arXiv:2601.18755v1 [math.AC] 26 Jan 2026

具有同调的单纯虚拟分解的细分

ERIC NATHAN STUCKY 和 JAY YANG

Abstract. 虽然已有一些具有同调的虚拟分解的零星例子，但人们对它们的出现情况还缺乏充分的理解和掌控。我们的研究建立了一套新工具，用于研究由单纯复形产生的单项式理想的虚拟分解，其中包括通过某些诱导子复形的无环性来刻画这些分解。利用这一刻画，我们描述了支撑虚拟分解的极小单纯复形，并提出了一种从单纯虚拟分解中消除同调的方法。

1. Introduction

虚拟分解的定义见 [BES20，定义 1.1]，它是研究 $\mathbb{P}^n$以外的环面簇上的合冲的重要工具。对于环面簇 X，我们可以关联一个称为 Cox 环的多项式环 S，以及一个称为无关理想的单项式理想 B。虚拟分解是由自由模 $F_\bullet$ 构成的复形，满足 $H_i(F_\bullet)$对于 $i > 0$ 必须被无关理想 B的某个充分高次幂湮灭。从更几何的角度来看，对于一个模 M，若相应的层复形 $F_\bullet\tilde{}$是 $M\tilde{}$的自由分解，我们就称 $F_\bullet$ 是 M 的虚拟分解。关于此定义的更详细讨论将推迟到第 2 节。

在当前的虚拟分解构造中，几乎所有构造在实践中似乎都会产生自由分解。许多构造通过明确给出另一个模的自由分解来进行，其依据是层与模之间的对应并非一一对应。这包括 [BES20] 和 [HHL24] 中的构造，以及[BKLY22,VTY25]中的单项式构造。少数有文献记载的例外包括 [CH25, Example 6.7] 以及 [BPC22, Section 4]中的例子。

缺乏具有同调的虚拟分解实例，以及缺乏针对同调在虚拟分解中出现这一现象的研究结果，代表了我们理解虚拟分解方面的一个关键空白。本文通过将单纯复形分解和胞腔分解方面的工作从 [BPS98,BS98] 扩展到虚拟分解，为单项式情形中的这一问题提供了一种研究方法。

对于一个 Δ 由单项式标记其单纯形的单纯复形，可以利用论文 [BPS98]中的技术关联一个链复形 F_Δ。我们将在第 2 节中更详细地描述这一构造及其与虚拟分解的相互作用。正如 [BPS98, Lemma 2.2] 给出了一个无环条件，用于描述标记单纯复形何时产生自由分解一样，我们可以给出下述描述，以说明链复形 F_Δ 何时是虚拟分解。

定理 1.1。固定一个光滑托里克簇 X，其 *Cox* 环为 S，无关理想为 B。对于一个标记单纯复形 (Δ, ℓ)，其关联链复形 F_Δ 是一个虚拟分解，当且仅当对于每个子复形

$$\Delta_m := \{\sigma \in \Delta : \ell(\sigma) \text{ divides } m\},$$

因此存在 存在某个 $d \geq 0$，使得对于所有单项式 $m \in B^d$ 和整数 $i \geq 0$，均有 $\widetilde{H}_i(\Delta_m; \mathbf{k}) = 0$。

这一描述使我们得以构造具有同调的虚拟分解示例。下面的示例可作为这类虚拟分解的良好原型。第3节和第5节将进一步阐述这一示例背后的想法，从而构造一大类具有同调的虚拟分解示例。

示例 1.2。回忆一下，当 X 是射影空间的乘积 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ 时，它的 Cox 环为$S = \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1]$，无关理想为 $B = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \cap \langle y_0$。考虑顶点为 $\{v_0, v_1, w_0, w_1\}$、如图A所示的标记单纯复形 (Δ, ℓ)。

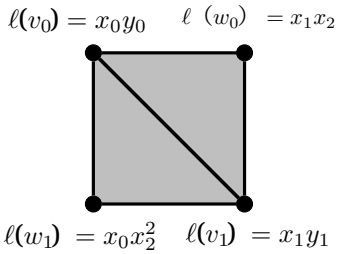


FIGURE A. 一个具有同调并给出虚拟分解的标记单纯复形

对于任意单项式 $m \in B$，关联子复形 Δ_m 是可缩的或为空。特别地， Δ的唯一具有非平凡同调的诱导子复形，是仅包含顶点 w_0 和 w_1的子复形。如果 $\ell(w_0) \mid m$ 且 $\ell(w_1) \mid m$，那么 m 可被 x_0、 x_1和 x_2中的每一个整除。如果 $m \in B$，那么 m 可被 y_0 或 y_1整除；因此对于 $m \in B$，复形 Δ_m 要么为空，要么至少包含顶点 v_0 或 v_1中的一个。因此，根据定理 1.1，所得复形 F_Δ 是一个虚拟分解。

另一方面， F_Δ 不是自由分解，因为 $\Delta_{x_0x_1x_2^2}$ 恰好是 w_0 和 w_1上的诱导子复形，因而不是无环的。对于标记单纯复形 (Δ, ℓ)，我们得到如下链复形，记为 F_Δ:

$$S \xleftarrow{\begin{bmatrix} x_0y_0 & x_1x_2 & x_0x_2^2 & x_1y_1 \end{bmatrix}} S^4 \xleftarrow{\begin{bmatrix} -x_1x_2 & -x_2^2 & -x_1y_1 & & \\ x_0y_0 & & & -y_1 & \\ & y_0 & & & -x_1y_1 \\ & & x_0y_0 & x_2 & x_0x_2^2 \end{bmatrix}} S^5 \xleftarrow{\begin{bmatrix} y_1 & \\ & x_1y_1 \\ -x_2 & -x_2^2 \\ x_0y_0 & \\ & y_0 \end{bmatrix}} S^2.$$

因此，这个复形是 S/I 的一个虚拟分解，其中 $I = \langle x_0y_0, x_1y_1, x_1x_2, x_0x_2^2 \rangle$ 是由顶点标记生成的理想。检查同调后，我们发现 $H_1(F_\Delta)$ 非零，事实上由对应于单项式 $x_0x_1x_2^2$ 的次数生成。我们将在例 2.6 中更详细地检验这一结论。

本文的第二项重要贡献是提出了一种新技术，用于消除由带标记的单纯复形产生的虚拟分解中的同调。在各种虚拟分解技术中，这种方法相对独特，

它通过单纯复形而非修改模来作用于分解。该技术首先对单纯复形的一个面进行星形细分，并为新顶点适当地选择标号。

定义 1.3. 固定一个标记单纯复形 (Δ, ℓ)，其标记取自多项式环 S，一个单纯形$\sigma \in \Delta$，以及一个单项式 $m \in S$。定义在 σ处对 (Δ, ℓ) 进行细分 为一对 (Δ', ℓ')，其中 Δ'是通过单个顶点对单纯形 σ处的 Δ进行细分所得，并且对所有 $\tau \in \Delta \cap \Delta'$， $\ell'(\tau) = \ell(\tau)$。

为这次细分产生的新顶点赋予标号的一种方式，是将被细分胞腔的标号 $\ell(\sigma)$ 赋给它。这种标记并不能以有用的方式改变分解，因为它所起的作用只是使分解更加非极小。不过，对于虚拟分解，我们可以通过为细分产生的新顶点恰当地选择单项式标记，作出更有用的改变。

定理 1.4。设 X 是一个光滑托里克簇，其 *Cox* 环为 S，无关理想为 B。设 (Δ, ℓ) 是一个最小公倍数标记单纯复形，且 F_Δ 是单项式理想 $I \subseteq S$ 的一个虚拟分解 S/I 。假设 $\omega \in \Delta$ 是一个单纯形，其顶点为 v_0、.....、v_r，并设 Δ' 是在 ω 中的点 v' 处对 Δ 进行星形细分所得的复形。若 ℓ' 是 Δ' 上的一个最小公倍数标记，且满足

(1) $\ell'(v')$ 整除 $\ell(\omega)$，并且(2) $\ell'(v')$
$\in \langle \ell(v_0)$ ....., $\ell(v_r)\rangle : B^\infty$,

那么 $F_{\Delta'}$ 是 S/I 的一个虚拟分解。

我们将满足定理 1.4 条件的细分称为虚拟相容细分。这种技术不仅提供了一种从旧分解构造新分解的新颖且独特的方法，而且常常能减少虚拟分解中的同调。前面的例子也允许进行这样一种细分，并再次体现了这一点。

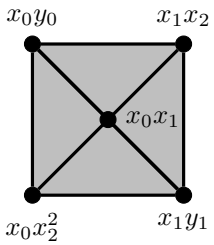


FIGURE B. 由图 A 中的标记单纯复形经过虚拟相容细分得到的标记单纯复形

例 1.5。再次考虑例 1.2 中的标记复形（Δ， ℓ），并在 v_0 与 v_1 之间的边上的一个点处对其进行细分，得到图 B 所示的细分（Δ'， ℓ'）：

注意，这是一个虚拟相容细分。新顶点 $\ell'(v') = x_0x_1$ 的标号整除 $\text{lcm}(\ell(v_0)\ \ell(v_1)) = x_0x_1y_0y_1$，即 v_0 和 v_1之间边上的标号。此外，它包含在理想 $\langle \ell(v_0)\ \ell(v_1)\rangle$ 中： B^∞；事实上，它是该理想 $\langle x_0x_1\rangle$的生成元。

对于这些带标号的单纯复形中的每一个，我们再次关联一个链复形 $F_{\Delta'}$，这次它具有如下形式

$$S \xleftarrow{\begin{bmatrix} x_0y_0 \\ x_1x_2 \\ x_0x_2^2 \\ x_1y_1 \\ x_0x_1 \end{bmatrix}^\top} S^5 \xleftarrow{\begin{bmatrix} -x_1x_2 & -x_2^2 & -x_1 & & & & \\ x_0y_0 & & & -y_1 & -x_0 & & \\ & y_0 & & & & -x_1y_1 & -x_1 \\ & & & x_2 & & x_0x_2^2 & \\ & & y_0 & & x_2 & & x_2^2 & y_1 \end{bmatrix}} S^8 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & x_1 & & \\ -x_2 & -x_2^2 & & \\ & & x_0 & \\ y_0 & & -y_1 & \\ & & & 1 \\ & y_0 & & -y_1 \\ & & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}} S^4.$$

检查同调可发现，$F_{\Delta'}$ 实际上是一个自由分解。特别地，它是 S/J的一个自由分解，其中 $J = \langle x_0x_1,\ x_0y_0,\ x_1x_2,\ x_1y_1,\ x_0x_2^2 \rangle$。直接计算可验证，层 $(S/I)^\sim$ 和 $(S/J)^\sim$ 是同构的，因此根据 [BES20 的定义 1.1]，$F_{\Delta'}$ 是 S/I的一个虚拟分解。

我们的主要结果描述了何时这种细分过程能够降低指定次数上的同调。

定理 1.6。固定一个具有 *Cox* 环 S的光滑托里克簇 X。设 $(\Delta、\ \ell)$ 是一个最小公倍数标记的单纯复形，使得 F_Δ 是一个虚拟分解；设 $(\Delta'、\ \ell')$ 是 $(\Delta、\ \ell)$ 在单纯形 $\omega \in \Delta$中的点 v' 处的最小公倍数标记的虚拟相容细分。记 $\Gamma := $ 链接$_\omega(\Delta)$。

若对于每个单项式 $m \in S$，只要 $\ell'(v')$ 整除 m，且对于任意 $v \in \omega、\ \widetilde{\ \ \ \

我们首先统一关于单纯复形的一些记号。回忆一下，有限顶点集 V 上的单纯复形 Δ 是 2^V 的一个子集，并且如果 $\sigma \in \Delta$ 和 $\tau \subseteq \sigma$，那么 $\tau \in \Delta$。特别地，每个非空单纯复形都包含空单纯形，我们将空单纯形的维数记为 -1。作为一种记号上的滥用，我们有时将单个单纯形 $\sigma \subseteq V$ 视为单纯复形 2^σ。

我们定义单纯复形的若干标准运算。对于定义在互不相交的顶点集上的两个单纯复形 Δ和 Γ，我们将 Δ 和 Γ 的连接 记作

$$\Delta \star \Gamma := \{\sigma \sqcup \tau : \sigma \in \Delta, \tau \in \Gamma\}.$$

对于 Δ中的一个单纯形 τ，将 τ 在 Δ 中的闭星 记作

$$\mathrm{star}_\tau(\Delta) := \{\sigma \in \Delta : \tau \cup \sigma \in \Delta\}.$$

类似地，将 Δ 中单纯形 τ 的链接 记作

$$\mathrm{link}_\tau(\Delta) := \{\sigma \in \Delta : \tau \cap \sigma = \emptyset, \tau \cup \sigma \in \Delta\}.$$

我们还 在此注意到，链接是 Δ 中满足 $\mathrm{link}_\sigma(\Delta) \star \sigma \subseteq \Delta$的极大子复形 .

