arXiv:2601.18729v1 [math.MG] 26 Jan 2026

R通过添加一个点恢复 Wasserstein 刚性

ZOLT ´AN M. BALOGH、ERIC STR ¨OHER 和 D ´ANIEL VIROSZTEK

ABSTRACT. 我们研究等距柔性的 Wasserstein 空间，并证明，在底层度量空间中添加一个点，就能使这些 Wasserstein 空间变得刚性。

CONTENTS

1. 引言 11.1. 研究动机与背景结果 21.2. 主要定理 32. 单位区间加上一个远处的点 33. 欧几里得平面加上一个点上的 2-Wasserstein空间 6参考文献 9

1. INTRODUCTION

给定一个波兰度量空间 (X,d) 和一个参数 $p \geq 1$，p-Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_p(X,d)$ 是具有有限 p-阶矩的概率测度 μ 所构成的集合。更准确地说，博雷尔概率测度 μ 属于 p-Wasserstein 空间，当且仅当

$$\int_X d^p(x_0,x)d\mu(x) < \infty$$

对某个（因而也对任意） $x_0 \in X$。我们可以考虑两个测度之间的 Wasserstein 距离

$$d_{\mathcal{W}_p}(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \left(\int_{X\times X} d^p(x,y)d\pi(x,y)\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中，$\Pi(\mu,\nu)$ 是 μ 与 ν 之间的耦合集合。我们回顾一下，当 $\pi \in \mathcal{P}(X\times X)$ 且函数 $p_x(x,y) = x$ 和 $p_y(x,y) = y$ 满足 $p_{x\#}\pi = \mu$ 和 $p_{y\#}\pi = \nu$ 时，有 $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$；# 表示式（1.1）中介绍的推前映射。关于 Wasserstein 空间的许多性质已经得到了广泛研究；有关该领域的综述，可参阅专著 [1], [7] 或 [14]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 49Q22 54E40.*Key words and phrases.* 等距变换、Wasserstein 空间、度量空间。Z. M. Balogh 和 E. Str¨oher 获得瑞士国家科学基金会资助，资助编号为 200020 228012。D. Virosztek 获得匈牙利科学院 Momentum 计划资助，资助协议编号为 LP2021-15/2021；同时获得匈牙利国家研究、发展与创新办公室（NKFIH）资助，资助协议编号为 Excellence 151232；并部分获得欧洲研究委员会协同资助，资助编号为 810115。

1.1. 动机与背景结果。 近年来，关于 Wasserstein 空间有一个问题才开始受到关注，即它们的等距群。事实上，如果 ϕ 是从度量空间 (X, d) 到其自身的可测映射，我们可以考虑如下定义的推前映射 $\phi_\#$：

$$\phi_\#(\mu)(A) = \mu(\phi^{-1}(A)), \tag{1.1}$$

对任意 $A \subset X$。这个推前映射作用于概率测度；如果 ϕ是 (X, d) 上的等距映射，那么很容易看出，$\phi_\#$ 也是从 Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_p(X, d)$ 到其自身的等距映射。我们回顾一下，等距映射是保持距离的满射。

若 Wasserstein 空间 Φ 上的等距映射可以写成 (X, d) 上某个等距映射的推前映射，即 $\Phi = \phi_\#$，则称其为平凡等距变换；推前运算在 (X, d) 的等距变换群与 $\mathcal{W}_p(X, d)$ 的等距变换群之间诱导出一个嵌入。

这一背景下的一个核心问题是，Wasserstein 空间的等距变换群是否严格大于基空间的等距变换群。如果是这样，我们就称 Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_p(X, d)$ 是柔性的；如果所有等距变换都是平凡的，则称 $\mathcal{W}_p(X, d)$ 是等距刚性的。

第一个柔性结果由 Kloeckner 给出，他证明对于 $p = 2$，Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n, d_E)$ 对任意 $n \geq 1$ 都是柔性的，其中 d_E 是标准欧几里得距离。[9], 将这一结果推广了，作者证明，只要 (H, d_H) 是可分希尔伯特空间，$\mathcal{W}_2(H, d_H)$ 就允许非平凡的等距变换；正如 [6], 所示，即使底空间是任意恰当度量空间与可分希尔伯特空间的乘积，这一结论仍然成立，$X = Y \times H$（采用 l_2 乘积度量）。另一种构造对所有 $p \geq 1$ 都是柔性的 p-Wasserstein 空间的方法，是将区间 $[0, 1]$ 作为底空间，并赋予其依赖于 p 的度量 $d(x, y) = |x - y|^{1/p}$，如 [8] 和 [9] 所示。

一个有趣之处在于，这些 Wasserstein 空间（迄今为止）是已发现的唯一柔性空间。对于所有其他在这一前提下接受研究的空间，研究表明，其 Wasserstein 空间只有平凡的等距变换。例如，Bertrand 和 Klockner 在 [5] 中证明，若 (X, d) 是一个具有负截面曲率的黎曼流形（也称为 Hadamard 空间），那么 $\mathcal{W}_2(X, d)$ 是等距刚性的。Santos-Rodrigues 在 [12] 中证明，若流形是闭的且具有严格正曲率，结论也成立。在 [2], 中，Balogh、Str¨oher、Titkos 和 Virosztek 证明，当范数 N 足够光滑时，对于 $p \neq 2$，Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_p(\mathbb{R}^n, d_N)$ 是等距刚性的。即使在次黎曼情形下，Balogh、Titkos 和 Virosztek 也在 [3] 和 [4] 中证明，对于任意 $p \geq 1$，赋予 Koranyi 度量的海森堡群上的 Wasserstein 空间具有刚性；而对于一般的 Carnot 群，当 $p = 1$ 时同样如此。

