时特征向量，其 B_0-权为 $[\eta;\ 0]$。则有如下结论。

$$\begin{aligned} [Z,F_+]_q v=\eta^{-1}q[2]F_+\hat{K}^{-1}v,\quad [Z,F_-]_q v=-\eta q[2]F_-\hat{K}^{-1}v, \\ [Z,E_+]_{q^{-1}}v=-\eta^{-1}q^{-1}[2]\hat{K}^{-1}E_+v,\quad [Z,E_-]_{q^{-1}}v=\eta q^{-1}[2]\hat{K}^{-1}E_-v. \end{aligned} \tag{32}$$

设 v 是 B_0-权 B_0、W 的公共特征向量 $[\eta;\ 0]$, 则

$$\begin{aligned} [W,F_+]_{q^{-1}}v=\eta q^{-1}[2]\hat{K}F_+v,\quad [W,F_-]_{q^{-1}}v=-\eta^{-1}q^{-1}[2]\hat{K}F_-v, \\ [W,E_+]_q v=-\eta q[2]E_+\hat{K}v,\quad [W,E_-]_q v=\eta^{-1}q[2]E_-\hat{K}v. \end{aligned} \tag{33}$$

证明。 设 v是 B_0,Z的一个公共特征向量，其 B_0-权为 $[\eta;0]$。我们计算

$$\begin{aligned} ZF_+v &= Z(B_{-1}-\eta^{-1}Y)v \\ &= \left(qB_{-1}Z-q^{-1}[2]\hat{K}^{-1}Y-q\eta^{-1}YZ+q\eta^{-1}[2]B_{-1}\hat{K}^{-1}+\eta^{-1}(q^3-q^{-1})YB_0\hat{K}^{-1}\right)v \\ &= \left(qF_+Zv+q\eta^{-1}[2]B_{-1}\hat{K}^{-1}-q[2]Y\hat{K}^{-1}+\eta^{-1}(q^3-q^{-1})[\eta;0]Y\hat{K}^{-1}\right)v \\ &= \left(qF_+Zv+q\eta^{-1}[2]B_{-1}\hat{K}^{-1}-q[2]Y\hat{K}^{-1}+q[2](1-\eta^{-2})Y\hat{K}^{-1}\right)v \\ &= \left(qF_+Zv+\eta^{-1}q[2]F_+\hat{K}^{-1}\right)v, \end{aligned}$$

利用引理 3.5、引理 3.2 以及 $(q^3-q^{-1})[\eta$ 这一事实； $0]=(q^3-q^{-1})(q-q^{-1})^{-1}(\eta-\eta^{-1})=(q^2+1)(\eta-\eta^{-1})$，并且 Zv 和 $\hat{K}^{-1}v$ 是 v的标量倍数。

类似地，设 v 是 B_0， W 的同时特征向量，具有 B_0-权 $[\eta;\ 0]$ 并计算

$$\begin{aligned} WF_+v &= W(B_{-1}-\eta^{-1}Y)v \\ &= \left(q^{-1}B_{-1}W-q^{-1}[2]\hat{K}Y+q^{-1}(1-q^{-4})B_{-1}B_0\hat{K}-\eta^{-1}q^{-1}(YW-[2]\hat{K}B_{-1})\right)v \\ &= q^{-1}F_+Wv+\left(\eta^{-1}q^{-1}[2]-q(1-q^{-4})(q-q^{-1})^{-1}(\eta-\eta^{-1})\right)\hat{K}B_{-1}) \\ &= q^{-1}F_+Wv+\eta q^{-1}[2](\hat{K}B_{-1}-\eta^{-1}\hat{K}Y)v \\ &= q^{-1}F_+Wv+\eta q^{-1}[2]\hat{K}F_+v, \end{aligned}$$

注意到 $\eta^{-1}q^{-1}[2]-q(1-q^{-4})(q-q^{-1})^{-1}(\eta-\eta^{-1})=\eta^{-1}(1-q^{-2})+(1-q^{-2})(\eta-\eta^{-1})=\eta q^{-1}[2]$。

我们验证了涉及 F_+ 的公式。关于 F_- 的计算是类似的。应用引理 1.4 中的对合，我们也得到了 $E_\pm$ 所对应的所需结果。□

神奇算子与卡当子代数的特征子空间具有良好的相互作用：

定理 4.17 （神奇算子）。 设 M 是一个 U_q'-模。则有

$$\begin{aligned} F_\pm M(\kappa_\diamond,\kappa_1,[\eta;0],\zeta) &\subseteq M(\kappa_\diamond-1,\kappa_1+1,[\eta;\mp1],q(\zeta\pm\eta^{\mp1}q^{\kappa}[2])), \\ E_\pm M(\kappa_\diamond,\kappa_1,[\eta;0],\zeta) &\subseteq M(\kappa_\diamond+1,\kappa_1-1,[\eta;\pm1],q^{-1}(\zeta\mp\eta^{\mp1}q^{-2-\kappa}[2])). \end{aligned} \tag{34}$$

如果 $v'\in M(\hat{K},B_0,Z,W\mid q^\kappa,[\eta;\ 0],\zeta,\omega)$ 那么，利用记号 *4.8*，对于任意 $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq0}$，我们有 ，

$$\begin{aligned} F_+^aF_-^bv'\in M(Z\mid q^{a+b}(\eta^{-1}q^{a-\kappa-1}[2][a]-\eta q^{b-\kappa-1}[2][b]+\zeta)), \\ F_+^aF_-^bv'\in M(W\mid q^{-a-b}(\eta q^{\kappa-a-1}[2][a]-\eta^{-1}q^{\kappa-b-1}[2][b]+\omega)). \end{aligned} \tag{35}$$

证明。这 些断言 (34) 由 (32) 得出。令 $v'\in M(\hat{K},\ B_0,\ Z,\ W\mid\kappa,\ [\eta;\ 0],\ \zeta,\ \omega)$。根据引理 4.1 6,

$$ZF_+^av'=(\eta^{-1}q^{-\kappa+2a-1}[2][a]+q^a\zeta)F_+^av',\quad ZF_-^bv'=(-\eta q^{-\kappa+2b-1}[2][b]+q^b\zeta)F_-^bv', \tag{36}$$

$$WF_\mp^av'=(\eta q^{\kappa-2a-1}[2][a]+q^{-a}\omega)F_\mp^av'\quad WF_-^bv'=(-\eta^{-1}q^{\kappa-2b-1}[2][b]+q^{-b}\omega)F_-^bv'. \tag{37}$$

结合 (36) 中的公式，我们得到

$$\begin{aligned} ZF_+^aF_-^bv' &= (\eta^{-1}q^{-b-\kappa+2b+2a-1}[2][a]+q^a(-\eta q^{-\kappa+2b-1}[2][b]+q^b\zeta))F_+^aF_-^bv' \\ &= (\eta^{-1}q^{-\kappa+b+2a-1}[2][a]-\eta q^{-\kappa+a+2b-1}[2][b]+q^{a+b}\zeta)F_+^aF_-^bv', \end{aligned}$$

$F_+^aF_-^bv'$的 W-权可类似地利用 (37) 计算，因此 (35) 成立 . □

4.3. **Verma 模上的作用**。 接下来，我们考察形如 $\mathbb{M}(\kappa_\diamond,\ \kappa_1,\ [\mu;0],\ \zeta)$ 的 Verma 模。对于任意 $x\in\mathbb{C}(q)$，存在某个 μ，属于 $\mathbb{C}(q)$ 的某个代数扩张，并且 $[\mu;0]=x$。

引理 4.18。 设 v 是 *Verma* 模 $\mathbb{M}(\kappa_\diamond,\kappa_1,[\mu;\ 0],\zeta)$ 的最高权向量。那么 v 是 W 的特征向量，其特征值为 $\omega=q^{-2}(\zeta-(q^\kappa-q^{-\kappa})[\mu;\ 0])$。

证明。 这可由关系式 (21) 直接推出。 □

命题 4.19 (对权向量的作用)。 设 $\mu,\zeta\in\mathbb{C}(q)$ 和 $\kappa_\diamondsuit,\kappa_1\in\mathbb{Z}$。考虑一个最高权为 $(q^{\kappa_\diamondsuit},q^{\kappa_1},[\mu;\,0],\zeta)$ 的 *Verma* 模。设 v 为最高权向量，其 W-权为 ω。

采用记号 *4.8*，则对任意 $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，有

$$\begin{aligned}E_+F_+^aF_-^bv&=(q^{-1}(\Gamma_a^+-M_a^+)-q^{a-1}\mu^{-1}\zeta-\mu q^{1-a}\omega)[a]F_+^{a-1}F_-^bv,\\E_-F_+^aF_-^bv&=(q^{-1}(\Gamma_b^--M_b^-)+q^{1-b}\mu^{-1}\omega+\mu q^{b-1}\zeta)[b]F_+^aF_-^{b-1}v,\end{aligned}\tag{38}$$

其中 $\Gamma_c^\pm=[2][\kappa-c+1]$, $M_c^\pm=[c-1]\tilde{\alpha}_{\mu^2q^{\pm(1+\kappa-2c)}}$ 满足 $\tilde{\alpha}_\mu=\mu+\mu^{-1}$。

证明。 我们只证明第一个公式，因为第二个公式的证明类似。分别对 a 作归纳。对于 $a=0$，由引理 4.12，公式成立。假设公式对 $a\geq 0$ 成立，我们来证明它对 $a+1$ 也成立。由 (31)，利用 $\eta=\mu q^{b-a}$ 和 (34)，以及特征值公式 (35)，可得

$$\begin{aligned}E_+F_+^{a+1}F_-^bv&=(E_+F_+)F_+^aF_-^bv=(F_+E_++(1+q^{-2})[\hat{K};0]-\mu^{-1}q^{a-b}Z-\mu q^{b-a}W)F_+^aF_-^bv\\&=\left((q^{-1}(\Gamma_a^+-M_a^+)-q^{a-1}\mu^{-1}\zeta-\mu q^{1-a}\omega)[a]+q^{-1}[2][\kappa-2a-2b]\right)F_+^aF_-^bv\\&\quad-\mu^{-1}q^{a-b}q^{a+b}\left(\zeta+\mu^{-1}q^{a-\kappa-1}[2][a]-\mu q^{b-\kappa-1}[2][b]\right)F_+^aF_-^bv\\&\quad-\mu q^{b-a}q^{-a-b}\left(\omega+\mu q^{\kappa-a-1}[2][a]-\mu^{-1}q^{\kappa-b-1}[2][b]\right)F_+^aF_-^bv.\end{aligned}$$

C收集含有 ζ 的项，并对 ω 作类似处理，得到所需的值，即

$$-(q^{a-1}[a]+q^{2a}\mu^{-1})\zeta=-(q^{2a-1}-q^{-1}+q^{2a+1}-q^{2a-1})\mu^{-1}(q-q^{-1})^{-1}\zeta=-q^a\mu^{-1}[a+1]\zeta.$$

对于满足 $\mu^{\pm 2}$ 的项，我们希望 $-q^{-1}M_{a+1}^+=-q^{-1}(M_a^+[a]+\mu^{-2}q^{2a}q^{a-\kappa}[2][a]+\mu^2q^{-2a}q^{\kappa-a}[2][a])$，即

$$([a-1](q^{1+\kappa-2a}\mu^2+q^{2a-1-\kappa}\mu^{-2})+\mu^{-2}q^{3a-\kappa}[2]+\mu^2q^{\kappa-3a}[2])=(q^{-1+\kappa-2a}\mu^2+q^{2a+1-\kappa}\mu^{-2})[a+1].$$

这等价于 $q^{\pm(\kappa-2a+1)}[a-1]+q^{\pm(\kappa-3a)}[2]=q^{\pm(\kappa-2a-1)}[a+1]$，这很容易验证。其余部分应为 $q^{-1}\Gamma_{a+1}^+[a+1]$。等价地， $\Gamma_{a+1}^+[a+1][2]^{-1}=[\kappa-a][a+1]$ 应为

$$[\kappa-a+1][a]+[\kappa-2a-2b]+q^{2a+b-\kappa}[b]+q^{\kappa-2a-b}[b]=[\kappa-a+1][a]+[\kappa-2a],$$

这是一种 再次容易验证。因此，所需公式对 $a+1$ 成立。证明至此完成。 □

4.4. **良 Verma 模**。 现在我们利用算子 $E_\pm$ 和 $F_\pm$研究 Verma 模。根据它们的作用，我们将 Verma 模分为良好和例外两类。

对于 $n\in\mathbb{Z}$， μ 取 q^n 时最为理想；届时我们将在第5节看到， F_- 会使B_0-权“降低”，而 F_+ 会使其“升高”。但一般而言并非如此。事实上，若 $[\iota;0]$ 是一个 B_0-权（采用记号 4.8），那么在这个 B_0-权空间上，我们有 $E_+(\iota)=E_-(\iota)$以及 $F_+(\iota)=F_-(\iota)$；我们将在命题 4.29 中看到，这会极大地改变 Verma 模的行为。

定义4.20。 设 $\mu,\zeta\in\mathbb{C}(q)$ 且 $\kappa_\diamondsuit,\kappa_1\in\mathbb{Z}$。若对任意 $l\in\mathbb{Z}$ 都有 $\mu\neq\pm q^l\iota$，则称 Verma 模 $\mathbb{M}(\kappa_\diamondsuit,\kappa_1,[\mu;\,0],\zeta)$ 为良好 *Verma* 模 。

定理 4.21 (良好Verma模的权基)。 设 $\mathbb{M}=\mathbb{M}(\kappa_\diamondsuit,\kappa_1,[\mu;\,0],\zeta)$ 是一个最高权向量为 v 的良好 *Verma* 模。那么

a.) 向量 $\{F_+^aF_-^bv\mid a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 构成 $\mathbb{M}$ 的一个由权向量组成的基，并且

b.) 这些向量的权彼此不同。特别地，所有权空间都是一维的 *l.*

证明。 根据命题 4.4 和定理 4.17， $F_+^a F_-^b v$对于任意 $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$都是非零权向量。 $F_+^a F_-^b v$的（$\hat{}K$, B_0）-权为（$q^{\kappa_\diamond -a-b}, q^{\kappa_1+a+b}, [\mu;\ b-a]$）。

假设对于某个 $(a,\ b), (a',\ b')\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^2$， $F_+^a F_-^b v$和 $F_+^{a'} F_-^{b'} v$的权相同。那么 $q^{\kappa_\diamond -a-b}=q^{\kappa_\diamond -a'-b'}$和 $q^{\kappa_1+a+b}=q^{\kappa_1+a'+b'}$蕴含 $a+b=a'+b'$和 $[\mu;\ b-a]=[\mu;\ b'-a']$，因此$\mu=\pm\sqrt{-q^n}$，其中 $n=a-\overline{b+}a'-b'$。此外， n必须是奇数，因为该 Verma 模是良好的。由 (35) 和 $b+a=a'+b'$, $F_+^a F_-^b v$和 $F_+^{a'} F_-^{b'} v$的 Z-特征值相等，当且仅当

$$-q^{-n/2-\kappa-1+a}[a]+q^{n/2-\kappa-1+b}[b]=-q^{-n/2-\kappa-1+a'}[a']+q^{n/2-\kappa-1+b'}[b'].$$

在 $q=1$ 处求值意味着 $b-a=b'-a'$。因此，$(a,b)=(a',b')$ 成立，因为 $a+b=a'+b'$。故在关于 μ 的假设下，向量 $F_+^a F_-^b v$具有互不相同的权，因此线性无关。接下来只需证明良 Verma 模由这些权向量张成。为此，令 $M\subset\mathbb{M}(\kappa_\diamond,\kappa_1,[\mu;\ 0],\zeta)$ 为由 $F_+^a F_-^b v$ 生成的子模。由命题 4.4, 只需证明 M包含所有 $B_{-1}^f Y^y v$。我们对 $f+y$ 使用归纳法， $f=y=0$ 的情形显然。对于 $f+y>0$，我们可以假设 $f>0$，因为 $B_{-1}Y=q^{-1}YB_{-1}$。根据归纳假设，

$$B_{-1}^{f-1}Y^y v=\sum_{a,b}c_{a,b}F_+^a F_-^b v,$$

B_0的权为 $F_+^a F_-^b v$is $[\mu;\ b-a]$。根据 $F_\pm$的定义，对于 $\eta\neq\iota$，我们有

$$\begin{aligned} B_1\mathbb{1}_{[\eta;0]}&=\frac{\eta^{-1}E_+ +\eta E_-}{\eta+\eta^{-1}}\mathbb{1}_{[\eta;0]},\quad B_{-1}\mathbb{1}_{[\eta;0]}=\frac{\eta F_+ +\eta^{-1}F_-}{\eta+\eta^{-1}}\mathbb{1}_{[\eta;0]},\\ X\mathbb{1}_{[\eta;0]}&=\frac{E_+ -E_-}{\eta+\eta^{-1}}\mathbb{1}_{[\eta;0]},\quad Y\mathbb{1}_{[\eta;0]}=\frac{F_- -F_+}{\eta+\eta^{-1}}\mathbb{1}_{[\eta;0]}. \end{aligned}\tag{39}$$

由于我们假设 μ 不在 $q^{\mathbb{Z}}\iota$ 中，由命题 4.19 可知，这对所有 μq^{b-a} 都成立。于是

$$B_{-1}^f Y^y v=B_{-1}B_{-1}^{y-1}Y^f v=\sum_{a,b}c_{a,b}B_{-1}F_+^a F_-^b v=\sum_{a,b}c_{a,b}\frac{\mu q^{b-a}F_+ +\mu^{-1}q^{a-b}F_-}{\mu q^{b-a}+\mu^{-1}q^{a-b}}F_+^a F_-^b v.$$

这表明，任何形如 $B_{-1}^f Y^y v$ 的向量都可以写成形如 $F_+^a F_-^b v$ 的向量的线性组合，故结论成立。因此，这些权向量如所需构成一组基。□

