arXiv:2601.19046v1 [math.LO] 27 Jan 2026

博雷尔层级中的 LCLS

FELIX WEILACHER

Abstract. 群 Γ 上的局部可检验标记问题（LCL），要求在 Γ 的凯莱图上寻找一种标记，使其满足一组固定的有限“局部”约束。典型例子包括正常着色和完美匹配问题。在描述性组合学中，人们常常在描述集合论的框架下研究 LCL 解的存在性。例如，给定波兰空间 X上的 Γ 自由作用，我们可能会关注如何以连续、博雷尔、可测等方式，在每个轨道上求解给定的 LCL。

为了更细致地理解博雷尔组合学与连续组合学之间的差距，我们考察 Baire 类 m 解 LCL 的存在性。对于所有 $n > 1$ 和 $m \in \omega$，我们构造一个 $\mathbb{F}_n$ 上的 LCL，它总是存在 Baire 类 $m+1$ 解，但不一定存在 Baire 类 m解。

1. Introduction

本文研究描述性组合学，即在描述集合论的背景下研究组合学中的某些经典问题。该领域备受关注的一类问题是：在满足“局部”约束的条件下，必须找到某种结构（通常是图）的全局标记。

本文中的图由有限生成群的作用所诱导；在这一背景下，下面的定义形式化了上述问题类别。这类问题有时称为群上的多米诺问题 。

定义 1.1 ([NS93]). 设 Γ 是一个可数群。一个局部可检验标记问题，或称局部约束，在 Γ 上是如下形式的三元组 $\Pi = (\Lambda、 S、 \mathcal{A})$，其中

- Λ 是一个有限集合（即标签）。
- $S \subseteq \Gamma$ 是有限的（即窗口）。
- $\mathcal{A} \subseteq \Lambda^S$。（约束）。

设 $\Gamma \curvearrowright X$ 是一个自由作用。Π 在 X 上的解，也称为 X 的 Π-标记，是一个函数$f\colon X \to \Lambda$，满足对所有 $x \in X$,

$$(\gamma \mapsto f(\gamma \cdot x)) \in \mathcal{A}.$$

直观地说， Π 是一个实例-解问题：在实例 $\Gamma \curvearrowright X$ 上求解 Π，就是用 Λ 标记 X 中的点，并满足一些约束；这些约束是局部的，因为只需查看每个点 x 周围的窗口 $S \cdot x$ 就能检验。

局部约束的典型例子是正常着色。回想一下，对于基数 k，顶点集为 X 的图 G 的（正常）k-着色，是一个函数 $f\colon X \to k$，它为相邻顶点赋予不同的值（“颜色”）。若 $\Gamma \curvearrowright X$ 且 $S \subseteq \Gamma$，我们用 $G(X, S)$ 表示相应的*Schreier*图。其顶点集为 X，当且仅当 $\exists \gamma \in S$, $\gamma \cdot x = y$ 或反之时，两个点 $x, y \in X$ 相邻。对于 $k \in \omega$，相对于 S 对 Γ 的Schreier图进行正常 k-着色的问题，是一个形式为 $\Pi = (k, \{1\} \cup S, \mathcal{A})$ 的局部约束问题，其中

$$\mathcal{A} = \{f : \{1\} \cup S \to \Lambda \mid \forall \gamma \in S \setminus \{1\}, f(1) \neq f(\gamma)\}$$

在 t 的意义下 也就是说，对于 $G(X、 S)$ 的任意自由 $\Gamma \curvearrowright X$、 k-着色，恰好对应于 X 上 Π 的解 .

作者获得美国国家科学基金会（NSF）项目资助，项目编号为 DMS-2402064。

群上的局部约束长期以来一直在逻辑和可定义性的语境下得到研究。群的多米诺问题对于群 Γ 而言，例如，它询问局部约束的集合 Π是否具有左平移作用上的解 $\Gamma \curvearrowright \Gamma$ （等价地，是否具有 Γ 的任意自由作用上的解）是可判定的。这可以追溯到 Berger 关于王氏铺砖的开创性工作，其中 $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ [Ber66]。相反，我们关注局部约束解本身的可定义性。

定义 1.2. 设 Π 是 Γ 上的一个局部约束。设 $\Gamma \curvearrowright X$ 是标准博雷尔空间 X 上的自由博雷尔作用。我们所说的 X 的 博雷尔 Π-标记，简单来说就是 X 的一个 Π-标记，且它作为函数 $X \to \Lambda$ 是博雷尔的。

给定 X 上使这些概念有意义的适当结构，我们也类似地定义可测、贝尔可测、连续等 Π-标记。

对特定作用上的特定局部约束的可定义解的研究，往往与可数群作用动力学中的一些问题密切相关，而这些问题本身并非一开始就涉及局部约束。例如，关于（可定义）等分解的结果，如巴拿赫-塔斯基悖论或塔斯基圆盘求积问题的某些版本，往往取决于对图中（可定义）匹配的分析[GMP17，MU17，MU16]。再举一例，关于 Weiss 问题——即 amenable 群的博雷尔作用是否生成超有限等价关系——的最新进展中，某个辅助图的博雷尔可着色性发挥了重要作用；而关键的新工具——渐近维数——也可以表述为一个局部约束 [CJM+20]。

因此，了解群 Γ 上的局部约束何时对 Γ 的任意 适当作用存在可定义解十分重要。这个问题的不同版本引出了所谓的“复杂度类”。

定义 1.3. 固定一个可数群 Γ ，以及 Γ 上的一个局部约束 Π 。

- 若对任意自由作用 $\Gamma \curvearrowright X$， X 都存在一个 Π 标记，我们就称 $\Pi \in$ EXISTS(Γ)。等价地，Γ 关于左乘作用存在一个 Π 标记。
- 若对标准博雷尔空间上的任意自由博雷尔作用 $\Gamma \curvearrowright X$， X 都存在一个博雷尔 Π 标记，我们就称 $\Pi \in$ BOREL(Γ)。
- 若对零维波兰空间上的任意自由连续作用 $\Gamma \curvearrowright X$， X 都存在一个连续 Π 标记，我们就称 $\Pi \in$ CONTINUOUS(Γ)。
- 若对标准概率空间 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ 上的任意自由博雷尔作用， X 都存在一个 μ 可测的 Π 标记，我们就称 $\Pi \in$MEASURE(Γ)。
- 如果对于波兰空间 $\Gamma \curvearrowright X$上的任意自由博雷尔作用， X 都具有贝尔可测的 Π标记，则称 $\Pi \in$ BAIREMEAS(Γ)。