此外，即使对于柔性 Wasserstein 空间，其柔性似乎也不稳定：只需对空间的一个参数做微小改动，就足以使 Wasserstein 空间变为刚性。最简单的例子是考察参数 p。若我们将欧几里得平面（或带绝对值距离的 $[0, 1]$ 区间）作为底空间 (X, d)，那么如上所述，当参数为 $p = 2$（或 $p = 1$）时，Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_p(X, d)$ 是等距柔性的。然而，对于参数 p 的任何其他取值，即使与 2（或 1）非常接近，[9] 和 [8] 的结果表明，空间 $\mathcal{W}_p(X, d)$ 再次是等距刚性的。

考虑底层空间的度量时，这种不稳定性也显而易见。事实上，我们可以将欧几里得范数视为 l_2 范数，其中 l_q 范数由下式给出

公式

$$l_q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \right)^{1/q}.$$

于是，尽管对于 $q = 2$ Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n, l_2)$ 具有等距柔性，[2]而 [13] 证明了，对于任意 $q \neq 2$，$q \geq 1$ 空间 $\mathcal{W}_p(\mathbb{R}^n, l_q)$ 对所有 $p \geq 1$均具有刚性；同样，只需对一个参数稍作扰动，就足以恢复 Wasserstein 空间的刚性。

1.2. 主要定理。 本文将证明，从一个柔性的 Wasserstein 空间出发，只要稍微改变底层空间，就能恢复其刚性。具体而言，我们将证明，无论是区间 $[0,1]$ 还是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$，只需添加一个点（记作 q），就足以打破 Wasserstein 空间的柔性。需要注意的是，虽然我们只讨论平面的情形，同样的论证表明，在任何配备类似度量的（有限维）希尔伯特空间中添加一个点，都能使其 Wasserstein 空间具有相同的刚性。

对于集合 $[0,1] \cup \{q\}$，我们将考虑一种距离 d_1，它使点 q 与区间 $[0,1]$保持相同的距离；因此有以下定理。

定理 1.1。 *1-Wasserstein* 空间 $\mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1)$ 是等距刚性的。也就是说，对所有 $\Phi \in \mathrm{Isom}\left(\mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1)\right)$，都存在一个 $\psi \in \mathrm{Isom}\left([0,1] \cup \{q\}, d_1\right)$ 使得 $\Phi = \psi_{\#}$.

对于 $\mathbb{R}^2 \cup \{q\}$，我们将平面水平地嵌入 $\mathbb{R}^3$，令 $q = (0,0,1)$，并将 $\mathbb{R}^2 \cup \{q\}$ 上的距离 d_2 视为 $\mathbb{R}^3$ 的标准欧几里得距离。于是有以下定理。

定理 1.2。 *2-Wasserstein* 空间 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$ 是等距刚性的。也就是说，对所有 $\Phi \in \mathrm{Isom}\left(\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)\right)$，都存在一个 $\psi \in \mathrm{Isom}\left(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2\right)$ 使得 $\Phi = \psi_{\#}$.

2. The unit interval plus one point far away

Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_1([0,1], |\cdot|)$ 的等距柔性证明由 [8]Geh´er、Titkos 和 Virosztek 给出。他们证明，除了平凡的等距变换 id 和$r_{\#}$（其中 $r\colon [0,1] \to [0,1]$ 是由 $r(x) = 1 - x$ 给出的反射）之外，这个 Wasserstein 空间还存在一种所谓的翻转等距变换，记作 J（以及与反射$r_{\#}J = Jr_{\#}$的复合）。为了定义这种翻转等距变换 J，作者使用了测度的累积分布函数 $F_\mu\colon [0,1] \to [0,1]$，其定义如下：

$$F_\mu(x) = \mu([0,x]). \tag{2.1}$$

接着，翻转等距变换定义为 $J(\mu) = \nu$使得 $F_\nu = F_\mu^{-1}$，其中 F_μ^{-1}是 F_μ的广义逆，如 [14, 第 2.2 小节 1]所述。这个翻转等距变换不会将狄拉克质量映射为狄拉克质量；例如，$J(\delta_{1/2}) = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$。

本节考虑的距离假设点 q 到区间内所有点的距离均为常数 D：

$$d_1(x,y) = |x-y| \text{ for all } x,y \in [0,1], \text{ and } d_1(x,q) = D \gg 1 \text{ for all } x \in [0,1]. \tag{2.2}$$

本节的目标是证明定理 1.1，其中距离由（2.2）定义。在给出证明之前，我们需要一系列预备引理。首先，我们对测度 δ_q作如下刻画。

Le引理 2.1. 对于一个测度 $\mu \in \mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1)$，以下条件等价：

(1) $\mu = \delta_q$,

(2) 存在测度 $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1)$ 使得 $d_{\mathcal{W}_1}(\mu, \nu_i) = D$ 对于 $i = 1,2$以及 $d_{\mathcal{W}_1}(\nu_1, \nu_2) = 1$.