定理 *4.22*（良 *Verma* 模之间的同态）。设 $\mu,\zeta,\mu',\zeta'\in\mathbb{C}(q)$ 和 $\kappa_\diamond,\kappa_1,\kappa'_\diamond,\kappa'_1\in\mathbb{Z}$，使得 $M=\mathbb{M}(\kappa_\diamond,\kappa_1,[\mu;\ 0],\zeta)$ 是一个良好 *Verma* 模。那么 $Hom^{U'_q}(\mathbb{M}(\kappa'_\diamond,\kappa'_1,[\mu';\ 0],\zeta'),M)$ 非零，且此时等于 $\mathbb{C}(q)$，当且仅当存在 $i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得以下条件之一成立：

1)
$$\begin{cases}\zeta=\mu q^{-i}[\kappa-i]-\mu^{-1}q^{i-\kappa}[i],\\ \kappa'_\diamond=\kappa_\diamond-i-1,\\ \kappa'_1=\kappa_1+i+1,\\ [\mu';0]=[\mu;-(i+1)],\\ \zeta'=\mu q[\kappa-i]+\mu^{-1}q^{2i+1-\kappa}[i+2];\end{cases}$$

2)
$$\begin{cases}\zeta=\mu q^{i-\kappa}[i]-\mu^{-1}q^{-i}[\kappa-i],\\ \kappa'_\diamond=\kappa_\diamond-i-1,\\ \kappa'_1=\kappa_1+i+1,\\ [\mu';0]=[\mu;i+1],\\ \zeta'=-\mu q^{2i+1-\kappa}[i+2]-\mu^{-1}q[\kappa-i];\end{cases}$$

3) $\begin{cases} 0 \le i \le \kappa, \\ \zeta = \mu q^{-i}[\kappa - i] - \mu^{-1} q^{i-\kappa}[i], \\ \kappa'_\diamond = \kappa_1 + 2, \\ \kappa'_1 = \kappa_\diamond - 2, \\ [\mu'; 0] = [\mu; \kappa - 2i], \\ \zeta' = \mu^{-1} q^{i-\kappa}[i+2] - \mu q^{-i}[\kappa - i + 2]; \end{cases}$ 4) $(\kappa'_\diamond, \kappa'_1, [\mu'; 0], \zeta') = (\kappa_\diamond, \kappa_1, [\mu; 0], \zeta).$

ˆ 证明。取 M 的一个最高权向量 v。由于它具有极大 $D_\diamond$-权，M 的自同态环是一维的。假设我们不处于第四种情形，因此 $M \neq \mathbb{M}(\kappa'_\diamond, \kappa'_1, [\mu'; 0], \zeta')$。由引理 4.5，存在一个从 $\mathbb{M}(\kappa'_\diamond, \kappa'_1, [\mu'; 0], \zeta')$ 到 M 的非零同态，当且仅当 M 中存在一个权为 $(\kappa'_\diamond, \kappa'_1, [\mu'; 0], \zeta')$ 的极大向量 w。令 $v \in M$ 为一个最高权向量。由于 M 是良好的，由定理 4.21，M 可分解为由 $F_+^a F_-^b v$ 张成的一维权空间，其中 a, $b \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$。因此，我们不妨设对某些 $a, b \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，有 $w = F_+^a F_-^b v$。再次利用 M 是一个良好 Verma 模以及 (39)，我们看到条件 $B_1 w = X w = 0$ 等价于 $E_+ w = E_- w = 0$，而后者又等价于

$$R_a := q^{-1}\Gamma_a^+ - \mu^{-1} q^{a-1}\zeta - \mu q^{1-a}\omega = 0, \qquad S_b := q^{-1}\Gamma_b^- + \mu^{-1} q^{1-b}\omega + \mu q^{b-1}\zeta = 0,$$

其中，ω 表示 v的 W权。项 R_a 和 S_b 分别与 b 和 a 无关。由于 $F_+^a F_-^b v$是一个极大向量，$E_+ F_+^a v = 0$, $E_- F_-^b v = 0$。根据引理 4.12，我们还可以直接得到 $E_- F_+^a v = E_+ F_-^b v = 0$。因此，$F_+^a v$和 $F_-^b v$都是 M 中的极大向量。现在，R_a 和 S_a 是 ζ中的线性表达式。解 $R_a = 0$ 和 $S_b = 0$，得到

$$\begin{aligned} \zeta &= [\mu; \kappa - 2a + 2] - q^{-\kappa}[\mu; 0] = \mu q^{-i}[\kappa - i] - \mu^{-1} q^{i-\kappa}[i] && \text{for } R_a = 0, \text{ and} \\ \zeta &= [\mu; 2b - 2 - \kappa] - q^{-\kappa}[\mu; 0] = \mu q^{i-\kappa}[i] - \mu^{-1} q^{-i}[\kappa - i] && \text{for } S_b = 0. \end{aligned}$$

这些条件恰好意味着 $F_+^a v$或 $F_-^b v$是一个极大向量。令 $i = a - 1$或 $i = b - 1$，即可分别得到情形 1) 或 2) 中的条件。如果 $R_a = 0$ 和 $S_b = 0$ 同时成立，那么代换 $i \mapsto \kappa - i$ 将两个解联系起来，因此必有 $0 \le i \le \kappa$。计算极大向量 $F_+^a F_-^b v$的权，即可得到情形 3)。□

注 4.23. Verma 模在 U'_- 上是自由的，因此无挠。因此，Verma 模之间的非零同态都是单射。定理 4.22 描述了这些包含。在第一种情况下，写作 $\kappa' = \kappa - 2i - 2$, $\mu' = \mu q^{-i-1}$, $i' = \kappa - i$，得到 $\zeta' = \mu' q^{i'-\kappa'}[i'] - (\mu' q^{i'})^{-1}[\kappa' - i']$，其形式与第二种情况下的 ζ 相同。若 $i' \ge 0$，则还有另一个 Verma 模映入 $\mathbb{M}(\kappa'_\diamond, \kappa'_1, [\mu'; 0], \zeta')$。类似地，在第二种情况下，写作 $\kappa' = \kappa - 2i - 2$, $\mu' = \mu q^{i+1}$, $i' = \kappa - i$，得到 $\zeta' = -\mu' q^{-i'}[i' - \kappa'] - ((\mu')^{-1} q^{i'-\kappa'})[i']$，其形式与第一种情况下的 ζ 相同。因此，若 $i' \ge 0$，则还有另一个 Verma 模映入 $\mathbb{M}(\kappa'_\diamond, \kappa'_1, [\mu'; 0], \zeta')$。
根据定理 4.22 的证明，这些态射分别将选定的最高权向量映射到 $F_+^a v$、$F_-^b v$、$F_+^a F_-^b v$。若满足下文 (40) 中的支配条件，则根据定理 4.21，两个较大的 Verma 子模的交恰好是较小的那个。

总之，对于 $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$，良好 Verma 模的包含行为与经典 Verma 模相同。在这种情况下，每个 Verma 模都是两个 Verma 模的外张量积 $M(\lambda) \boxtimes M(\mu)$，且每个因子要么是单模，要么有唯一的真 Verma 子模。

引理 4.24。设 $\mu \in \mathbb{C}(q)^*$, $i, \kappa \in \mathbb{Z}$。则根据定义，有

$$[\mu; \kappa - 2i] - q^{-\kappa}[\mu; 0] = \mu q^{-i}[\kappa - i] - \mu^{-1} q^{i-\kappa}[i].$$

We g满足良好 Verma 模的有限维商模的 支配条件 (40):

定理 4.25 (良好不可约模)。 考虑一个良好 *Verma* 模 $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\kappa_\diamond, \kappa_1, [\mu;\ 0], \zeta)$，其最高权向量为 v。那么，它有一个有限维不可约商模 L当且仅当

$$\zeta = [\mu; \kappa - 2i] - q^{-\kappa}[\mu; 0] \quad for\ some\ i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ with\ 0 \leq i \leq \kappa. \tag{40}$$

在此情形下， L 是唯一的，并且有一个权基 $\{F_+^a F_-^b v, \mid 0 \leq a \leq i,\ 0 \leq b \leq \kappa - i\}$.

证明。 假设 $\zeta = [\mu;\ \kappa - 2i] - q^{-\kappa}[\mu;\ 0]$。根据引理 4.24，我们可以应用定理 4.22 中的情形 1)-2)。其证明表明，对于 $i_0 = i + 1$， $j_0 = j + 1$，向量 $F_+^{i_0} v$， $F_-^{j_0} v$是极大的。它们生成 $\mathbb{M}$的一个子模；根据定理 4.21，该子模的商由有限多个基向量 $F_+^a F_-^b v$张成，其中 $0 \leq a < i_0$， $0 \leq b < j_0$。这说明 $\mathbb{M}$ 有一个有限维不可约商模。

反过来，若 $\mathbb{M}$有一个有限维商模 L，则存在 (c, d) $\neq$(0,0)，使得$E_\pm F_+^c F_-^d v = 0$，或者等价地说，(38) 中出现的标量均为零。由引理 4.18，这意味着

$$(q^c \mu^{-1} + q^{-c}\mu)\zeta = \mu^{-c}(q^\kappa - q^{-\kappa})[\mu; 0] + [2][\kappa - c + 1] - [c - 1](\mu^2 q^{\kappa - 2c + 1} + \mu^{-2} q^{2c - \kappa - 1}$$

对于第一个标量，这在 ζ 中有唯一解；可以验证，该解具有 (40) 的形式，其中$i = c - 1$。于是，第二个标量给出 $i = \kappa - d - 1$。由命题 4.19 E_+ 和 E_- 在$F_+^a F_-^b v$ 上的作用是标量，且分别与 b 和 a 无关。将 ζ 代入该标量，得到$E_+ F_+^a \neq 0$（当 $a < c$时）以及 $E_- F_-^b \neq 0$（当 $b < d$时）。由定理 4.21，有限维不可约商模具有所需形式的权基。□

注 4.26. 由 (33) 可知，每个 $F_+^i F_-^j v$也都是 W的特征向量。由 (14) 可知，也可以用 W代替 Z 来定义 Cartan 代数。我们的所有结果对这一替代选择同样成立。

The定理 4.22 与定理 4.25 蕴含良好不可约模的 BGG 型分解。

推论 4.27 (BGG 分解)。 假设 $M = \mathbb{M}(\kappa_\diamond, \kappa_1, [\mu; 0], \zeta)$ 是一个具有支配最高权(40)的良好 *Verma* 模。其不可约有限维商模 L 有一个分解

$$\mathbb{M}(\kappa_1 + 2, \kappa_\diamond - 2, [\mu; \kappa - 2i], \zeta'_{3,i}) \hookrightarrow \begin{matrix} \mathbb{M}(\kappa_\diamond - i - 1, \kappa_1 + i + 1, [\mu; -(i+1)], \zeta'_{1,i}) \\ \oplus \\ \mathbb{M}(\kappa_1 + i - 1, \kappa_\diamond - i + 1, [\mu; \kappa - i + 1], \zeta'_{2,\kappa - i}) \end{matrix} \twoheadrightarrow M \twoheadrightarrow L,$$

其中，$\zeta'_{r,j}$ 是定理 *4.22* 中情形 *r)* 对应于 $i = j$ 的 ζ'。

证明。 这些映射在定理 4.22 的证明中构造。由注 4.23 可知，第一个映射是到相应直和项中的包含，其中一个映射乘以一个符号，以得到一个微分。根据定义，第二个映射是一个满射；由定理 4.25 的证明可知，其核等于两个 Verma 模之和。该序列是正合的，因为由注 4.23 可知，这两个 Verma 模像的交恰好是左侧的 Verma 模。□

注 4.28。 存在具有不可特殊化 B_0-权的良好 Verma 模，特殊情形是：对于某个奇整数 n， $\mu = \pm \iota q^{n/2}$ 。尽管如此，它们的表现仍如同最理想的 Verma 模。经典地，在 $\mathfrak{gl}_2$ 的表示论中也会出现类似现象：非整权仍可能产生有限维不可约表示，只要两个权分量之差是非负整数。这些 Verma 模中的 Z-权仍然可以特殊化，这反映了其经典对应物 z 属于 $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2$，因此在包含有限维模的块上具有整权。

4.5. **例外 Verma 模**。Verma 模通常不是权模 s:

命题 4.29。令 $w \in M(B_0 \mid [\iota;\ 0])$ 为一个 U_q'-模 M。若 $B_{-1}w$、Yw 线性无关，则 B_0 作用在 M 上不可对角化，并且对 $\mathbb{M}(\kappa_\diamondsuit$、$\kappa_1$、$[\iota;\ m]$、$\zeta)$ 也不可对角化，其中 $m \in \mathbb{Z}_{\text{。}}$

证明。由 (15)，B_0 在由 $B_{-1}v$、Yv 张成的子空间上的矩阵为 $\begin{pmatrix} q^{-1}[\iota;\ 1 & 0] \\ 1 & q[\iota\ ;\ 0] \end{pmatrix}$ · 其最小多项式为 $(x\mp[2](q-q^{-1})^{-1}\iota)^2$。它不可对角化，且 B_0 在 M上不能对角化。令 $m \in \mathbb{Z}$，并取 $\mathbb{M}(\kappa_\diamondsuit,\ \kappa_1,\ [\iota;\ m],\ \zeta)$ 的一个最高权向量 v。对 $\pm m \geq 0$，令 $w = F_{\pm}^m v$。则 w 满足假设，因为它具有 B_0-权 $[\iota;$ 根据命题 4.11，且 $B_{-1}w,\ Yw$ 线性无关，因为 Verma 模无挠、定理 3.7 和命题 4.4 □

推论 4.30. *Verma* 模具有权空间分解，当且仅当它是良好 *Verma* 模。

证明。根据定理 4.21，良 Verma 模具有权空间分解。如果它不是良好 Verma 模，那么将 F 应用足够多次后，会得到一个权为 $B_0\ \ [\iota;\ 0]$ 的权向量。□

我们将形如 $\mathbb{M}(\kappa_\diamondsuit,\ \kappa_1,\ [\iota;\ m],\ \zeta)$ 且满足 $m \in \mathbb{Z}$ 的 Verma 模称为例外 *Verma* 模。由于根据定理 4.21，良 Verma 模具有权基，命题 4.29 表明，从例外 Verma 模到良好 Verma 模不存在非零态射，因为这样的态射将是一个包含。我们预期反方向也不存在态射:

猜想 4.31. 从良好 Verma 模到例外 Verma 模的任何态射都是零。

4.6. **例外商模**。现在我们简要讨论例外 Verma 模的有限维商模。为此注意，由 $B_1, B_{-1}, \hat{}K$ 生成的子代数作为代数同构于 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$，因此可以应用 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-理论。

虽然例外 Verma 模没有权基，但它们的有限维不可约商模仍可能具有权基。下面的例子说明了这一点。

例 4.32（权商模）。考虑由 $B_1, B_{-1}, \hat{}D_i$ 生成的子代数 U_q'，它显然同构于 $U_q(\mathfrak{gl}_2)$。对于 $r,\ \kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，考虑最高权为 $(\kappa + r, r)$ 的不可约表示的 I 型量子类比。令 v_0 为最高权向量，并令 $v_i = B_{-1}^i v_0$。那么，$U_q(\mathfrak{gl}_2)$-作用可通过设定 $B_0 v_i = [\iota;\ i]v_i$ 扩展为 U_q' 的作用。事实上，

$$\begin{aligned}
(B_0B_{-1}^2 - [2]B_{-1}B_0B_{-1} + B_{-1}^2B_0)v_i =& ([\iota;i+2] - [2][\iota;i+1] + [\iota;i])B_{-1}^2 v_i = 0,\\
(B_0B_1^2 - [2]B_1B_0B_1 + B_1^2B_0)v_i =& ([\iota;i-2] - [2][\iota;i-1] + [\iota;i])B_1^2 v_i = 0,\\
(B_0^2B_{-1} - [2]B_0B_{-1}B_0 + B_{-1}B_0^2)v_i =& ([\iota;i]^2 - [2][\iota;i][\iota;i+1] + [\iota;i+1]^2)B_{-1}v_i = B_{-1}v_i,\\
(B_0^2B_1 - [2]B_0B_1B_0 + B_1B_0^2)v_i =& ([\iota;i]^2 - [2][\iota;i][\iota;i-1] + [\iota;i-1]^2)B_1 v_i = B_1 v_i.
\end{aligned}$$

$\hat{}$ 在这种情况下，Yv_i 与 $B_{-1}v_i$具有相同的 D_i权，因此对于某个标量 β，有 $Yv_i = \beta B_{-1}v_i$。展开 $\beta B_{-1}v_i = (B_0B_{-1} - q^{-1}B_{-1}B_0)v_i$，得到 $\beta = [\iota;\ (i+1)] - q^{-1}[\iota;\ -i] = q^i\iota$。于是，

$$Zv_i = (B_1Y - q^{-1}YB_1)v_i = q^i\iota(B_1B_{-1} - q^{-2}B_{-1}B_1)v_i = q^i\iota([i+1][\kappa - i] - q^{-2}[i][\kappa - i + 1])v_i.$$

这表明，v_i们是整个代数 U_0' 的权向量，并且构成这个（$\kappa+1$）维不可约 U_q'表示的权基。另一方面，根据引理 4.5，它是例外 Verma 模 $\mathbb{M}(\kappa + r,\ r,\ [\iota;\ 0],\ \iota[\kappa])$的有限维商模。

有限 例外 Verma 模的有限维商不一定都有权基 :

例 4.33 （非权商模）。考虑 Verma 模 $\mathbb{M}=\mathbb{M}(r+2,\ r,\ [q^n\iota;\,0],\ \zeta)$。那么 $\mathbb{M}$ 有一个有限维不可约商 L，其 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-特征标为 $[3]+[1]$，当且仅当 $\zeta=\iota q^{-1}(q^{-n}+q^n)$；或者为 $[3]$，当且仅当 $\zeta=\iota q^{-1}[2]$。