由此产生的“复杂性理论”从描述性组合学的角度出发，根据问题的难度对问题进行分类，提供了一种自然的方法。

现在考虑 Γ 是自由群的情形， $\Gamma = \mathbb{F}_n$ 对于 $n \leq \omega$。对于 $n = 1$，也就是说， $\Gamma = \mathbb{Z}$，事实证明，几乎所有非平凡的描述复杂度类都相互重合，它们由这样一类问题组成：其解不会施加任何形式的周期性 [GR21]。当 $n > 1$ 时，情况则更为有趣。由于所有非阿贝尔自由群都是彼此的子群，因此不失一般性，我们可以在此固定 $n = 2$（见第 2节）。这种情形在 [BCG+21]中得到了系统研究，其中获得了图 1 所示的严格层级。（这综合了许多其他论文的结果，包括 [KST99、CMTD16、CM16、CK13、Mar16]。）

我们指出一个出人意料的包含关系：可测($\mathbb{F}_n$) $\subsetneq$ 贝尔可测($\mathbb{F}_n$)，该结果最初发表于[BCG+21]。图中其余的包含关系当然对任意群都成立，但有趣的是，这里它们全都是真包含关系。

本文主要关注 连续（$\mathbb{F}_n$）与博雷尔（$\mathbb{F}_n$）之间的差距。这个区间自然地由 贝尔层级进行分层。请注意，一些作者采用了另一种定义，对于无限 α而言该定义相差一层。关于此定义，请参见 [Lou]。

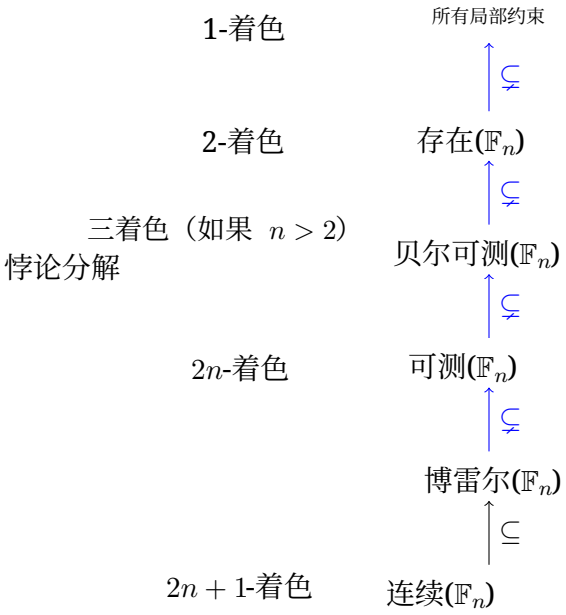


FIGURE 1. 迄今为止为 $\mathbb{F}_n$引入的复杂度类。类之间的箭头表示包含关系，蓝色箭头表示严格包含。每个类左侧给出一个属于该类、但不属于任何更低类的局部约束。每个 k-着色问题都指由 $\mathbb{F}_n$的通常生成集生成的施莱尔图。

定义 1.4。设 X 和 Y 为波兰空间，$f\colon X \to Y$，且 $\alpha < \omega_1$。如果对于任意开集 $U \subseteq Y$，$f^{-1}(U) \in \mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}(X)$，则称 f 为 *Baire*类 α，记作 $f \in \mathcal{B}_\alpha$。也就是说，f是 $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$-可测的

因此，$\mathcal{B}_0$ 是连续函数的集合，而 $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha$ 是博雷尔函数的集合。对于$\alpha < \omega_1$，我们称定义在 Γ 上的局部约束 Π 属于类 BAIRE$_\alpha$ ，如果对于零维波兰空间 $\Gamma \curvearrowright X$上的任意自由连续作用，$X$ 都存在 Baire 类 α Π标记。因此，BAIRE$_0$(Γ) =CONTINUOUS(Γ)。当然，如果 $\alpha \leq \beta$，那么 BAIRE$_\alpha$(Γ) $\subseteq$ BAIRE$_\beta$(Γ)。注意，由于局部约束 $\Pi = (\Lambda, S, \mathcal{A})$的标签集合 Λ是有限的，Π-标记 $f\colon X \to \Lambda$ 是 Baire 类 α，当且仅当对每个$\lambda \in \Lambda$，$f^{-1}(\lambda)$都是 $\mathbf{\Delta}^0_{1+\alpha}$。这也解释了为何要限制为零维空间。若不加此限制，空间 X可能没有非平凡的 $\mathbf{\Delta}^0_1$，也就是既开又闭的集合，从而使类 CONTINUOUS(Γ) = BAIRE$_0$(Γ)变得毫无意义。

我们的主要结果是，当 $\Gamma = \mathbb{F}_2$ 时，这一复杂度层级的前 ω 级彼此不同。

定理 1.5。对于每个 $n \in \omega$，BAIRE$^n(\mathbb{F}_2)$ $\subsetneq$BAIRE$^{n+1}(\mathbb{F}_2)$。

由推论 2.6 可知，该结果也适用于所有其他非阿贝尔自由群。这个结果不能推广到所有 $\alpha < \omega_1$，乍看之下或许令人不太满意。不过，请注意，LCL 只有可数多个！我们还将在下一节看到，在这种设定下，任意群 都存在一个通用作用 $\Gamma \curvearrowright X$，使得群 Γ 具有这种作用，当且仅当 X 存在某个 LCL 的连续、博雷尔或 Baire 类α 解 Π 于群 Γ 上，当且仅当 Π 属于相应的复杂度类。这意味着：

命题 1.6。设 Γ是一个可数群。

$$\mathtt{BOREL}(\Gamma) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathtt{BAIRE}_\alpha(\Gamma).$$

因此，层级 BAIRE$_\alpha$($\mathbb{F}_2$) 不可能永远严格递增，下面的问题因而定义良好。

问题 1. 使得 $\mathtt{BAIRE}\alpha(\mathbb{F}_2)$ =博雷尔$(\mathbb{F}_2)$ 的最小 $\alpha < \omega_1$ 是什么？

我们猜测 t 答案是 ω。事实上，我们猜想博雷尔$(\mathbb{F}_2) = \bigcup_{n\in\omega}\mathrm{BAIRE}n(\mathbb{F}_2)$。

本文并非首篇探讨在贝尔层级的给定层次上 LCLS 解是否存在的论文。首先，连续情形自然受到了广泛关注，参见例如 [GJKS18]。在更高层次上，Lecomte 和 Zeleny 有一系列关于博雷尔图的有趣结果：这些图作为平面子集十分简单，且可博雷尔二着色，但对于给定的 α 着色，甚至不存在有限或可数贝尔类 α [LZ14a、LZ14b]。