在本文中，单纯复形的细分指在单纯形中的单个点处进行星形细分。也就是说，对于单纯形 $\omega \in \Delta$，我们将 Δ 在点 v' 处 ω 的细分定义为满足以下条件的单纯复形 Δ'

$$\Delta' = (\Delta \setminus \{\sigma \in \Delta : \omega \subseteq \sigma\}) \cup \{\sigma \cup \{v'\} : \sigma \cup \omega \in \Delta, \omega \not\subseteq \sigma\}.$$

我们在此还定义一种单纯复形，称为-单纯形上的双锥，记作 $\diamondsuit^k$，它是两个顶点与一个 k-单纯形的连接。虽然双锥还有其他三角剖分，但本文关注的是这一种。

带标记的单纯复形。我们定义如下的带标记单纯复形概念，它是 [BPS98] 所述构造的一个略微修改版本。

定义 2.1（[BPS98，构造 2.1]）。固定一个多项式环 S。带标记的单纯复形是一个二元组 (Δ, ℓ)，其中 Δ 是一个单纯复形，且 $\ell\colon \Delta \to S$ 是满足以下条件的标记

(1) 对每个单纯形 $\sigma \in \Delta$，$\ell(\sigma)$ 都是一个单项式；

(2) 对所有包含映射 $\sigma \subset \gamma$，$\ell(\sigma)$ 整除 $\ell(\gamma)$。

此外，如果一个标记满足 $\ell(\emptyset) = 1$，且对每个非空单纯形 σ，

$$\ell(\sigma) = \mathrm{lcm}\{\ell(\tau) : \tau \subsetneq \sigma\}.$$

在不会引起歧义的情况下，我们将用 Δ 指代这个标记单纯复形，并省略对 ℓ 的提及。

定义 2.2。给定一个标记单纯复形 (Δ, ℓ)，我们可以关联一个自由复形 F_Δ，其中对 $i \geq 0$，

$$F_{\Delta,i} = \bigoplus_{\sigma \in \Delta,\ \dim \sigma = i-1} S(-\deg(\ell(\sigma))).$$

这个复形 $\partial_i : F_{\Delta,i} \to F_{\Delta,i-1}$ 的微分由下式给出

$$\partial_i[\sigma] = \sum_{\tau \subseteq \sigma,\ \dim \tau = \dim \sigma - 1} \pm \frac{\ell(\sigma)}{\ell(\tau)}[\tau],$$

其中的符号根据 τ 和 σ的相对定向选取。

定义 2.1 中的条件 (2) 足以保证定义 2.2 中的模和映射构成良定义的对象。类似于单纯形同调的计算表明，F_Δ 始终构成一个由 S模组成的复形。

因此，只要 $\ell(\emptyset) = 1$，复形 F_Δ 中的第一项就由 $F_{\Delta,0} = S$ 给出。因此，对于这类复形，$H_0(F_\Delta) = S/I$，其中 I 是由Δ所有顶点上的标号生成的理想。更一般地，复形 F_Δ 的同调可以通过以下与单项式 m相关联的 Δ 子复形的同调来确定：

$$\Delta_m := \{\sigma \in \Delta : \ell(\sigma) \text{ divides } m\}.$$

单纯形分解理论背后的关键联系如下。

定理 2.3 ([BPS98])**.** 固定一个多项式环 S。令 (Δ, ℓ) 为一个标号取自 S的标记单纯复形，并令 F_Δ 为与该标记相关联的自由复形。对于任意整数 $i \geq 0$ 和任意单项式 $m = x^\alpha \in S$，

$$H_i(F_\Delta)_\alpha \cong \widetilde{H}_{i-1}(\Delta_m; \mathbf{k}).$$

证明。 这可由 [BPS98，引理 2.2] 的证明技巧推出。具体而言，我们可以观察到，复形 F_Δ 的次数 α 分量恰好是系数取自$\mathbf{k}$的胞腔链复形，其中 Δ_m成立。因此我们得到等式 $H_i(F_\Delta)_\alpha = H_i(\Delta_m;\mathbf{k})$。□

回顾一下，支撑在非负同调次数上的自由复形 $F_\bullet$ 是自由分解*free resolution*，当且仅当 $H_i(F_\bullet) = 0$ 对所有 $i > 0$ 都成立；此时我们称它是 $H_0(F_\bullet)$ 的自由分解*of* 。因此，在细胞分解的标准理论中，这使我们能够将分解的无环性刻画为子复形 Δ_m 的无环性。

虚拟分解。 我们回顾一些关于环面簇的背景知识；如需参考，可阅读 [CLS11] 一书。对于正规托里克簇 X，我们可以关联一个 $\mathrm{Cl}(X)$-分次多项式环 S，称为 Cox 环，以及一个平方自由单项式理想 $B \subseteq S$。对任意有限生成的 $\mathrm{Cl}(X)$-分次 S-模 M，在 X 上都有唯一的相伴层 $M^\sim$；这种对应通常是多对一的。

重要的是，对于光滑托里克簇 X，给出零层的有限生成模恰好是 B-挠模。也就是说，$M^\sim = 0$ 当且仅当存在 $d \geq 0$ 使得 $B^d \cdot M = 0$。由于无关理想 B 始终是单项式理想，这意味着若 $S = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ 且 M 是 $\mathbb{Z}^n$-分次的，那么只需检查对于某个 $d \geq 0$，所有单项式 $x^\alpha \in B^d$ 都满足 $M_\alpha = 0$。

现在有了这些背景，我们可以回顾 [BES20 中虚拟分解的定义。].

定义 2.4（[BES20，定义 1.1]）。设 X 为一个光滑托里克簇，其 Cox 环为 S。设 M 为一个 $\mathrm{Cl}(X)$-分次的 S-模。 M 的一个虚拟分解 是一个 $\mathrm{Cl}(X)$-分次的自由 S-模$F_\bullet$复形，使得对应的向量丛复形 $F_\bullet^\sim$是 $M^\sim$的一个局部自由分解。

备注 2.5。 要检查虚拟分解 $F_\bullet$ 是否是模 M 的虚拟分解，通常必须证明 $H_0(F_\bullet)^\sim = M^\sim$。然而，本文中有一种重要情形： M 和 $H_0(F_\bullet)$ 都表示为 S 对一个齐次理想取商所得的模。此时，在光滑托里克簇 X 上，根据 [CLS11，命题 6.A.7], $(S/I)^\sim = (S/J)^\sim$ 当且仅当I： $B^\infty = J : B^\infty$，其中 B 是 X 的无关理想。由于本文中的所有复形都来自一个最小公倍数标记单纯复形 Δ 的 F_Δ，模 $H_0(F_\Delta)$ 总能表示为 S 对一个齐次理想取商所得的模。

与自由分解一样，如何判断与标记单纯复形 (Δ, ℓ) 相关联的复形 F_Δ 是否为虚拟分解，可以通过对子复形施加无环条件来刻画。为与定理 2.3 对称，我们在此回顾定理 1.1 的陈述。

定理 (定理 1.1)。设 X 是一个光滑托里克簇，其 *Cox* 环为 $S = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$，无关理想为 B。令 (Δ, ℓ) 为一个标记单纯复形。当且仅当存在某个 $d \geq 0$ 使得 $\widetilde{H}_j(\Delta_m; \mathbf{k}) = 0$ 对所有 $m \in B^d$ 和 $j \geq 0$都成立时，复形 F_Δ 是一个虚拟分解。

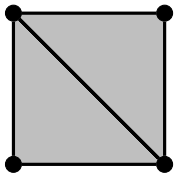
定理 *1.1* 的证明。若 F_Δ 是一个虚拟分解，则由于 F_Δ 是 $\mathbb{Z}^n$-分次的，存在 $d \geq 0$，使得对每个 $i > 0$，都有 $H_i(F_\Delta)_\alpha = 0$，对所有满足 $x^\alpha \in B^d$的 $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ 均成立。根据定理 2.3，对于$j = i - 1$，我们得到 $\widetilde{H}_j(\Delta_m; \mathbf{k}) = 0$ 对所有 $m \in B^d$均成立。

现在证明反向结论，固定 $d \geq 0$，使得对所有 $m \in B^d$，$\widetilde{H}_j(\Delta_m; \mathbf{k}) = 0$ $j \geq 0$。我们必须证明 $H_i(F_\Delta^\sim) = 0$。由于 $H_i(F_\Delta^\sim) \cong (H_i(F_\Delta))^\sim$，因此只需证明$B^d \cdot H_i(F_\Delta) = 0$。

设 $m = x^\alpha \in B^d$ 是一个单项式，并令 $\mu_m : H_i(F_\Delta) \to H_i(F_\Delta)$ 为由乘以 m给出的映射。因此，只需证明 μ_m 为零。由于 $H_i(F_\Delta)$ 由与 Δ 的 i 维胞腔上的标号相对应的次数生成，我们发现它由非负的 $\mathbb{Z}^n$ 次数生成。因此，μ_m 的像包含在次数至少为 α 的分量中。定理 2.3 给出 $H_i(F_\Delta)_{\alpha'} = \widetilde{H}_{i-1}(\Delta_{m'}; \mathbf{k})$，其中 $m' = x^{\alpha'}$。当 $m' \in B^d$ 时，等价地$\alpha' \geq \alpha$，所以这些向量空间为 0。因此，μ_m 的像为零，故 $(H_i(F_\Delta))^\sim = 0$。□

例 2.6。现在我们进一步详细展开例 1.2。和之前一样，我们固定 $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$，其 Cox 环为 $S = \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1]$，无关理想为 $B = \langle x_0,\ x_1,\ x_2 \rangle \cap \langle y_0,\ y_1 \rangle$。考虑顶点 $\{v_0, v_1, w_0, w_1\}$ 上的下列标记单纯复形（Δ，ℓ）：

$\ell(v_0) = x_0y_0 \quad \ell(w_0) = x_1x_2$



$\ell(w_1) = x_0x_2^2 \quad \ell(v_1) = x_1y_1$

忽略标记后，与上面的单纯复形相关联的单纯链复形如下：

$$\mathbf{k} \xleftarrow{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}} \mathbf{k}^4 \xleftarrow{\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}} \mathbf{k}^5 \xleftarrow{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}} \mathbf{k}^2$$