证明。取 $\nu_1 := \delta_0$ 和 $\nu_2 := \delta_1$. ，很容易看出方向 (1) $\Rightarrow$ (2)。反方向 (2) $\Rightarrow$ (1) 可由以下事实得出：若 $d_{\mathcal{W}_1}(\mu, \nu_1) = D$，则 $\operatorname{supp}(\mu) = \{q\}$ 且 $\operatorname{supp}(\nu_1) \subseteq [0,1]$ ，或反之；但若 $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq [0,1]$，则对于 $i = 1$，$\operatorname{supp}(\nu_i) = \{q\}$ ，这与 $d_{\mathcal{W}_1}(\nu_1, \nu_2) = 1$. 矛盾。因此 $\operatorname{supp}(\mu) = \{q\}$，这意味着 $\mu = \delta_q$. □

由此度量刻画，我们可以得到一个重要推论：Wasserstein 空间的任意等距映射都会保持测度 δ_q 不变。

推论 2.2。假设 $\Phi\colon \mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1) \to \mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1)$ 是一个等距映射。那么 $\Phi(\delta_q) = \delta_q$。

证明。由引理 2.1，存在 ν_1, ν_2 使得 $d_{\mathcal{W}_1}(\delta_q, \nu_i) = D$ 对 $i = 1,2$ 成立，且 $d_{\mathcal{W}_1}(\nu_1, \nu_2) = 1$，因此 $d_{\mathcal{W}_1}(\Phi(\delta_q), \Phi(\nu_i)) = D$ 对 $i = 1,2$ 成立，且 $d_{\mathcal{W}_1}(\Phi(\nu_1), \Phi(\nu_2)) = 1$。引理 2.1 随即推出 $\Phi(\delta_q) = \delta_q$. □

下一步，我们将 Wasserstein 空间划分为若干切片，这些切片在点 q 上具有相同的权重。也就是说，对于 $t \in [0,1]$ ，我们将 t-切片 S_t 定义为

$$S_t = \{\mu \in \mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1) | \mu(\{q\}) = 1 - t\}. \tag{2.3}$$

现在我们可以证明，任意等距映射都会整体保持 t-切片 S_t。

引理 2.3。对于 $t \in [0,1]$ 和 $\Phi\colon \mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1) \to \mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1)$ 是一个等距映射，我们有 $\Phi(S_t) = S_t$。

证明。实际上，我们只需证明 $\Phi(S_t) \subseteq S_t$。事实上，由于 Φ^{-1} 也是一个等距映射， Φ 的满射性以及包含链 $S_t = \Phi(\Phi^{-1}(S_t)) \subseteq \Phi(S_t) \subseteq S_t$ 表明，对于所有等距变换 Φ ， $\Phi(S_t) \subseteq S_t$蕴含 $\Phi(S_t) = S_t$。

为验证包含关系 $\Phi(S_t) \subseteq S_t$，我们注意到

$$\mu([0,1]) = \frac{1}{D} d_{\mathcal{W}_1}(\delta_q, \mu) \text{ for all } \mu \in \mathcal{W}_1([0,1] \cup \{q\}, d_1). \tag{2.4}$$

事实上，

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{W}_1}(\delta_q, \mu) = \int_{[0,1]\cup\{q\}} d_1(q,y) \mathrm{d}\mu(y) &= \int_{[0,1]} d_1(q,y) \mathrm{d}\mu(y) + \int_{\{q\}} d_1(q,y) \mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int_{[0,1]} D \mathrm{d}\mu(y) + 0 = D\mu([0,1]). \end{aligned} \tag{2.5}$$

因此，

$$\begin{aligned} \Phi(\mu)([0,1]) = \frac{1}{D} d_{\mathcal{W}_1}(\delta_q, \Phi(\mu)) &= \frac{1}{D} d_{\mathcal{W}_1}(\Phi(\delta_q), \Phi(\mu)) \\ &= \frac{1}{D} d_{\mathcal{W}_1}(\delta_q, \mu) = \mu([0,1]) \end{aligned} \tag{2.6}$$

对于每个 μ 以及每个 Wasserstein 等距变换 Φ，这意味着，对于所有 $t \in [0,1]$. □， $\Phi(S_t) \subseteq S_t$

由此引理可知，我们可以考虑 $\Phi_{|S_t}$ 对测度的限制 S_t，它将一个 t切片等距映射到其自身。正如我们将在下一个引理中看到的，除一个缩放因子外，每个切片 S_t 都与 Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_1([0,1], |\cdot|)$等距，因此$\Phi_{|S_t}$的作用类似于四种可能的等距变换之一： $\{\mathrm{id}, r\#, J\}$。为证明定理1.1，接下来我们将排除 $\Phi_{|S_t} = J$ 或 $\Phi_{|S_t} = r_\# J$这两种情况。

引理 2.4。对于 $t \in (0,1]$，，t切片 S_t 与缩放后的 *Wasserstein* 空间$\mathcal{W}_1([0,1], t|\cdot|)$等距。

证明。两个度量空间之间的等距关系由以下映射给出：对于 $\mu = (1-t)\delta_q + t\mu'$，定义等距映射 $\iota(\mu) = \mu'$。显然，该映射是满射，因此我们只需证明对于任意 $\mu, \nu \in S_t$，有 $d_{\mathcal{W}_1}(\mu,\nu) = td_{\mathcal{W}_1}(\mu',\nu')$。