然而，这篇论文似乎确实是第一篇在群上的局部约束框架中考察连续以上层级的论文。这里的挑战与 Lecomte 和 Zeleny 的工作在性质上有所不同。他们需要找到以恰当方式具有复杂性的博雷尔图；而我们面对的是一些简单明了的图，关心的是这些图上的组合问题是否可能需要复杂的解。为突出这一差异，我们指出：对于任意无限群 Γ 及其生成集 S，相对于 S 的正常二染色不属于博雷尔(Γ)，甚至也不属于 贝尔可测(Γ) [Wei20], ，而 Lecomte 和 Zeleny 的图却是博雷尔二着色的。

2. The Bernoulli shift

在本节的预备内容中，我们将介绍前文提到的普适作用，它解释了引言中的一些陈述。

定义 2.1. 设 Γ 是一个可数群， X 是一个集合。 X 上的伯努利移位 是 Γ 在集合 X^Γ 上的作用，由 $\gamma(x)(\delta) = x(\gamma^{-1}\delta)$ 给出，其中 $x \in X^\Gamma$ 且 $\gamma, \delta \in \Gamma$。当 X 是一个拓扑空间时，我们赋予 X^Γ 积拓扑，使该作用成为连续作用。

X上的伯努利移位的自由部分 记作 $F(\Gamma, X)$，是伯努利移位中稳定子平凡的点所组成的集合。它是一个不变集，因此也继承了该作用。

注意，当 X 是豪斯多夫空间时， $F(\Gamma, X)$ 是 G_δ。特别地，若 X 是波兰空间，则它也是波兰空间。此外，当 $|X| > 1$时，它也是稠密的。

命题 2.2. 设 Γ 是一个可数群，在零维、第二可数的豪斯多夫空间 X 上连续作用。那么存在一个连续的 Γ-等变单射映射 $f : X \to (2^\omega)^\Gamma$。若$\Gamma \curvearrowright X$ 是自由的，则存在这样的映射 $f\colon X \to F(\Gamma, 2^\omega)$。

证明。 设 $g : X \to 2^\omega$ 是一个连续单射。（例如，令 $g(x)(n)$ 记录 x 是否属于 X 的某个固定可数闭开基中的第 n 个成员。）然后令 $f(x)(\gamma) = g(\gamma^{-1}x)$。由等变性，第二部分自动成立。□

命题 2.3. 设 Γ 是一个可数群，在标准博雷尔空间 X 上有一个博雷尔作用。那么存在一个博雷尔 Γ-等变单射映射 $f\colon X \to (2^\omega)^\Gamma$。若 $\Gamma \curvearrowright X$ 是自由的，则存在这样的映射 $f\colon X \to F(\Gamma, 2^\omega)$。

证明。 令 $g : X \to 2^\omega$ 为博雷尔单射。然后重复前面的证明。 □

推论 2.4。 设 Γ 是一个可数群， Π 是 Γ 上的局部约束。 $\Pi \in$博雷尔(Γ) 当且仅当$F(\Gamma, 2^\omega)$ 存在一个博雷尔 Π 标记。对于类 $\mathtt{BAIRE}\alpha(\Gamma)$ 也同样成立。

请回想，这使问题1定义良好。以下观察也使我们能够从这一角度将所有非阿贝尔自由群视为等价。

命题 2.5。 设 $\Delta \leq \Gamma$ 是可数群。存在一个连续的 Δ-等变映射$f\colon (2^\omega)^\Delta \to (2^\omega)^\Gamma$，其中 $f[F(\Delta, 2^\omega)] \subseteq F(\Gamma, 2^\omega)$。

证明。设

$$f(x)(\gamma) = \begin{cases} 1^\frown x(\gamma) & \text{if } \gamma \in \Delta \\ 0^\omega & \text{else} \end{cases},$$

其中 $0^\omega \in 2^\omega$ 表示常值零序列，$1^\frown x \in 2^\omega$ 表示在序列 x 前面加上一个 1。这显然是 Δ-等变的、单射且连续的。

假设 $x \in F(\Delta, 2^\omega)$ 且 $\gamma \in \Gamma$ 满足 $\gamma f(x) = f(x)$。如果 $\gamma \notin \Delta$，那么 $(\gamma f(x))(\gamma) = f(x)(1) = 1^\frown x(1)$，而 $f(x)(\gamma) = 0^\omega$，因此它们不可能相等，因为它们的首位不同。由此可知 $\gamma \in \Delta$，在这种情况下，由等变性和单射性可得 $\gamma = 1$。□

注意，如果 $\Delta \leq \Gamma$ 且 $\Pi = (\Lambda, S, \mathcal{A})$ 是 Δ 上的局部约束，那么 Π 也是 Γ 上的局部约束。此外，如果 $\Gamma \curvearrowright X$ 是一个自由作用，且 $f\colon X \to \Lambda$ 是一个函数，那么 f 是关于 Γ 的 Π 标记，当且仅当它是关于诱导的 Δ 作用的 Π 标记。

推论 2.6。设 $\Delta \leq \Gamma$ 是可数群，且 Π 是 Δ 上的一个局部约束问题。那么 $\Pi \in$ 博雷尔$(\Delta) \Leftrightarrow \Pi \in$博雷尔$(\Gamma)$，对BAIRE$\alpha$ 类也同样成立。

证明。由上一段可立即得到正向结论。另一方面，若$F(\Gamma, 2^\omega)$ 具有贝尔类α Π标记，则根据该命题，$F(\Delta, 2^\omega)$ 也具有相同性质，因此由推论 2.4即可得证。□

3. Complexity and 2-colorings

在证明主定理之前，我们需要了解最基本的“困难”局部约束问题之一—— $\mathbb{Z}$-作用的正常二染色——与复杂性的关系。本节中，我们固定 $S = \{1\}$ 的生成集 $\mathbb{Z}$，而正常二染色指的是相对于该生成集的$\mathbb{Z}$-作用正常二染色问题，定义见定义 1.1之后的例子。众所周知，这个局部约束问题不属于博雷尔$(\mathbb{Z})$，甚至也不属于 贝尔可测$(\mathbb{Z})$ 或可测$(\mathbb{Z})$ [KST99]。事实上，成立的结论还要稍强一些。

定义 3.1。令 $\mathcal{I}$为由 $\mathbb{Z}$不变的博雷尔集 $B \subseteq F(\mathbb{Z}, 2^\omega)$构成的 σ理想，且满足B 存在博雷尔二染色。

