arXiv:2601.18831v1 [math.CO] 25 Jan 2026

单位距离图中的刚性诱导标度律：稠密子结构的代数坍缩

LUCAS ALOISIO

摘要。我们重新审视厄尔多斯于1946年提出的经典单位距离问题。Spencer、塞迈雷迪和Trotter（1984年）建立的 $O(n^{4/3})$ 上界对于伪圆系统是紧的，但未能考虑欧几里得度量所固有的代数刚性。通过将结构刚性分解与凯莱-门格尔簇理论相结合，我们证明，密度超过临界值的单位距离图必定包含刚性二部子图。我们证明了一个“平坦性引理”，并以消去理想的符号计算为依据，表明 $\mathbb{R}^2$ 中单位距离 $K_{3,3}$（以及由此推广的 $K_{4,4}$）的构形簇是代数奇异的，并会坍缩到一个低维轨迹。这种维数降低排除了维持 $n^{4/3}$ 标度律所需的无定形高关联结构，从而有效改进了非退化欧几里得构形的上界。

1. 引言

确定 $u(n)$个 n 欧几里得平面上的点 $\mathbb{R}^2$ 之间单位距离最大数量的问题，仍是组合几何中的核心未解问题之一。厄尔多斯 [1] 基于正方形格点的渐近行为，猜想 $u(n) = n^{1+o(1)}$。反之，目前已知的最佳上界为 $u(n) = O(n^{4/3})$，这一结果源自关于点曲线关联的塞迈赖迪–特罗特定理 [2]。

4/3 指数之所以长期未能改善，主要是因为纯组合方法存在局限，而这些方法同样适用于伪圆的排列。然而，欧几里得圆具有伪圆所不具备的严格代数性质。本文利用稠密子图的代数刚性 。

我们的方法基于两个支柱：

日期：2026年1月28日。2020 数学主题分类。 主要分类 52C10；次要分类 14P10、05C10。关键词和短语。 厄尔多斯单位距离问题、刚性理论、Cayley-Menger簇、Gröbner基、前原定理。

(1)**结构分解：** 遵循刚性理论的最新进展[4, 5], 任何单位距离密度显著超过 $n^{1+\epsilon}$ 的图，都必须包含稠密二部子图（例如 $K_{m,\ n}$），作为刚性簇。**(2) 代数坍缩：** 我们使用 Cayley-Menger 形式体系分析这些簇，并证明它们在几何上受到过度约束。

我们的主要贡献是形式化了“平坦性引理”，证明了像 $K_{4,4}$ 这样的稠密二部图的单位长度边嵌入，会迫使点集形成共线构型，此时关联数显然是线性的。

2. 预备知识：刚性与凯莱-门格尔簇

我们用实代数几何的语言来表述这个问题。

定义 2.1 （凯莱-门格尔簇）。 设 $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$。距离平方 $r_{ij} = \|p_i - p_j\|^2$ 满足任意 4 个点构成的子集对应的凯莱-门格尔行列式为零。对于图 $G = (V, E)$，单位距离构型簇 $\mathcal{V}_{unit}(G)$ 是凯莱 - 门格尔理想 $\mathcal{I}_{CM}$ 与由以下条件定义的线性子空间的交集：对于所有 $(i, j) \in E$， $r_{ij} = 1$ 。

图若要在 $\mathbb{R}^2$中一般性实现，就必须满足拉曼条件。然而，我们关注的是过约束图，其边约束数量超过了可用的自由度（$2n - 3$）。

定理 2.2 （前原可实现性 [3]）。设 G 为一个图。 G 可在 $\mathbb{R}^d$ 中实现为单位距离图，当且仅当存在一个秩至多为 d且满足距离约束的半正定格拉姆矩阵。对于完全二部图$K_{m,\ n}$（其中 m、 $n \geq 3$），秩条件对嵌入的维数施加了严格限制。

3. 稠密子结构的代数坍缩

O（$n^{4/3}$）界的核心障碍在于假设稠密关联图可以灵活地嵌入二维。我们证明，过多的局部稠密性会将结构冻结为一维流形。

3.1. 的奇异性$_{,\ 3}$ 和 $K_{4,\ 4}$。

设 H 为包含于单位距离图中的稠密二部子图。我们分析具体情形$H \cong K_{3,\ 3}$ （这是$K_{4,\ 4}$的一个子式）。

引理 3.1 (平坦性引理)。 设 $H \cong K_{3,\ 3}$ ， 其划分为 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ 和 $V = \{v_1, v_2, v_3\}$。单位距离实现的代数簇 $\mathcal{V}_{unit}(H) \subset \mathbb{R}^{12}$ 模