我们回顾一下，Kantorovich-Rubinstein 对偶表明，对于完备可分度量空间 (X,d) 以及两个测度 $\mu,\nu \in \mathcal{W}_1(X,d)$

$$d_{\mathcal{W}_1}(\mu,\nu) = \sup\left\{\int_X f\mathrm{d}\nu - \int_X f\mathrm{d}\mu \,\middle|\, f: X\to\mathbb{R},\ ||f||_{Lip} \le 1\right\};$$

例如参见 [7, 命题 2.6。6]。设 $t\in(0,1]$, 并设 $\mu,\nu \in S_t$ 其分解为

$$\mu = (1-t)\delta_q + t\mu' \text{ and } \nu = (1-t)\delta_q + t\nu'$$

对于 $\mu',\nu' \in \mathcal{W}_1([0,1],|\cdot|)$。则

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{W}_1}(\mu,\nu) &= \sup\left\{\int_{[0,1]\cup\{q\}} f\mathrm{d}\nu - \int_{[0,1]\cup\{q\}} f\mathrm{d}\mu \,\middle|\, f:[0,1]\cup\{q\}\to\mathbb{R},\ ||f||_{Lip}\le 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_{[0,1]\cup\{q\}} f\mathrm{d}(t\nu'+(1-t)\delta_q) - \int_{[0,1]\cup\{q\}} f\mathrm{d}(t\mu'+(1-t)\delta_q) \,\middle|\, ||f||_{Lip}\le 1\right\} \\ &= t\sup\left\{\int_{[0,1]\cup\{q\}} f\mathrm{d}\nu' - \int_{[0,1]\cup\{q\}} f\mathrm{d}\mu' \,\middle|\, ||f||_{Lip}\le 1\right\} = td_{\mathcal{W}_1}(\mu',\nu'). \end{aligned} \tag{2.7}$$

□

令 μ和 $\nu \in S_t$，对于 $t\in(0,1]$。由于根据引理 2.3，我们有 $\Phi(\mu)\ \Phi(\nu) \in S_t$，因此可以写成$\Phi(\mu) = (1-t)\delta_q + t\Phi(\mu)'$ 以及 $\Phi(\nu) = (1-t)\delta_q + t\Phi(\nu)'$ (其中 $\Phi(\mu)', \Phi(\nu)' \in \mathcal{W}_1([0,1],|\cdot|)$）。由 (2.7) 以及 Φ 的等距性质可得

$$d_{\mathcal{W}_1}(\Phi(\mu)',\Phi(\nu)') = \frac{1}{t}d_{\mathcal{W}_1}(\Phi(\mu),\Phi(\nu)) = \frac{1}{t}d_{\mathcal{W}_1}(\mu,\nu) = d_{\mathcal{W}_1}(\mu',\nu'). \tag{2.8}$$

这意味着，对于每个 $t\in(0,1]$，都存在一个 $\varphi_t \in \mathrm{Isom}\,(\mathcal{W}_1([0,1],\ d_1)) = \{\mathrm{id}^r\#,\ J,\ r_\# J\}$，使得 $\Phi_{|S_t}$ 从 Φ 到 S_t 的限制由下式给出

$$\Phi((1-t)\delta_q + t\mu') = (1-t)\delta_q + t\varphi_t(\mu') \text{ for all } \mu' \in \mathcal{W}_1([0,1],|\cdot|). \tag{2.9}$$

有了这一观察，我们现在可以完成定理1.1的证明。

定理的证明 *1.1*。由于 $[0,1]\cup\{q\}$ 的等距变换由集合 $\{\mathrm{id}\ r\}$ 给出（其中 r扩展到 $([0,1]\cup\{q\},\ d_1)$ 时令 $r(q) = q$），我们要证明，要么 $\varphi_t = \mathrm{id}$，要么$\varphi_t = r_\#$ 对任意 $t\in[0,1]$成立。首先注意到，由于 $S_0 = \{\delta_q\}$，这对 $t=0$显然成立。

对于 $t\in(0,1]$, 反设 $\varphi_t \in \{J, r_\# J\}$，并考虑由下式给出的测度$\mu \in S_t$ 和 $\nu \in S_{2t/3}$

$$\mu = (1-t)\delta_q + \frac{t}{2}(\delta_0+\delta_1) \quad \text{and} \quad \nu = \left(1-\frac{2t}{3}\right)\delta_q + \frac{2t}{3}\delta_0.$$

从 μ 到 ν 的最优传输方案是将质量为 $t/6$的一部分从 1 运至 0，并将质量为 $t/3$ 的一部分从 1 运至 q. 因此，$d_{\mathcal{W}_1}(\mu,\ \nu) = t(D/3+1/6)$。

根据 (2.9) 以及我们对 φ_t 的假设， $\Phi(\mu) = (1-t)\delta_q + t\delta_{1/2}$. 此外，(2.9) 表明$\Phi(\nu) = (1-\frac{2t}{3})$ $\delta_q + \frac{2t}{3}\delta_1$ (如果$\varphi_{2t/3} \in \{r_\#, J\}$)，或者 $\Phi(\nu) = (1-\frac{2t}{3})\delta_q + \frac{2t}{3}\delta_0$ (如果 $\varphi_{2t/3} \in \{\mathrm{id}\ r_\# J\}$)。无论哪种情况，

$$d_{\mathcal{W}_1}(\Phi(\mu), \Phi(\nu)) = d_{\mathcal{W}_1}((1-t)\delta_q + \delta_{1/2}, \Phi(\nu)) = \frac{t}{3}D + \frac{2t}{3}\cdot\frac{1}{2} = t(D/3 + 1/3), \tag{2.10}$$