上述困难性结果是通过证明 $\mathcal{I}$ 中的元素必定以适当的方式非常小而得到的。例如，对于 2^ω 上的任意相容的波兰拓扑，它们都必须是贫集；对于 2^ω上的任意非狄拉克博雷尔概率测度，它们都必须是零测集。我们给出前者的证明，因为稍后会用到。

命题 3.2。设 $A \in \mathcal{I}$，且 τ 是 2^ω 上的一个波兰拓扑，它生成与通常拓扑相同的博雷尔集。那么，相对于 τ的积拓扑，A 在$(2^\omega)^\mathbb{Z}$ 中是贫集。

注意，$F(\mathbb{Z}, 2^\omega)$在$(2^\omega)^\mathbb{Z}$中稠密，因此我们在哪个空间中讨论并无区别。

证明。设 $c\colon A \to 2$ 是一个博雷尔二染色，并反设 A 是非瘦的。不妨设 $c^{-1}(0)$ 是非瘦的。于是，由于它是博雷尔集，它在某个形如 $U = \prod_{n\in\mathbb{Z}} U_n$ 的基本开集上是余瘦的，其中 $U_n \in \tau$ 是非空开集，且 $U_n = 2^\omega$ 对于 $|n| > N$ 对于某个$N \in \mathbb{N}$。根据 N 的选择，平移集 $(2N+1)U$ 与 U 相交，于是 $c^{-1}(0) \cap (2N+1)c^{-1}(0)$ 在非空开集 $(2N+1)U \cap U$ 中是余瘦的。然而，根据二染色的性质，对于任意奇整数 k，我们有$kc^{-1}(0) = c^{-1}(1)$，因此前一个交集为空。□

本节的主要结果或许也具有独立价值：它表明，$\mathcal{I}$中的成员在影响复杂性的能力方面也必须可以忽略。

定理 3.3。设 $0 < \alpha < \omega_1$。存在一个 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-完全集 $U_\alpha \subseteq 2^\omega$，具有如下性质：对于所有 $A \in \mathcal{I}$，$F(\mathbb{Z}、U_\alpha) \setminus A$ 作为 $F(\mathbb{Z}、2^\omega)$的子集都是 $\mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$-困难的。

注 3.4。(1) 在定理1.5 的证明中，我们只需要考虑有限的 α。

（2）由于 $F(\mathbb{Z}, U_\alpha) = F(\mathbb{Z}, 2^\omega) \cap (U_\alpha)^\mathbb{Z}$ 以及 $F(\mathbb{Z}, 2^\omega)$ 在 $G_\delta(2^\omega)^\mathbb{Z}$ 中，因此在上述陈述中，我们分别在相应位置使用 $F(\mathbb{Z}, U_\alpha)$ 和 $F(\mathbb{Z}, 2^\omega)$，还是使用 $(U_\alpha)^\mathbb{Z}$和 $(2^\omega)^\mathbb{Z}$，并不重要。

（3）同样，使用某个特定的 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-完全集并不重要；如果将 U_α 替换为任意 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-困难集，该定理仍然成立。这会给维持较小 α 值下的自由性带来一些麻烦，因此我们满足于陈述这个表面上较弱的结论。

我们的证明将用到 Matrai [M´at07] 为利用贝尔范畴判据证明博雷尔层级中的下界而开发的工具。作为这套工具的一部分，Matrai 构造了 2^ω 的子集以及 2^ω 上的拓扑；这些拓扑比通常的拓扑更精细，他称之为 拓扑 *Hurewicz* 检验对。我们不会给出这些检验对的一般定义，而只在下面的引理中汇集我们将用到的理论中后继情形的相关内容。我们先从这些规范的集合说起。

定义 3.5。 我们通过对 $\alpha < \omega_1$ 作归纳法来定义集合对 $P_\alpha \subseteq X_\alpha$。令 $X_0 = 2$ 和 $P_0 = \{0\} \subseteq X_0$。

对于 $0 < \alpha < \omega_1$，在 α 为极限序数的情形下，固定一个共尾序列 $(\beta_i)_{i\in\omega}$，该序列位于 α 中；在 α 为后继的情形下，令每个 β_i 为 α 的前驱。然后定义

- $X_\alpha = \prod_{i<\omega} X_{\beta_i}$.
- $P_\alpha = \{x \in X_\alpha \mid \forall i < \omega,\ x(i) \notin P_{\beta_i}\}$.

注意，若赋予 X_0 离散拓扑，并为每个 X_α 赋予积拓扑，那么对于每个 $\alpha > 0$，X_α 都与 2^ω 同胚，且每个 P_α 在 X_α 中都是 $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$- 完备的。将 X_α 上的这个拓扑称为 σ_α。

引理 3.6 (Matrai [M´at07])。 对于每个 $0 < \alpha < \omega_1$，都存在波兰拓扑 $\sigma_\alpha \subseteq \tau^<_\alpha \subseteq \tau_\alpha$，具有以下性质。

(1) P_α 在 τ_α 中是闭的无处稠密集。(2) $\tau^<_\alpha$ 是关于各个 τ_{β_i} 的积拓扑。(3) 若 $B \subseteq X_\alpha$ 是 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\sigma_\alpha)$ 且在 $\tau^<_\alpha$ 中非瘦，则它在 τ_α 中非瘦。

定义 3.5 是 [M´at07] 中的定义 35。那么，引理中的第 (1)–(3) 项分别出自 [M´at07] 中的定义 15(3)、命题 36 和推论 23(2)。(3) 是关键，它兑现了利用贝尔范畴获得下界的承诺。

定理 *3.3* 的证明。 我们将 $(X_\alpha, \sigma_\alpha)$ 视为 2^ω，并赋予其通常拓扑，取 $U_\alpha = X_\alpha \setminus P_\alpha$。我们也通过 $X_{\alpha+1} := X^\omega_\alpha$ 与 $X^\mathbb{Z}_\alpha$ 之间的双射，将 ω 与 $\mathbb{Z}$ 视为相同。令 $A \in \mathcal{I}$。