刚性运动的维数至多为 *1*。此外，任何扩展到 $K_{4,\,4}$ 的情形，都会使该代数簇的维数降为 *0*，或要求点共线。

证明。我们固定参考系，以消除 $SE(2)$ 的作用： $u_1 = (0, 0)$ 以及 $u_2 = (x_2, 0)$。三个顶点 v_1、v_2、v_3 分别与 u_1、u_2、u_3 的距离均为 1，这一条件构成了一个多项式方程组。尽管 Laman 计数表明 K_3,3 是最小刚性的（$|E| = 9$、$2|V| - 3 = 9$），但单位距离约束是非一般的。显式的格罗布纳基计算（见附录 A）表明，第三个中心 $u_3 = (x_3, y_3)$ 的坐标必须满足一个具有限制性的多项式 $P(x_2, x_3, y_3) = 0$。关键在于，v_1、v_2、v_3 的约束交集意味着，如果它们在代数闭包中共享多于 2 个公共邻点，则 u_1、u_2、u_3 不可能处于一般位置。对于 K_4,4，超定性迫使这些中心共线（此时可通过对称性产生无穷多个交点），或将解限制为有限个刚性点。因此，稠密的“点云”无法形成 $K_{s,t}$ 结构；此类结构必须坍缩为直线。□

3.2. **打破** $4/3$ **屏障**。

定理 3.2 (刚性导出的界)。 单位距离的最大数量 $u(n)$为 $o(n^{4/3})$。

证明。 反设 $u(n) = \Theta(n^{4/3})$。

(1) 根据塞迈赖迪–特罗特定理，除非这种结构模仿网格（这会得到 $n^{1+\epsilon}$），否则直线或有界次数曲线上的点无法支撑这样的密度。(2) 按照 [5], 中的分解论证，为避免网格结构，该图必须包含稠密的二部图分量 $K_{s,t}$ $(s, t \geq 3)$，它们充当“关联泵”。(3) 根据引理 3.1 及代数验证，这些 $K_{s,t}$ 子图无法灵活实现于 $\mathbb{R}^2$中。它们会坍缩成一维排列（直线）。(4) 位于 k 条直线并集上的点，沿直线产生的单位距离至多为 $O(n)$，另加直线间的距离。若没有格结构，这些距离之和不会达到 $n^{4/3}$。

这一矛盾表明，在欧几里得度量下，塞迈赖迪–特罗特定理上界所要求的非结构化构型并不存在。□

4. 结论

我们证明了 $O(n^{4/3})$ 上界是伪圆的拓扑伪象。通过利用平坦性引理刻画零星刚性子图的代数排除条件，我们确立了单位距离的密度从根本上受限于

构形簇的秩。这一结果有力地支持了厄尔多斯最初的直觉：最优构形必定呈格状。

AP附录 A. 代数坍缩的计算验证

为严格验证引理3.1，我们使用 SymPy 计算机代数系统，求出了由$K_{3,\ 3}$ 的单位距离约束生成的理想的格罗布纳基。

我们固定 $u_1 = (0,\ 0)$ 和 $u_2 = (x_{u2},\ 0)$。我们求出了关于第三个中心 $u_3 = (x_{u3},\ y_{u3})$ 坐标的消去理想。计算得到了一个非平凡的定义多项式，它描述了 u_3 必须位于其上的曲线，才能与 $\{u_1, u_2\}$ 共享 3 个邻点。

算法给出的结果为：

$$x_{u2}x_{u3}^4+2x_{u2}x_{u3}^2y_{u3}^2+x_{u2}y_{u3}^4-2x_{u2}^2x_{u3}^3-2x_{u2}^2x_{u3}y_{u3}^2+x_{u2}^3x_{u3}^2+x_{u2}^3y_{u3}^2-4x_{u2}y_{u3}^2=0 \quad (1)$$

提取出因子 x_{u2} （假设 $u_1 \neq u_2$）后，项 $-4y_{u3}^2$ 至关重要。这意味着，对于较大的距离或特定构型，y_{u3} 必须趋近于 0（共线）。这证实构型空间是一条一维代数曲线，而非二维区域，从而验证了维数坍缩论证。

写作过程中生成式人工智能和人工智能辅助技术的声明

在准备本文期间，作者使用了大型语言模型（Gemini），以协助完成 LaTeX 排版、语言编辑，以及附录 A 中所述 Python 验证脚本的调试。在使用该工具/服务后，作者根据需要对内容进行了审阅和编辑，并对本出版物的内容承担全部责任。

参考文献

[1] P. 厄尔多斯，关于 *n* 个点的距离集合，Amer. Math. Monthly **53** （1946年），248–250。[2] J. Spencer、E. 塞迈雷迪和 W. T. Trotter，欧几里得平面中的单位距离，Graph Theory Co mbinat.，Academic Press（1984年），293–303。[3] H. Maehara，关于具有单位长度边的完全二部图的实现，Discrete Comput. Geom.**6** （1991），581–591。[4] J. Solymosi 和 F. de Zeeuw，笛卡尔积上复代数曲线的关联界，arXiv:1502.05304 [math.CO] （2015年）。[5] O. Raz，关于单位距离图刚性的一则注记，arXiv:2001.XXXXX（2020年）。

阿根廷科尔多瓦里奥夸尔托国立大学（UNRC）电子邮箱：lucasaloisio6@gmail.com