那么，定义 2.2 中的构造对应于将$\mathbf{k}$ 替换为 S 的适当次数移位副本，并将微分中的非零项替换为适当的单项式。由此得到如下 S-模复形；这里我们再次省略次数

移位。

$$S \xleftarrow{\begin{bmatrix} x_0y_0 & x_1x_2 & x_0x_2^2 & x_1y_1 \end{bmatrix}} S^4 \xleftarrow{\begin{bmatrix} -x_1x_2 & -x_2^2 & -x_1y_1 & & \\ x_0y_0 & & & -y_1 & \\ & y_0 & & & -x_1y_1 \\ & & x_0y_0 & x_2 & x_0x_2^2 \end{bmatrix}} S^5 \xleftarrow{\begin{bmatrix} y_1 & \\ & x_1y_1 \\ -x_2 & -x_2^2 \\ x_0y_0 & \\ & y_0 \end{bmatrix}} S^2$$

除 $H_0(F_\Delta)$ 外，它由 S/I 为 $I = \langle x_0y_0,\ x_1y_1,\ x_1x_2,\ x_0x_2^2 \rangle$，我们还有 $H_1(F_\Delta)$，它由 $\eta = -x_0x_2[w_0] + x_1[w_1]$ 生成，其中 $[w_0]$ 和 $[w_1]$ 是 F_Δ 中分别对应于顶点 w_0 和 w_1 的同调类。此外，η 被 y_0 和 y_1 在 $H_1(F_\Delta)$ 中湮灭，因此 $H_1(F_\Delta)$ 被无关理想 $B = \langle x_0,\ x_1,\ x_2 \rangle \cap \langle y_0,\ y_1 \rangle$ 湮灭。

我们用下面两个推论结束本节；它们将减少为证明 F_Δ 是一个虚拟分解而必须检查的单项式数量。这些推论在全文中偶尔会带来便利。特别地，当同调由单个元素生成时，推论 2.8 往往很有用。

推论 2.7. 设 X 是一个光滑托里克簇，其 *Cox* 环为 S，无关理想为 B。令 (Δ, ℓ) 为一个标记单纯复形。当且仅当存在某个 $d \geq 0$，使得对于所有 $i \geq 0$ 和 $m \in B^{[d]} = \langle m^d : m \in B \rangle$，都有 $\widetilde{H}_i(\Delta_m; \mathbf{k}) = 0$，复形 F_Δ 才是一个虚拟分解。

证明。 由定理 1.1 以及以下两个事实可得：$B^{[d]} \subseteq B^d$，且对于 $D \gg d$ 有 $B^D \subseteq B^{[d]}$。□

推论 2.8. 设 X 是一个光滑托里克簇，其 *Cox* 环为 S，无关理想为 B。令 (Δ, ℓ) 为一个标记单纯复形。当且仅当对于每个 $\widetilde{\ }$ 单项式 $m \in S$ 和满足 $H_i(\Delta_m; \mathbf{k}) \neq 0$ 的 $i \geq 0$，都存在 $d \geq 0$，使得对于每个极小生成元 $b \in B$，都有 $H_i(\Delta_{b^d m}; \mathbf{k}) = 0$，复形 F_Δ 才是一个虚拟分解。

证明。 由推论 2.7 可得。 □

3. Minimal Simplicial Complexes with Homology

例 1.2 展示了一个例子，说明如何从带标记的单纯复形得到具有同调的虚拟分解。本节给出支持具有同调的虚拟分解的带标记单纯复形大小的下界。这些约束表明，由双锥的标记所得到的例子是能够产生具有同调的虚拟分解的最小带标记单纯复形。作为起点，在 $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^k$ 上，我们指出，双锥复形 $\diamondsuit^k$ 总可以通过标记得到具有同调的虚拟分解。

命题 3.1。 固定 $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^k$，其中整数 n 和 k 满足 $n \geq k \geq 0$，其 *Cox* 环为 $S = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_k]$。若 $\Delta = \diamondsuit^k$ 是一个 k-单纯形上的双锥，则存在一种标记 ℓ，用 S 中的单项式标记 Δ，使得 F_Δ 是虚拟分解而不是自由分解。

证明。 设 $v_0, \ldots, v_k$ 是 $\diamondsuit^k$ 中特殊的 k 单纯形的顶点，另外两个顶点为 w_0 和 w_1。

考虑由 $\ell(v_i) = y_i$ 和 $\ell(w_0) = x_0$, $\ell(w_1) = x_1$ 给出的最小公倍数标记。 F_Δ 不是自由$\widetilde{\ }$分解，因为 $H_0(\Delta_{x_0x_1}; \mathbf{k}) = \mathbf{k} \neq 0$。但任意 $m \in B$ 都能被某个 $i = 1, \ldots, k$ 整除，其中 y_i。因此

存在 $i = 1,\dots,k$，使得 Δ_m 包含 v_i。由于任何包含 $v_1,\dots,v_k$ 中任意~的诱导子复形都是可缩的，我们得到，对于所有 $m \in B$ 和所有 $j \geq 0$，$H_j(\Delta_m; \mathbf{k}) = 0$。因此，根据定理 1.1，$F_\Delta$ 是一个虚拟分解。□

命题 3.1 中描述的简单例子，同时也是最小的例子：对于两个射影空间的乘积，它们给出了具有同调的虚拟分解。更一般地，对于光滑托里克簇，我们可以通过无关理想的余维来刻画这类最小例子。

在本节其余部分的证明中，考虑子复形 Δ_m 时，以下理想将很有用：它由满足复形 Δ_{fm} 没有同调的单项式 f 生成。

定义 3.2. 给定一个标记单纯复形 Δ 和一个单项式 m，定义 S 中的以下单项式理想：

$$I(\Delta, m) := \langle f : f \text{ monomial and } \widetilde{H}_i(\Delta_{fm}; \mathbf{k}) = 0 \text{ for all } i \geq 0 \rangle.$$

若 Δ_m 在具有同调的子复形中关于包含映射是极大的，则 $\sim I(\Delta, m)$ 实际上只包含满足 $H_i(\Delta_{fm}; \mathbf{k}) = 0$ 的单项式 f。有了这个定义，我们现在可以证明第一个关于具有同调的虚拟分解结构的结果。

命题 3.3。设 X 是一个光滑托里克簇，具有 *Cox* 环 S 和无关理想 B。令 c 表示无关理想 B 在 X 上的仿射锥中的余维。设 (Δ, ℓ) 是一个以最小公倍数标号的单纯复形。若 F_Δ 是一个虚拟分解，且存在 $i > 0$ 使得 $H_i(F_\Delta) \neq 0$，则 Δ 至少包含 $c + |\Delta_m|$ 个顶点。

证明。假设 F_Δ 是一个虚拟分解，并且对某个 $i > 0$，有 $H_i(F_\Delta) \neq 0$。根据定理 2.3，存在某个单项式 m，使得 $H_i(\Delta_m; \mathbf{k}) \neq 0$。设 m 满足：在具有此性质的子复形中，复形 Δ_m 在包含关系下是极大的。

现在令 $I = I(\Delta, m)$ 如定义 3.2 所述。由于 F_Δ 是一个虚拟分解，根据推论 2.8，存在某个 $d \geq 0$ 使得 $B^{[d]} \subseteq I$。然而，由于 B 的余维为 c，I 的余维也必定至少为 c。因此，I 必须至少包含 c 个极小生成元。

现在设 $m_1,\dots,m_c \in I$ 是 c 个互不相同的 I 的极小生成元。由于这些是极小生成元，对于每一对 $1 \leq i, j \leq c$ 满足 $i \neq j$，可得 $\gcd(m_i, m_j) \notin I$。由于 Δ_m 是满足 $H_i(\Delta_m; \mathbf{k}) \neq 0$ 的子复形中极大的一个，如果 $\Delta_{fm} \neq \Delta_m$，则 $H_i(\Delta_{fm}; \mathbf{k}) = 0$，从而 $f \in I$。由于 $m_1,\dots,m_c$ 是 I 的互不相同的极小生成元，对于每一对整数 $1 \leq i, j \leq c$ 满足 $i \neq j$，$\gcd(m_i, m_j) \notin I$。因此 $\Delta_{\gcd(m_i,m_j)m} = \Delta_{m}$。

另一方面，$\Delta_{\gcd(m_i,m_j)m} = \Delta_{m_i \cdot m} \cap \Delta_{m_j \cdot m}$，从而 $\Delta_{m_i \cdot m} \cap \Delta_{m_j \cdot m} = \Delta_m$。由于 $\Delta_{m_i \cdot m} \neq \Delta_m$，可知对于 $1 \leq i \leq c$，$\Delta_{m_i \cdot m} \setminus \Delta_m$ 的顶点集均非空且两两不相交。因此，Δ 中至少有 c 个不同的顶点不属于 Δ_m。于是 Δ 至少包含 $c + |\Delta_m|$ 个顶点。□

命题 3.3 最重要的情形是 Δ_m 为一对点。此外，利用 B 的余维的粗略上界，我们可以得到以下统一上界。

推论 3.4. 固定一个光滑非仿射环面簇 X，其维数 $X \geq 1$。令 (Δ, ℓ) 为一个最小公倍数标记单纯复形。若 F_Δ 是一个虚拟分解，且存在 $i > 0$ 满足 $H_i(F_\Delta) \neq 0$，则 Δ 至少包含4 个顶点。

证明. 由于 X 不是仿射的，对应于 X 的扇 Σ_X 必须至少包含两个极大锥。由于无关理想的生成元与 Σ_X中的极大锥一一对应， X 的无关理想的余维至少为 2，因此结论由命题 3.3 得出。□

即使不考虑我们在第 4 节证明的约化结果，命题 3.3 也对虚拟分解的结构提出了限制。这表明，要获得具有同调的虚拟分解，我们需要给出生成元数量相对较多的理想，至少在单项式情形下是如此。

在最小的可能情形下，也就是 Δ_m 恰好包含 2 个顶点且 Δ 包含 $c+2$个顶点时， $c+2$ 正好是 c维双锥 $\diamondsuit^{c-1}$的顶点数。接下来我们将证明，在这个最小情形下， Δ 实际上必定是一个双锥。为此，我们需要以下引理，它描述了一个关于顶点数为 $n+2$ 的复形是 $\diamondsuit^{n-1}$的判据。

引理 3.5。 设 Δ 是一个以 u、 w 和 v_1、…, v_n为顶点的、顶点数为 $n+2$ 的无环单纯复形。假设对于每个 $k=1$、…, n， Δ 在 u、 w、 v_1、…, $\widehat{v_k}$、…, v_n 上的诱导子复形都是以 $\{v_1,\ldots,\widehat{v_k},\ldots,v_n\}$为底的双锥。那么 Δ 就是以 $\{v_1,\ldots,v_n\}$为底的双锥。

证明。 令 Γ_k 为 Δ 在顶点 u、 w、 v_1、……、 $\widehat{v_k}$、……、 v_n上诱导的子复形。特别注意，作为一个双锥， Γ_k 恰好包含两个（$n-1$）-单纯形，即 $\{u,v_1,\ldots,\widehat{v_k},\ldots,v_n\}$和 $\{w,v_1,\ldots,\widehat{v_k},\ldots,v_n\}$。此外，对于所有 k， Γ_k 都不包含边 $\{u,w\}$。因此， Δ也不包含边 $\{u,w\}$。