由引理 3.6(3) 和 Wadge 确定性，只需证明 $F(\mathbb{Z}, U_\alpha) \setminus A$ 是 $\tau^<_{\alpha+1}$-余瘦且 $\tau_{\alpha+1}$-贫集。对于前者，回想 $\tau^<_{\alpha+1}$ 是关于 τ_α 的积拓扑，因此根据命题 3.2，A 在其中是贫集；而根据引理 3.6(1)，$U^\mathbb{Z}_\alpha$ 在其中稠密，进而 $F(\mathbb{Z}, U_\alpha)$ 在 $U^\mathbb{Z}_\alpha$ 中稠密，正如第 2 节所观察到的那样。对于后者，注意到 $F(\mathbb{Z}, U_\alpha) \subseteq U^\mathbb{Z}_\alpha = P_{\alpha+1}$，并应用引理 3.6(1)。□

4. Proof of the main theorem

本节将对 n 使用归纳法证明以下结论。

定理 4.1。 对于每个 $0 < n \in \omega$，都存在一个 *LCL* $\Pi \in \mathtt{BAIRE}^n(\mathbb{F}_{n+1})$，其标签集为 Λ，并且存在一个子集 $\Lambda_* \subseteq \Lambda$，使得对于任意博雷尔 Π-标记 $c\colon F(\mathbb{F}_{n+1}, 2^\omega) \to \Lambda$，$c^{-1}(\Lambda_*)$ 都是 $\mathbf{\Pi}^0_n$-困难的。

后一个性质蕴含 $\Pi \notin \mathtt{BAIRE}_{n-1}(\mathbb{F}_{n+1})$。这就证明了定理 1.5，因为每个 $\mathbb{F}_{n+1}$ 都是 $\mathbb{F}_2$ 的子群，因此我们可以应用推论2.6。

4.1. **基例**。 本节证明定理 $n = 1$ 的4.1基例。这将为归纳步骤预热，并涵盖许多关键思路。

写下 $\mathbb{F}_2 = \langle a,\ b\rangle$。$\Pi$ 将是定义在 $\mathbb{F}_2$ 上的以下局部约束：标签集为 $\Lambda = \{0, 1, N, *\} \times \{R, B, G\}$。窗口为 $\{a, b\}$。约束如下：

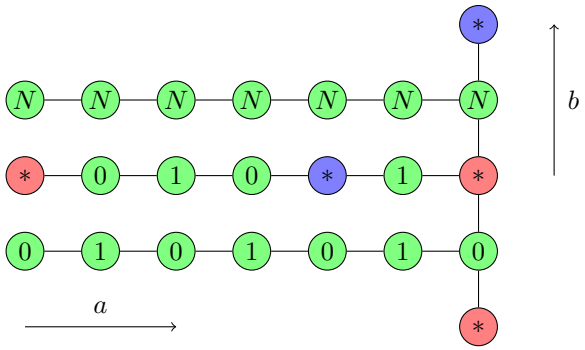


FIGURE 2. 基例中， $\mathbb{F}_2$ 的 Schreier图的一部分，其带有 Π标记$n = 1$。 a 和 b 轨道分别水平和垂直绘制。每个标签的第二坐标以顶点的颜色表示，而第一坐标则直接写在顶点上。

- 第二坐标给出了 b-轨道的三着色。（我们将这些颜色视为红色、蓝色和绿色，因此也就是这些标签。）也就是说，对于所有 x， $c(x)_2 \neq c(bx)_2$ ，下标 2 表示投影到第二坐标。

- 第一坐标为 $*$，当且仅当第二坐标为 R 或 B。
- 第一坐标为 N 的顶点在 a下不变。也就是说，对于每个 x， $c(x)_1 = N \Leftrightarrow c(ax)_1 = N$。

- 0 和 1 标签给出了 a轨道的部分二着色。也就是说，对于每个 x，不可能有 $c(x)_1 = c(ax)_1 \in \{0,1\}$。

换句话说，给定 b轨道的一个三着色，每个 a轨道上的第一坐标有三种可能的排列方式。如果轨道中包含任何 R 或 B 点，这些点必须标记为 $*$，其余的 G 顶点则必须用 $\{0,1\}$进行适当的二着色。如果轨道只包含 G 点，我们可以用 $\{0,1\}$ 对整个轨道进行二着色，也可以将其全部标记为 N。这三种情况分别展示在图 2 中的第二、第三和第一行。

断言 4.2. $\Pi \in \mathtt{BAIRE}_1(\mathbb{F}_2)$。

证明。根据 [KST99，关于通常生成元的 Ber23], 3-着色属于 CONTINUOUS($\mathbb{Z}$)。因此存在一个连续函数 $c\colon F(\mathbb{F}_2, 2^\omega) \to \{R, B, G\}$，它是 b-轨道的三着色。我们将使用 c 作为第二坐标，并构造一个第一类贝尔函数 $d\colon F(\mathbb{F}_2, 2^\omega) \to \{0, 1, N, *\}$，使得 (d, c) 是一个 Π-标记。

我们必须令 $d(x) = *$ 当且仅当 $c(x) \in \{R, B\}$时，因此 $d^{-1}(*)$ 是既开又闭的。令 $d(x) = N$当且仅当 $\langle a\rangle x \subseteq c^{-1}(G)$。也就是说，每当一个 a-轨道完全为绿色时，我们就将其全部标记为 N，如图 2 第一行所示。于是 $d^{-1}(N)$ 是闭集。

令 L 为剩余点的集合。也就是说， G 是其 a-轨道中含有某个 $*$的点。 L 被开集 $L_- := \{x \in L \mid \exists n > 0, d(a^{-n}x) = *\}$ 和 $L_+ := \{x \in L \mid \exists n > 0, d(a^n x) = *\}$ 覆盖。现在定义

- $L_-^0 = \{x \in L_- \mid$ 见证 $x \in L_-$ 的最小 n 是偶数$\}$。
- $L_-^1 = \{x \in L_- \mid$ 见证 $x \in L_-$ 的最小 n 是奇数$\}$。
- $L_+^0 = \{x \in L_+ \mid$ 见证 $x \in L_+$ 的最小 n 是偶数$\}$。
- $L_+^1 = \{x \in L_+ \mid$ 见证 $x \in L_+$ 的最小 n 是奇数$\}$。

对于给定的 $n > 0$，满足 n 是 $x \in L_-$ 的最小见证的 x 的集合是既开又闭的，因为 $d^{-1}(*)$ 是既开又闭的；L_+ 也同样如此。因此，这些集合中的每一个都是开集。显然，每个集合也是 a-独立的。于是很容易验证，对于每个 i，我们可以令 $d^{-1}(i) = L_-^i \cup (L_+^i \setminus L_-)$。□