这意味着 $d_{\mathcal{W}_1}(\Phi(\mu)\ \Phi(\nu)) > d_{\mathcal{W}_1}(\mu,\ \nu)$。这与 Φ 的等距性质矛盾，说明对于任意 $t \in (0,1]$，都有 $\varphi_t \in \{\mathrm{id}\ r_\#\}$。

接下来只需证明，对于任意一对 t，$t' \in (0,1]$，都有 $\varphi_t = \varphi_{t'}$。为此，我们计算以下距离：若考虑测度 $\mu_t = (1-t)\delta_q + t\delta_0$ 和 $\nu_t = (1-t)\delta_q + t\delta_1$，则有

$$d_{\mathcal{W}_1}(\mu_t, \mu_{t'}) = D|t-t'|$$

and

$$d_{\mathcal{W}_1}(\mu_t, \nu_{t'}) = (D+1)|t-t'|.$$

因此，如果存在 t，$t' \in (0,1]$ 使得 $\varphi_t = \mathrm{id}$ 但 $\varphi_{t'} = r_\#$，则有 $d_{\mathcal{W}_1}(\mu_t,\ \mu_{t'}) = D|t-t'|$，但 $d_{\mathcal{W}_1}(\Phi(\mu_t)\ \Phi(\mu_{t'})) = d_{\mathcal{W}_1}(\mu_t,\ \nu_{t'}) = (D+1)|t-t'|$，这与等距变换的距离保持性质矛盾。因此，要么 $\Phi = \mathrm{id}$，要么 $\Phi = r_\#$ 作用于整个 Wasserstein 空间，从而证明了该定理。□

注 2.5. 我们可以使用类似的技巧，证明对于不同度量 d 下的 *Wasserstein* 空间$\mathcal{W}_1($ $[0,1] \cup \{q\}, d)$ 的刚性 q，例如，当 q 是位于区间左侧的一个点，使得 q 与 $x \in [0,1]$ 之间的距离由 $d(q,x) = x + \varepsilon$ 给出，其中$\varepsilon > 0$。

3. The 2-Wasserstein space over the Euclidean plane plus one point

在 [10]，中，Kloeckner 证明，对于 $n \geq 2$，Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n, d_E)$ 存在柔性等距变换。事实上，他明确描述了所有可能的等距变换：对于 $(\mathbb{R}^n, d_E)$ 的一个线性等距变换 φ，映射

$$\Phi_\varphi(\mu) = \varphi_\#(\mu - g) + g$$

是 Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n, d_E)$ 上的等距映射，其中 g 既表示测度 μ 的质心，也表示相应的平移。他还证明，Wasserstein 空间上的任意等距映射都可表示为一个平凡等距变换与一个形如Φ_φ的等距映射的复合。

接下来，我们将聚焦于情形 $n = 2$。

从直观上说，等距变换 Φ_φ 可以描述如下：给定 $\mathbb{R}^2$ 上的一个线性等距变换 φ（它可以是旋转一定角度，也可以是关于某条轴的反射），Wasserstein 等距变换 Φ_φ 会使测度 μ 绕其自身质心旋转或反射。我们可以看到，狄拉克质量在这些等距变换下保持不变。

本节考虑距离 d_2，其定义如下：

$$d_2(q,x) = \sqrt{1 + ||x||^2} \text{ and } d_2(x,x') = \left|\left|x - x'\right|\right| \text{ for all } x, x' \in \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

该度量可通过将 $(\mathbb{R}^2,\ d_E)$ 水平嵌入到 $(\mathbb{R}^3,\ d_E)$ 中来表示，令$q = (0,\ 0,\ 1)$，并将三维欧几里得距离作为其度量。

本节证明定理 1.2，其中距离由（3.1）定义。证明基于以下引理，首先是对 $t-$切片 的刻画

$$S_t = \{\mu \in \mathcal{W}_1(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2) | \mu(\{q\}) = 1-t\} \tag{3.2}$$

通过 Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$ 中的测地线。

引理 3.1。 考虑 $t \in [0,1]$ 并令 $\nu_t = (1-t)\delta_q + t\delta_0$。那么，对于任意测度 $\mu \in \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$，以下各项等价：

(1) 测度 μ 属于切片 S_t。(2) μ 与 ν_t之间存

在一条测地线。

证明。 我们先假设 $\mu \in S_t$，并将 $\mu = (1-t)\delta_q + t\mu'$ 记作某个 $\mu' \in \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2, d_E)$。考虑映射 $T\colon \mathbb{R}^2 \cup \{q\} \to \mathbb{R}^2 \cup \{q\}$，定义为对任意 $x \in \mathbb{R}^2$，$T(q) = q$且 $T(x) = 0$。那么 $\pi_0 = (\mathrm{id} \times T)_{\#}$是一个连接 μ与 ν_t的传输计划（即一个耦合），它将支集位于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意质量发送至 0，且不移动位于 q处的质量。其传输成本为

$$\int_{\mathbb{R}^2\cup\{q\}\times\mathbb{R}^2\cup\{q\}} d_2^2(x,y)d\pi_0(x,y) = t\int_{\mathbb{R}^2} d_2^2(x,0)d\mu'(x).$$