为此，令 $v\in\mathbb{M}$ 为一个最高权向量。假设这样的 L 存在。注意，2 是 $\mathbb{M}$ 中最大的权 K，而 Verma 模中的 K 的 0 权空间是二维的。在 $\chi=[3]$ 的情况下，我们需要一个极大向量，即 (38) 为零。容易计算得出，当 $\zeta=\iota q^{-1}[2]$ 时这一条件成立。否则，$\chi=[3]+[1]$，而这个二维空间在 L 中仍然存在。于是 $\mathbb{M}$ 必须有两个线性无关的极大向量，它们包含在由 $\mathbb{M}_{-4}$、B_{-1}^2v，$B_{-1}Yv$，Y^2v 张成的空间中。B_1 和 X 在这组基下的作用由以下矩阵给出

$$\begin{pmatrix}[2] & \zeta & -q^{-1}[2]\\ 0 & 0 & [2](\zeta-\iota q^{-1}\alpha_n)\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}q^{-2}[2](\iota\alpha_n-q\zeta) & 0 & 0\\ [2] & q^{-2}(\iota[2]\alpha_n-\zeta) & -q^{-1}[2]\end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_n=q^{-n}+q^n$，而最上行和最下行分别是 $B_{-1}v$ 和 Yv 的系数。考虑 $\mathbb{M}_{-4}$ 中被 B_1 消去的向量所构成的子空间 $\mathbb{M}_{-4}^{B_1}$。
若 $\zeta\neq\iota q^{-1}\alpha_n$，则 $\mathbb{M}_{-4}^{B_1}$ 由 $\zeta B_{-1}^2v-[2]B_{-1}Yv$张成，这与 $\mathbb{M}_{-4}^{B_1}$ 包含两个线性无关的极大向量相矛盾。

若 $\zeta=\iota q^{-1}\alpha_n$，则 $\mathbb{M}_{-4}^{B_1}$ 由 $\zeta B_{-1}^2v-[2]B_{-1}Yv$、$qY^2v+B_{-1}^2v$ 张成，它们都被 X湮灭。在这种情况下，可以验证 $B_1(\zeta B_{-1}v+[2]Yv)=0$，但对于所有 n，$X(\zeta B_{-1}v+[2]Yv)=-q^{-1}(\alpha_n^2+[2]^2)v\neq 0$。因此，$\mathbb{M}(r+\kappa,r,[\iota;q^n],\iota q^{-1}\alpha_n)$ 有一个四维商L，其基为 $\bar v$，即 v、$Y\bar v$、$B_{-1}\bar v$、$B_{-1}^2\bar v=\iota\alpha_nq^{-1}[2]^{-1}B_{-1}Y\bar v=q^{-1}B_{-1}^2\bar v$. 的像。作为 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-模，L 分解为 $\langle Y\bar v\rangle\oplus\langle\bar v,\ B_{-1}\bar v,\ B_{-1}^2\bar v\rangle$。这些直和项都不是 U_q'-子模，因此L 作为一个 U_q'-模是不可约的。此外，根据 n，有两种不同的情形：

- 若 $n\neq 0$，则有 $B_{-1}\bar v+\iota q^nY\bar v\in L(B_0\mid[\iota;\,n+1])$ $B_{-1}\bar v-\iota q^{-n}Y\bar v\in L(B_0\mid[\iota;\,n-1])$。特别地，$B_0$在 L 上的作用是可对角化的。此外，L 实际上是一个权模。
- 若 $n=0$，则 B_0 在由 $B_{-1}\bar v$、$Y\bar v$ 张成的子空间上的矩阵为
  $\begin{pmatrix}2q^{-1}\iota(q-q^{-1})^{-1} & 1\\ 2q\iota(q-q^{-1})^{-1} & \end{pmatrix}$.
  它的最小多项式为 $\left(t-\frac{q+q^{-1}}{q-q^{-1}}\iota\right)^2=(t-[q\iota;\,0])^2$,，且 B_0 在 L上不可对角化。

例4.34 （$U_q(\mathfrak{sl}_2)$-特征）。通过与上文类似的论证，可以证明 $\mathbb{M}=\mathbb{M}(r+3,\ r,\ [q^n\iota;\,0],\ \zeta)$有有限维商模，当且仅当 ζ取下表中的某个值；此时，商模对应的 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-特征如表所示：

ζ	$\iota q^n[3]$	$\iota(q^{n-1}[2]+q^{-n-2})$	$\iota(q^{n-2}+q^{-n-1}[2])$	$\iota q^{-n}[3]$
$U_q(\mathfrak{sl}_2)$-特征	$[4]$	$[4]+[2]$	$[4]+[2]$	$[4]$

$\mathbb{M}=\mathbb{M}(r+4,\ r,\ [q^n\iota;\,0],\ \zeta)$ 当且仅当 ζ取以下某个值时，才有有限维商模 es

ζ	$\iota q^n[4]$	$\iota(q^{n-1}[3]+q^{-n-3})$	$\iota(q^{n-2}[2]+q^{-n-2}[2])$	$\iota(q^{n-1}+q^{-n-1}[3])$	$\iota q^{-n}[4]$
$\mathfrak{sl}_2$ 特征	$[5]$	$[5]+[3]$	$[5]+[3]+1$	$[5]+[3]$	$[5]$

这些例子暗示了可能的 ζ 值和 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-特征所遵循的模式。通过仿照定理 4.25 的证明，并利用以下事实：$[\iota;n+\kappa-2j]-q^{-\kappa}[\iota;\,n]=\iota(q^{n-j}[\kappa-j]+q^{j-\kappa-n}[j])$,

w我们看到，具有有限维商模的例外 Verma 模满足

$$\zeta = \iota(q^{n-j}[\kappa - j] + q^{j-\kappa-n}[j]), \quad 0 \neq j \neq \kappa - 1. \tag{41}$$

我们事实上期望它刻画出这些 Verma 模：

猜想 4.35（有限维例外商模）。设 $n \in \mathbb{Z}$。例外 Verma 模 $\mathbb{M}(r+\kappa,\ r,\ [\iota;\ n],\ \zeta)$ 有限维不可约商 L 当且仅当（41）成立。在此情形下，L 的 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-特征标为 $[\kappa+1]+[\kappa-1]+\cdots+[\kappa+1-2\min\{j,\kappa-j\}]$。

注 4.36。人们可能希望为 U_q'-模定义一个类似于 BGG 范畴 O 的范畴。至少有两个原因使得例外 Verma 模可能不会被选作 O 中的对象。首先，它们不是权模；其次，它们的子模表现并不理想。

为了说明这一点，我们回到例 4.33。设 $M^{B_1,\ -2\ X}$ 是由 $B_{-1}^2 v,\ B_{-1}Yv,\ Y^2 v$张成的空间中的极大向量子空间。首先假设最高$\hat{}K$-权为 $\mu = \iota q^n$，其中 $n \geq 2$。在 $\mathbb{M}$ 中，$\hat{}K$ 的 (≥ -4)-权空间相对于 B_0 都是可对角化的，因此例外 Verma 模的表现与良好 Verma 模相同，参见注 4.23。当 $n=1$ 时，$\mathbb{M}^{B_1,\ -4\ X}$ 由 $F_\pm F_+ v$ 张成。当 $n=0$ 时，$F_+^2 v$ 仍是一个极大向量，但 B_0 通过一个特征值为 $[\iota q^2$ 的 2×2 若尔当块作用于二维空间 $\mathbb{M}^{B_1,\ -4\ X}$ 上；$0]$。事实上，有限维不可约商模的核是两个具有相同最高权的最高权模的扩张 。在半单李代数的范畴 O 中，这类扩张并不存在。

4.7. **有限维模**。我们最后证明，经过适当的域扩张后，每个有限维不可约 U_q'-模都表现为某个 Verma 模的商模。

引理 4.37。在任意有限维 U_q'-模上，B_1、B_{-1}、X、Y均幂零地作用。

证明。根据 U_q'的表示以及（16），三元组（B_1，B_{-1}，$\hat{}K$）和（X，$-qY$，$\hat{}K$）都生成一个同构于 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的代数，因此结论由 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-理论立即得到。□

命题 4.38。经过适当的域扩张，任意有限维 U_q'-模都有一个被 B_1、X杀掉的权向量，因此是某个 *Verma* 模的商模。

证明。对于任意 $A \subset U_q'$，令 $V^A \subset V$表示被 A杀掉的向量所构成的子空间。由引理 4.37，$V^{B_1} \neq 0$。根据（15），V^{B_1}在 X 下不变，因此 $V^{B_1,\ X} \neq 0$ 同样由引理 4.37得到。根据（15），$V^{B_1,\ X}$在 $\hat{}D_i$，B_0下不变，进而根据（17）—（20）也在 Z，W下不变。经过适当的标量扩张，我们可以找到一个同时特征向量，即 $V^{B_1,\ X}$中的一个权向量。□

5. 有理表示与张量积表示

本节讨论一类特别良好的有限维表示，即有理表示，并研究张量积 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$。

5.1. **有理表示**。由于三元组 $(B_{-1},\ \hat{}K.B_1)$ 生成了一个与 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 同构的 U_q' 子代数，因此 $\hat{}K$ 在任意有限维表示上的作用都是可对角化的，其特征值为 $\pm q^n$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。现在我们来探讨 B_0 的作用是否也具有类似的良好性质。

定义 5.1（有理性条件）。我们称一个 U_q'-模 V 为<style id='7'>有理表示，如果 V 是有限维的，B_0-作用是可对角化的，其特征值为量子整数，并且 $\hat{}D_i$ 也都是可对角化的，其特征值属于 $q^{\mathbb{Z}}$。

例 5.2。 记号 1.12 中的自然表示 $\mathbb{V}_q$ 是有理的。事实上，令$x^{\pm} = e_{\diamondsuit} \pm e_{\diamondsuit}$， $y^{\pm} = e_1 \pm e_1$和 $W_{\pm} = \urcorner\langle x^{\pm}, y^{\pm}\rangle$，则有 $\mathbb{V}_q = W_+ \oplus W_-$作为 U_q'-模。进一步，直接验证可得

$$B_0 x^{\pm} = \pm x^{\pm}, \quad B_0 y^{\pm} = 0, \quad \hat{D}_{\diamondsuit} x^{\pm} = q^{\pm 1} x^{\pm}, \quad \hat{D}_{\diamondsuit} y^{\pm} = y^{\pm}, \quad \hat{D}_1 x^{\pm} = x^{\pm}, \quad \hat{D}_1 y^{\pm} = q^{\pm 1} y^{\pm}.$$

L引理 5.3. 有理表示的商表示和子表示仍然是有理的。

证明。 只需证明，对于有理表示的子表示 V'， B_0-作用仍可对角化，且其特征值为量子整数。设 $0 \neq w \in V'$。将$w = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i v_i$ 写成权为 $[i]$的 B_0-权向量 $v_i \in V$ 的线性组合。于是， $B_0^j w$ 的系数组成范德蒙矩阵（$[i]^j$）$_{i,\ j}$；该矩阵可逆，因为这些量子整数互不相同。因此，对于每个 i，都有 $v_i \in V'$，因为它是若干个 $B_0^j w$的线性组合。□

Verma 模$\mathbb{M}(\kappa_{\diamondsuit},\ \kappa_1,\ [n],\ [n+\kappa-2i]-q^{-\kappa}[n])$的不可约有限维商表示 $\mathsf{L}(\kappa_{\diamondsuit},\ \kappa_1,\ [n],\ [n+\kappa-2i]-q^{-\kappa}[n])$，其中 $n \in \mathbb{Z}$、 $\kappa_{\diamondsuit},\ \kappa_1 \in \mathbb{Z}$、 $\kappa_{\diamondsuit} > \kappa_1$，是有理表示。除有限维性外，有理性条件显然成立；有限维性也成立，因为最高权（$q^{\kappa_{\diamondsuit}},\ q^{\kappa_1},\ [n],\ [n+\kappa-2i]-q^{-\kappa}[n]$）满足支配条件（40）。根据（10）， U_q' 的不可约有理表示应由以下各集合中的元素对来标记

$$\mathbf{P}_{1/2} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ 2\lambda_i \in \mathbb{Z}\}. \tag{42}$$

定理 5.4。 设 V 是一个不可约有理表示。那么 $V \cong \mathsf{L}(\kappa_{\diamondsuit}、\ \kappa_1、\ [n]、\ \zeta)$，其中 $n \in \mathbb{Z}$、 $\kappa_{\diamondsuit}$、 $\kappa_1 \in \mathbb{Z}$、 $\kappa_{\diamondsuit} > \kappa_1$和 $\zeta = [n+\kappa-2i]-q^{-\kappa}[n]$ 对某个 $0 \leq i \leq \kappa$ 成立。

此外，取最高权可得到一个双射

$$\begin{Bmatrix} \textit{isomorphism classes of irreducible} \\ \textit{rational representations of } U_q' \end{Bmatrix} \quad \cong \quad \mathbf{P}_{1/2} \times \mathbf{P}_{1/2}. \tag{43}$$

$$\mathsf{L}(\kappa_{\diamondsuit}, \kappa_1, [n], [n+\kappa-2i]-q^{-\kappa}[n]) \quad \mapsto \quad \left((\frac{\kappa_{\diamondsuit}+n}{2}, \frac{\kappa_{\diamondsuit}+n}{2} - i), (\frac{\kappa_{\diamondsuit}-n}{2}, \frac{\kappa_{\diamondsuit}-n}{2} - \kappa + i) \right).$$

*I*特别地， V 在 $\mathbb{C}(q)$ 上分解为一维权空间的直和 .

证明。 根据命题 4.38，任意有理表示 V 在适当扩张的域上都是某个 Verma 模 $\mathbb{M}$ 的商。根据定理 4.25， $\mathbb{M}$ 必须具有形式 $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\kappa_{\diamondsuit}, \kappa_1, [n], \zeta)$，并满足所需条件。再次根据定理 4.25， V 有一组由权向量组成的基，这些向量在 $\mathbb{M}$ 中具有 $F_+^a F_-^b v$ 的形式，其中 v 是一个最高权向量。特别地，权空间至多为一维。此外， V 的权必须满足以下条件。$\hat{}D_i$-权显然属于 $q^{\mathbb{Z}}$ ，而 B_0-权是命题 4.11 所述的量子整数； Z-权根据 (34) 属于 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ ，也属于 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ ，即它们的 Z-权。因此，权空间已经定义在 $\mathbb{C}(q)$ 上，无需再扩张域。

注意，(43) 中的赋值是良定义的。现在只需证明，它在元组集合 $(\kappa_{\diamondsuit}, \kappa_1, [n], [n+\kappa-2i]-q^{-\kappa}[n])$ 与集合 $\mathbf{P}_{1/2} \times \mathbf{P}_{1/2}$ 之间诱导出一个双射。显然，$((a,b),(c,d)) \mapsto (a+c, b+d, [a-c], [b-d]-q^{b+d-a-c}[a-c])$ 定义了一个逆映射。□

5.2. **多项式表示**。经典地，对于 $\mathfrak{gl}_n$，不可约有理表示的集合包含多项式表示的集合，而多项式表示通常定义为自然表示的某个张量幂中的直和项。因此，我们将 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$ 的有限直和的子表示称为多项式表示。我们声称它们在我们的意义下是有理的：

定理 5.5 (奇异向量)。若 $v \in \mathbb{V}_q^{\otimes d}(B_0, [n])$ 满足 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{Z}$，则根据记号 *1.12*，

$$v \otimes (e_{\overline{\diamondsuit}} + q^n e_{\diamondsuit}) \in \mathbb{V}_q^{\otimes d+1}(B_0, [n+1]), \quad v \otimes (e_{\overline{\diamondsuit}} - q^{-n} e_{\diamondsuit}) \in \mathbb{V}_q^{\otimes d+1}(B_0, [n-1]). \tag{44}$$

特别是，B_0 对 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$ 的作用可对角化，其特征值为量子整数。

Sinc有理表示的有限直和仍为有理表示，由引理 5.3 可得：

推论 5.6。任意多项式表示，特别是 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}(B_0, [n])$，都是有理的。

证明。关于 (44)，参见 [SW25，定理 2.6]。作者研究的是 $U_q'(\mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_1)$，但元素 B_0的形式完全相同，因此其中的证明同样适用于此处。该证明表明，若 v 是B_0 的特征向量，特征值为 $[n]$，则 $v \otimes (e_{\diamondsuit} + q^n e_{\diamondsuit})$ 是 B_0 的特征向量，特征值为 $[n+1]$；而$v \otimes (e_{\diamondsuit} - q^{-n} e_{\diamondsuit})$ 是 B_0 的特征向量，特征值为 $[n-1]$。因此 (44) 成立。 □

利用 $\Delta(B_0) = 1 \otimes B_0 + B_0 \otimes K_0^{-1}$，可直接验证 $v \otimes e_{\pm 1}$ 仍是 B_0的特征向量，特征值为 $[n]$。结合 (44)，我们可以从 v 构造出四个新的线性无关特征向量，它们属于 $\mathbb{V}_q^{\otimes d+1}$，特征值为量子整数；这恰好等于 $\mathbb{V}_q$的维数。现在，对 d 应用归纳法即可证明该定理，其中基例 $d = 1$ 由例 5.2 给出。显然，$\hat{}\, D_i$也可对角化，且其特征值属于 $q^{\mathbb{Z}}$。□

定义 5.7 (奇异向量)。以下向量将会很重要：

$$x_n^{\pm} \coloneqq e_{\overline{\diamondsuit}} \pm q^n e_{\diamondsuit}, \quad y_n^{\pm} \coloneqq e_{\overline{1}} \pm q^n e_1 \in \mathbb{V}_q, \quad \eta_n^{\pm} \coloneqq q^{-1} y_n^{\pm} \otimes x_n^{\pm} - x_n^{\pm} \otimes y_{n-2}^{\pm} \in \mathbb{V}_q^{\otimes 2}. \tag{45}$$

注 5.8. 向量 $x_0^{\pm}, y_0^{\pm}$是定义 1.7 中的 K-矩阵的特征向量，因此也是定义 1.6 中的 J_1 的特征向量，其中对于任意 $w \in \mathbb{V}_q^{\otimes d}$，有 $\mathbb{K} x_0^{\pm} \otimes w = \pm x_0^{\pm} \otimes w$ 和 $\mathbb{K} y_0^{\pm} \otimes w = \pm y_0^{\pm} \otimes w$。

例 5.9. 以下向量在 $\mathbb{V}_q^{\otimes 2}$中是极大的

$$x_0^+ \otimes x_1^+, \quad x_0^+ \otimes y_{-1}^-, \quad y_0^- \otimes x_{-1}^+, \quad y_0^- \otimes y_1^-, \quad \eta_0^{\pm}.$$