该断言的证明解释了为何选择这个局部约束。我们希望编码一个 $\mathbf{\Pi}^0_1$谓词，例如“我的每个 a-轨道中的点都是绿色的”，并添加一个标签 N，该标签正是用于实现这一点的。虽然局部规则可以确保标有 N 的轨道确实只包含绿色点，但没有办法强制一个完全由绿色点组成的轨道使用 N 标签。与其强制使用标签，不如在这种情况下通过将替代任务（正常二染色）设置为在 N -不变集上非常困难来大力鼓励使用标签 a（正如命题 3.2 和定理 3.3所反映的那样），但对于并非全部为绿色的轨道，仍然可以轻松完成该任务。

正如这一讨论所提示的，对于定理4.1基例的后半部分，我们取$\Lambda_* = \{N\} \times \{R, B, G\}$，即第一坐标中标记为 N的点集。（取 $\Lambda_* = \{(N, G)\}$ 也是等价的，因为不允许其他配对。）

断言 4.3。 设 $(d, c)\colon F(\mathbb{F}_2, 2^\omega) \to \{0, 1, N, *\} \times \{R, B, G\}$ 是一个博雷尔 Π-标记。 $d^{-1}(N)$ 是$\mathbf{\Pi}^0_1$-困难的。

关于这个断言，一个重要的说明是，甚至无法先验地确定 $d^{-1}(N)$是否非空！例如，假设我们在 $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid ab = ba\rangle$上定义了相同的局部约束。根据 Gao、Jackson、Krohne 和 Seward 的结果 [GJKS24]，存在一个关于生成集 $F(\mathbb{Z}^2, 2^\omega)$ 的博雷尔 3-着色 $\{a, b\}$。如果我们将其用作 b-轨道的 3-着色，那么就不会有只包含绿色点的 a-轨道。所幸，Marks 的一项结果表明， $F(\mathbb{F}_2, 2^\omega)$ 关于 $\{a, b\}$ [Mar16]不存在博雷尔 3-着色。证明这一点所用的技巧，即下面的引理，也将是处理我们这个情形的关键。

引理 4.4 ([Mar17，引理 2.12，注 2。9])。设 Δ，Γ 是可数群，且 $A \subseteq F(\Delta * \Gamma, 2^\omega \times 2^\omega)$ 是博雷尔的。以下至少有一项成立：

- 存在一个连续的 Δ-等变函数 $f\colon F(\Delta, 2^\omega) \to F(\Delta * \Gamma, 2^\omega \times 2^\omega)$，其值域为$f) \subseteq A$，并且$(f(x)(1))_1 = x(1)$ 对所有 x 都成立。
- 存在一个连续的 Γ-等变函数 $f\colon F(\Gamma, 2^\omega) \to F(\Delta * \Gamma, 2^\omega \times 2^\omega)$，其值域为$f) \cap A = \emptyset$，并且$(f(x)(1))_2 = x(1)$ 对所有 x 都成立。

下一节才会用到“此外”部分，因此目前可以忽略它们，并将 $2^\omega \times 2^\omega$ 与 2^ω视为相同。

子断言 4.5。 $d^{-1}(N) \neq \emptyset$。

证明。 应用 Marks 引理于 $\Delta = \langle a\rangle$、$\Gamma = \langle b\rangle$ 和 $A = c^{-1}(G)$。在第二种情况下，$c \circ f$ 是 $F(\mathbb{Z}, 2^\omega)$ 的正常着色，仅使用 R和 B，这与 2-着色不属于博雷尔$(\mathbb{Z})$这一事实矛盾。如果 $d^{-1}(N) = \emptyset$，那么 $A = d^{-1}(\{0, 1\})$，因此在第一种情况下，$d \circ f$ 是 $F(\mathbb{Z}, 2^\omega)$ 的正常着色，仅使用 0 和 1，再次产生矛盾。□

容易看出，一个非空且内部为空的集合是 $\mathbf{\Pi}^0_1$-困难的，因此以下内容完成了断言 4.3 的证明，也就完成了我们的基例。

子断言 4.6。 $d^{-1}(N)$ 的内部为空。

证明。 a 在 $F(\mathbb{F}_2, 2^\omega)$上的作用一般遍历；它有一个稠密轨道。这很容易看出，因为$(2^\omega)^{\mathbb{F}_2}$ 中的基本开集只约束有限个坐标。因此，由于 $d^{-1}(N)$是 a-不变的，如果它有非空内部，就会是余瘦的。于是 $c^{-1}(G) \supseteq d^{-1}(N)$会是余瘦的，但这不可能，因为它是 b-独立的。□

4.2. **归纳步骤**。 本节证明以下结果，它显然给出了定理 4.1 的归纳步骤。（取 $\alpha = n \in \omega$ 和 $\beta = n + 1$。）

定理 4.7。 设 Γ 是一个可数群，$\alpha < \beta < \omega_1$，并且 $\Pi \in \mathtt{BAIRE}^\beta(\Gamma)$ 的标签集为 Λ。假设存在一个子集 $\Lambda_* \subseteq \Lambda$，使得对于任意博雷尔 Π 标记 $c\colon F(\Gamma, 2^\omega) \to \Lambda$，$c^{-1}(\Lambda_*)$ 都是$\mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha}$-困难的。

那么存在一个局部约束 $\Pi' \in \mathtt{BAIRE}^{\beta+1}(\mathbb{Z} * \Gamma)$，其标签集为比如说 Λ'，以及一个子集 $\Lambda'_* \subseteq \Lambda'$，使得对于任意博雷尔 Π 标记 c： $F(\mathbb{Z} * \Gamma, 2^\omega) \to \Lambda'$， $c^{-1}(\Lambda'_*)$ 都是 $\mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha+1}$-困难的。

注意，要使该假设非空，我们需要 $\alpha < \beta$。

构造及其正确性的证明将与基例中的构造和证明非常相似。令$\mathbb{Z} = \langle a \rangle$。我们将有 $\Lambda' = \{0, 1, N, *\} \times \Lambda$。窗口将为 $\{a\} \cup S$，其中 S是Π的窗口。约束如下：

- 第二个坐标为每个 Γ-轨道提供一个 Π-标记。
- 第一个坐标为 $*$，当且仅当第二个坐标属于 Λ_*。
- 第一个坐标为 N 的顶点在 a作用下保持不变。
- 0 和 1 两种标签为每个 a-轨道提供一个部分二着色。

断言4.8. $\Pi' \in \mathtt{BAIRE}^{\beta+1}(\mathbb{Z} * \Gamma)$。

证明。根据假设，存在一个 Baire 类-β c 函数： $F(\mathbb{Z}*\Gamma, 2^\omega) \to \Lambda$，它相对于 Γ 的作用是一个 Π-标记。我们将使用 c 作为第二坐标，并构造一个 Baire 类-$(\beta+1)$ 函数 d： $F(\mathbb{Z} * \Gamma, 2^\omega) \to \{0, 1, N, *\}$，使得 (d, c) 是一个 Π'-标记。