为了证明 π_0 的最优性，我们使用 Kantorovich 对偶。根据 [14,定理 5。10],传输计划 π_0 是最优的，当且仅当存在 $\psi\colon \mathbb{R}^2 \cup \{q\} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 和$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \cup \{q\} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 使得 $\varphi(z) - \psi(x) \le d_2^2(x,z)$ 对所有 $(x,z) \in \mathbb{R}^2 \cup \{q\} \times \mathbb{R}^2 \cup \{q\}$,均成立，且等号 π_0-几乎处处成立。令

$$\psi(x) = \begin{cases} -||x||^2 & \text{if } x \in \mathbb{R}^2 \\ 0 & \text{if } x = q \end{cases} \text{ and } \varphi(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z \in \{q,0\} \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.3}$$

不等式 $\varphi(z) - \psi(x) \le d_2^2(x, z)$ 显然在 $z \notin \{0,q\}$. 时成立。对于 $z = q$，我们有$0 - (-||x||^2) = ||x||^2 \le d_2^2(x, q)$，对所有 $x \in \mathbb{R}^2$，均成立，并且 $0 - 0 \le d_2^2(q, q)$。 $z = 0$ 情形非常类似：对所有 $x \in \mathbb{R}^2$，均有 $0 - (-||x||^2) = ||x||^2 \le d_2^2(x, 0)$，并且 $0 - 0 \le d_2^2(q, 0)$。此外，

$$\int_{\mathbb{R}^2\cup\{q\}} \varphi(z)\mathrm{d}\nu_t(z) - \int_{\mathbb{R}^2\cup\{q\}} \psi(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0 + \int_{\mathbb{R}^2} ||x||^2 \,\mathrm{d}\mu(x), \tag{3.4}$$

这恰好是传输计划 π_0. 的代价。因此， $\varphi(z) - \psi(x) = d_2^2(x, z)\pi_0$-几乎处处成立，因而 π_0 是最优的。因此，我们可以构造测地线 γ： $[0,1] \to \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$，方法是令 $\gamma(s) = p_{s\#}\pi_0$，其中 $p_s(x, y) = (1-s)x + sy$。由于 $\pi_0(\{q\} \times \mathbb{R}^2) = 0$，这条测地线确实定义良好。

为证明反向结论，我们改编了 Maas 在 [11]中给出的一个论证。假设$\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$ 是连接 μ 和 ν_t 的（一条恒速）测地线，即，

$$d_{\mathcal{W}_2}(\gamma(s), \gamma(s')) = C\left|s - s'\right| \text{ for all } s, s' \in [0,1],\ \gamma(0) = \mu,\ \gamma(1) = \nu_t. \tag{3.5}$$

注意，每条测地线都可以通过重新参数化转化为恒速测地线。令 $m\colon [0,1] \to [0,1]$ 由关系式 $\gamma(s) \in S_{m(s)}$ 定义，对所有 $s \in [0,1]$，均成立；也就是说， $m(s)$ 是 $\gamma(s)$ 分配给 $\mathbb{R}^2$. 的质量。因此， $\gamma(s)$ 属于 $S_{m(s)}$，而 $\gamma(s')$ 属于 $S_{m(s')}$ ，对所有 s， $s' \in [0,1]$，均成立。因此，从 $\gamma(s)$ 向 $\gamma(s')$ 输运时，必须至少输运质量为 $|m(s) - m(s')|$ 的部分，且其输运距离至少为 $\mathrm{dist}(y_0, \mathbb{R}^2) = 1$. 所以，

$$\left|m(s) - m(s')\right| \le d_{\mathcal{W}_2}^2(\gamma(s), \gamma(s')) = C^2\left|s - s'\right|^2, \tag{3.6}$$

这意味着 $s \mapsto m(s)$ 在 $[0,1]$，上是 2-H¨older 连续的，因此为常数。显然，$m(1) = t$，所以 $m(0) = t$ 也成立，即 $\mu \in S_t$. □

上述引理的一个推论是，若 $\Phi\colon \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2) \to \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$ 是等距映射，则 Φ 保持 $t-$ 切片，即对于任意 $t \in [0,1]$，都有 $\Phi(S_t) = S_t$。更准确地说，我们有以下结果：

引理 3.2。 设 $\Phi\colon \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2) \to \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$ 是 *Wasserstein* 空间的等距映射。则以下结论成立：

(1) q 处的狄拉克质量保持不变，即 $\Phi(\delta_q) = \delta_q$.(2) 若 $\nu_t = (1-t)\delta_q + t\delta_0$，则 $\Phi(\nu_t) = \nu_t$.(3) 切片保持不变，即 $\Phi(S_t) = S_t$.