我们将与经典情形进行比较，并证明这些向量实际上具有表示性，留给读者完成。这里可以看到，在 $\mathbb{V}_q$ 中对权向量进行朴素的张量运算，并不会得到 $\mathbb{V}_q^{\otimes 2}$中的权向量，这反映出 U_q' 不是 Hopf 代数。然而，通过在 (45) 中引入参数 n，我们得到了 $\mathbb{V}_q^{\otimes 2}$中的极大向量。此外，向量 $\eta_0^{\pm} \in \mathbb{V}_q^{\otimes 2}$ 是 J_2 的特征向量，其特征值为 $\pm q^2$。为此，回忆 $J_2 = H_1 H_0 H_1$，并利用 (8) 验证 $\eta_0^{\pm} \in \mathbb{V}_q^{\otimes 2}$实际上是 H_1 的特征向量，特征值为 $-q$；根据注 5.8，它也是 H_0 的特征向量，特征值为 ± 1。这些现象将推广到更高的张量幂。

5.3. **量子外幂**。本节中，我们在 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$中构造一些极大向量，它们生成楔积表示的张量积的量子类似物。稍后我们将利用这些向量来识别不可约多项式表示。我们先从一些组合学内容开始。

定义 5.10. 奇偶标准双表是一个形状为 $((s,\ s), (t,\ t))$ 的标准双行双表，其中 $s,\ t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为任意值，且第一行中的条目为奇数，第二行中的条目为偶数。

定义 5.11. 如果一个奇偶标准双表中的数字按照先从上到下、再从左到右的顺序填入，则称其为特殊的。

注意到，奇偶标准双表完全由第一行决定，并且每个矩形两行双分拆都有唯一的特殊填充，关于（，）参见（46）。我们可以从（$\emptyset$，$\emptyset$）出发，按照双表第一行所指定的顺序，依次添加由两个方框组成的列，从而重建任意奇偶标准双表。

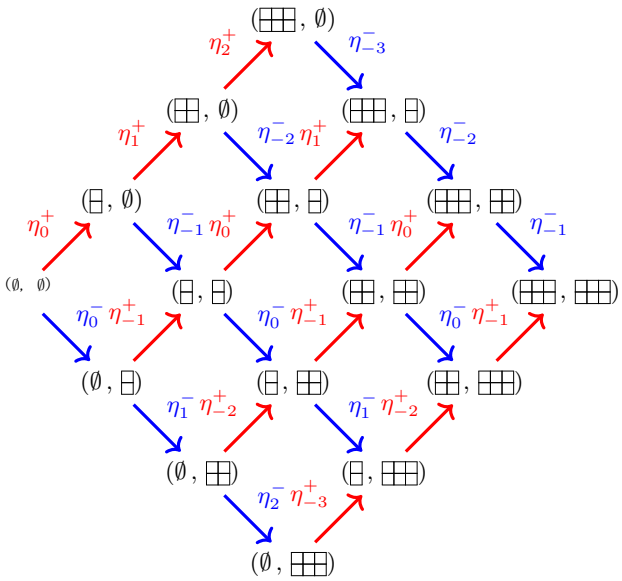
我们通过一个例子来说明这一点：

例 5.12。 在下面的双标准杨表中，前两个是奇偶标准的，第一个还是特殊的。

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4&6\\\hline\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 7&9\\\hline 8&10\\\hline\end{array}\right),\qquad \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&9\\\hline 2&4&10\\\hline\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 5&7\\\hline 6&8\\\hline\end{array}\right),\qquad \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&6\\\hline 2&4&10\\\hline\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 5&7\\\hline 9&8\\\hline\end{array}\right). \tag{46}$$

第一个是特殊的，因为它可以通过依次添加列 $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$、$\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}$、……、$\begin{smallmatrix}9\\10\end{smallmatrix}$，从 $(\emptyset,\emptyset)$ 得到。第二个则可以通过先向第一个分量添加列 $\begin{smallmatrix}1&2\end{smallmatrix}$ 和 $\begin{smallmatrix}3&4\end{smallmatrix}$，再向第二个分量添加列 $\begin{smallmatrix}5&6\end{smallmatrix}$ 和 $\begin{smallmatrix}7&8\end{smallmatrix}$，最后向第一个分量添加列 $\begin{smallmatrix}9&10\end{smallmatrix}$ 构造出来。

注 5.13. 奇偶标准双表可以图示为有向图中的一条路径，其中顶点是形状为 $((s,s),(t,t))$ 的二分拆，而箭头由定义 5.14 中的归纳规则给出，如下所示（此处只画出图的一部分）：



下面的张量 $\Lambda(S,T)$ 正好是与对应于 (S,T) 的路径上的箭头相关联的所有因子的张量积。一般而言，不同的路径会在 $\mathbb{V}_q^{\otimes 2d}$ 中给出不同的张量。

对于每个含有 $2d$ 个方格的奇偶标准双表 (S,T)，我们关联一个向量 $\Lambda(S,T)\in\mathbb{V}_q^{\otimes 2d}$。

定义 5.14. 设 (S,T) 是一个具有 $2d$ 个方格的奇偶标准双表。定义 $\Lambda(S,T)$ 为$\Lambda(\emptyset,\emptyset)=1\in\mathbb{C}(q)=\mathbb{V}_q^{\otimes 2\cdot 0}$，否则 $\Lambda(S,T)=\Lambda(S',T')\otimes\eta_n^{\pm}\in\mathbb{V}_q^{\otimes 2d}$.

这里，(S', T') 是从 (S, T) 中移除包含最大数的列后得到的奇偶标准双表。$\eta_n^{\pm}$ 的定义与式 (45) 中相同，其中 n 是 S' 和 T' 中列数之差的绝对值。如果从 S 中移除了 c，则符号为 $+$；如果从 T 中移除了 $-$，则符号为 $+$。

例 5.15。 按照约定，向量 $\Lambda(\emptyset,\emptyset)$ 是 U_q' 的平凡表示的基向量。因此 $B_0\Lambda(\emptyset,\emptyset) = B_{-1}\Lambda(\emptyset,\emptyset) = B_1\Lambda(\emptyset,\emptyset) = 0$, $\hat{K}\Lambda(\emptyset,\emptyset) = \Lambda(\emptyset,\emptyset)$。

例 5.16。 对于（46）中的特殊奇偶标准双表，我们有

$$\Lambda\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4&6\\\hline\end{array}\,,\begin{array}{|c|c|}\hline 7&9\\\hline 8&10\\\hline\end{array}\right) = \eta_0^+ \otimes \eta_1^+ \otimes \eta_{-2}^- \otimes \eta_{-1}^- \otimes \eta_0^+.$$

这也是 B_0、$\hat{K}$ 的一个特征向量，其特征值 [5] 和 1 分别为。事实证明，它还是一个极大向量，并且是 Jucys–Murphy 元的公共特征向量，其特征值为

$$1, q^2, q^{-2}, 1, -1, -q^2, -q^2, -1, q^4, q^2.$$

这可以利用下面的定理归纳地验证。

定理 5.17 (量子外幂)。 设 (S, T) 是一个具有 $2d$ 个方格的奇偶标准双表。设cont 为内容函数，并设 m 为 S 和 T 中方格数之差。

a.) *We have* $B_0 \cdot \Lambda(S,T) = [m]\,\Lambda(S,T), \quad \hat{K} \cdot \Lambda(S,T) = \Lambda(S,T).$

b.) 我们有 $B_1\,\Lambda(S、\ T) = B_{-1}\,\Lambda(S、\ T) = 0$。特别地， $\Lambda(S、\ T)$ 是一个极大向量 $r.$

c.) *Jucys-Murphy* 元素 J_i 的作用由内容决定，即

$$J_i \cdot \Lambda(S,T) = \pm q^{-2\,\mathrm{cont}(i)}\Lambda(S,T),$$

其中，如果表中的第 i 个方框位于第一个分量中，则符号为 $+$，否则为 $-$。中心元 J: $= J_1 \cdots J_d$通过 q^{-2c}作用于 $\Lambda(S、\ T)$，其中 c是所有内容之和。

T主要技术工具是引入定义 1 中的 Hecke 代数 $\mathscr{H}_{1,\ q}(\mathrm{B}_d)$ .5

引理 5.18。 以下陈述对所有 m、$n \in \mathbb{Z}$均成立。

a.) 记 $\alpha_m = q^m + q^{-m}$ 为 $m \in \mathbb{Z}$。在 $\mathbb{V}_q^{\otimes 2}$中，以下结论成立。

$$H_1\eta_n^{\pm} = -q\eta_n^{\pm}, \quad H_1\eta_n^{\pm} \otimes x_m^{\pm} = q^{-1}\eta_n^{\pm} \otimes x_m^{\pm}, \quad B_1\eta_n^{\pm} = 0, \quad B_{-1}\eta_n^{\pm} = 0, \tag{47}$$

$$H_1(x_n^{\pm} \otimes x_{n+1}^{\pm}) = q^{-1}x_n^{\pm} \otimes x_{n+1}^{\pm}, \quad H_1(y_n^{\pm} \otimes y_{n+1}^{\pm}) = q^{-1}y_n^{\pm} \otimes y_{n+1}^{\pm}, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} H_1(x_{-n}^- \otimes x_{n-1}^+) &= \alpha_n^{-1}(\alpha_{n-1}x_n^+ \otimes x_{-n-1}^- + q^{-n}(q^{-1}-q)x_{-n}^- \otimes x_{n-1}^+),\\ H_1(x_n^+ \otimes x_{-n-1}^-) &= \alpha_n^{-1}(q^n(q^{-1}-q)x_n^+ \otimes x_{-n-1}^- + \alpha_{n+1}x_{-n}^- \otimes x_{n-1}^+). \end{aligned} \tag{49}$$

b。）在 $\mathbb{V}_q^{\otimes 3}$中，以下结论成立。

$$H_1H_2(\eta_m^{\pm} \otimes x_{m+1}^{\pm}) = (q^{-1}H_2 - q^{-2})\eta_m^{\pm} \otimes x_{m+1}^{\pm}. \tag{50}$$

c.) 在 $\mathbb{V}_q^{\otimes 4}$中，以下结论成立。

$$\begin{aligned} &J_1H_1H_2(\eta_0^{\pm} \otimes \eta_{-1}^{\mp}) = \mp H_1H_2(\eta_0^{\pm} \otimes \eta_{-1}^{\mp}) \pm (q^{-1}-q)H_2(\eta_0^{\pm} \otimes \eta_{-1}^{\mp}) \pm (1-q^{-2})\eta_0^{\pm} \otimes \eta_{-1}^{\mp},\\ &H_1H_2(\eta_m^{\pm} \otimes \eta_{m+1}^{\pm}) = (q^{-1}H_2 - q^{-2})\eta_m^{\pm} \otimes \eta_{m+1}^{\pm}, \end{aligned} \tag{51}$$

Moreover, there exists $h_m \in \mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_4)$ *such that* $\eta_m^- \otimes \eta_{-m-1}^+ = h_m(\eta_m^+ \otimes \eta_{-m-1}^-)$.

d.) 此外，以下向量分别在 $\mathbb{V}_q^{\otimes 2}$ $\mathbb{V}_q^{\otimes 4}$中是特征向量

$$\begin{aligned} \Lambda\left(\boxed{\tfrac{1}{2}},\emptyset\right) &= \eta_0^+ & \Lambda\left(\emptyset,\boxed{\tfrac{1}{2}}\right) &= \eta_0^- \\ \Lambda\left(\boxed{\tfrac{1}{2}},\boxed{\tfrac{3}{4}}\right) &= \eta_0^+\otimes\eta_{-1}^- & \Lambda\left(\boxed{\tfrac{3}{4}},\boxed{\tfrac{1}{2}}\right) &= \eta_0^-\otimes\eta_{-1}^+ \end{aligned} \tag{52}$$

对应特征值为 $q^{-2\,\mathrm{cont}(i)}$ 的 *Jucys–Murphy* 元 J_i 。

证明。这些公式可由冗长但直接的计算得出，这里略去。通过对第一式应用 H_1 并利用其二次关系，即可得到（49）中的第二式。取 $h_m = a_m + b_m H_2 + c_m H_1 H_2 + d_m H_3 H_2 + e_m H_1 H_3 H_2 + f_m H_2 H_1 H_3 H_2$，其中

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{(q^6-q^4-q^2+1)q^{4\,m}}{(q^4+q^2)q^{2\,m}+q^{4\,m+6}+1}, \\ b_m = \frac{(q^3-q)q^{4\,m}+(q^3-q)q^{2\,m}}{(q^4+q^2)q^{2\,m}+q^{4\,m+6}+1}, &\quad c_m = d_m = -\frac{(q^4-q^2)q^{4\,m}+(q^4-q^2)q^{2\,m}}{(q^4+q^2)q^{2\,m}+q^{4\,m+6}+1}, \\ e_m = \frac{(q^5-q^3)q^{4\,m}+(q^5-q^3)q^{2\,m}}{(q^4+q^2)q^{2\,m}+q^{4\,m+6}+1}, &\quad f_m = \frac{q^2+q^{2\,m+2}}{q^{2\,m+4}+1}, \end{aligned}$$

并直接计算它在 $\eta_m^+\otimes\eta_{-m-1}^-$上的作用。关于最后一部分，注意到 $i=1,2$ 对应的 J_i-特征值可由（47）得出，另见例 5.9。利用（51）中的第一式，我们得到

$$\begin{aligned} J_3(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) =& H_2H_1J_1H_1H_2(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) \\ =& H_2H_1(\mp H_1H_2\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp \pm (q^{-1}-q)H_2(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) \pm (1-q^{-2})\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) \\ =& \mp H_2(1+(q^{-1}-q)H_1)H_2(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) \pm (q^{-1}-q)H_2H_1H_2(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) \\ & \mp q(1-q^{-2})H_2(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) \\ =& \mp\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp \mp (q^{-1}-q)H_2(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) \mp (q^{-1}-q)H_2H_1H_2(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) \\ & \pm (q^{-1}-q)H_2H_1H_2(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) \mp q(1-q^{-2})H_2(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) = \mp\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp. \end{aligned}$$

最后，由（47）可得 $J_4(\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp) = q^2J_3((\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp)) = \mp q^2\eta_0^\pm\otimes\eta_{-1}^\mp$，正如所需。 □

定理 *5.17* 的证明。对 d 使用归纳法，我们可以假设定理对少于 $2d$ 个方格的双标准杨表成立，基例由例 5.15、例 5.9 和 (52) 给出。因此，根据定义 5.14 中的记号，我们可以将 $\Lambda(S,T) = \Lambda(S',T')\otimes\eta_n^\pm$ 写成某个 $n\in\mathbb{Z}$。

由归纳法可知，关于 $\hat{K}$ 的陈述显然成立，且 $B_0\Lambda(S',T') = [m\mp 1]\Lambda(S',T')$ 成立。将定理 5.5 应用于 $\eta_m^\pm$ 的两个直和项，即可得到关于 B_0 的结论，并证明第一部分。

对于第二部分，我们考虑余乘公式

$$\begin{aligned} \Delta(B_1) &= B_1\otimes K_1^{-1} + 1\otimes B_1 + (\hat{K}-1)\otimes E_{-1}K_1^{-1}, \\ \Delta(B_{-1}) &= B_{-1}\otimes K_1^{-1} + 1\otimes B_{-1} + (\hat{K}^{-1}-1)\otimes E_1K_{-1}^{-1}, \\ \Delta(B_0) &= B_0\otimes K_0^{-1} + 1\otimes B_0. \end{aligned} \tag{53}$$

我们对列数进行归纳，假设 $B_\pm\Lambda(S',\ T') = 0$。经过简短计算可得，$B_\pm$和 $E_1K_{-1}^{-1}$ $E_{-1}K_1^{-1}$消去 $\eta_n^\pm$，因此由 (53) 得 $B_1\,\Lambda(S,\ T) = B_{-1}\,\Lambda(S,\ T) = 0$。由于 $X = B_0B_1 - q^{-1}B_1B_0$和 $\Lambda(S,\ T)$ 是 B_0-特征向量，我们可知 X，，因此 $E_\pm$ 消去 $\Lambda(S,\ T)$。

为证明最后一个断言，假设 J_1，……，J_{2d-2} 满足该断言。简记 $\Lambda_d := \Lambda(S,\ T)$，并令 Λ_{d-1}，Λ_{d-2}，……为由奇偶标准双表得到的相应向量，这些奇偶标准双表是通过依次移除 $(S,\ T)$ 中含有最大项的列得到的。Λ_d 的末因子具有以下形式之一：

$$\eta_{n-1}^{+}\otimes\eta_{n}^{+},\quad \eta_{n-1}^{-}\otimes\eta_{n}^{-},\quad \eta_{-n-1}^{+}\otimes\eta_{n}^{-},\quad \eta_{1-n}^{-}\otimes\eta_{n}^{+} \tag{54}$$

在每种情况下，只需证明

$$J_{2d-1}\Lambda_d = q^{-2\,\mathrm{cont}(2d-1)}\Lambda_d \tag{55}$$

因为根据 J_{2d} 的定义，我们得到

$$J_{2d}\Lambda_d = H_{2d-1}J_{2d-1}H_{2d-1}\Lambda_d = -qH_{2d-1}J_{2d-1}\Lambda_d = q^{-2\,\mathrm{cont}(2d-3)}\Lambda_d = q^{2-2\,\mathrm{cont}(2d-1)}\Lambda_d,$$