我们只能令 $d(x) = *$ 当且仅当 $c(x) \in \Lambda_*$，因此 $d^{-1}(*) \in \mathbf{\Delta}^0_{1+\beta}$。令 $d(x) = N$ 当且仅当 $\langle a \rangle x \subseteq c^{-1}(\Lambda \setminus \Lambda_*)$。那么 $d^{-1}(N) \in \mathbf{\Pi}^0_{1+\beta}$。

定义集合 $L^i_\pm$，与断言4.2的证明中完全相同。每个集合都是 $\mathbf{\Delta}^0_{1+\beta}$ 集合的可数并，因此 $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\beta}$ 于是我们可以像之前一样设 $d^{-1}(i) = L^i_- \cup (L^i_+ \setminus L_-)$。□

下面说明我们可以取 $\Lambda'_* = \{N\} \times \Lambda$。

命题 4.9。 设 $(d, c)\colon F(\mathbb{Z} * \Gamma, 2^\omega) \to \{0, 1, N, *\} \times \Lambda$ 是一个博雷尔 Π'-标记。 $d^{-1}(N)$ 是 $\mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha+1}$-困难的。

证明。 我们将改为在 $F(\mathbb{Z}*\Gamma, 2^\omega \times 2^\omega)$ 上进行。设 $U_{1+\alpha}$是定理 $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$中的完备集3.3。设

$$A = \{x \mid c(x) \notin \Lambda_* \Leftrightarrow x(1)_1 \in U_{1+\alpha}\}.$$

我们将对这个 A 应用 Marks 引理。

在第二种情况下， $c \circ f$是 $F(\Gamma, 2^\omega)$的 Π标记，根据 A 的定义，我们有$(c \circ f)(x) \in \Lambda_* \Leftrightarrow (f(x)(1))_1 \in U_{1+\alpha}$。由于 f 和投影映射是连续的，因此$(c \circ f)^{-1}(\Lambda_*) \leq_W U_{1+\alpha}$，这与前者是 $\mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha}$困难的假设矛盾。

因此，我们处于第一种情况。博雷尔函数 $d \circ f$： $F(\mathbb{Z}, 2^\omega) \to \{0, 1, N, *\}$ 具有以下性质：

- 当且仅当 $x(1) \notin U_{1+\alpha}$时，点 x 被标记为 $*$。（这里用到了 Marks 引理中的“此外”部分）。
- 被标记为 N 的点集是 $\mathbb{Z}$-不变的。
- 0 和 1 构成一个部分二着色。

因此，每个 $\mathbb{Z}$-轨道要么包含一个标签为 $*$的点，要么完全由 0 和 1 两种颜色标记，要么完全标记为 N。此外，当且仅当轨道中的某个顶点带有 $2^\omega \setminus U_{1+\alpha}$中的标签时，第一种情况才会发生。这些情况如图3所示。

令 $B \subseteq F(\mathbb{Z}, 2^\omega)$ 表示由所有轨道完全由 0 和 1 标记的点 x 组成的集合。则根据 $B \in \mathcal{I}$的定义。注意到 $(d \circ f)^{-1}(N) = F(\mathbb{Z}, 2^\omega) \cap (U^{\mathbb{Z}}_{1+\alpha} \setminus B) = F(\mathbb{Z}, U_{1+\alpha}) \setminus B$，我们根据 $U_{1+\alpha}$的定义得出，$(d \circ f)^{-1}(N)$ 是 $\mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha+1}$-困难的，因此 $d^{-1}(N)$ 是 $\mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha+1}$-困难的，因为$f$ 是连续的。□

注 4.10. Marks 引理是通过博雷尔确定性论证证明的。我们构造了一个特定的博弈，双方玩家在其中定义 $F(\Delta * \Gamma, 2^\omega \times 2^\omega)$ 的一个点，并争夺它是否属于 A。上述证明的思路是将这个博弈与证明 Wadge 确定性时使用的博弈结合起来。事实上，Wadge 博弈的获胜条件被用来定义集合A，并对其应用 Marks 引理。

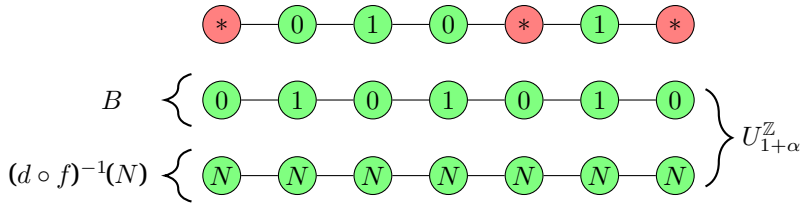


FIGURE 3. 将 $\mathbb{Z}$-轨道通过拉回 Π'-标记后可能呈现的三种形态f。当且仅当点被标记为 $*$ 时，将其着为红色，以保持与基例及图 2的类比。

5. 问题

关于这些类，问题远多于答案：$\mathtt{BAIRE}_\alpha(\Gamma)$。这里我们汇集了我们认为最有趣的问题。我们先重述引言中的问题 1 。

问题2。 最小的 $\alpha < \omega_1$ 是什么，使得 $\mathtt{BAIRE}_\alpha(\mathbb{F}_2)$ =博雷尔$(\mathbb{F}_2)$?

除了自由群之外，在群上的局部约束框架中最受关注的群自然是阿贝尔自由群 $\mathbb{Z}^n$ [GR23、BBLW25]。Gao、Jackson、Krohne 和 Seward 证明，对于 $n > 1$，且相对于通常生成集，适当四着色属于 CONTINUOUS$(\mathbb{Z}^n)$，而适当三着色属于 博雷尔$(\mathbb{Z}^n)$ \ CONTINUOUS$(\mathbb{Z}^n)$[GJKS18、GJKS24]。利用他们的构造可以验证，事实上，适当三着色属于 $\mathtt{BAIRE}_1(\mathbb{Z}^n)$ [UVW]。目前仍不清楚 $\mathtt{BAIRE}_\alpha(\mathbb{Z}^n)$ 这一层级是否会继续延伸。

问题3。设 $n > 1$。是否 博雷尔$(\mathbb{Z}^n)$ $= \mathtt{BAIRE}_1(\mathbb{Z}^n)$?

