arXiv:2601.19111v1 [quant-ph] 27 Jan 2026

量子纠缠几何导论

纠缠　　滤过在阿祖玛雅代数中的应用，以及量子系统中的几何纠缠　　s

Kazuki Ikeda *

2026年1月28日

摘要

本文旨在以阐述性的方式，将有限维量子多体系统中的纠缠视为一种整体几何现象。尽管一般量子态的数学性质已得到广泛研究，本文特别聚焦于它们的纠缠。当量子系统随经典参数空间 X变化时，每个纤维看起来可能都是同一个希尔伯特空间，但由于粘合数据中的扭曲，未必存在整体识别。用阿祖玛雅代数描述这种情形时，总能得到纯态空间族，它是一个塞韦里–布劳尔概形 $SB(A) \to X$。

本文的重点是刻画如下条件：通过将结构群约化到塞格雷簇的稳定子子群 G_d ，使定义纠缠所需的子系统分解能够在整体上相容地存在；并说明障碍体现于布劳尔类中。因此，量子态在$SB(A)$上导出由纠缠决定的自然滤过。

以环面上的自旋系统为例，我们具体展示，粘合的全纯性可能产生纠缠量子门，也可能表现为一种有别于通常贝里数或陈数的障碍类。例如，即便对于传统上被认为没有拓扑能带结构的量子系统，其本征态的纠缠也可能与整体几何普适量相关联，反映出背景几何。

目录

1 什么是量子纠缠几何？ 3

1.1 参数化量子系统 .31.2 什么是纠缠？ .51.3 代数几何中的量子信息基础示例 . . . . . 51.4 本笔记的结构。 .7

2 纯态的几何 7

2.1 纯态是射影空间 .72.2 乘积态与塞格雷映射 .82.3 乘积态与矩阵秩 .92.4 多体量子系统的理想 .11

3 观察：一个简短的数论类比 20

*电子邮箱：kazuki.ikeda@umb.edu 马萨诸塞大学波士顿分校

4 加性分解：张量秩与割线簇 **26**
4.1 用乘积态之和进行度量：张量秩 .264.2 作为闭集的滤过：割线簇与边界秩 .274.3 二分情形 .284.4 在多分系统中：秩与边界秩可能不同 .284.5 割线簇的理想 .29

5 二分量子纠缠 **3** **0**
5.1 端omorphism空间($H_A \otimes H_B$) .305.2 施密特秩 .315.3 施密特分解（奇异值分解）.325.4 行列式簇 .335.5 维数公式 .33

6 Quantum 子系统的代数几何处理 **34**
6.1 局部识别与过渡函数（粘合）.346.2 可观测代数（矩阵代数层）.356.3 局部子系统分解与塞格雷簇.356.4 稳定子.36

7 障碍 **7**7.1 布劳尔类.377.2 与子系统结构的关系.38 **3**

8 前半部分总结
38 **9 塞韦里–布劳尔概形上的量子纠缠几何** **39**9.1 后半部分概述 .399.2 阿祖玛雅代数 A 与纯态空间 $SB(A)$ .409.3 稳定子 G_d 与约化 .429.4 希尔伯特概形与子系统结构的模化 .43**10 双部量**

4 10.1 纠缠过滤 .44**10.2 纠缠过滤与奇点** .4510.3 从量子信息的视角进行具体的重新诠释 . . . . . 45**11 纠缠的布劳尔理论障碍分类** **48**12 存在 $SB(A)$ 但不存在全局一致的子系统的例子 **50**12.1 符号阿祖玛雅代数 .5012.2 一个具体的量子例子 .50**13 子系统可约性并非仅由布劳尔类决定** **52**14 数值不变量 **53**

15 物理学示例：环面上的量子自旋系统（基态与哈密顿量的粘合） 54

15.1 参数空间与单磁振子希尔伯特空间.5515.2 局域哈密顿量与局域基态 .5615.3 粘合的构想：如何将哈密顿量全局化 .5615.4 粘合基态线：射影态的过渡函数 .5815.5 局域双量子比特分解与通过粘合产生纠缠 . . 5815.6 为什么粘合后会出现纠缠：过渡元并非局域操作 59

16 球面赫克谱与纠缠的代数判据 60

16.1 指导思想.6016.2 术语.6116.3 的球性.6216.4 球 Hecke 代数与 Satake 同构.6416.5 d (2,2).66

17 推广到一般 d 情形 69

17.1 张量积映射与d-乘积（代数定义） .6917.2 不变多项式与纠缠 .7017.3 根据 Hecke 特征值进行检测 .7217.4 三量子比特情形（d $=(2,\ 2,\ 2)$ .72

18 总结 74

A 技术说明 76A.1 为什么 P/G_d 表示子系统结构（关于约化的一般说明） 76A.2 直接从展平推导关联解消.80

B 关于分支 以及环面上的坐标粘合 8 3

B.1 什么是分支？ .83B.2 我们如何选择分支？ .84B.3 为什么单连通性是必要的：沿回路的单值化.84B.4 哈密顿量与基态的粘合 .85

1 什么是 Quantum 纠缠几何?