这就是定理中的断言。

考虑 (54) 中的第一种情况。我们有 $\mathrm{cont}(2d-1) = \mathrm{cont}(2d-3)+1$，因为两列是在同一个分量中移除的。为证明 (55)，我们计算

$$\begin{aligned}
J_{2d-1}\Lambda_d &= H_{2d-2}H_{2d-3}J_{2d-3}H_{2d-3}H_{2d-2}(\Lambda_{d-2}\otimes\eta_{n-1}^{+}\otimes\eta_{n}^{+})\\
&= H_{2d-2}H_{2d-3}J_{2d-3}(q^{-1}H_{2d-2}-q^{-2})(\Lambda_{d-2}\otimes\eta_{n-1}^{+}\otimes\eta_{n}^{+})\\
&= H_{2d-2}H_{2d-3}(q^{-1}H_{2d-2}-q^{-2})J_{2d-3}(\Lambda_{d-2}\otimes\eta_{n-1}^{+}\otimes\eta_{n}^{+})\\
&= q^{-2\,\mathrm{cont}(2d-3)}H_{2d-2}H_{2d-3}(q^{-1}H_{2d-2}-q^{-2})(\Lambda_{d-2}\otimes\eta_{n-1}^{+}\otimes\eta_{n}^{+})\\
&= q^{-2\,\mathrm{cont}(2d-3)}(q^{-1}H_{2d-3}H_{2d-2}H_{2d-3}-q^{-2}H_{2d-2}H_{2d-3})\Lambda_{d-2}\otimes\eta_{n-1}^{+}\otimes\eta_{n}^{+}\\
&= q^{-2\,\mathrm{cont}(2d-3)}(q^{-1}(-q)(q^{-1}H_{2d-2}-q^{-2})-q^{-2}(-q)H_{2d-2})\Lambda_d\\
&= q^{-2\,\mathrm{cont}(2d-3)}q^{-2}\Lambda_d.
\end{aligned} \tag{56}$$

依次使用定义、(51)、J_{2d-3} 的定义、归纳假设、辫子关系，以及结合 Λ_d 的定义的 x引理5.18。这证明了 (55)，并确立了 (54) 中的第一种情况。(54) 中的第二种情况可以类似处理。

因此，我们考虑第三种情况，也就是说 $\eta_{n}^{+}\otimes\eta_{-n-1}^{-}$。那么，$(S,T)$ 中最大的两个数 $2d-1, 2d$ 位于 T 中，而 $2d-3, 2d-2$ 位于 S 的最后一列。令 s,t 分别为 S,T 的列数。我们首先断言

$$\begin{aligned}
J_{2d-1}J_{2d}\Lambda(S,T) &= q^{-2(t-2)-2(t-1)}\Lambda(S,T),\\
(J_{2d-1}+J_{2d})\Lambda(S,T) &= -\left(q^{-2(t-2)}+q^{-2(t-1)}\right)\Lambda(S,T),
\end{aligned} \tag{57}$$

如果 $d\le 2$，由引理 5.18 即可得证。因此假设 $d\ge 3$。令 $\epsilon_{_} = (\epsilon_1,\dots,\epsilon_d)$ 为 η 在 $\Lambda(S,T)$ 定义中出现的符号序列 $\pm$，也就是说，是注 5.13 中沿路径的符号序列。由于 $d\ge 3$，存在 ϵ 的一个排列 $\epsilon' = (\epsilon'_1,\dots,\epsilon'_d)$，使得 $\epsilon'_{d-1} = \epsilon'_d$。这个新序列定义了一个与 (S,T) 形状相同的奇偶标准杨表 (R,U)。相应的 $\Lambda(R,U)$ 按构造属于 (54) 中的第一种情况，因此定理 5.17 适用于 $\Lambda(R,U)$。

另一方面，利用引理 5.18 中的 h_m，我们可以找到 $h\in\mathscr{H}_{1,\ q}(\mathrm{B}_{2d})$，使得 $\Lambda(S,\ T) = h\Lambda(\epsilon'_1\dots\epsilon'_{d-2}\epsilon\epsilon)$。由于 $J := J_1\cdots J_{2d-1}J_{2d}$ 是 $\mathscr{H}_{1,\ q}(\mathrm{B}_{2d})$ 中的中心元，根据 [Mat04, 定理 3.4],，我们有

$$J\Lambda(S,T) = Jh\Lambda(R,U) = hJ\Lambda(R,U) = q^{-2c}h\Lambda(R,U) = q^{-2c}\Lambda(S,T),$$

其中 c 是内容之和（它仅取决于形状）。由于根据归纳法，$\Lambda(S',\ T')$ 是 $J_1\cdots J_{2d-3}J_{2d-2}$ 的特征向量，因此根据定义，$\Lambda(S,\ T)$ 也是特征向量。此外，它们的特征值相同

并且根据归纳法，它们等于 (S', T') 的内容之和 c'。由于 (S', T') 是从 (S, T) 中移除 T 的最后一列后得到的，因此 (57) 中的第一个结论得证。第二个结论可用类似方法证明。这也说明了 J 的作用公式。

我们仍需将 (57) 精化为 J_i for $i = 2d, 2d-1$ 的作用。为此，考虑由 $\Lambda(S, T)$ 生成的 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_{2d})$-子模。根据定理 1.8 和推论 1.9，它是不可约 U_q'-模的直和。采用第 1.2 节的记号，我们有

$$\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_{2d})\Lambda(S,T) = \bigoplus_{(\lambda,\mu)} \mathbb{S}_q(\lambda,\mu)^{\oplus m_{(\lambda,\mu)}} \subset \mathbb{V}_q^{\otimes 2d}.$$

由归纳假设，对于 $1 \le i \le 2d-2$，有 $J_i\Lambda(S, T) = \pm q^{-2\,\mathrm{cont}(i)}\Lambda(S, T)$。根据引理 1.10，这意味着 $\Lambda(S', T')$ 属于 $\mathbb{S}_q(\mathrm{shape}(S'), \mathrm{shape}(T'))$ 的同型分量 I。根据定义，$\Lambda(S, T)$ 因而包含于 $I \otimes \mathbb{V}_q^{\otimes 2}$。现在回想一下，与 $\mathbb{V}_q$ 作张量积对应于 Hecke 代数表示中的归纳，而归纳在组合上由皮埃里法则编码，即以所有可能的方式添加一个方框。我们需要找出所有添加方框的可能方式，使得 $J_{2d-1} + J_{2d}$ 的作用与 (57) 中的标量相同。出现的符号迫使我们将两个方框都放入第二个分量；此外，这些方框的内容必须恰好为 $t-1$ 和 $t-2$。由于 T' 的形状是矩形的，这意味着我们要给 T' 添加一列。因此，$\Lambda(S, T)$ 必须是 $\mathbb{S}_q(\mathrm{shape}(S), \mathrm{shape}(T))$ 中的极大向量。□

注 5.19。注 5.13 中的图或许有助于追踪 B_0-权。具体而言，定理 5.17 表明，在 $\Lambda(S, T)$的定义中，每个因子 $\eta_n^{\pm}$都带有一个参数 n，其选取方式使得 $\pm[n]$ 等于路径中(S, T)这一步之前一步的 B_0-权。

注 5.20。由于 B_1, B_{-1} 消去 $\Lambda(\lambda, \mu)$，且$\hat{}K, B_0$ 在 $\Lambda(\lambda, \mu)$上作用为一个标量，我们在由 $\Lambda(\lambda, \mu)$张成的张量幂中构造了 U_q'的一个一维表示。与此对应的经典类比是$\bigwedge^2 M_{\pm}$ 的张量积，其中 $M_+ \oplus M_- = \mathbb{V}$ 是向量表示分解为不可约 $\mathfrak{gl}_4^{\theta}$-模所得的分解。

注 5.21。KLR 代数的模，[KL09], [Rou08,?], ，可以视为 Hecke 代数的模，并按 Jucys–Murphy 元分解为特征子空间。鉴于下文的定理 5.17 和定理 5.26，若能将我们的权向量基与一种 KLR 型表示联系起来，将会很有意思，例如 Ros19], 对 Hecke 代数 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_{2d})$ 所做的那样。引理 5.18 中的元素h_m 应视为 KLR 代数中交叉的类比。

5.4.**代表性极大权向量**。舒尔–韦尔对偶（定理 1.8）根据双中心化子性质，蕴含了将 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$ 分解为不可约 $(U_q', \mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d))$-双模的直和 $L \otimes \mathbb{S}_q$，其中 L 是不可约 U_q'-模，而 $\mathbb{S}_q$ 是不可约 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$-模。特别地，在 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$ 中出现的 U_q' 的不可约表示与 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$ 的不可约表示之间存在自然双射。由于在经典情形中，不可约表示由两行双分拆标记， [MS16], 因此这个集合也应当标记此处的不可约表示。在本节中，我们将通过以下策略证明这一点。不可约直和项的重数空间是不可约 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$-模。根据引理 1.10，不可约 $\mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d)$-模可以由 Jucys–Murphy 元 J_i 的特征值区分。在定理 5.17 中，我们构造了 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$ 中与矩形双行二分拆相对应的极大向量。现在，我们将这个集合扩展为一个由两行二分拆标记的代表集；如果 $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$ 中的极大向量集合恰好包含每个

对应于 U_q' 的同型分量中的一个向量，我们就称其为代表性 集合。根据定理 1.8，这样的集合原则上允许通过施加 $F_{\pm}$'s 以及 $\mathscr{H}$、$_q$(B$_d$)-作用，为每个分量构造一个权基。
我们先将奇偶标准双表的概念推广到任意两行形状。

定义 5.22。 给定一个两行二分拆 $(\lambda,\ \mu)$，其唯一的特殊填充 如下：取矩形子二分拆 $((\lambda_2,\ \lambda_2),\ (\mu_2,\ \mu_2))$ 在定义 5.11 意义下的特殊填充，记为 $(S_\lambda,\ T_\mu)$，再将剩余的数按从左到右递增的顺序填入。

回顾（45），现在我们将 $\Lambda(S,\ T)$ 的定义推广如下。

定义 **5.23 定义**。 对于 d 的每个两行二分拆 $(\lambda,\ \mu)$，我们通过设置为其指定一个向量 $\Omega(\lambda,\ \mu)\in\mathbb{V}_q^{\otimes d}$ ng

$$\Omega(\lambda,\mu)=\Lambda(S_\lambda,T_\mu)\otimes x_r^+\otimes x_{r+1}^+\otimes\cdots\otimes x_{r+s}^+\otimes x_{-r-s}^-\otimes x_{-r-s+1}^-\otimes\cdots\otimes x_{-r-s+t-1}^-,\qquad(58)$$

其中 $s=\lambda_1-\lambda_2, t=\mu_1-\mu_2, r=\lambda_2-\mu_2$。

例子 **5.24.** 对于二分拆 $(\lambda,\mu)=(\ ,\ )$，特殊填充及向量 $\Omega(\lambda,\mu)$ 为

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&7&8\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&9&10\\\hline 6\\\cline{1-1}\end{array}\right),\qquad \Omega(\lambda,\mu)=\Lambda\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 5\\\hline 6\\\cline{1-1}\end{array}\right)x_1^+x_2^+x_{-3}^-x_{-2}^-=(\eta_0^+\eta_1^+\eta_{-2}^-)x_1^+x_2^+x_{-3}^-x_{-2}^-..$$

定理 5.25 (代表性极大向量)。 以下结论成立。

a.) 与两行二分拆 (λ,μ) 相关联的向量 $\Omega(\lambda,\mu)$ 是一个极大向量。 *b*.) 它是 B_0 和 $\hat{}K$ 的特征向量，相应的特征值为 $[\lambda_1-\mu_1],\ q^{\lambda_1+\mu_1}$。 *c*.) 它是 *Jucys–Murphy* 元的公共特征向量。 J_i 的特征值为 $\pm q^{-2\,\mathrm{cont}(i)}$，其中 $\mathrm{cont}(i)$ 是特殊填充中第 i 个方框的内容，该填充对应于 (λ,μ)。

证明。 为说明 $\Omega(\lambda,\mu)$ 是一个极大向量，回忆式 (45)，令

$$z=x_r^+\otimes x_{r+1}^+\otimes\cdots\otimes x_{r+s}^+\otimes x_{-r-s}^-\otimes x_{-r-s+1}^-\otimes\cdots\otimes x_{-r-s+t-1}^-.\qquad(59)$$

利用余乘公式 (53)，我们计算得

$$\begin{aligned}B_1\Omega(\lambda,\mu)&=B_1\Lambda(S_\lambda,T_\mu)\otimes(uz)+\hat{K}^{\pm1}\Lambda(S',T')\otimes(B_1z)+(1-\hat{K}^{\pm1})\Lambda(S',T')\otimes(E_{-1}K_1^{-1}z)\\&=\Lambda(S',T')\otimes(B_1z),\end{aligned}$$

其中，第二个等式应用了定理 5.17 于 $\Lambda(S',\ T')$。接下来我们断言 $B_1z=0$。为此，我们对张量因子的数量使用归纳法。显然，对于所有 $n\in\mathbb{Z}$，都有 $B_1x_n^{\pm}=0$。在归纳步骤中，我们注意到，余乘公式 (53) 中出现的 E_{-1} 会消去所有 $x_n^{\pm}$（$n\in\mathbb{Z}$）。这就证明了该断言，并且 $\Omega(\lambda,\ \mu)$ 是一个极大向量。

对于 b.) 部分的陈述，我们应用定理 5.17，得到 $\Lambda(S_\lambda,\ T_\mu)$ 是 $\hat{}K$ 和 B_0 的特征向量，其特征值分别为 1 和 $[\lambda_2-\mu_2]$。然后根据构造以及定理 5.5，$\Omega(\lambda,\ \mu)$ 的 $\hat{}B_0$-特征值为 $[\lambda_1-\mu_1]$。由于 K 是群状的，它在 $\Omega(\lambda,\ \mu)$ 上的特征值等于各因子上的特征值之积，由此即得所述结论。

为了计算 Jucys–Murphy 元的谱，我们对 $\lambda_1-\lambda_2+\mu_1-\mu_2$ 使用归纳法，基例为 $\Lambda(S_\lambda,\ T_\mu)\otimes x_m^{\pm}$，因为情形 $\Lambda(S_\lambda,\ T_\mu)$ 已包含在定理 5.17 中。记 $(\lambda,\ \mu)$ 中方格的总数为 d。 $J_1,\ \ldots,\ J_{d-1}$ 的特征值由定理 5.17 得出。我们首先考虑数字 $d-2,\ d-1,\ d$ 在 $(\lambda,\ \mu)$ 的特殊填充中位于相邻列的情形，然后将一般基例归约到这一情形。

根据定义，对条目 $d-2,\ d-1,\ d$ 的假设意味着 $\Omega(\lambda,\ \mu)=\Lambda(S',\ T')\otimes\eta_n^{\pm}\otimes x_{n+1}^{\pm}$，其中 $(S',\ T')$ 是从 $(S_\lambda,\ T_\mu)$ 中移除包含 $d-2,\ d-1$ 的列后得到的奇偶标准双表。记 u 为 $\Omega(\lambda,\ \mu)$ 的 J_{d-2}-特征值，我们计算

$$\begin{aligned}
J_d\Omega(\lambda,\mu) &= H_{d-1}J_{d-1}H_{d-1}(\Lambda(S',T')\otimes\eta_n^{\pm}\otimes x_{n+1}^{\pm})\\
&= H_{d-1}H_{d-2}J_{d-2}H_{d-2}H_{d-1}(\Lambda(S',T')\otimes\eta_n^{\pm}\otimes x_{n+1}^{\pm})\\
&= H_{d-1}H_{d-2}J_{d-2}(q^{-1}H_{d-1}-q^{-2})(\Lambda(S',T')\otimes\eta_n^{\pm}\otimes x_{n+1}^{\pm})\\
&= H_{d-1}H_{d-2}(q^{-1}H_{d-1}-q^{-2})J_{d-2}(\Lambda(S',T')\otimes\eta_n^{\pm}\otimes x_{n+1}^{\pm})\\
&= H_{d-1}H_{d-2}(q^{-1}H_{d-1}-q^{-2})u(\Lambda(S',T')\otimes\eta_n^{\pm}\otimes x_{n+1}^{\pm})\\
&= u(q^{-1}H_{d-2}H_{d-1}H_{d-2}-q^{-2}H_{d-1}H_{d-2})\Lambda(S',T')\otimes\eta_n^{\pm}\otimes x_{n+1}^{\pm}\\
&= u(q^{-1}(-q)(q^{-1}H_{d-1}-q^{-2})-q^{-2}(-q)H_{d-1})\Lambda(S',T')\otimes\eta_n^{\pm}\otimes x_{n+1}^{\pm}=uq^{-2}\Omega(\lambda,\mu),
\end{aligned}$$

这里依次用到了 J_d 的定义、 J_{d-1} 的定义、(50)、 J_{d-2} 的定义、归纳假设、辫子关系，以及引理 5.18 和 $\Omega(\lambda,\ \mu)$ 的定义。这表明 J_d 的特征值为 uq^{-2}。由于在这种情况下 $\mathrm{cont}(d)=\mathrm{cont}(d-2)+1$，结论得证。

现在考虑一般的基例。由引理 5.18，存在一个元素 $h\in\mathscr{H}_{1,\ q}(\mathrm{B}_{d-1})$，使得 $\Lambda(S_\lambda,\ T_\lambda)=h\Lambda(S',\ T')$，其中 $(S',\ T')$ 是一个与 $(S_\lambda,\ T_\mu)$ 形状相同的奇偶标准双表，但 $d-2,\ d-1$ 位于特殊填充 $(\lambda,\ \mu)$ 中含有 d 的方框相邻的列中。于是，根据上述计算，$\Lambda(S',\ T')\otimes x_{n+1}^{+}$ 对于 $J_1,\ \ldots,\ J_{d-1}$ 具有所需的特征值。由于 $J:=J_1+\cdots+J_d$ 是 $\mathscr{H}_{1,\ q}(\mathrm{B}_d)$ 中的中心元，我们有

$$J\Omega(\lambda,\mu)=Jh\Omega(\lambda,\mu)=hJ\Omega(\lambda,\mu)=\left(\sum_{i=1}^{d-1}\pm q^{-2\,\mathrm{cont}(i)}\right)\Omega(\lambda,\mu),$$

这意味着 $J_d\Omega(\lambda,\ \mu)=\pm q^{-2\,\mathrm{cont}(d)}\Omega(\lambda,\ \mu)$。这就确立了通常的基例。

现在，任取一个二分拆 $(\lambda,\ \mu)$，设 $(\lambda',\ \mu')$ 是从 $(\lambda,\ \mu)$ 中移除特殊填充里包含 d 的方格后得到的二分拆。根据归纳假设，定理对作用于 $\Omega(\lambda',\ \mu')$ 的 J_1、……、J_{d-1} 成立，因此对它们在 $\Omega(\lambda,\ \mu)=\Omega(\lambda',\ \mu')\otimes x_n^{\pm}$ 上的作用也成立。