证明。第一个结果由一个简单的观察得出：由于 $\delta_q = \nu_0$ 且由于 $S_0 = \{\delta_q\}$ 是一个仅含单个元素的切片（事实上，它是唯一一个仅含单个元素的切片），根据引理 3.1，不存在测度 $\mu \in \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$，使得 δ_q 与 μ之间存在测地线（当 $\mu = \delta_q$ 时的平凡测地线除外）。因此，不存在测度 $\mu' \in \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$，使得 $\Phi(\delta_q)$ 与 μ'之间存在非平凡测地线。再次根据引理 3.1，我们得到 $\Phi(\delta_q) \in S_0$，换言之，$\Phi(\delta_q) = \delta_q$，由此证明了第一个结论。

为证明第二个结论，考虑 $t \in (0,1]$ 测度 ν_t，并假设 $\Phi(\nu_t) \in S_{t'}$对某个 $t' \in [0,1]$成立。由引理 3.1 可知，$\Phi(\nu_t)$ 与 $\nu_{t'}$ 之间存在一条测地线。由于 Φ 是等距映射，因此 ν_t 与 $\Phi^{-1}(\nu_{t'})$ 之间也存在一条测地线，从而 $\Phi^{-1}(\nu_{t'}) \in S_t$。

根据距离的定义，很容易看出，测度 ν_t 是切片 S_t 中距离 δ_q最近的测度，即

$$\nu_t = \operatorname*{arg\,min}_{\mu \in S_t} d_{\mathcal{W}_2}(\mu, \delta_q), \tag{3.7}$$

并且该极小值点唯一；此外，$t \to d_{\mathcal{W}_2}(\nu_t, \delta_q) = \sqrt{t}$ 是一个严格递增函数。特别地，由于

$$d_{\mathcal{W}_2}(\nu_t, \delta_q) = d_{\mathcal{W}_2}(\Phi(\nu_t), \Phi(\delta_q)) = d_{\mathcal{W}_2}(\Phi(\nu_t), \delta_q),$$

$\Phi(\nu_t) \in S_{t'}$ 意味着

$$d_{\mathcal{W}_2}(\Phi(\nu_t), \delta_q) \geq d_{W_2}(\nu_{t'}, \delta_q)$$

并且 $t' \geq t$。由于 Φ^{-1} 也是等距映射，且 $\Phi^{-1}(\nu_{t'}) \in S_t$，类似的论证表明 $t \geq t'$，这意味着 $t = t'$。因此，由于 ν_t 是（3.7）的唯一极小值点，等式$d_{\mathcal{W}_2}(\Phi(\nu_t)\ \delta_q) = d_{\mathcal{W}_2}(\nu_t, \delta_q)$ 蕴含第二个结论。

第三个断言现在很容易得出：对于任意 $\mu \in S_t$，μ 与ν_t之间存在一条测地线。由等距映射保持距离的性质，$\Phi(\mu)$ 与 $\Phi(\nu_t) = \nu_t$之间也存在一条测地线；根据引理 3.1 可知 $\Phi(\mu) \in S_t$，从而证明了该断言。□

现在定义到切片 S_1 上的投影算子：

$$P_{\#}\mu = \operatorname*{arg\,min}_{\nu \in S_1} d_{\mathcal{W}_2}(\mu, \nu).$$

容易看出，若 $\mu = (1-t)\delta_q + t\mu'$（其中 $\mu' \in \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2, d_E)$），则极小值点唯一，且为 $P_{\#}\mu = (1-t)\delta_0 + t\mu'$。

投影算子的一个重要性质是，它与 Wasserstein 空间的等距变换可交换。

引理 3.3。若 $\Phi\colon \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2) \to \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$ 是 *Wasserstein* 空间上的一个等距映射，则有

$$P_{\#}(\Phi(\mu)) = \Phi(P_{\#}(\mu)). \tag{3.8}$$

证明。这一性质直接源于以下事实：$\Phi(S_1) = S_1$，且等距变换是满射并保持距离：

$$P_{\#}(\Phi(\mu)) = \operatorname*{arg\,min}_{\nu \in S_1} d_{\mathcal{W}_2}(\Phi(\mu), \nu) = \operatorname*{arg\,min}_{\nu \in S_1} d_{\mathcal{W}_2}(\mu, \Phi^{-1}(\nu)) = \Phi(P_{\#}(\mu)).$$

□

定理 1.2 的证明。利用前面的结果，我们现在研究等距变换如何作用于 1-切片 S_1。由于 S_1 与 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2, d_E)$ 等距，我们可以将 $\Phi_{|S_1}$ 视为 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2, d_E)$ 的一个等距映射。因此存在一个等距映射 φ，它作用于 $(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$，使得 $\Phi \circ \varphi_\#$ 保持狄拉克质量，$(\Phi \circ \varphi_\#)(\delta_x) = \delta_x$ 对任意 $x \in \mathbb{R}^2$ 均成立。于是，通过与一个平凡等距变换复合，我们可以假设 $\Phi(\delta_x) = \delta_x$。

因此，根据 Kloeckner 的结果 [10]，$\Phi_{|S_1}$ 通过绕质心旋转或反射来作用于测度。考虑测度 $\mu' = \frac{1}{3}\delta_{(0,0)} + \frac{2}{3}\delta_{(1,0)}$，其质心为 $x_0 = (\frac{2}{3}, 0)$，而其像 $\Phi(\mu')$ 为

$$\Phi(\mu') = \frac{1}{3}\delta_{x_0+2/3(-\cos(\vartheta),-\sin(\vartheta))} + \frac{2}{3}\delta_{x_0+1/3(\cos(\vartheta),\sin(\vartheta))}$$

对于某个角度 $\vartheta \in [0, 2\pi)$。特别地，除非 $\vartheta = 0$（当 $\Phi_{|S_1}$ 为恒等变换时便是这种情况），否则 $\Phi(\mu')$ 的支集不包含于点 $0 \in \mathbb{R}^2$。