我们首先证明 Δ 的（$n-1$）-骨架具有正确的单纯形。为此，令$\sigma\subset\{u,w,v_1,\ldots,v_n\}$ 为一个单纯形。于是需要考虑三种情况。第一，若 u和 w 都属于 σ，则 $\sigma\notin\Gamma_k$。然而，由于 Γ_k 是一个诱导子复形，这意味着 $\sigma\notin\Delta$。第二，若 u和 w中恰有一个属于 σ，则 σ包含 v_1、……、 v_n中除一个以外的所有元素，因此对于某个 $k=1$、……、 n，有 $\sigma\in\Gamma_k\subseteq\Delta$。最后，我们还必须考虑 u和 w都不属于 σ的情况。

固定 $\sigma=\{v_1,\ldots,v_n\}$，它是唯一一个不含 u 和 w 的（$n-1$）单纯形。由于$\bigcup_{k=1}^{n}\Gamma_k$具有 $\widetilde{}$非零的 H_{n-1}，而 Δ无环，我们可知 Δ 至少是 n 维的。然而，不含边 $\{u,w\}$ 的唯一n单纯形必须包含 σ，因此 Δ 必须包含 σ。综上，这意味着 Δ 的（$n-1$）骨架恰好包含所有不含边 $\{u,w\}$ 的（$n-1$）单纯形。

那么， Δ 的（$n-1$）骨架的维数为 $\dim\widetilde{H}_{n-1}(\Delta^{(n-1)};\mathbf{k})=2$，且 Δ 无环，因此 Δ 必须至少包含两个 n 单纯形。注意，与 Δ 的（$n-1$）骨架相容的唯一 n 单纯形是单纯形 $\{u,v_1,\ldots,v_n\}$ 和 $\{w,v_1,\ldots,v_n\}$。因此， Δ必须同时包含这两个 n 单纯形。于是， Δ恰好是以 $\{v_1,\ldots,v_n\}$ 为底的双锥。□

引理证明完毕后，我们现在可以转向本节的主要结果。由命题 3.3 可知，具有同调的单纯虚拟分解所需的顶点数至少为 $c+2$，其中 c 是无关理想的余维。现在我们证明，双锥是唯一存在可达到这一最小值的标记的单纯复形。

命题 3.6. 设 X 是一个正规托里克簇，其无关理想为 B，并设 c 是 B的余维。若(Δ,ℓ) 是一个定义在 $c+2$ 个顶点上的最小公倍数标记单纯复形，且 F_Δ 是一个虚拟分解，并且存在 $i>0$ 使得 $H_i(F_\Delta)\neq 0$，则 $\Delta=\diamondsuit^{c-1}$。

Pr $\widetilde{}$呃。首先选择 m，使得对于某个 $i\geq 0$， $H_i(\Delta_m;\mathbf{k})\neq 0$，且 $I(\Delta,\ m)$ 是素的 e.

为了证明这样的 m 存在，假设 $I(\Delta, m)$ 不是素的。那么存在单项式 f 和 g，使得 $fg \in I(\Delta, m)$，其中 $f \notin I(\Delta, m)$ 且 $g \notin I(\Delta, m)$。由于 $f \notin I(\Delta, m)$，可得对于某个 $i \geq 0$，$\tilde{}H_i(\Delta_{fm}; \mathbf{k}) \neq 0$。此外，简单计算可得 $I(\Delta, m) \subseteq I(\Delta, fm)$。将 m 替换为 fm，并重复此过程，直到 $I(\Delta, m)$ 为素的。由于 S 是诺特的，这一过程会终止，因此存在一个 m，使得 $I(\Delta, m)$ 为素的。为简化表述，令 $I := I(\Delta, m)$。

由于 $\tilde{H}_i(\Delta_m; \mathbf{k}) \neq 0$ 对某个 $i \geq 0$成立，我们知道 Δ_m 至少有 2 个顶点。此外，Δ 有 $c+2$ 个顶点，因此由命题 3.3 可知，Δ_m 必须恰好包含 2 个顶点。将这两个顶点记为 u 和 w。

由于复形 F_Δ 是一个虚拟分解，并且 I 湮灭所有高阶同调，因此可得$B^d \subseteq I$。由于 I 是素理想，事实上有 $B \subseteq I$。由于 B 的余维为 c，I 的余维至少为c。因此，由于 I 是一个余维至少为 c的素单项式理想，它必须至少包含 c个不同的变量。

将 I中的 c 个变量记为 x_1、.....、x_c。由于这 x_i 个变量中的每一个都是 I的极小生成元，因此 $\Delta_{x_i m}$ 中的每一个都是一个不同的子复形。此外，$\Delta_m \subseteq \Delta_{x_i m}$，所以每个 $\Delta_{x_i m}$ 恰好包含 3 个顶点。由于 $\Delta_{x_i m}$ 是一个由三个顶点构成且不是单纯形的无环单纯复形，$\Delta_{x_i m}$ 必定是从 u 到 w的两条边组成的链。由于 Δ 包含 $2+c$ 个顶点，而 Δ_m 包含 2 个顶点，Δ 中的每个顶点要么属于 Δ_m，要么属于唯一的一个 $\Delta_{x_i m}$。现在将 $\Delta_{x_i m}$ 中不属于 Δ_m的唯一顶点记为 v_i。

现在，对于 $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, c\}$，定义单项式 $m_{\mathcal{I}} := \prod_{i \in \mathcal{I}} x_i$。那么对于 $i \in \mathcal{I}$，我们有 $\Delta_{x_i m} \subseteq \Delta_{m_{\mathcal{I}} m}$，因此对所有 $i \in I$，都有 $v_i \in \Delta_{m_{\mathcal{I}} m}$。反过来，由于 $\ell(v_i) \mid x_i m$ 且 $\ell(v_i) \nmid m$，如果 f 是 S 中的一个单项式，满足 $\ell(v_i) \mid fm$，那么 f 可被 x_i 整除。因此，若 $v_i \in \Delta_{m_{\mathcal{I}} \cdot m}$，则 $i \in \mathcal{I}$。所以，$\Delta_{m_{\mathcal{I}} \cdot m}$ 的顶点恰好是顶点 u、w，以及当 $i \in \mathcal{I}$ 时的 v_i。

由于当 $\mathcal{I}$ 非空时，每个 $\Delta_{m_{\mathcal{I}} \cdot m}$ 都包含超过 2 个顶点，而 Δ 包含 $2+c$ 个顶点，根据命题 3.3，当 $\mathcal{I}$ 非空时，每个 $\Delta_{m_{\mathcal{I}} \cdot m}$ 都是无环的。对满足 $\mathcal{I} \neq \emptyset$ 的 $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, c\}$，归纳地将引理 3.5 应用于子复形 $\Delta_{m_{\mathcal{I}} \cdot m}$，可知复形 $\Delta_{m_{\mathcal{I}} m}$ 是以顶点 $\{v_i : i \in \mathcal{I}\}$ 为底的双锥。最后，对于 $\mathcal{I} = \{1, \ldots, c\}$，我们有 $\Delta = \Delta_{m_{\mathcal{I}} \cdot m}$，因此 Δ 正是所需的双锥 $\diamondsuit^{c-1}$。□

4. Subdivisions and Homology

现在我们开始证明本文的主要定理，首先证明定理 1.4。回顾一下，该定理指出，在满足某些整除条件的前提下，细分保持虚拟分解。

定理 *1.4* 的证明。设 (Δ, ℓ) 是一个标记单纯复形，且相应的复形 F_Δ 是单项式理想 I 的虚拟分解。设 (Δ', ℓ') 是 (Δ, ℓ) 在 ω 中点 v' 处的虚拟相容细分；回顾一下，这意味着单项式 $\ell'(v')$ 满足定理 1.4 中的两个条件：

(1) $\ell'(v')$ 整除 $\ell(\omega)$，且 (2) $\ell'(v') \in \langle \ell(v_0), \ldots, \ell(v_r) \rangle : B^\infty$。

条件 (2) 立即推出 $\ell'(v') \in I : B^\infty$。令 $J := I + \ell'(v')$，这是由 (Δ', ℓ') 的标号生成的理想。注意 $I \subseteq J \subseteq I : B^\infty$，因此我们有 $J : B^\infty = I : B^\infty$。因此，若 $F_{\Delta'}$ 是一个虚拟分解，那么它就是 S/I 的一个虚拟分解。因此，剩下要证明的是

~ $F_{\Delta'}$ 是一个虚拟分解。根据定理 1.1，只需找到 $d \geq 0$，使得对所有单项式 $m \in B^d$，$H_i(\Delta'_m;\mathbf{k}) = 0$。

由于细分 (Δ', ℓ') 是虚拟相容的，我们可以固定 $e \geq 0$ 使得

$$\ell'(v') \in \langle \ell(v_0), \ldots, \ell(v_r) \rangle : B^e.$$

~那么，由于 F_Δ 是一个虚拟分解，定理 1.1 表明，对所有 $d \gg 0$，对于所有单项式 $m \in B^d$，都有 $H_i(\Delta_m;\mathbf{k}) = 0$。我们将证明，若 d 和 e 满足 $d \gg e$ 和 $m \in B^d$，则 $\widetilde{H}_i(\Delta'_m;\mathbf{k}) \cong \sim H_i(\Delta_m;\mathbf{k})$，因此 $H_i(\Delta'_m;\mathbf{k}) = 0$。

固定 $m \in B^d$。如果 $\ell'(v')$ 不整除 m，那么 $\ell(\omega)$ 不整除 m。在这种情况下，$v' \notin \Delta'_m$ 和 $\sim \omega \notin \Delta_m$，所以 $\Delta'_m = \Delta_m$。但于是 $H_i(\Delta'_m;\mathbf{k}) = H_i(\Delta_m;\mathbf{k}) = 0$，正如所需。因此，我们将讨论范围限制在 $\ell'(v')$ 整除 m 的情形，从而 v' 是 Δ'_m 的一个顶点。接着定义单纯形 τ 如下

$$\tau := \{v_i \in \omega : v_i \in \Delta_m\}.$$

若 $\tau = \omega$，则 $\omega \in \Delta_m$ 和 Δ'_m 只是单纯形 ω中在 v' 处对 Δ_m 进行的细分。单纯复形与其细分具有同构的同调，因此我们得到了所需的同构$\sim H_i(\Delta'_m;\mathbf{k}) \cong H_i(\Delta_m;\mathbf{k})$。

否则，我们可以假设 $\tau \neq \omega$。Δ'_m 中不属于 Δ_m 的单纯形只有那些包含v'的单纯形。因此，$\operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m)$ 是 Δ'_m 的子复形，其中包含所有包含 v'的单纯形。此外，由于 $\tau \neq \omega$，可知 $\omega \notin \Delta_m$，因此 $\Delta_m \subseteq \Delta'_m$。因此，我们得到 $\Delta'_m = \operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m) \cup \Delta_m$，并且

$$\begin{aligned}\operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m) \cap \Delta_m &= \{\sigma \in \Delta_m : \sigma \cup \{v'\} \in \Delta'_m\} \\ &= \operatorname{link}_{v'}(\Delta'_m).\end{aligned}$$

~注意到，子复形星$_{v'}(\Delta'_m)$是可缩的。由 Mayer–Vietoris 定理，要证明 $H_i(\Delta'_m;\mathbf{k}) \cong H_i(\Delta_m;\mathbf{k})$ 对所有 $i \geq 0$ 都成立，只需证明星$_{v'}(\Delta'_m) \cap \Delta_m$ 非空且可缩。等价地，只需证明链接$_{v'}(\Delta'_m)$的每个极大单形都包含 τ，并且 τ 非空。