还需要确定 J_d 的特征值。注意，我们可以假设 $\lambda_1-\lambda_2+\mu_1-\mu_2\geq 2$，否则就属于上文讨论过的通常基例。现在分两种情况。如果特殊填充 $(\lambda,\ \mu)$ 中包含 $d-1$ 和 d 的方框位于同一个分量中，那么根据 (48),

$$J_d\Omega(\lambda,\mu)=H_{d-1}J_{d-1}H_{d-1}\Omega(\lambda,\mu)=\pm q^{-2\,\mathrm{cont}(d-1)-2}\Omega(\lambda,\mu).$$

在这种情况下，$\mathrm{cont}(d)=\mathrm{cont}(d-1)+1$，结论得证。若包含 $d-1$ 和 d 的方格位于不同的连通分支中，则对于某个二分拆（$\lambda',\ \mu'$），有 $\Omega(\lambda',\ \mu')\otimes x_n^{\pm}\otimes x_{-n-1}^{\mp}$。我们计算 $x_n^{+}\otimes x_{-n-1}^{-}$ 情形，另一个情形完全类似。设在（$\lambda,\ \mu$）的特殊填充中，$\mathrm{cont}(d)=s$ 且 $\mathrm{cont}(d-1)=t$，从而 $s-t=n$。记 $\alpha_n=q^n+q^{-n}$，则有

$$\begin{aligned}
J_d\Omega(\lambda,\mu) &= H_{d-1}J_{d-1}H_{d-1}(\Omega(\lambda',\mu')\otimes x_{-n}^{-}\otimes x_{n-1}^{+})\\
&= H_{d-1}J_{d-1}\alpha_n^{-1}\left(\Omega(\lambda',\mu')\otimes(\alpha_{n-1}x_n^{+}\otimes x_{-n-1}^{-}+q^{-n}(q^{-1}-q)x_{-n}^{-}\otimes x_{n-1}^{+})\right)\\
&= \alpha_n^{-1}H_{d-1}\left(\Omega(\lambda',\mu')\otimes(q^{-2s}\alpha_{n-1}x_n^{+}\otimes x_{-n-1}^{-}-q^{-2t}q^{-n}(q^{-1}-q)x_{-n}^{-}\otimes x_{n-1}^{+})\right)\\
&= q^{-2s}\alpha_n^{-2}\Omega(\lambda',\mu')\otimes(\alpha_{n-1}(q^{n}(q^{-1}-q)x_n^{+}\otimes x_{-n-1}^{-}+\alpha_{n+1}x_{-n}^{-}\otimes x_{n-1}^{+})\\
&\quad -q^{2n}q^{-n}(q^{-1}-q)(\alpha_{n-1}x_n^{+}\otimes x_{-n-1}^{-}+q^{-n}(q^{-1}-q)x_{-n}^{-}\otimes x_{n-1}^{+}))
\end{aligned}$$

$$= q^{-2s}\alpha_n^{-2}\Omega(\lambda',\mu')\otimes((q^n(q^{-1}-q)\alpha_{n-1}-q^n(q^{-1}-q)\alpha_{n-1})x_n^+\otimes x_{-n-1}^-$$
$$+(\alpha_{n+1}\alpha_{n-1}-(q^{-1}-q)^2)x_{-n}^-\otimes x_{n-1}^+)=q^{-2s}\alpha_n^{-2}\alpha_n^2\Omega(\lambda,\mu),$$

其中我们依次使用了 J_d 的定义、（49）、归纳假设、 $s-t=n$，再次使用（49），并合并了各项。由于 cont$(d)=s$，这就证明了该结论。□

We 最后还将证明，除其他结果外，$\Omega(\lambda,\ \mu)$ 构成一组极大向量的代表集 .

定理 5.26（张量幂的分解）。 以下结论成立。

a.) 作为一个 $(U_q',\ \mathscr{H}_{1,q}(\mathrm{B}_d))$-双模， $\mathbb{V}_q^{\otimes d}$分解为不可约双模

$$\mathbb{V}^{\otimes d}=\bigoplus_{(\lambda,\mu)}L(\lambda,\mu)\boxtimes\mathbb{S}_q(\lambda,\mu),\tag{60}$$

其中直和遍历 d 的二分拆(λ,μ)，且每个二分拆至多有两行。

这里， $\mathbb{S}_q(\lambda,\mu)$ 是与二分拆(λ,μ)相对应的不可约 $\mathscr{H}_{1,\ q}(\mathrm{B}_d)$-模。

b.) 对于任意两行双分拆 (λ,μ)，重数空间 $L(\lambda,\mu)$ 是一个不可约的 U_q'-模，而来自 (58) 的极大向量 $\Omega(\lambda,\mu)$ 包含在 $L(\lambda,\mu)$的一份拷贝中。

c.) $(\hat{}D_\diamondsuit,\hat{}D_1,B_0,Z,W)$-权 $(q^{\kappa_\diamondsuit},q^{\kappa_1},[n],\zeta,\omega)$ 的 $\Omega(\lambda,\mu)$，其中 $\kappa=\kappa_\diamondsuit-\kappa_1$，等于

$$\begin{aligned}\kappa_\diamondsuit&=\lambda_1+\mu_1,\qquad \kappa_1=\lambda_2+\mu_2,\qquad n=\lambda_1-\mu_1,\\ \zeta&=[\lambda_2-\mu_2]-q^{-\kappa}[n],\quad \omega=q^{-2}[\lambda_2-\mu_2]-q^{\kappa-2}[n].\end{aligned}\tag{61}$$

In 特别地，二分拆 (λ,μ) 唯一确定了 $L(\lambda,\mu)$的同构类 .

d.) 双射 (43) 诱导出一个双射

$$\left\{\begin{array}{c}isomorphism\ classes\ of\\ irreducible\ summands\ in\ \mathbb{V}_q^{\otimes d}\end{array}\right\}\ \cong\{\ 2\text{-}row\ bipartitions\ of\ d\}.\tag{62}$$

我们注意到，(61) 中的 ω-值满足以下递推公式。

引理 5.27. 设 (λ,μ) 如定理 *5.26* 中所述。进一步假设 $\lambda_1-\lambda_2\geq 1$ 或 $\mu_1-\mu_2\geq 1$，并设 (λ',μ') 为通过移除特殊填充中包含 d 的方框 b 所得到的二分拆。令 ω,ω' 为来自 (61)的相应 ω-值。那么

$$\omega=\omega'\mp q^{\kappa'-1\pm m},\qquad where\ \kappa'=\lambda_1+\mu_1-\lambda_2-\mu_2-1,m=\lambda_1-\mu_1\mp 1.\tag{63}$$

这里，如果 b 属于第一分量，则符号为 $-$ ；否则为 $+$ 。

定理 *5.26* 的证明。定理 1.8 和双中心化子定理推出了无重数双模分解，但我们仍需验证式 (60) 中的标记集。

给定一个两行二分拆 $(\lambda,\ \mu)$，由定理 5.25 可知，存在一个形状为 $\hat{}(\lambda,\ \mu)$ 的标准双表 $(S,\ T)$，其极大向量 $\Omega(\lambda,\ \mu)$ 对 $B_0,\ K$ 具有所断言的权。考察定理 5.25 最后一部分所述的 Jucys–Murphy 元的作用，可知 $\Omega(\lambda,\ \mu)$ 属于双模 $L(\lambda,\ \mu)\boxtimes\mathbb{S}_q(\lambda,\ \mu)$。这就证明了定理的第二部分。

从现在起，记 $\kappa = \lambda_1 + \mu_1 - \lambda_2 - \mu_2$。接下来我们用归纳法证明，每个 Ω(λ， μ) 都是一个 aW-特征向量，其特征值满足递推公式 (63)。展开定义 3.1，

$$\begin{aligned} W &= B_{-1}B_0B_1 - q^{-1}B_{-1}B_1B_0 - q^{-1}B_0B_1B_{-1} + q^{-2}B_1B_0B_{-1} \\ &= B_{-1}B_0B_1 - q^{-1}B_{-1}B_1B_0 - q^{-1}B_0B_{-1}B_1 - q^{-1}B_0[\hat{}K; 0] + q^{-2}B_1B_0B_{-1}. \end{aligned} \tag{64}$$

由于前三项湮灭 Ω(λ， μ)，而第三项的作用是一个已知标量，我们只需计算 $q^{-2}B_1B_0B_{-1}$ 的作用。我们通过对 $\lambda_1 - \lambda_2$ 和 $\mu_1 - \mu_2$ 作归纳来完成计算。我们从 (λ， μ) =((s， s)，(t， t)) 开始。根据定理 5.17， $B_1B_0B_{-1}$Ω(λ， μ) = 0，且 $-q^{-1}B_0[\hat{}K; 0]$Ω(λ， μ) = 0。由于在此情形下 $\omega = q^{-2}[s-t] - q^{\kappa-2}[s-t] = (q^{-2} - q^{-2})[s-t] = 0$，基例得证。

现在假设可以通过从 (λ, μ) 的第一行移去一个方框，得到一个二分拆 (λ′， μ′)。根据定义，我们有 Ω(λ， μ) =Ω(λ′， μ′) $\otimes x_m^{\pm}$。根据归纳假设，Ω(λ′， μ′) 是一个权向量。令 (ω′， $[m]$， $q^{\kappa'}$) 为其 (W， B_0， $\hat{}K$)-权。因此，根据 (64)，它也是一个特征向量，对应于$B_1B_0B_{-1}$ 的特征值 $\xi = q^2(\omega' + q^{-1}[m][\kappa'])$。应用余乘法，见 (53)，得到

$$\begin{aligned} & B_1B_0B_{-1}\Omega(\lambda,\mu) \\ = \; & (B_1B_0B_{-1} \otimes (K_{-1}K_0K_1)^{-1} + B_1B_{-1} \otimes B_0(K_1K_{-1})^{-1} + (\hat{K} - 1)B_0 \otimes E_{-1}(K_1K_0)^{-1}B_{-1} \\ & +(\hat{K}^{-1} - 1)B_0 \otimes B_1K_0^{-1}E_1K_{-1}^{-1} + B_0 \otimes B_1K_0^{-1}B_{-1})\Omega(\lambda',\mu') \otimes x_m^{\pm}, \\ = \; & \xi\,\Omega(\lambda',\mu') \otimes x_m^{\pm} + [\kappa']\Omega(\lambda',\mu') \otimes (e_{\diamondsuit} \pm q^{\pm m}e_{\overline{\diamondsuit}}) + (q^{\kappa'} - 1)[m]\Omega(\lambda',\mu') \otimes (\pm q^{\pm m}e_{\diamondsuit}) \\ & +(q^{-\kappa'} - 1)[m]\Omega(\lambda',\mu') \otimes e_{\overline{\diamondsuit}} + [m]\Omega(\lambda',\mu') \otimes x_m^{\pm} \\ = \; & (\xi + [m])\Omega(\lambda',\mu') \otimes x_m^{\pm} + \Omega(\lambda',\mu') \otimes [\kappa'](e_{\diamondsuit} \pm q^{\pm m}e_{\overline{\diamondsuit}}) \pm (q^{\kappa'} - 1)[m]q^{\pm m}e_{\diamondsuit} + (q^{-\kappa'} - 1)[m]e_{\overline{\diamondsuit}}) \\ = \; & (\xi \pm [\kappa']q^{\pm m} + q^{-\kappa'}[m])\Omega(\lambda',\mu') \otimes x_m^{\pm}, \end{aligned}$$

这里用到了以下简单恒等式

$$\begin{aligned} B_1K_0^{-1}E_1K_{-1}^{-1}x_m^{\pm} &= e_{\overline{\diamondsuit}}, & E_{-1}(K_1K_0)^{-1}B_{-1}x_m^{\pm} &= \pm q^m e_{\diamondsuit}, \\ (K_{-1}K_0K_1)^{-1}x_m^{\pm} &= x_m^{\pm}, & B_0(K_1K_{-1})^{-1}x_m^{\pm} &= e_{\diamondsuit} \pm q^m e_{\overline{\diamondsuit}} \\ B_1K_0^{-1}B_{-1}x_m^{\pm} &= x_m^{\pm}, & \frac{[\kappa'] \pm (q^{\kappa'} - 1)[m]q^{\pm m}}{\pm[\kappa']q^{\pm m} + (q^{-\kappa'} - 1)[m]} &= \pm q^{\pm m}. \end{aligned}$$

这表明 s，Ω(λ， μ) 是 $B_1B_0B_{-1}$ 的特征向量，因此根据 (64)，它也是 W 的特征向量，其 W-特征值为 ue

$$\omega = q^{-2}(\xi \pm [\kappa']q^{\pm m} + q^{-\kappa'}[m]) - q^{-1}[m \pm 1][\kappa]. \tag{65}$$

现在，根据归纳假设，我们知道 (λ′， μ′) 对应的值，即 $m = \lambda_1 - \mu_1 \mp 1$, $\kappa' = \kappa - 1$。将这些值代入表达式 (65)，得到 $\omega = \omega' + q^{-1}[m][\kappa - 1] + q^{-\kappa-1}[m] - q^{-1}[m \pm 1][\kappa] \pm q^{\pm m-2}[\kappa - 1]$. 。化简后恰好得到递推公式 (63)。由于两个序列在基例上相同，因此它们对所有双行二分拆都相同。

我们回到 (60)，并证明其中的求和遍历了至多有两行的 d 的二分拆 (λ, μ)。由于经典情形中也有完全类似的结论，只需匹配不可约模的维数。对于 Hecke 代数模，这一点众所周知。对于 U_q'-模，根据定理 4.25，我们有 dim $L(\lambda, \mu)$ =(λ1 − λ2 + 1)(μ1 − μ2 + 1)，这与其经典类比的维数一致。直接比较 (43) 与 (61) 即可得到 (62)。□

注 5.28。 张量幂中的所有极大向量都可由某个 Ω(λ， μ) 通过 Hecke 代数作用得到，因为（60）中的重数空间是不可约的 $\mathscr{H}_{1,\ q}$(B$_d$)-模。

5.5. **Clebsch–Gordan 公式**。 本节将证明一个关于 U_q' 的 Clebsch–Gordan 型公式。在尝试建立该公式时，我们还发现了对二分拆中一个分量为矩形的不可约模进行规范化的一种巧妙方式，现一并记录如下。

引理 5.29. 考虑一对两行分拆 λ,μ，满足 $\mu_1=\mu_2$，并取 $L=L(\lambda,\mu)$。令$v\in L$ 为极大向量，并令 κ,n 如(61)中所示。则 E_- 和 F_- 在 L上的作用为零。此外，$\{v_a=([a]!)^{-1}B_{-1}^a v\}_{0\le a\le\kappa}$ 构成 L 的一组权基，满足

$$E_+v_a=(q^{2n-2a}+1)[\kappa-a+1]v_{a-1},\quad F_+v_a=(1+q^{2a-2n})[a+1]v_{a+1}.$$

对于 $L(\mu,\lambda)$，也有类似的结论。

例5.30. 考虑 $L((4,0)\emptyset)$。注意到 $q^m+q^{-m}=[m+1]-[m-1]$。那么，在引理 5.29 中的权基 $\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 下， E_+ 和 F_+ 的作用可明确表示为：

$$q^3([4]-[2])[4]\quad q^2([3]-[1])[3]\quad q^1([2]-[0])[2]\quad q^0([1]-[-1])[1]$$



$$q^4([5]-[3])[1]\quad q^3([4]-[2])[2]\quad q^2([3]-[1])[3]\quad q^1([2]-[0])[4]$$

这里， E_+ 和 F_+ 将基向量映射为乘以所示标量的基向量。

引理 *5.29* 的证明。 我们证明关于 $L(\lambda,\mu)$ 的陈述。由于 $\mu_1=\mu_2$，由 (61) 可知，定理 4.25 中的权基实际上是 $F_+^a v$和 $E_-v_a=F_-v_a=0$。因此， $L(\lambda,\mu)$ 被 E_- 和 F_- 消去。接下来，由命题 4.11， v_a 的 B_0 权为 $[n-a]$。鉴于 (39)，

$$\begin{aligned}B_1v_a&=(q^{n-a}+q^{a-n})^{-1}(E_+v_a+E_-v_a)=q^{a-n}(q^{n-a}+q^{a-n})^{-1}E_+v_a,\\ B_{-1}v_a&=(q^{n-a}+q^{a-n})^{-1}(F_+v_a+F_-v_a)=q^{n-a}(q^{n-a}+q^{a-n})^{-1}F_+v_a.\end{aligned}\tag{66}$$

$\hat{}$， B_{-1}的情形也类似。现在回忆一下，由 B_1,B_{-1},K 生成的子代数同构于$U_q(\mathfrak{sl}_2)$，因此我们有 $B_1v_a=[\kappa-a+1]v_{a-1}$，以及 $B_{-1}v_a=[a+1]v_{a+1}.$。结合 (66)，证明得证。□

定理 5.31 (Clebsch–Gordan 公式)。 对于任意两行双分拆(λ,μ)，存在 U_q'-模的无重数分解

$$L(\lambda,\ \mu)\otimes\mathbb{V}_q=L((\lambda_1+1,\lambda_2),\mu)\oplus L((\lambda_1,\lambda_2+1),\mu)\oplus L(\lambda,(\mu_1+1,\mu_2))\oplus L(\lambda,(\mu_1,\mu_2+1)).$$

按照约定，如果$(\lambda,\mu)=0$不是二分拆，则(λ,μ)

证明。 令 v为 $L(\lambda,\ \mu)$ 的一个最高权向量。令 n、κ、ζ如定理 5.26 和 $i=\lambda_1-\lambda_2$中所述。我们为 $L(\lambda,\ \mu)\otimes\mathbb{V}_q$中的每个直和项构造一个显式的极大向量。为此，令

$$\mathsf{w}_+=F_+v\otimes x_{n-1}^+-q^{1-n}[i]\alpha_{n+\kappa-i}v\otimes y_{n-\kappa-2}^+,\quad \mathsf{w}_-=F_-v\otimes x_{-n-1}^--q^{n+1}[\kappa-i]\alpha_{n-i}v\otimes y_{-n-\kappa-2}^-,\tag{67}$$