现在考虑由 $\mu = \frac{1}{3}\delta_q + \frac{2}{3}\delta_{(1,0)}$ 给出的测度 $\mu \in S_{2/3\bar{\sigma}}$ 根据引理 3.2，我们有 $\Phi(\mu) \in S_{2/3}$。利用引理 3.8，由于 $P_\#\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_{(1,0)} = \mu'$，我们还有 $\Phi(\mu') = P_\#(\Phi(\mu))$。由于 $\Phi(\mu) \in S_{2/3}$，$P_\#(\Phi(\mu))(\{0\}) \geq 1/3 > 0$；但如上式所示，除非 $\vartheta = 0$，否则 $\Phi(\mu')(\{0\}) = 0$；在这种情况下，Φ 是 S_1 上的恒等变换。因此，至多复合一个平凡等距变换后，我们有 $\Phi_{|S_1}$ 是恒等变换。

为完成证明，考虑一个从 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$ 到 Φ 的等距映射，使得 $\Phi_{|S_1}$ 是恒等映射，并考虑 $\mu \in S_t$ 对于 $t \in [0, 1]$。限制在切片 S_t 上时，投影算子变为单射。事实上，对于 $\nu_1, \nu_2 \in S_t$，我们有 $P_\#\nu_1 = (1-t)\delta_0 + t\nu_1'$ 和 $P_\#\nu_2 = (1-t)\delta_0 + t\nu_2'$；因此，若 $P_\#\nu_1 = P_\#\nu_1$，则有 $\nu_1' = \nu_2'$，从而 $\nu_1 = \nu_2$。

由于 $\Phi_{|S_1}$ 是恒等映射且 $P_\#\mu \in S_1$，方程（3.8）变为

$$P_\#(\mu) = P_\#(\Phi(\mu)). \tag{3.9}$$

根据引理3.2 $\Phi(\mu) \in S_t$ 若 $\mu \in S_t$，则投影算子 $P_\#$ 在 S_t 的测度上的单射性由此推出 $\mu = \Phi(\mu)$。因此，空间 $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^2 \cup \{q\}, d_2)$ 是等距刚性的。□

致谢。感谢 Tam´as Titkos 就该主题进行的有益讨论。

References

[1] L. Ambrosio、E. Bru´e 和 D. Semola。《*Lectures on optimal transport*》。Unitext 第 130 卷。Springer, 查姆，2021年。[2] Z. M. Balogh、E. Str¨oher、T. Titkos 和 D. Virosztek。关于 $\mathbb{R}^n$ 光滑范数的 Wasserstein 刚性，2025年11月。arXiv:2511.03640。[3] Z. M. Balogh、T. Titkos 和 D. Virosztek。海森堡群上 Wasserstein 空间的等距变换与等距嵌入。*Revista Matemática Iberoamericana*，41(6):2055–2084，2025年7月。[4] Z. M. Balogh、T. Titkos 和 D. Virosztek。Carnot 群上 Wasserstein 空间 $\mathcal{W}_1(G)$ 的等距刚性。*Potential Analysis*，64(1):1，2026年1月。[5] J. Bertrand 和 B. Kloeckner。Wasserstein 空间的几何研究：Hadamard 空间。*Journal of Topology and Analysis* 04 04 515 542, 2012 , ( ): – 2022年12月。[6] M. Che、F. Galaz-Garc´ıa、M. Kerin 和 J. Santos-Rodr´ıguez。相对于 Wasserstein 空间的度量构造的等距刚性，2024年10月。arXiv:2410.14648。[7] A. Figalli 和 F. Glaudo。《*An invitation to optimal transport, Wasserstein distances, and gradient flows*》。EMS 数学教材。EMS 出版社，柏林，德国，2021年。[8] G. Geh ´er、T. Titkos 和 D. Virosztek。Wasserstein 空间的等距研究——实数轴。*Transactions of the American Mathematical Society* 373 8 5855 5883, 2020 , ( ): – 5月。[9] G. P. Geh´er、T. Titkos 和 D. Virosztek。Wasserstein 空间的等距群：Hilbert 情形。*Journal of the London Mathematical Society*，106(4):3865–3894，2022年12月。[10] B. Kloeckner。Wasserstein 空间的几何研究：欧几里得空间。*Annali Scuola Normale Superiore - Classe di Scienze* 2 297 323, 2010 , IX( ): – 6月。

[11] J. Maas。有限马尔可夫链的熵梯度流。 *Journal of Functional Analysis*，261 8 2250 2292，2011 ( ): –10月。[12] J. Santos-Rodr´ıguez。关于紧 L–Wasserstein 空间的等距变换。 *Advances in Mathematics*，409108632，2022：11月。[13] E. Str¨oher 和 D. Virosztek。关于 l_q 范数的 Wasserstein 刚性。准备中。[14] C. Villani。《 *Optimal transport: old and new*》。Mathematics and Statistics 第 338 卷。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，2009年。

Zoltán M. Balogh, Universität Bern, Mathematisches Institut (MAI), Sidlerstrasse 12, 3012Bern, Schweiz*Email address*: zoltan.balogh@unibe.chEric Ströher, Universität Bern, Mathematisches Institut (MAI), Sidlerstrasse 12, 3012 Bern,Schweiz*Email address*: eric.stroeher@unibe.ch

Dániel Virosztek, HUN-REN Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Reáltanoda u. 13-15.,Budapest H-1053, Hungary*Email address*: virosztek.daniel@renyi.hu