我们先证明 τ 非空。为此，只需找到 $0 \leq i \leq r$，使得 $\ell(v_i)$ 整除 m。由于 $d \gg e \geq 0$，$\ell'(v') \mid m$，且 $m \in B^d$，存在 $m' \in B^e$，使得 $\ell'(v')m' \mid m$。由于$\ell'(v') \in \langle \ell(v_0) \ldots, \ell(v_r) \rangle : B^e$，我们得到

$$\ell'(v')m' \in \langle \ell(v_0), \ldots, \ell(v_r) \rangle.$$

因此存在 $0 \leq i \leq r$，使得 $\ell(v_i) \mid \ell'(v')m'$，从而 $\ell(v_i) \mid m$。因此，$v_i \in \tau$，所以 τ 非空。

固定 $\sigma \in$ 链接$_{v'}(\Delta'_m)$。于是 $\sigma \cup \{v'\} \in \Delta'_m \subseteq \Delta'$，这意味着 $\sigma \cup \omega$ 是 Δ的一个单纯形。注意 $(\sigma \cup \tau) \cup \omega = \sigma \cup \omega \in \Delta$，因此 $\sigma \cup \tau \cup \{v'\} \in \Delta'$。由于 Δ'_m 是 Δ'的一个诱导子复形，且 σ、τ和 $\{v'\}$ 各自都是 Δ'_m 中的单纯形，因此可得 $\sigma \cup \tau \cup \{v'\} \in \Delta'_m$。这意味着 $\sigma \cup \tau \in$ 链接$_{v'}(\Delta'_m)$，因此 link$_{v'}(\Delta'_m)$的每个极大单形都包含 τ。由于 τ非空，故~，我们得到 link$_{v'}(\Delta'_m)$是可缩的。最后，这意味着 $H_i(\Delta'_m;\mathbf{k}) \cong H_i(\Delta_m;\mathbf{k})$。

我们再次通过观察得出，对于所有 $m \in B^d$，$\widetilde{H}_i(\Delta_m;\mathbf{k}) = 0$。随后，同调的同构意味着，对于所有 $m \in B^d$，$\widetilde{H}_i(\Delta'_m;\mathbf{k}) = 0$，因此 $F_{\Delta'}$ 是一个虚拟分解。□

上述结果的内容可以用复形映射简洁地表述。设 (Δ', ℓ') 是 (Δ, ℓ) 在点 v' in ω 处的虚拟相容细分，则存在一个映射

复形 $\iota_\omega : F_\Delta \to F_{\Delta'}$，定义如下：

$$\iota_\omega([\sigma]) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\tau\subset\sigma,\ \sigma\setminus\tau\subset\omega,\\ |\tau|=|\sigma|-1}} \frac{\ell(\sigma)}{\ell'(\tau\cup\{v'\})}[\tau\cup\{v'\}] & \omega\subseteq\sigma, \\ [\sigma] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这个映射是否定义良好并非显而易见，因为 $\ell(\sigma)$ 与$\ell'(\tau\cup\{v'\})$ 之间的整除关系并不明确。然而，以下引理指出， ι_ω 定义良好且为单射；如果 F_Δ 是虚拟分解，那么诱导的同调映射在层的层面上是一个同构。

引理 4.1. 设 X 是一个光滑托里克簇，其 *Cox* 环为 S。设 (Δ,ℓ) 是一个最小公倍数标记单纯复形，且(Δ',ℓ') 是在单纯形 $\omega\in\Delta$中的点 v' 处对(Δ,ℓ) 进行的最小公倍数标记的虚拟相容细分。映射 ι_ω 是链复形之间的单射；若 F_Δ 是虚拟分解，则 ι_ω 诱导一个同构 $H_i(F_\Delta)^\sim \xrightarrow{\cong} H_i(F_{\Delta'})^\sim$。

证明。固定一个带有 $\omega\subseteq\sigma$ 的单纯形 $\sigma\in\Delta$，并令 v' 为 Δ'中的新顶点。则以下圈是链 $[\sigma]$ 在 ι_ω 下的像：

$$\rho_\sigma := \sum_{\substack{\tau\subset\sigma,\ \sigma\setminus\tau\subset\omega,\\ |\tau|=|\sigma|-1}} \frac{\ell(\sigma)}{\ell'(\tau\cup\{v'\})}[\tau\cup\{v'\}].$$

由于 ℓ' 是 Δ'的最小公倍数标记， $\tau\cup\{v'\}$ 上的标号由 $\ell'(\tau\cup\{v'\}) = \operatorname{lcm}(\ell(\tau)\ \ell'(v'))$ 给出。由于 $(\Delta',\ \ell')$ 是一个虚拟相容细分， $\ell'(v')$ 整除 $\ell(\omega)$。最后，由于 $\tau\subseteq\omega$，我们有 $\ell(\tau)\mid\ell(\omega)$。因此，项 $^{\ell(\omega)}/_{\ell'(\tau\cup\{v'\})}$ 是 S 中的一个单项式。因此，映射 ι_ω 是一个定义良好的映射 $F_\Delta\to F_{\Delta'}$。

由于 Δ 的单纯形所对应的类给出的 F_Δ 的基的像是线性无关的，因此 ι_ω 的单射性成立。

现在假设 F_Δ 是一个虚拟分解。由定理 1.4， $F_{\Delta'}$ 是一个虚拟分解，并且对于 $i>0$， $H_i(F_\Delta)^\sim = H_i(F_{\Delta'})^\sim = 0$。这意味着，对于 $i>0$，诱导映射 $(\iota_\omega)_*$ 显然是一个同构。

对于 H_0的情形，注意到 $H_0(F_\Delta) = S/I$，其中 I 是由 Δ的顶点生成的理想。类似地，我们有 $H_0(F_{\Delta'}) = S/(I+\langle\ell'(v')\rangle)$。此外，由于 Δ 的顶点标记都是 Δ'的顶点标记，诱导映射由商映射 $\varphi: S/I\to S/(I+\langle\ell'(v')\rangle)$给出。然而，由于 $\ell'(v')\in\langle\ell(v_0)\dots,\ell(v_r)\rangle: B^\infty\subseteq I: B^\infty$，可知 φ 的核是 B-挠的，因此 φ是层上的同构；见注 2.5。

因此，对于所有 $i\geq 0$，我们有 ι_ω 诱导了一个同构 $H_i(F_\Delta)^\sim \xrightarrow{\cong} H_i(F_{\Delta'})^\sim$。 □

定理 1.4 和引理 4.1 所述的重新表述表明，细分过程提供了一种从旧虚拟分解构造新虚拟分解的方法。然而，我们希望找到能够减少这种同调的构造。为此还需要做更多工作，因为我们不能指望这一局部过程总能在全局上减少同调。此外，细分通常可能引入“新的”同调，如下面的例子所示。

例 4.2。在本节的这个例子及后续例子中，我们考虑图 D 左侧所示的单纯复形 Δ 的细分，其中顶点的名称如图 C 所示。

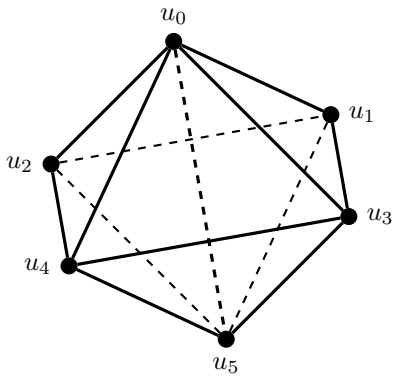


FIGURE C. 一个顶点以本节中将使用的名称标记的单纯复形

令 $S = \mathbf{k}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ 为 $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的 Cox 环。接着考虑以下最小公倍数标记单纯复形 (Δ, ℓ)，其精细次数为 $H_1(F_\Delta)_\alpha \cong \mathbf{k}$，由 $x^\alpha = x_0x_1y_0y_1^2$ 给出。

1-单形 $\omega = \{u_0, u_4\}$ 的细分可通过给新顶点标上 $x_0x_1y_0y_1$，使其成为虚拟相容的细分。这样便满足所需条件：

(1) $x_0x_1y_0y_1$ 整除 $\ell(\omega) = x_0^3x_1^2y_0y_1$。(2) 若 $m \in x_0x_1y_0y_1 \cdot B^3$，则 x_0^3 或 x_1^2 必须整除 m；前一种情况下，$\ell(u_4) \mid m$，后一种情况下，$\ell(u_0) \mid m$。

在顶点 u_0 和 u_4 之间的边上的一点处进行细分，得到图 D 右侧的最小公倍数标记单纯复形，我们将其记为 (Δ', ℓ')

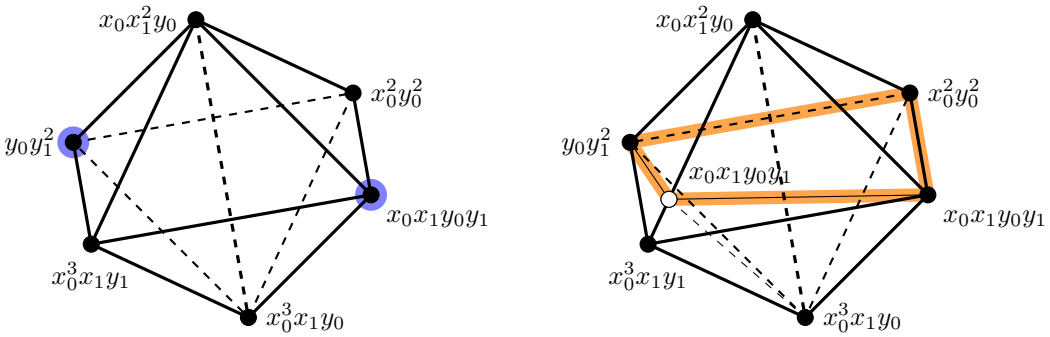


FIGURE D. 此图描绘了一个标记单纯复形（Δ, ℓ）及其细分（Δ', ℓ'）。尽管这是一次虚拟相容细分，但它引入了新的同调。

可以验证，先前在 F_Δ 中发现的同调在 $F_{\Delta'}$中被消除了。事实上，甚至可以看出 $H_1(F_{\Delta'}) = 0$，例如，只需注意到恰有四个顶点集会诱导出不连通的子复形，而且它们都不具有 Δ_m 这种形式，其中 m是任意单项式。

尽管如此，$F_{\Delta'}$ 并不是一个自由分解。事实上，$H_2(F_{\Delta'})_\beta \cong \mathbf{k}$ 的次数由 $x^\beta = x_0^2x_1y_0^2y_1^2$给出，如上方的阴影圈所示。有趣的是，原复形具有 $H_2(F_\Delta) = 0$，这一点可以通过对所有诱导子复形进行类似检查来证明，因此，我们的过程在一个比原先存在的更高维度中引入了同调。

如前所述，由于我们关注的是一个大型复形的一小部分，因此不能指望细分会迫使整个复形变成自由分解。事实上，正如例 4.2 中刚刚展示的那样，所得复形甚至可能比原复形具有更多同调。不过，额外的一个较弱的整除条件可以迫使细分至少在局部消除同调。

命题 4.3。固定一个具有 *Cox* 环 S的光滑托里克簇 X 。令 (Δ, ℓ) 为一个最小公倍数标记单纯复形，使得 F_Δ 是一个虚拟分解。固定一个单项式 $m = x^\alpha \in S$。令 $\Gamma \subseteq \Delta_m$为一个子复形，令 $\omega = \{v_0, \dots, v_r\} \in \Delta$ 为一个单纯形，使得连接 $\Gamma \star \omega$ 是Δ的一个子复形。