对于 $j\in\mathbb{Z}$，使用 $\alpha_j=q^j+q^{-j}$，并用这些向量来定义

$$\Xi_+=(q^{2i}-1)\mathsf{w}_--(q^{2i}+q^{2n})\mathsf{w}_+,\quad \Xi_-=(q^{2i-2n}+q^{2\kappa})\mathsf{w}_-+(q^{2i}-q^{2\kappa})\mathsf{w}_+.\tag{68}$$

通过维数计数并使用定理 4.25 中的基，只需证明以下向量在对应的直和项非零时是极大向量，而在该直和项为零时为零。

$\Xi_+,$	$\Xi_-,$	$v\otimes x_n^+,$	$v\otimes x_n^-$
$L((\lambda_1,\ \lambda_2+1)\ \mu)$	$L(\lambda,\ (\mu_1,\ \mu_2+1))$	$L((\lambda_1+1,\ \lambda_2)\ \mu)$	$L(\lambda,\ (\mu_1+1,\ \mu_2))$

(69)

为证明我们的结论，首先注意到 $((\lambda_1+1,\ \lambda_2)\ \mu)$、$(\lambda,\ (\mu_1+1,\ \mu_2))$ 始终是双行二分拆。假设 $((\lambda_1,\ \lambda_2+1)\ \mu)$ 不是二分拆，则有 $i=\lambda_1-\lambda_2=0$，根据引理 5.29，$F_+v=0$。于是 $\mathsf{w}_+=0$，从而得到 $\Xi_+=(q^0-1)\mathsf{w}_-(q^0+q^{2n})\mathsf{w}_+=0$，正如所需。同样地，如果 $(\lambda,\ (\mu_1,\ \mu_2+1))$ 不是二分拆，则有 $\mu_1-\mu_2=0$ 和 $\kappa=i$。这意味着 $F_-v=0$，进而 $\mathsf{w}_-=0$。我们得到 $\Xi_-=(q^{2i-2n}+q^{2i})\mathsf{w}_-+(q^{2i}-q^{2i})\mathsf{w}_+=0$，正如所需。

我们验证 Ξ_i 和 $v\otimes x_n^{\pm}$的权，如 (61) 所示。ˆ D_J-权显然。由定理 5.5，$v\otimes x_n^{\pm}$是权为 $[n\pm1]$的 B_0-权向量，而 $\mathsf{w}_\pm$ 的每一项都是权为 $[n]$的 B_0-权向量。因此，$\Xi_\pm$ 是权为 $[n]$ 的 B_0-权向量，正如所需。我们将 Z-权的计算推迟到证明这些向量具有极大性之后，因为届时计算会更容易。为此，只需证明这些向量被 B_1 湮灭，因为它们既然是 B_0-权向量，也就会被 X 湮灭，见 (15)。利用 (53)，我们得到

$$B_1(v\otimes e_1)=q^{\kappa}v\otimes e_{\diamondsuit},\quad B_1(v\otimes e_{\overline{1}})=v\otimes e_{\overline{\diamondsuit}},\quad B_1(F_\pm v\otimes x^{\pm}_{\pm n-1})=([\kappa]\mp q^{\mp n}\zeta)v\otimes qx^{\pm}_{\pm n-2},$$

将其代入 (67)，即可推出 $B_1\mathsf{w}_\pm=0$，并得到 Ξ_+ 的极大性，Ξ_-。对于$v\otimes x_n^{\pm}$，只需注意到 v 和 $x_n^{\pm}$都被 B_1 湮灭。

现在利用所述向量是最高权向量这一事实，经过冗长的计算（见第7节）可得，Ξ_+，Ξ_-，$v\otimes x_n^{\pm}$的 Z权分别为 $[\kappa+n-2i+1]-q^{1-\kappa}[n]$，$[\kappa+n-2i-1]-q^{1-\kappa}[n]$和 $[\kappa+n-2i]-q^{-1-\kappa}[n\pm1]$，。与（61）比较，即得结论。□

6. Central characters and Harish-Chandra homomorphism

最后，我们研究 U_q' 的中心，并给出一些应用。

6.1. 中心。

我们明确描述 U_q'的中心 $Z(U_q')$

T定理 6.1. U_q'的中心 $Z(U_q')$ 同构于 $\mathbb{C}(q)[$行列式$^{\pm1}, C_1, C_2, C_3]$ 其中

$$\det{}^{\pm1}=(\hat{D}_{\diamondsuit}\hat{D}_1)^{\pm1},\qquad C_1=Z\hat{D}_{\diamondsuit}+q^{-1}[2]B_0\hat{D}_1,\qquad C_3=q^2W\hat{D}_1+q[2]B_0\hat{D}_{\diamondsuit},$$
$$C_2=\tfrac{q^2\hat{K}+q^{-2}\hat{K}^{-1}}{(q-q^{-1})^2}-B_0^2\hat{K}^{-1}-ZB_0-YX+(q-q^{-1})YB_1B_0+qB_{-1}B_1.$$

证明。我们首先断言 C_i是中心元。对 C_3 而言，这由 C_1 应用引理 1.4 即可得到。由（14）和引理 3.2 可知，C_1，C_2 与 U_0'对易。此外，结合（17）–（18），对 C_1 进行简短计算、对 C_2 进行较长计算，即可证明这一断言。因此，由 C_i生成的子代数 C 嵌入 U_q'的中心 $Z(U_q')$中。还需证明满射性。

根据 [Kol20，推论 4.15]，$Z(U_q')$ 是 $\mathbb{C}(q)[\det^{\pm1}]$ 上由三个元素生成的多项式代数，这三个元素是 ad $U_q(\mathfrak{gl}_4)L_i\cap Z(U_q')$ 中唯一的（相差标量倍数的）元素，其中

$$L_1=D_{\overline{1}}^{-2},\quad L_2=(D_{\overline{1}}D_{\overline{\diamondsuit}})^{-2},\quad L_3=(D_{\overline{1}}D_{\overline{\diamondsuit}}D_{\diamondsuit})^{-2}\in U_q(\mathfrak{gl}_4),$$

D_i与定义1.2中的相同。考虑以下重整化中心元：

$$C_1'=(q^2-1)\det{}^{-1}C_1,\quad C_2'=(q^2-1)^2\det{}^{-1}C_2,\quad C_3'=(1-q^{-2})\det{}^{-2}C_3\in Z(U_q').$$

只需证明 $C_i' \in \mathrm{ad}\, U_q(\mathfrak{gl}_4)L_i$，因为由此 [Kol20, Cor. 4.15] 可知， C_i以及 C_i生成中心代数。通过将 $U_q(\mathfrak{gl}_4)$按PBW基展开，我们证明：

$$\begin{aligned}
C_1' &= \left(-q^{-2}\,\mathrm{ad}(F_{-1}F_0F_1) + q^{-1}\,\mathrm{ad}(F_0F_1E_1) - \mathrm{ad}(F_1E_0E_1) + q\,\mathrm{ad}(E_{-1}E_0E_1)\right)(L_1),\\
C_3' &= \left(-q^{-2}\,\mathrm{ad}(F_1F_0F_{-1}) + q^{-1}\,\mathrm{ad}(F_0F_{-1}E_{-1}) - \mathrm{ad}(F_{-1}E_0E_{-1}) + q\,\mathrm{ad}(E_1E_0E_{-1})\right)(L_2),\\
C_2' &= \left(q^4\,\mathrm{ad}(E_0E_{-1}E_1E_0) + \mathrm{ad}(F_0F_1F_{-1}F_0) - (q^4+q^2)\,\mathrm{ad}(F_0E_0) - q\,\mathrm{ad}(F_1F_{-1}F_0E_0)\right)(L_3)\\
&\quad + \left(q^3\,\mathrm{ad}(F_1F_0E_1E_0) + q^3\,\mathrm{ad}(F_{-1}F_0E_{-1}E_0) - q^3\,\mathrm{ad}(F_0E_{-1}E_1E_0) + (q^5+q)\right)(L_3).
\end{aligned}$$

使用 the generators of $U_q(\mathfrak{gl}_4)$ from 定义1.2。因此， $C_i' \in \mathrm{ad}\, U_q(\mathfrak{gl}_4)L_i$ ，我们便完成了证明。 □

注 6.2. 在 [Kol20]，中，还通过对通用 K-矩阵取偏迹，构造了 $Z(U_q')$ 的一组基。定理 6.1 的证明中给出的代数生成元 $C_0' = 1, C_1', C_2', C_3'$ ，除相差标量外，正是这些偏迹。通过偏迹构造中心元是量子群的一种标准方法， [Bau98]。Kolb 的构造一般适用于任意有限型量子对称对余代数，但在实际计算中难度较大。

推论 6.3. 设 $\kappa, n, i \in \mathbb{Z}$。有限维不可约有理表示 $\mathsf{L}(\kappa_\diamondsuit, \kappa_1, [n], [n+\kappa-2i] - q^{-\kappa}[n])$ 的中心特征，其中最高权占优，(40)，由下式给出

$$\begin{aligned}
&C_1 \longmapsto (q^{\kappa_\diamondsuit}[n+\kappa-2i] + q^{\kappa_1-2}[n]), && C_3 \longmapsto (q^{\kappa_1}[n+\kappa-2i] + q^{\kappa_\diamondsuit-2}[n]),\\
&C_2 \longmapsto (q^{2+\kappa} + q^{-2-\kappa})(q-q^{-1})^{-2} - [n+\kappa-2i][n], && \det \longmapsto q^{\kappa_\diamondsuit+\kappa_1}.
\end{aligned}$$

特别地，中心可以区分有理表示。

证明。 我们只需计算 C_i对最高权向量的作用。要证明它们可以区分有理表示，只需证明 C_i的取值能够唯一确定$\kappa_\diamondsuit$， κ_1， κ， n， i。现在我们采用一个从 Stefan Kolb 那里学来的技巧。考虑下面这个矩阵。

$$\begin{pmatrix} [n+\kappa-2i] & q^{-2}[n] \\ q^{-2}[n] & [n+\kappa-2i]. \end{pmatrix}$$

除非（n， κ）$=(0,\ 2i)$，否则其行列式为 $[n+\kappa-2i]^2 - q^{-4}[n] \neq 0$，因为第一直和项在 $q \mapsto q^{-1}$ 作用下不变，而第二项除非 $n=0$，否则不变。因此， C_1， C_3， C_4可以确定 $q_\diamondsuit^\kappa$， q_1^κ， q^κ，接着$q^{-\kappa_\diamondsuit}C_1 - q^{-\kappa_1}C_3$给出 $[n]$，进而通过 C_1或 C_3得到 i。当（n， κ）$=(0,\ 2i)$时，我们从 C_4和 C_2分别得到 $\kappa_\diamondsuit + \kappa_1$和 κ的值，因此得到 $\kappa_\diamondsuit$ 和 κ_1。 □

6.2. **Harish-Chandra 同态**。 为 U_q' 定义 Harish-Chandra 同态的类似物，令 $\mathrm{pr}: U_q' \longrightarrow U_0'$ 为到子空间 U_0' 的投影，这依据定理 3.7。也就是说，它消去所有满足 $f+y+e+x>0$ 的 PBW 单项式 $\mathbf{m}_{f,y,e,x,\beta,\zeta,\kappa_\diamondsuit,\kappa_1}$，并在 U_0' 上为恒等映射。

引理 6.4。 存在唯一的代数对合 $\mathrm{W}_{\mathfrak{gl}_2}: U_0' \mapsto U_0'$，其定义如下：

$$\hat{}_{D_\diamondsuit \mapsto q^{-2}\hat{}D_1}, \qquad \hat{}_{D_1 \mapsto q^2\hat{}D_\diamondsuit}, \qquad \hat{}_{K \mapsto q^4\hat{}K^{-1}}, \quad B_0 \mapsto Z + B_0\hat{}K^{-1}, \quad Z \mapsto -q^4\hat{}KZ + (1-q^4)B_0. \tag{70}$$

证明。 根据 PBW 定理， U_0' 是一个劳朗多项式代数。该映射在生成元上定义（与逆元以及 $\hat{}K$ 上的定义一致）；只需证明它是一个对合，这很容易。□

定理 6.5。 pr 在 $Z(U_q')$ 上的限制定义了一个单射代数同态

$$\xi = \mathrm{pr}_{Z(U_q')}: \quad Z(U_q') \longrightarrow U_0'$$

其像在 $\mathrm{W}_{\mathfrak{gl}_2}$ 下不变。我们称 ξ 为 U的*Harish-Chandra* 同态 $_q'$.

证明。We 首先，将 ξ 的核 $\ker(\xi)$ 确定为一个线性子空间。为此，考虑空间

$$U^K = \operatorname{span}\{\mathrm{m}_{f,y,e,x,\beta,\zeta,\kappa_\diamondsuit,\kappa_1} \mid f+y-e-x=0\}$$

按照注 3.8 的意义，.....零次元素。由引理 3.4 和定理 3.7，U^K 是 $\hat{}K$ 的中心化子，因此 $Z(U_q')$ $\subset U^K$。根据构造，pr 在 U^K 上的限制的核等于

$$I = \operatorname{span}\{\mathrm{m}_{f,y,e,x,\beta,\zeta,\kappa_\diamondsuit,\kappa_1} \in U^K \mid f+y>0\}.$$

pr 在 $Z(U_q')$ 上的限制的核于是为 $I \cap Z(U_q')$。因此，$\ker(\xi) = I \cap Z(U_q')$。

我们断言，$I \cap Z(U_q') = Z(U_q') \cap I$ 是 $Z(U_q')$ 的理想。我们通过证明 $U^K I U^K \subset I$ 来验证这一点。由定理 3.7 可得 $I = U^K \cap \tilde{U}_-' U_q'$，其中 $\tilde{U}_-' = \{B_{-1}^f Y^y \mid f+y>0\}$。由于 $I \subset \tilde{U}_-' U_q'$，我们有 $I \cdot I \subset I$。根据构造，显然还有 $IU_0' \subset I$。由 $U^K = I + U_0'$ 可推出 $IU^K \subset I$。另一方面，由引理 3.4 中的交换子公式以及 (17)-(18)，可得$U_0' U_-' U_0' \subset U_-' U_0'$，且 $U_0' U_+' U_0' \subset U_+' U_0'$。于是，$U_0' I \subset I$，从而 $U^K I \subset I$，断言得证。

因此，ξ 是一个代数同态。为证明其单射性，注意中心元 $z \in Z(U_q')$ 的作用 s
在任意有限维不可约 U_q'-模上都是乘以 $\mathrm{pr}(z)$。若 $z \in \ker(\xi)$，则 z
在所有多项式表示上的作用均为零，因此必定是 $U_q(\mathfrak{gl}_4)$ 中的零元素。关于 $\mathrm{W}_{\mathfrak{gl}_2}$-不变性，利用 (70) 可容易验证，对于 $1 \le i \le 4$，$\mathrm{W}_{\mathfrak{gl}_2}(\xi(C_i)) = \xi(C_i)$。 □

6.3. **Weyl群作用**。回想一下，对于 $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$，经典中心特征由 Weyl群 $\mathrm{W} = S_2 \times S_2$ 在 $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ 上的点轨道 $W.\lambda$ 控制，其中 $\mathfrak{h} := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ 带有 S_2-点作用

$$s.(\lambda_1,\lambda_2) := (\lambda_2 - 1, \lambda_1 + 1), \text{ and set } (\lambda_1,\lambda_2) > s.(\lambda_1,\lambda_2) \text{ if } \lambda_1 > \lambda_2.$$

对于 $(\lambda,\ \mu) \in P \times P$，其中 $P = \{(\lambda_1,\ \lambda_2) \mid \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z},\ 2\lambda_i \in \mathbb{Z}\}$，令 $\mathbb{M}_{\lambda,\ \mu}$ 为通过 $((a,\ b),\ (c,\ d)) \mapsto (a+c,\ b+d,\ [a-c],\ [b-d] - q^{b+d-a-c}[a-c])$ 定义的相关 Verma 模，这是对 (43) 的推广。

命题 *6.6.* 设 $(\lambda,\mu), (\lambda',\mu') \in P \times P$。那么，如果 $(\lambda',\mu') \in W.(\lambda,\mu)$，且 $\lambda \ge \lambda',\ \mu \ge \mu'$，则 $\mathrm{Hom}(\mathbb{M}_{\lambda',\ \mu'}, \mathbb{M}_{\lambda,\mu}) = \mathbb{C}(q)$；否则 $\mathrm{Hom}(\mathbb{M}_{\lambda',\mu'}.\mathbb{M}_{\lambda,\mu}) = 0$。

证明。沿用定理 4.22 的记号，$\mathrm{Hom}(\mathbb{M}_{\lambda',\mu'}, \mathbb{M}_{\lambda,\mu}) \neq 0$ 当且仅当

$$[\lambda_2 - \mu_2] - q^{-\kappa}[n] = q^{n-i}[\kappa - i] - q^{n-\kappa+i}[i] \text{ or } q^{n+i-\kappa}[i] - q^{n+i}[\kappa - i] \text{ for some } i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}.$$

在 $q=1$ 处计算这些劳朗多项式，分别得到 $i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 中的解 $i = \lambda_1 - \lambda_2$ 和 $i = \mu_1 - \mu_2$。根据定理 4.22，参见注 4.23，$\mathrm{Hom}(\mathbb{M}_{\lambda',\mu'}, \mathbb{M}_{\lambda,\mu}) \neq 0$ 恰好在以下情形成立

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{M}_{\lambda',\mu'}, \mathbb{M}_{\lambda,\mu}) = \mathbb{C}(q) \text{ if and only if } (\lambda',\mu') \in \{(s.\lambda, t.\mu) \mid (s,t) \in \mathrm{W} = S_2 \times S_2\}, \qquad \square$$