正如引言中所提到的，对于 $n = 1$，我们实际上有博雷尔$(\mathbb{Z})$ =连续$(\mathbb{Z})$。

我们对任意群 Γ的复杂度图景尚无真正的认识。我们认为这值得加以弥补；尤其是，值得探究一个更复杂的群 Γ 是否能让层级比针对 $\mathbb{F}_n$的情形走得更远。

问题4。 是否存在一个可数群 Γ，使得 博雷尔$(\Gamma) \neq \mathtt{BAIRE}_\omega(\Gamma)$? 对于每个$\alpha < \omega_1$，是否都存在一个可数群 Γ，使得 博雷尔$(\Gamma) \neq \mathtt{BAIRE}_\alpha(\Gamma)$?

最后，值得探究射影谓词能否像本文中的算术谓词那样，通过局部问题进行编码。据我们所知，这一研究方向尚未得到任何探索。

问题5. 假设射影决定性成立。是否存在一个局部约束 Π，定义在 $\mathbb{F}_2$ 上，使得 $F(\mathbb{F}_2, 2^\omega)$ 存在射影 Π 标记，但不存在博雷尔标记？对于任意可数群 Γ，情况又如何？

ACKNOWLEDGMENTS

我们感谢 Andrew Marks 给予的大力鼓励和多次有益的交流，尤其是关于证明定理 3.3的有效思路。也感谢 Forte Shinko 和 Anton Bernshteyn 就本文的主要问题所进行的有趣的初步讨论。作者的研究由美国国家科学基金会通过资助编号 DMS-2402064 提供支持。

REFERENCES

[BBLW25] Katalin Berlow、Anton Bernshteyn、Clark Lyons 和 FELIX WEILACHER. *Separating complexity classes of lcl problems on grids* 2501 17445 2025 , arXiv 预印本 arXiv: 。( )。

[BCG+21] Sebastian Brandt、Yi-Jun Chang、Jan Greb´ık、Christoph Grunau、V´aclav Rozhoˇn 和 Zolt´an Vidny´anszky, *Local problems on trees from the perspectives of distributed algorithms, finitary factors, and descriptive combinatorics* 2106 02066 2021 , arXiv 预印本 arXiv: 。( )。[Ber66] Robert Berger, *The undecidability of the domino problem*, 第 66 号, 美国数学会, 1966 年。[Ber23] Anton Bernshteyn, *Distributed algorithms, the Lovász Local Lemma, and descriptive combinatorics*, 《数学发明》233 (2023), 第 2 期, 495–542。[CJM+20] Clinton Conley、Steve Jackson、Andrew Marks、Brandon Seward 和 Robin Tucker-Drob, *Borel dsymp totic dimension and hyperfinite equivalence relations* 2020 2009 06721 , , 预印本, arXiv: 。。[CK13] Clinton T Conley 和 Alexander S Kechris, *Measurable chromatic and independence numbers for ergodic graphs and group actions* **7** 2013 1, 127 180 , 《群、几何与动力学》( ), 第 – 期。[CM16] Clinton T. Conley 和 Benjamin D. Miller, *A bound on measurable chromatic numbers of locally finite Borel graphs* **23** 2016 6, 1633 1644 , 《数学研究快报》( ), 第 – 期。[CMTD16] Clinton T Conley、Andrew S Marks 和 Robin D Tucker-Drob, *Brooks' theorem for measurable colorings*, 《数学论坛: Sigma》, 第 4 卷, 剑桥大学出版社, 2016 年, 第 e16 页。[GJKS18] S. Gao、S. Jackson、E. Krohne 和 B Seward, *Continuous combinatorics of abelian group actions*, 预印本, arXiv:1803.03872。[GJKS24] Su Gao、Steve Jackson、Edward Krohne 和 Brandon Seward, *Borel combinatorics of abelian group actions* 2401 13866 2024 , arXiv 预印本 arXiv: 。( )。[GMP17] Lukasz Grabowski、Andr´as M´ath´e 和 Oleg Pikhurko, *Measurable circle squaring*, 《数学年刊》(2) 185 (2017), 第 2 期, 671–710。[GR21] Jan Greb´ık 和 V´aclav Rozhoˇn, *Classification of local problems on paths from the perspective of descriptivecombinatorics*, 《EuroComb 2021 扩展摘要: 欧洲组合学、图论与应用大会》, 施普林格, 2021 年, 第 553–559 页。[GR23] , *Local problems on grids from the perspective of distributed algorithms finitary factors and descriptive combinatorics* **431** 2023 109241 , , , 《数学进展》( ), 。[KST99] Alexander S Kechris、Slawomir Solecki 和 Stevo Todorˇcevi´c, *Borel chromatic numbers*, 《数学进展》141 (1999), 第 1 期, 1–44。[Lou] Alain Louveau, *Effective descriptive set theory*。[LZ14a] Dominique Lecomte 和 Miroslav Zelen`y, *Borel chromatic number of closed graphs*, arXiv 预印本 arXiv:1406.7544 (2014)。[LZ14b] Dominique Lecomte 和 Miroslav Zelen`y, *Descriptive complexity of countable unions of borel rectangles*, 《拓扑学及其应用》166 (2014), 66–84。[Mar16] Andrew S. Marks, *A determinacy approach to Borel combinatorics* **29** 2016 2, , 《美国数学会杂志》( ), 579 600 3454384 , 第 – 期。MR [Mar17] Andrew S Marks, *Uniformity, universality, and computability theory*, 《数理逻辑杂志》17 (2017), 第 01 期, 1750003。[M´at07] Tam´as M´atrai, *Covering Σ^0_ξ-generated ideals by Π^0_ξ sets*, 《查理大学数学评论》 48 (2007), 第 2 期, 245–268。[MU16] Andrew Marks 和 Spencer Unger, *Baire measurable paradoxical decompositions via matchings*, 《数学进展》289 (2016), 397–410。[MU17] Andrew S. Marks 和 Spencer T. Unger, *Borel circle squaring* 2 **186** 2017 2, , 《数学年刊》( ) ( ), 第 581 605 – 期。[NS93] Moni Naor 和 Larry Stockmeyer, *What can be computed locally?*, 《第二十五届年度 ACM 计算理论研讨会论文集》, 1993 年, 第 184–193 页。[UVW] Spencer Unger、Narmada Varadarajan 和 FELIX WEILACHER, *G_δ circle squaring*, 进行中的工作。[Wei20] Felix Weilacher, *Marked groups with isomorphic cayley graphs but different borel combinatorics*, 《基础数学》251 (2020), 69–86。