设 (Δ', ℓ') 是在单纯形 $\omega \in \Delta$ 中的点 v' 处对 (Δ, ℓ) 的细分，并且 $\ell'(v') \mid m$。如果 γ 是 $H_i(F_\Delta)_\alpha \cong H_{i-1}(\Delta_m; k)$ 中由 Γ 支持的一个同调类，那么 γ 属于诱导映射 $(\iota_\omega)_* : H_i(F_\Delta) \to H_i(F_{\Delta'})$ 的核。

证明。根据假设，$\ell'(v') \mid m$，因此 $v' \in \Delta'_m$。此外，$\Gamma \star v' \subseteq \Delta'_m$ 和 $\Gamma \star v'$ 是一个以 v' 为锥点的锥。因此，任何由 Γ 支持的同调类在 Δ'_m 中都是平凡的。由于 γ 由 Γ 支持，而 Γ 在 ω 中没有顶点，因此可知 $(\iota_\omega)_*(\gamma) = \gamma$，故其是 $H_i(\Delta'_m;\mathbf{k})$ 中的平凡类~。所以，γ 属于映射 $(\iota_\omega)_*$ 的核，证毕。□

注记 4.4。由引理 4.1 可知，$(\iota_\omega)_*$ 诱导出层的一个同构。然而，这并不排除 $(\iota_\omega)_*$ 的核中存在非零的 γ。核中的此类元素 γ 只需在适当的 $H_i(F_\Delta)$ 中是 B-挠的。

我们通过以下示例说明命题 4.3。与前面的示例不同，这个示例具有 $H_2(F_\Delta)_\alpha \cong \mathbf{k}$，其次数由 $x^\alpha = x_0x_1y_0y_1^2$ 给出。

示例 4.5。设 $S = \mathbf{k}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ 是 $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的 Cox 环。在图 E 中，我们画出了一个标记单纯复形 (Δ, ℓ)，以及沿着单纯形 $\omega = \{u_0, u_5\}$ 进行的相应虚拟相容细分，其中新顶点 v 标记为 $x_0^2x_1y_0$。

令 Γ 为由顶点集 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$诱导的子复形，我们可以将命题 4.3 应用于 1-单形 $\{u_0, u_5\}$。新顶点的标号 $x_0^2x_1y_0$ 满足条件，因为

(1) $x_0^2x_1y_0$ 同时整除 $\ell(\omega) = x_0^3x_1^2y_0$ 和 $\operatorname{lcm}(\ell(u_1)\ \ell(u_2))\ \ell(u_3)\ \ell(u_4)) = x_0^2x_1y_0^2y_1^2$。(2) 如果 $m \in x_0^2x_1y_0 \cdot B^1$，那么 x_0^3 或 x_1^2 必定整除 m；在前一种情况下，$\ell(u_0) \mid m$；在后一种情况下，$\ell(u_5) \mid m$。

因此，F_Δ 中发现的同调在 $F_{\Delta'}$中被消除。事实上，$F_{\Delta'}$ 是一个自由分解。任何包含新顶点 v' 的诱导子复形都以该顶点为锥点，因此通过与 Δ 比较可知，Δ' 的顶点子集中，只有那些包含来自顶点 u_0、……、u_5的至少一对对跖点的子集所诱导的子复形才具有同调。不过，

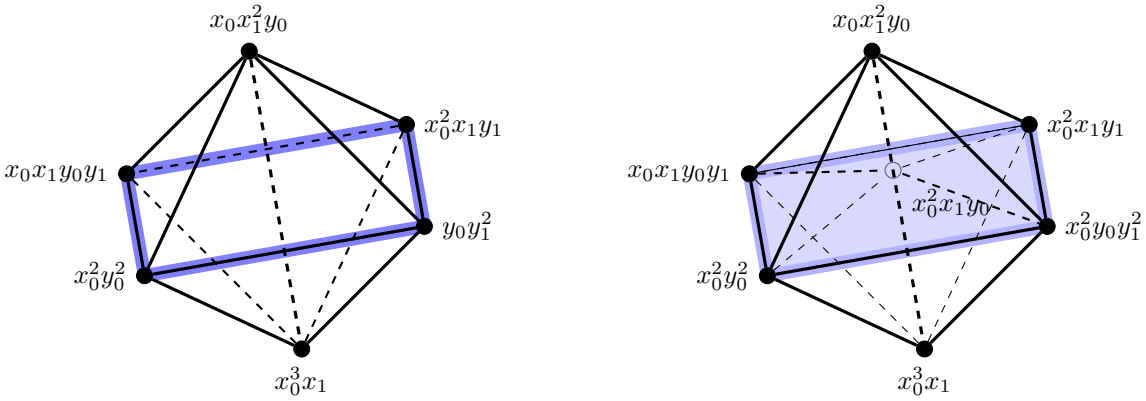


FIGURE E. 此图展示了一个标记单纯复形（Δ，ℓ）以及应用于命题 4.3 适用情形的一个细分示例（Δ'，ℓ'）。

如果子复形 Δ_m 包含任意一对对跖点，那么 m可被 $x_0^2x_1y_0$整除，因此 Δ_m 包含新顶点 v'。于是，根据 [BPS98，引理 2.2]，复形 $F_{\Delta'}$ 是一个自由分解。

为了证明定理 1.6，我们仍需对这一局部操作所产生的同调的整体行为有所掌控。以下命题对此给出了补充，它描述了诱导映射在某些次数上何时能在同调上定义一个满射。

命题 4.6. 设光滑托里克簇 X 的 *Cox* 环为 S。设 (Δ,ℓ) 是一个最小公倍数标记单纯复形，且 F_Δ 是一个虚拟分解。设 (Δ',ℓ') 是在单纯形 $\omega\in\Delta$ 中的点 v' 处对(Δ,ℓ) 进行的最小公倍数标记细分。记 $\Gamma=$ 链接$_\omega(\Delta)$。

固定一个单项式 $m=x^\alpha\in S$ 和一个整数 $i>0$。那么，次数为 α 时同调上的诱导映射，

$$(\iota_\omega)_*:H_i(F_\Delta)_\alpha\to H_i(F_{\Delta'})_\alpha,$$

是一个同构，如果 $\ell(v)$ 能整除 m，其中某个 $v\in\omega$，或者如果 $\ell'(v')$ 不能整除 m。否则，$(\iota_\omega)_*$ 是一个满射，当且仅当由包含映射诱导的同调映射 $\widetilde{H}_{i-2}(\Gamma_m;\mathbf{k})\to\widetilde{H}_{i-2}(\Delta_m;\mathbf{k})$ 是单射。

证明。我们首先重新表述诱导映射 $(\iota_\omega)_*$，将其与单纯复形的同调联系起来。根据定理 2.3，我们有以下向量空间同构：

$$H_i(F_{\Delta'})_\alpha\cong\widetilde{H}_{i-1}(\Delta'_m;\mathbf{k})\text{ and }H_i(F_\Delta)_\alpha\cong\widetilde{H}_{i-1}(\Delta_m;\mathbf{k}).$$

此外，复形 F_Δ 的次数为 α 的分量与系数取自 $\mathbf{k}$ 的单纯复形 Δ_m 的约化单纯链复形之间存在对应关系；对于$F_{\Delta'}$ 和 Δ'_m也分别如此。

接下来，我们注意到映射 ι_ω 保持了 F_Δ 和 $F_{\Delta'}$ 上的 $\mathbb{Z}^n$-分次结构，因此与上述识别相容。由此，对于单项式 m，我们得到一个映射

单纯链复形 $\iota_{\omega,m}$ 之间的映射： $C_i(\Delta_m;\mathbf{k}) \to C_i(\Delta'_m;\mathbf{k})$，定义如下：

$$\iota_{\omega,m}([\sigma]) = \begin{cases} \sum_{\substack{\tau\subset\sigma,\ \sigma\setminus\tau\subset\omega,\\ |\tau|=|\sigma|-1}} [\tau\cup\{v'\}] & \omega\subseteq\sigma, \\ [\sigma] & \text{otherwise.} \end{cases}$$

接下来，我们希望证明，在适当条件下，$\iota_{\omega,\ m}$ 在同调上诱导同构或满射。

若 $\ell'(v')$ 不整除 m，则无需证明，因为 $\Delta_m = \Delta'_m$。若 ω 是 Δ_m 中的一个单纯形，则细分不会改变拓扑，并且映射 $\iota_{\omega,\ m}$ 在 Δ_m 和 Δ'_m 的同调上诱导同构，正如所需。否则，假设 $\ell'(v')$ 整除 m 和 $\omega\notin\Delta_m$。如定理 1.4 的证明所示，可得

$$\Delta'_m = \Delta_m \cup \operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m).$$

应用 Mayer–Vietoris 到这个并集，我们得到以下同调长正合序列 y:

$$\cdots\to \begin{matrix}\widetilde{H}_{i-1}(\Delta_m)\\ \oplus\\ \widetilde{H}_{i-1}(\operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m))\end{matrix} \to \widetilde{H}_{i-1}(\Delta'_m) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{i-2}(\Delta_m\cap\operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m)) \to \begin{matrix}\widetilde{H}_{i-2}(\Delta_m)\\ \oplus\\ \widetilde{H}_{i-2}(\operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m))\end{matrix} \to\cdots.$$

由于 $\operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m)$ 是一个锥，因此是无环的，故复形化简为

$$\cdots\to \widetilde{H}_{i-1}(\Delta_m) \xrightarrow{\iota_{\omega,m}} \widetilde{H}_{i-1}(\Delta'_m) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{i-2}(\Delta_m\cap\operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m)) \to \widetilde{H}_{i-2}(\Delta_m)\to\cdots. \tag{4.7}$$

于是我们如下简化 $\Delta_m\cap$星$_{v'}(\Delta'_m)$:

$$\begin{aligned}\Delta_m\cap\operatorname{star}_{v'}(\Delta'_m) &= \{\sigma\in\Delta_m : \sigma\cup\{v'\}\in\Delta'_m\}\\ &= \{\sigma\in\Delta_m : \operatorname{lcm}(\ell(\sigma),\ell'(v'))\mid m,\ \omega\not\subseteq\sigma,\ \text{and } \sigma\cup\omega\in\Delta\}\\ &= \{\sigma\in\Delta_m : \sigma\cup\omega\in\Delta\}.\end{aligned}$$

最后一个等式成立，因为 $\ell(\sigma)$ 和 $\ell'(v')$ 都整除 m 和 $\omega\notin\Delta_m$。

现在进一步假设存在一个顶点 $v\in\omega$ 使得 $v\in\Delta_m$。由于 Δ_m 是一个诱导子复形，因此存在唯一的极大单形 $\tau\subseteq\omega$，使得 $\tau\in\Delta_m$ 和$\tau\neq\emptyset$。接着注意，若 $\sigma\cup\omega\in\Delta$，则 $(\sigma\cup\tau)\cup\omega\in\Delta$，因此$\Delta_m\cap$中每个极大单形都包含 τ，故 $\Delta_m\cap$星$_{v'}(\Delta'_m)$ 是可缩的。由 (4.7) 的正合性可知，若对于某个 $v\in\omega$，$\ell(v)$ 整除 m，则 $(\iota_{\omega,\ m})_*$ 是一个同构。

反之，若没有顶点 $v\in\omega$ 属于 Δ_m，则 $\Delta_m\cap$星$_{v'}(\Delta'_m) = \Gamma_m$。于是由 (4.7) 的正合性可知，$(\iota_{\omega,m})_*$ 是满射，当且仅当 $\partial=0$。类似地，$\partial=0$ 当且仅当包含映射 $\sim$ $\sim H_{i-2}(\Gamma_m;\mathbf{k}) \to H_{i-2}(\Delta_m;\mathbf{k})$ 是单射。这就得到了所需结果：若对任意 $v\in\omega$，$\ell(v)$ 都不整除 $\sim$ $\sim m$，则 $(\iota_{\omega,m})$ 是满射，当且仅当映射 $H_{i-2}(\Gamma_m;\mathbf{k}) \to H_{i-2}(\Delta_m;\mathbf{k})$ 是单射。□

To命题 4.3 和命题 4.6 的结果共同构成了定理 1 的证明。 6.