注 6.7。公式（70）中的对合 $\mathrm{W}_{\mathfrak{gl}_2}$ 应被视为（$s,\ s$）W 的类比，其中 W 是 Weyl群 的生成元，而 Weyl群 对角嵌入 $\mathfrak{gl}_2$ 到 $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$ 中，因为 $\mathrm{W}_{\mathfrak{gl}_2}$（$h$）作用于 $\mathbb{M}_{s.\lambda,\ s.\mu}$，正如 $h \in U_0'$作用于 $\mathbb{M}_{\lambda,\ \mu}$ 一样。我们没有找到（$s,\ e$）或（$e,\ s$）的类比，但想以一个观察结束本文。

观察 6.8。存在一个 U_0' 的有限整扩张 U_0'，使得 $\mathrm{W}_{\mathfrak{gl}_2}$ 的作用扩张为 W 的作用，并且 Harish-Chandra 同态的像包含于 W-不变量中，即 $\xi\colon\ Z(U_q') \hookrightarrow U_0' \cap (\widehat{U_0'})^{\mathrm{W}}$。

证明。回想一下 $U_0' = \mathbb{C}(q)[\hat{}D_\diamondsuit^{\pm 1}, \hat{}D_\diamondsuit^{\pm 1}, B_0, Z]$. 考虑

$$\widehat{U_0'} := \mathbb{C}(q)\left[\hat{D}_j^{\pm 1}, L_j^{\pm 1}, Q \mid j \in \{\diamondsuit, 1\}\right] / (Q^2 - \hat{D}_\diamondsuit \hat{D}_1 L_1 L_1),$$

它通过 $\hat{}D_j^{\pm} \mapsto \hat{}D_j^{\pm}, B_0 \mapsto [L_\diamondsuit; 0], Z \mapsto [L_1; 0] - [L_\diamondsuit; 0]\hat{}D_\diamondsuit^{-1}\hat{}D_1$ 包含 U_0' 作为子代数。现在 $\widehat{\ }$ 在 U_0' 上有一个代数对合 W_s，定义如下:

$$Q \mapsto Q, \quad \hat{D}_\diamondsuit \mapsto q^{-1}QL_\diamondsuit^{-1}, \quad \hat{D}_1 \mapsto qQL_1^{-1}, \quad L_\diamondsuit \mapsto q^{-1}Q\hat{D}_\diamondsuit^{-1}, \quad L_1 \mapsto qQ\hat{D}_1^{-1}.$$

直接计算即可验证，这固定了元素 $\xi(C_i)$、 $1 \le i \le 4$。将其与 $\mathsf{W}_{\mathfrak{sl}_2}$ 复合，便得到 W 的另一个简单反射的作用。□

7. 定理 5.31 中 Z-权的计算

本节中，我们用 $\alpha_j = q^j + q^{-j}$ 表示 $j \in \mathbb{Z}$。展开 Z 的定义可得

$$Z = -q^{-2}B_{-1}B_0B_1 - q^{-1}B_0B_{-1}B_1 - q^{-1}B_{-1}B_1B_0 - q^{-1}B_0[\hat{K};0] + B_1B_0B_{-1}. \tag{71}$$

定理 5.31 中 $v \otimes x^{\pm}_n$ 的 Z-权的计算与定理 5.26 的证明相同，即验证递推关系 (63)。此处省略细节。

要确定 (67) 中 $\mathsf{w}_\pm$ 的 Z-权，我们"只需"计算 $\mathsf{w}_\pm$ 的 $B_1B_0B_{-1}$-特征值，因为 (71) 中前三项会消去 $v \otimes e_1$, $v \otimes e_{\bar{1}}$, $F_\pm v \otimes x^{\pm}_{\pm n-1}$。下面列出一些公式。

引理 7.1。以下公式成立:

$$\begin{aligned}
B_0B_{-1}(v \otimes e_1) &= q^{1-n}[n+1]\alpha_n^{-1}F_-v \otimes e_1 + q^{n+1}[n-1]\alpha_n^{-1}F_+v \otimes e_1;\\
B_0B_{-1}(v \otimes e_{\bar{1}}) &= q^{-n}[n+1]\alpha_n^{-1}F_-v \otimes e_{\bar{1}} + q^{n}[n-1]\alpha_n^{-1}F_+v \otimes e_{\bar{1}};\\
B_0B_{-1}(F_+v \otimes x^+_{n-1}) &= q^{n-1}[n-1]\alpha_{n-1}^{-1}F_+^2v \otimes x^+_{n-2} + (q^{1-n}+[n])\alpha_{n-1}^{-1}F_+F_-v \otimes e_\diamondsuit\\
&\quad + (q^{-1}+q^{-n}[n])\alpha_{n-1}^{-1}F_+F_-v \otimes e_{\overline{\diamondsuit}} + q^{2-\kappa}[n-1]F_+v \otimes y^+_{n+\kappa-3},\\
B_0B_{-1}(F_-v \otimes x^-_{-n-1}) &= q^{2-\kappa}[n+1]F_-v \otimes y^-_{-n+\kappa-3} + q^{-n-1}[n+1]\alpha_{n+1}^{-1}F_-^2v \otimes x^-_{-n-2}\\
&\quad + (q^{n}[n]-q^{-1})\alpha_{n+1}^{-1}F_+F_-v \otimes e_{\overline{\diamondsuit}} + (q^{n+1}-[n])\alpha_{n+1}^{-1}F_+F_-v \otimes e_\diamondsuit.
\end{aligned} \tag{72}$$

证明。由 (53) 和 (39) 可得公式 $B_{-1}(v \otimes e_1) = q^{1-n}\alpha_n^{-1}F_-v \otimes e_1 + q^{n+1}\alpha_n^{-1}F_+v \otimes e_1$和 $B_{-1}(v \otimes e_{\bar{1}}) = q^{-n}\alpha_n^{-1}F_-v \otimes e_1 + q^{n}\alpha_n^{-1}F_+v \otimes e_{\bar{1}}$, 以及以下公式

$$\begin{aligned}
B_{-1}(F_+v \otimes x^+_{n-1}) &= q^{n-1}\alpha_{n-1}^{-1}F_+^2v \otimes x^+_{n-2} + q^{1-n}\alpha_{n-1}^{-1}F_+F_-v \otimes x^+_{n-2} + q^{2-\kappa}F_+v \otimes y^+_{n+\kappa-3},\\
B_{-1}(F_-v \otimes x^-_{-n-1}) &= q^{2-\kappa}F_-v \otimes y^-_{-n+\kappa-3} + q^{-n-1}\alpha_{n+1}^{-1}F_-^2v \otimes x^-_{-n-2} + q^{n+1}\alpha_{n+1}^{-1}F_+F_-v \otimes x^-_{-n-2}
\end{aligned}$$

现在，对 B_0 应用余乘法即可得到公式 (72)。 □

引理 7.2。以下公式成立:

$$\begin{aligned}
&B_1B_0B_{-1}(F_+^2v \otimes x^+_{n-2}) = q^{2-n}[2][i-1]\alpha_{\kappa+n-i-1}F_+v \otimes x^+_{n-3},\\
&B_1B_0B_{-1}(F_+F_-v \otimes e_\diamondsuit) = q^{-n-1}[i]\alpha_{\kappa+n-i}\alpha_{n-1}\alpha_n^{-1}F_-v \otimes e_\diamondsuit + q^{n-1}[\kappa-i]\alpha_{n-i}\alpha_{n+1}\alpha_n^{-1}F_+v \otimes e_\diamondsuit,\\
&B_1B_0B_{-1}(F_+F_-v \otimes e_{\overline{\diamondsuit}}) = q^{-n}[i]\alpha_{\kappa+n-i}\alpha_{n-1}\alpha_n^{-1}F_-v \otimes e_{\overline{\diamondsuit}} + q^{n}[\kappa-i]\alpha_{n-i}\alpha_{n+1}\alpha_n^{-1}F_+v \otimes e_{\overline{\diamondsuit}},\\
&B_1B_0B_{-1}(F_+v \otimes y^+_{n+\kappa-3}) = q^{-n-1}[i]\alpha_{\kappa+n-i}v \otimes y^+_{n+\kappa-2} + F_+v \otimes x^+_{n+2\kappa-5},\\
&B_1B_0B_{-1}(F_-v \otimes y^-_{-n+\kappa-3}) = F_-v \otimes x^-_{2\kappa-n-5} + q^{n-1}[\kappa-i]\alpha_{n-i}v \otimes y^-_{\kappa-n-2},\\
&B_1B_0B_{-1}(F_-^2v \otimes x^-_{-n-2}) = q^{n+2}[2][\kappa-i-1]\alpha_{n-i+1}F_-v \otimes x^-_{1-n}.
\end{aligned}$$

利用这些公式，我们能够计算 $B_1B_0B_{-1}$ 对 $\mathsf{w}_\pm$ 的作用：

$$\begin{aligned}
B_1B_0B_{-1}\mathsf{w}_+ &= q[n-1]\alpha_{n-1}^{-1}[2][i-1]\alpha_{n+\kappa-i-1}F_+v\otimes x^+_{n-3}\\
&\quad - q^{1-2n}[i][n+1]\alpha_{n+\kappa-i}\alpha_n^{-1}(F_-v\otimes x^+_{2\kappa+n-1}+q^{n-1}[\kappa-i]\alpha_{n-i}v\otimes y^+_{\kappa+n+2})\\
&\quad + q^n[\kappa-i]\alpha_{n-i}\alpha_{n+1}\alpha_n^{-1}F_+v\otimes e_{\overline{\diamondsuit}})+q^{-n-1}[i]\alpha_{\kappa+n-i}\alpha_{n-1}\alpha_n^{-1}F_-v\otimes e_\diamondsuit\\
&\quad + [n-1](q^{n-1}-q^{n-\kappa}[i]\alpha_{n+\kappa-i}\alpha_n^{-1})(q^{\kappa-2}F_+v\otimes e_\diamondsuit+q^{-n}[i]\alpha_{n+\kappa-i}v\otimes e_1)\\
&\quad + [n-1](q^{2-\kappa}-q[i]\alpha_{n+\kappa-i}\alpha_n^{-1})(F_+v\otimes e_{\overline{\diamondsuit}}+q^{-n-1}[i]\alpha_{n+\kappa-i}v\otimes e_{\overline{1}})\\
&\quad + (q^{-1}+q^{-n}[n])\alpha_{n-1}^{-1}(q^{-n}[i]\alpha_{\kappa+n-i}\alpha_{n-1}\alpha_n^{-1})F_-v\otimes e_{\overline{\diamondsuit}}\\
&\quad + (q^{1-n}+[n])\alpha_{n-1}^{-1}(q^{n-1}[\kappa-i]\alpha_{n-i}\alpha_{n+1}\alpha_n^{-1})F_+v\otimes e_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1B_0B_{-1}\mathsf{w}_- &= q[n+2][2][\kappa-i-1]\alpha_{n-i+1}\alpha_{n+1}^{-1}F_-v\otimes x^-_{-n-3}\\
&\quad - q^{2n+1}[n+1][\kappa-i]\alpha_{n-i}\alpha_n^{-1}(F_+v\otimes x^-_{-n-3}+q^{-n-1}[i]\alpha_{\kappa+n-i}v\otimes y^-_{-n-\kappa})\\
&\quad + q^{n+1}\alpha_{n+1}^{-1}(q^{-1}[n]-q^{-n-2})(q^n[\kappa-i]\alpha_{n-i}\alpha_{n+1}\alpha_n^{-1}F_+v\otimes e_{\overline{\diamondsuit}}\\
&\quad + q^{-n}[i]\alpha_{\kappa+n-i}\alpha_{n-1}\alpha_n^{-1}F_-v\otimes e_{\overline{\diamondsuit}})\\
&\quad + q^{n+1}\alpha_{n+1}^{-1}(1-q^{-n-1}[n])(q^{-n-1}[i]\alpha_{\kappa+n-i}\alpha_{n-1}\alpha_n^{-1}F_-v\otimes e_\diamondsuit\\
&\quad + q^{n-1}[\kappa-i]\alpha_{n-i}\alpha_{n+1}\alpha_n^{-1}F_+v\otimes e_\diamondsuit)\\
&\quad + [n+1](q^{2-\kappa}-q[\kappa-i]\alpha_{n-i}\alpha_n^{-1})(F_-v\otimes e_{\overline{\diamondsuit}}+q^{n-1}[\kappa-i]\alpha_{n-i}v\otimes e_{\overline{1}})\\
&\quad + [n+1](q^{-n-\kappa}[\kappa-i]\alpha_{n-i}\alpha_n^{-1}-q^{-n-1})(q^{\kappa-2}F_-v\otimes e_\diamondsuit+q^n[\kappa-i]\alpha_{n-i}v\otimes e_1).
\end{aligned}$$

综上，利用 (68)，我们得到 $B_1B_0B_{-1}\Xi_\pm=[\kappa+n-2i\mp1]+[\kappa-2][n]$。由 (71)，将它们的 $-q^{-1}B_0[\hat{}K;0]$-权相加，即可得到所需的 $\Xi_\pm$ 的 Z-权。

参考文献

[AK94] S. Ariki 和 K. Koike，关于 $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})\wr\mathfrak{S}_n$ 的 Hecke 代数及其不可约表示的构造，《Adv. Math.》106 (1994)，第 2 期，216–243。[AKR17] N. Aldenhoven、E. Koelink 和 P. Román，关于右余理想子代数的有限维 $U_q(\mathfrak{su}(3))$ 表示的分支规则，《Algebr. Represent. Theory》20 (2017)，第 4 期，821–842。[Bau98] P. Baumann，量子化包络代数的中心，《J. Algebra》203 (1998)，第 1 期，244–260。[BK15] M. Balagović 和 S. Kolb，量子对称对的条形对合，《Represent. Theory》19 (2015)，186–210。[BW18] H. Bao 和 W. Wang，由量子对称对产生的典范基，《Invent. Math.》213 (2018)，第 3 期，1099–1177。[DJ92] R. Dipper 和 G. James，

B_n **146** 1992 2, 型 454 481

Hecke 代数的表示，《J. Algebra》（），第 期，–。[ES18] M. Ehrig 和 C. Stroppel，Nazarov–Wenzl 代数、余理想子代数与斜 Howe 对偶的范畴化，《Adv. Math.》331 (2018)，58–142。[GP00] M. Geck 和 G. Pfeiffer，有限 Coxeter 群与 Iwahori-Hecke 代数的特征，《 London Mathematical Society Monographs. New Series 》，第 21 卷，The Clarendon Press，牛津大学出版社，2000。[IK05] N. Z. Iorgov 和 A. U. Klimyk， q变形代数 $U_q'(\mathrm{so}_n)$ 的不可约表示分类定理，《Int. J. Math. Math. Sci.》2 (2005)，225–262。[KL08] S. Kolb 和 G. Letzter，量子对称对余理想子代数的中心，《Represent. Theory》12 (2008)，294–326。[KL09] M. Khovanov 和 A. D. Lauda，量子群范畴化的图示演算方法 I，《Represent. Theory》13 (2009)，309–347。[Kol14] S. Kolb，量子对称 Kac-Moody 对，《Adv. Math.》267 (2014)，395–469。

[Kol20] ，通过量子对称对构造编织模范畴，《Proc. Lond. Math. Soc.》(3) 121 (2020)，第 1 期，1–31。MR4048733[KS25] S. Kolb 和 J. Stephens，非常非标准量子 $\mathfrak{so}(2n-1)$ 的表示论，《J. Pure Appl. Algebra》229 (2025)，第 7 期，107990。[Let02] G. Letzter，余理想子代数与量子对称对，《New directions in Hopf algebras》，2002，117–165 页。[Let19] ，量子对称对余理想的 Cartan 子代数，《Represent. Theory》23 (2019)，88–153。[Let99] ，量子化包络代数的对称对，《J. Algebra》220 (1999)，第 2 期，729–767。[Mol06] A. Molev， C_n型扭量子化包络代数的表示，《Mosc. Math. J.》6 (2006)，第 3 期，531–551，588。[MS16] V. Mazorchuk 和 C. Stroppel，通过群胚研究

$G\ \ell\ k\ d$ **43** 2016 1, (, ,)-模，11 32

《J. Algebraic Combin.》（ ），第 期，–。[Od12] O. V. Ogievetsky 和 L. P. d'Andecy，Jucys–Murphy 元与分圆 Hecke 代数的表示，2012。[Ros19] S. Rostam，分圆箭图 Hecke 代数与 $G(r,p,n)$ 的 Hecke 代数，《Trans. Amer. Math. Soc.》371 (2019)，第 6 期，3877–3916。[Rou08] R. Rouquier，2-Kac–Moody 代数（2008）。arXiv:math/0812.5023。[RV20] V. Regelskis 和 B. Vlaar，根据广义 Satake 图研究 $U_q(\mathfrak{g})$ 的拟三角余理想子代数，《Bull. Lond. Math. Soc.》52 (2020)，第 4 期，693–715。[SW25] C. Stroppel 和 Z. Wojciechowski，最小量子余理想与 Jones–Wenzl 投影算子的图示演算，《Glasgow Math. J.》（2025），1–20。[Wan24] L. Wang， $\mathfrak{gl}_2 \times \mathfrak{gl}_2$的量子对称余理想子代数的正则表示，2024。https://gitlab.mpim-bonn.mpg.de/stroppel/codepbwbasis.git(commit a1b2c3d)。[Wat20] H. Watanabe，量子对称对 $(U, U^\jmath)$ 的晶体基理论，《Int. Math. Res. Not. IMRN》22 (2020)，8292–8352。[Wat21] ，量子群上的经典权模，《J. Algebra》578 (2021)，241–302。 $\imath$基于 [AI 型量子群的基模，《Math. Z.》303 (2023)，第 2 期，论文编号 43，73。23] ，可积模上的量子对称对余理想子代数，《J. Inst. Math. Jussieu》24 (2025)，第 6 期，2257–2282。 $\imath$Wen[H. Wenzl，关于 25] ，() 的表示，《Trans. Amer. Math. Soc.》373 (2020)，第 5 期，3295–3322。

CS：数学研究所 ，波恩大学 ，恩德尼歇尔大道60号 ，53115 波恩 ，德国 ，stroppel@math.uni-bonn.de ，

LW：数学研究所，波恩大学，恩德尼歇尔大道60号，53115 波恩，德国，s6liwang@math.uni-bonn.de