定理 *1.6* 的证明。 非严格不等式可直接由命题 4.6 得出。

~对于 $H_{i-1}(\Delta_m;\mathbf{k})$ 包含一个支撑在 Γ 上的非零类的情况，我们可以结合应用命题 4.3 和命题 4.6，从而得到严格不等式。□

我们用下面的例子结束本节，该例展示了定理 1.6 应用于一个更复杂的情形。

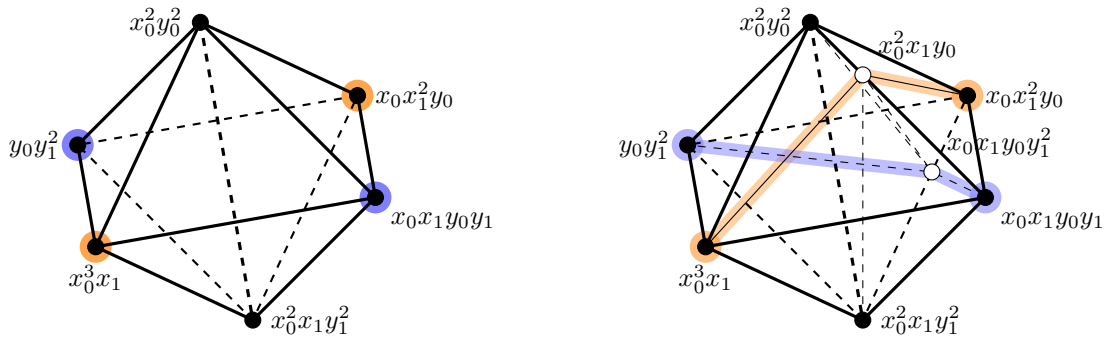


FIGURE F. 该图描绘了一个标记单纯复形（Δ，ℓ）及其二重虚拟相容细分（Δ''，ℓ''），如例 4.8 所示

例 4.8。利用图 F 左侧所示的标记单纯复形（Δ，ℓ），相应的链复形 F_Δ 在两个不同的次数 $\alpha \in \mathbb{Z}^4$上具有 $H_1(F_\Delta)_\alpha \cong \mathbf{k}$，分别对应于单项式 $x_0x_1y_0y_1^2$ 和 $x_0^3x_1^2y_0$。通过进行两次细分，我们可以得到右侧的图。

具体地，给定 $\omega = \{u_0, u_3\}$，在 ω 中的一个点处进行细分得到 Δ'，并且我们可以用 $x_0^2x_1y_0$ 为该点标号。检验定理 1.4 的条件后，我们发现这是一个虚拟相容细分。

注意，Γ 是由 Δ 的顶点 $\{u_1, u_4, u_5\}$诱导的子复形。现在我们检验定理 1.6 关于 m 可被新标号 $x_0^2x_1y_0$整除的条件。注意，包含映射 $\Gamma_m \hookrightarrow \Delta_m$在同调上诱导恒等映射，除非 Δ_m 包含 u_0、u_1 或 u_3中的任一个。在第一种和最后一种情况下，m 整除 ω中某个顶点的标号。若 u_1 是 Δ_m 的一个顶点，则 m 可被 $x_0^2x_1y_0y_1^2$整除，因此 Δ_m 也包含 u_3，而后者同样是 ω的一个顶点。因此，定理 1.6 限制了同调，使其不会增加。

类似的检查表明，定理 1.6 同样适用于第二次细分，因此对于所有 α 和所有 $i > 0$，都有 $\dim H_i(F_{\Delta''})_\alpha \leq \dim H_i(F_\Delta)_\alpha$。

经过繁琐但直接的检查可知，对于所得的标记单纯复形$\widetilde{(\Delta'', \ell'')}$，复形 $F_{\Delta''}$ 是自由的。例如，若 $H_i(\Delta''_m; \mathbf{k}) \neq 0$ 对某个 $i \geq 0$ 成立，则容易验证，m 在所有四个变量上的指数都必须为正，并且同时能被 y_1^2 和 x_0^2 整除。由此只剩下八种可能的顶点集，它们确实都可以表示为某个此类 m 的 Δ_m，但每个诱导子复形都是可缩的。

5. 射影空间的乘积

本节中，我们限定在 $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^k$ 的情形，以描述一类例子：对于这类例子，本文的技巧总能从含有同调的虚拟分解得到自由分解。这类虚拟分解源自双锥单纯复形 $\diamondsuit^k$，该复形在命题 3.6 中也发挥了作用。

在本节中，单纯复形 $\diamondsuit^k$（即一个 k-单纯形上的双锥）的顶点记为 v_0，……，v_k，w_0，w_1，其中 v_0，……，v_k 是 $\diamondsuit^k$ 中指定的 k-单纯形的顶点，而 w_0 和 w_1 是另外两个顶点。

命题 5.1. 固定 $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^k$，其中 n 和 k 为整数，且满足 $n \geq k \geq 0$，*Cox* 环为 $S = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_k]$。令 $\Delta = \diamondsuit^k$，并设 ℓ 是 Δ 的最小公倍数标记。

那么，F_Δ 是虚拟分解，当且仅当以下条件之一成立：

(1) 存在某个 j，使得 $\ell(v_j) \mid \operatorname{lcm}(\ell(w_0)\ \ell(w_1))$；或者(2) 对变量作某种置换后，存在正整数 $p_0, \ldots, p_k$ 以及单项式 $m_0, \ldots, m_k$，每个单项式都整除 $\operatorname{lcm}(\ell(w_0)\ \ell(w_1))$，使得

$$\ell(v_j) = y_j^{p_j} m_j.$$

备注 5.2。注意，若 $n > k$，那么这里所说的“变量置换”允许在 x_i 中打乱指标，并且也允许在 y_j 中分别打乱指标。若 $n = k$，我们还可以将整组变量 $\{x_i\}$ 与整组变量 $\{y_j\}$ 互换。

证明。在全文中，记 $f = \operatorname{lcm}(\ell(w_0)\ \ell(w_1))$。一个关键观察是，复形 $\Gamma = \{\{w_0\}, \{w_1\}, \emptyset\}$ 是 Δ 的唯一具有非平凡约化同调的诱导子复形。由于 ℓ 是一个最小公倍数标记，因此对于任意单项式 $m \in S$，Δ_m 都是一个诱导子复形，所以 Δ_m 具有非平凡同调当且仅当 $\Delta_m = \Gamma$。

我们先证明反向。假设 (Δ, ℓ) 是一个满足命题 5.1 的条件 (1) 或 (2) 的标记单纯复形。首先假设存在一个整数 $0 \leq i \leq k$，使得 $\ell(v_i) \mid \operatorname{lcm}(\ell(w_0)\ \ell(w_1))$。如果 Δ_m 包含 w_0 且 w_1，那么 $\ell(w_0) \mid m$ 且 $\ell(w_1) \mid m$。由于 $\ell(v_i) \mid \operatorname{lcm}(\ell(w_0)\ \ell(w_1))$，可得 $\ell(v_i) \mid m$，从而 $v_i \in \Delta_m$。因此，不存在满足 $\Delta_m = \Gamma$的 m，所以对于所有 m，Δ_m 始终为空或可缩。于是根据 BPS98 引理 2, 2] F_Δ是一个自由分解，因此也是一个虚拟分解。

否则，我们可以找到正整数 $p_0, \ldots, p_k$，以及整除 f 的单项式 $m_0, \ldots, m_k$，使得 $\ell(v_i) = y_i^{p_i} m_i$。设 $m \in S$ 是一个单项式，其中 Δ_m 非空且具有非平凡同调。根据推论 2.8，只需证明存在某个 $d \geq 0$，使得对于所有满足 $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k$ 的整数 i, j，复形 $\Delta_{m x_i^d y_j^d}$ 都是可缩的。

固定 $d = \max(p_0, \ldots, p_k)$，并固定满足 $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k$ 的 i, j。由于 Δ_m 具有非平凡同调，我们有 $\Delta_m = \Gamma$，从而 $f \mid m$。又由于 $\ell(v_j) = y_j^{p_j} m_j$，且 $m_j \mid f$，因此可得 $\ell(v_j) \mid m x_i^d y_j^d$。于是我们有 $v_j \in \Delta_{m x_i^d y_j^d}$，因此 $\Delta_{m x_i^d y_j^d}$ 具有平凡同调，正如所需。这意味着 F_Δ 是一个虚拟分解。

对于正向证明，假设 F_Δ 是一个虚拟分解。根据推论 2.8，存在$d \geq 0$，使得对于每个 i, j（其中 $0 \leq i \leq n$ 且 $0 \leq j \leq k$），$\Delta_{f x_i^d y_i^d}$都具有平凡同调。假设 Δ 不满足条件 (1)，并令 $m \in S$ 为一个满足 $\Delta_m = \Gamma$的单项式。对于每个$0 \leq t \leq k$，定义 $m_t := $最大公约数$(f, \ell(v_t))$ 和 $m_t' := \ell(v_t)/m_t$。由于 Δ 不满足条件 (1)，我们有 $\ell(v_t) \nmid f$，因此 $m_t' \neq 1$。现在，对于每个 $0 \leq t \leq k$ 定义以下整数对集合：

$$T_t := \{(i, j) : m_t' \text{ divides } x_i^{d'} y_j^{d'} \text{ for some } d' \geq 0\}.$$

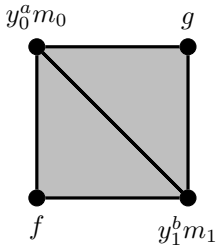
注意，$\gcd\{x_i^{d'} y_j^{d'} : (i,\ j) \in T_t\}$ 能被 m_t' 整除，因此不是单位元。所以在 T_t中，要么所有数对的第一个坐标都相同，要么所有数对的第二个坐标都相同。

对于任意数对 $(i,\ j)$，顶点 w_0 和 w_1 都属于 $\Delta_{fx_i^d y_j^d}$ 和 $\Delta_{fx_i^d y_j^d} \neq \Gamma$。因此，对于每个数对 $(i,\ j)$，复形 $\Delta_{fx_i^d y_j^d}$ 也必须包含某个 v_t，其中 $0 \leq t \leq k$。这意味着 $\ell(v_t)$ 整除 $fx_i^d y_j^d$。由于 $m_t \cdot m_t' = \ell(v_t)$ 且 $m_t = \gcd(f,\ \ell(v_t))$，可知 $\gcd(f,\ m_t') = 1$。由于 m_t' 整除 $fx_i^d y_j^d$，因此可得 $m_t' \mid x_i^d y_j^d$。于是，对于满足 $0 \leq i \leq n$、$0 \leq j \leq k$ 的整数 i 和 j，每个数对 $(i,\ j)$ 至少属于一个 t，即属于 T_t。

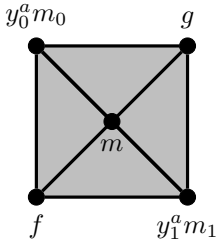
由于 $k \leq n$，如果任何集合 T_t 包含多于 $n+1$ 对，m_t' 就会是一个单位元，因此我们有 $|T_t| \leq n+1$。另一方面，由于 $0 \leq t \leq k$，且有 $(n+1)(k+1)$ 个不同的配对（$i,\ j$），每一对都必须属于至少一个 T_t，因此可得 $|T_t| = n+1$；此外，每一对恰好属于一个 T_t。

由于 $k+1 \leq n+1$，且 $\gcd\{x_i^d y_j^d \colon (i,\ j) \in T_t\}$ 不是单位元，我们发现每个 T_t 都必须由一组配对构成，这些配对共享各自的第一个元素或第二个元素。然而，由于要么每个 T_t 只包含第二个分量相同的元素，要么每个 T_t 只包含第一个分量相同的元素，不失一般性，我们可以假设 T_j 包含形如 $(i,\ j)$ 的配对，其中 $0 \leq i \leq n$。也就是说，对于所有 i，m_j' 整除 $x_i^d y_j^d$，所以 m_j' 是 y_j 的幂。因此，存在正整数 $p_0,\ \ldots,\ p_k$ 和单项式 $m_0,\ \ldots,\ m_k$，使得对于所有 $0 \leq i \leq k$，$\ell(v_i) = y_i^{p_i} m_i$。□

例如，取 $k = 1$。如果 F_Δ 是一个不是自由分解的虚拟分解，那么存在整数 $a,\ b \geq 0$ 以及单项式 $m_0,\ m_1,\ f,\ g \in S$，满足 m_0，且 m_1 整除 $\operatorname{lcm}(f,\ g)$，使得 $(\Delta,\ \ell)$ 是如下的标记单纯复形：



现在考虑细分 $(\Delta',\ \ell')$：单纯形 $\{v_0, v_1\}$ 中的点 v'，其中 v' 的标号为 $m = \operatorname{lcm}(m_0,\ m_1)$：



不难验证，这实际上是一个自由分解。利用定理 1.6，可以一般性地进行这一构造：定理 1.6 表明，任何能产生虚拟分解的此类标记 $\diamondsuit^k$，实际上都可以通过细分得到一个自由分解。

命题 5.3. 固定整数 n 和 k，满足 $n \geq k \geq 0$，并令 $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^k$ 的 *Cox* 环为 $S = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_k]$。令 $\Delta = \diamondsuit^k$，并设 ℓ 是 Δ 的一个最小公倍数标记，使得 F_Δ 是 S/I 的一个虚拟分解，其中 S/I 是单项式理想 $I \subseteq S$。

若(Δ', ℓ')是点 v' 处的最小公倍数标记的虚拟相容细分，且在 $\omega := \{v_0, \ldots, v_k\}$中满足 $\ell'(v') \mid \operatorname{lcm}(\ell(w_0)\ \ell(w_1))$，则 $F_{\Delta'}$ 是 S/J 的自由分解，其中 $J = I + \langle \ell'(v') \rangle$。

证明。如命题 5.1 的证明中所述，除非 $\Delta_m = \Gamma = \{\{w_0\}, \{w_1\}, \emptyset\}$，否则 Δ_m 是可缩的或为空。要证明 $F_{\Delta'}$是自由分解，只需证明对所有 $\alpha \in \mathbb{N}^{n+k+2}$，当 $i > 0$时，$\dim H_i(F_{\Delta'})_\alpha = 0$。

设 $m = x^\alpha \in S$ 为一个单项式，并将定理 1.6 应用于该细分。注意，正如定理 1.6 的陈述中所述，$\Gamma = \operatorname{link}_\omega(\Delta)$。假设对于任意 $0 \leq i \leq k$都有 $v_i \notin \Delta_m$，则$\Delta_m \subseteq \Gamma$。因此，$\Gamma_m = \Delta_m \cap \Gamma = \Delta_m$，所以包含映射 $\Gamma_m \hookrightarrow \Delta_m$ 在所有同调次数上都诱导一个单射。于是由定理 1.6 可得

$$\dim H_i(F_{\Delta'})_\alpha \leq \dim H_i(F_\Delta)_\alpha. \tag{5.4}$$

此外，$H_i(F_\Delta)_\alpha \neq 0$ 当且仅当 $i = 1$，且对于单项式 $m = x^\alpha$，子复形 $\widetilde{\Delta_m}$恰好是 Γ。然而，若 $\Delta_m = \Gamma$，则 $\dim H_0(\Gamma_m; \mathbf{k}) = 1 \neq 0$。由定理 1.6 可知，若 $\ell'(v')$ 整除$m = x^\alpha$，则该不等式为严格不等式。

然而，由于 $\ell'(v')$ 整除 $\operatorname{lcm}(\ell(w_0)\ \ell(w_1))$，我们发现，若 $\Delta_m = \Gamma$，则 $\ell'(v')$ 整除 m。因此，只要 $H_i(F_\Delta)_\alpha \neq 0$，不等式 (5.4) 就是严格不等式。然而，我们还知道，对于所有 $i > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{N}^{n+k+2}$，$\dim H_i(F_\Delta)_\alpha \leq 1$。由此可知，对于所有 $i > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{N}^{n+k+2}$，$\dim H_i(F_{\Delta'})_\alpha = 0$。

因此，$F_{\Delta'}$ 没有高阶同调，且是一个自由分解。最后，对于由 Δ' 的顶点上的标号生成的单项式理想 J，$F_{\Delta'}$ 是其 S/J 的分解。由于唯一的新顶点的标号为 $\ell'(v')$，我们有 $J = I + \langle \ell'(v') \rangle$。因此，$F_{\Delta'}$ 如所需，是 S/J 的一个自由分解。□

应用本节的结果，即可证明引言中剩下的定理。我们回顾一下，定理 1.7 大致要寻找 S/I 的虚拟分解，使其高阶同调消失；其中 I 是由 $\diamondsuit^k$ 上的一个虚拟分解得到的。

定理 *1.7* 的证明。设 Δ 为 $\diamondsuit^k$，即一个单纯形上的双锥。根据命题 5.1，在对变量进行置换后，存在整数 $p_0, \ldots, p_k$ 和单项式 $m_0, \ldots, m_k$，它们均不被任何 y_j 整除，使得 $\ell(v_j) = y_j^{p_j} m_j$。

设 $m := \operatorname{lcm}(m_0、\ldots\ldots、m_k)$，并令 (Δ', ℓ') 为 (Δ, ℓ) 在 v' 处的细分，且将 $\ell'(v')$ 标记为 $= m$。通过检验定理 1.4 中的条件，可以验证此细分是虚拟相容细分。对于 $\omega = \{v_0, \ldots, v_k\}$，可得 $\ell(\omega) = \prod_{j=0}^k y_j^{p_j} m$。因此，$\ell'(v') \mid \ell(\omega)$。此外，对于 $d = \max\{p_0, \ldots, p_k\}$，我们得到包含映射

$$\ell'(v') \cdot \langle y_0, \ldots, y_k \rangle^d \subseteq \langle \ell(v_0), \ldots, \ell(v_k) \rangle.$$

由于 $B \subseteq \langle y_0, \ldots\ldots, y_k \rangle$，因此

$$\ell'(v') \cdot B^d \subseteq \langle \ell(v_0), \ldots, \ell(v_k) \rangle.$$

因此，单项式 $\ell'(v')$ 是 $\langle \ell(v_0)、\ldots\ldots、\ell(v_k) \rangle$ 的一个元素：B^∞，正如所期望的那样。

然后应用命题 5.3，我们发现所得复形 $F_{\Delta'}$ 是一个自由分解。然而，由于 (Δ', ℓ') 是 (Δ, ℓ) 的虚拟相容细分，且 F_Δ 是S/I的虚拟分解，根据定理 1.4 可知，$F_{\Delta'}$ 是 S/I 的虚拟分解，其中 $H_i(F_{\Delta'}) = 0$ 适用于 $i > 0$。最后请注意，由于 $\dim \Delta' = \dim \Delta$，复形 $F_{\Delta'}$和 F_Δ 的长度相同。□

作为该定理的推论，尽管我们可以在具有非平凡同调的复形 $\Diamond^k$上构造标记，但总存在一个长度相同的自由分解，它是同一个模的虚拟分解。这项工作为哪些模可能具有带高阶同调的短虚拟分解提供了新的限制，不过，是否存在其最短虚拟分解都具有同调的模，仍有待探究。

Acknowledgments

作者谨向 Christine Berkesch 致谢，感谢她在项目早期提出的一些想法；同时也感谢 2023年明尼苏达代数与组合研究研讨会的组织者 Elise Catania、Sasha Pevzner 和 Sylvester Zhang。作者还要感谢 MRWAC 小组的其他参与者，包括 Tomas Banuelos、Pouya Layeghi、Joseph McDonough、Miranda Moore、Mykola Sapronov、Eduardo Torres D´avila 和 Mahrud Sayrafi。

References

[BPS98] Dave Bayer、Irena Peeva 和 Bernd Sturmfels, *Monomial resolutions* **5** 1998 1 2, , 《数学研究快报》（），第 – 期，DOI . /MRL. .v . 31 46, 10 4310 1998 5 1 3 ↑1 5 6 16 19 n .a ., , , , [98]

BS Dave Bayer 和 Bernd Sturmfels, *Cellular resolutions of monomial modules*, 《纯粹与应用数学杂志》**502**（ 1998 123 140, 10 1515 1998 083 ↑1 ），– DOI . /crll. . . [20]

BES Christine Berkesch、Daniel Erman 和 Gregory G. Smith, *Virtual resolutions for a product of projective spaces* **7** 2020 4, 460 481, 10 14231 2020 013 ↑1 4 , 《代数几何》（），第 – 期，DOI . /AG- - ., , 6 [22]

BKLY Christine Berkesch、Patricia Klein、Michael C. Loper 和 Jay Yang, *Homological and combinatorial aspects of virtually Cohen-Macaulay sheaves* **9** 2022 1, 413 434, , 《伦敦数学会汇刊》（），第 – 期，DOI 10 1112 3 12036 ↑1 . /tlm . . BPC Caitlyn Booms-Peot 和 John Cobb, *Virtual criterion for generalized Eagon-Northcott complexes*, 《纯粹与应用代数杂志》 **226** 2022 12, 107138, 8, 10 1016 2022 107138 ↑1 （），第 – 期，论文编号 [22] [11]

DOI . /j.jpaa. . . CLS David A. Cox、John B. Little 和 Henry K. Schenck, *Toric varieties*, 《数学研究生研究》124，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2011。↑6[CH25] Lauren Cranton Heller, *Explicit constructions of short virtual resolutions of truncations*, 《伦敦数学会会刊》**57**（2025），第12期，4000–4014, DOI 10.1112/blms.70182。↑1[HHL24] Andrew Hanlon、Jeff Hicks 和 Oleg Lazarev, *Resolutions of toric subvarieties by line bundles and applications* **12** 2024 24, 58 10 1017 2024 21 ↑1 , 《数学论坛：皮》（），论文编号 e pp，DOI . / fmp. . .[VTY25] Adam Van Tuyl 和 Jay Yang, *Conditions for virtually Cohen–Macaulay Simplicial Complexes*, 《应用数学进展》**164**（2025），DOI 10.1016/j.aam.2024.102830。↑1