1.1 参数化量子系统

在量子信息教材中（例如 [1]），通常首先固定一个希尔伯特空间

$$H \simeq \mathbb{C}^n$$

然后讨论该固定舞台上的态、测量和操作。当我们希望在同一舞台上反复处理同一个系统时，这种做法很理想。

然而在实际物理中，量子系统往往表现为依赖经典参数。典型情况包括

- 控制参数，例如耦合常数、外场、温度和边界条件；

- 时空参数，例如时间 t、位置 x和动量 k。

在这种情况下，对于参数空间 X中的每个点 $x \in X$ ，都有一个位于该点的量子系统。这自然引出了一个赋值

$$x \in X \quad \longmapsto \quad H_x$$

其中， H_x 是参数 x处的希尔伯特空间。

最简单的情形是， H_x 是单个全局向量丛 $E \to X$的纤维，因此 $H_x \simeq E_x$。这样便可以在 X 上统一处理基和算子。然而在实践中，我们很容易遇到这样的情形：

$$\textit{loc}\textbf{\textit{ally}} \ H_x \simeq \mathbb{C}^n, \text{但交叠处的基底粘合无法在全局保持一致} \qquad .$$

此外，不同 $x,\ y \in X$ 对应的希尔伯特空间 H_x 和 H_y 甚至未必具有相同的维数。

本文旨在构建量子态的几何描述，尤其关注量子纠缠。

关键在于，量子信息中重要的并非向量本身，而是将相差一个整体标量因子的向量视为等价后得到的态。纯态表示为

$$\text{nonzero vectors } H_x \setminus \{0\} \text{ modulo scalars} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(H_x).$$

由此得出一个重要观察：

即使整体向量丛 E 不存在，一族射影空间通常仍可在整体上存在。

然而，并非每一种量子态都值得关注。在量子理论中，乘积态是有效的量子态，但由于不表现出量子关联，可以将其视为经典态。在纯态中，只有纠缠态才具有真正的非经典（量子）特征。我们的首要目标是将纠缠表述为一种几何对象。

下文中，鉴于纯态空间在整体上存在这一事实，我们将纯态视为 X上的一个（扭曲）射影丛，而非仅仅是点的集合。

以下三个对象在本文中起着核心作用。

1. **纯态族：**在纤维上可见 $\mathbb{P}(H_x) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$，但整体上可能存在扭曲。

2. **乘积态的轨迹：**一旦给定子系统分解，乘积态便呈现为 Segre簇。3. **量子纠缠的滤过：**在二分情形中，施密特秩构成由行列式簇（子式）给出的滤过。

在固定的希尔伯特空间上，这一切都很熟悉 H，但对于参数化系统，会出现一个新问题：(2) 和 (3) 不会自动地全局化。本研究旨在确定它们何时可以（或不能）全局化。这一思想由 [2], 发起并发展，本文余下部分将阐释其背后的概念和主要结果。

1.2 什么是纠缠?

在量子信息中，纯态的纠缠是相对于固定的子系统分解定义的

$$H \simeq H_1 \otimes \cdots \otimes H_r.$$

如果态 $|\psi\rangle$ 无法写成乘积形式，那么它就是纠缠的（相对于此分解而言）

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_r\rangle.$$

从几何上看，所有乘积态构成的集合就是塞格雷嵌入的像:

$$\Sigma_d \;=\; \mathbb{P}^{d_1-1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{d_r-1} \;\subset\; \mathbb{P}(H) \qquad (n = \prod_i d_i).$$

因此，乘积轨迹表现为一个特殊的子簇 $\Sigma_d \subset \mathbb{P}(H)$（秩一张量），而纠缠态则是其中之外的态。纠缠是态中一种内在的量子关联，而量子信息和量子物理的核心主题之一，就是量化其中存在多少（或多强的）纠缠。

然而，对于参数化系统，在讨论一个态是否纠缠之前，会先遇到一个更根本的问题:

> 1. 应如何选择子系统的分解？2. 能否在整个参数空间上协调一致地选择张量分解本身？

即使在局部可以识别出

$$H_x \simeq \mathbb{C}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{d_r},$$

如果交叠处的粘合变成了一般的基变换，那么局部可见的塞格雷簇（乘积态的轨迹）就不会保持不变。因此，在整个空间上 X 可能会被迫面临这样的情况:

> 乘积态/纠缠态无法被连贯地定义为全局几何对象。

这是本文的核心主题。本文讨论的量子纠缠几何是一种以代数几何的方式同时处理以下问题的方法:

> 态的纠缠以及子系统分解存在的障碍

同时 [2]。

1.3 代数几何中的量子信息：一个初等例子

concurrence。我们的目标是以具体且初等的方式，为量子信息呈现一个几何框架。为了解释其背后的理念，我们来考察最基本的例子。任意双量子比特纯态都可以写成

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由于全局标量在物理上没有意义，因此自然地将态视为射影空间中的一个点

$$[\,\psi\,] = [a : b : c : d] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \cong \mathbb{P}^3.$$

判断这个态是否纠缠有几种方法。这里我们考察并合度 C [3]。对于两个量子比特的纯态，在归一化条件 $\langle\psi|\psi\rangle = 1$下，有

$$C(|\psi\rangle) = 2\,|ad - bc| \;=\; 2\,|\det(\Psi)|.$$

已知 C 取值范围为 $0 \le C \le 1$。当且仅当$C \neq 0$时，一个态是纠缠态。例如，贝尔态（$|00\rangle + |11\rangle$）$/\sqrt{2}$ 满足 $\det(\Psi) = 1/2$ $(C = 1)$，这表明它具有最大纠缠。

可分性矩阵判据与塞格雷簇。若存在 $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ 和 $|\chi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ 使得，**则该态是乘积态**

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle.$$

用系数表示，这意味着

$$(a, b, c, d) = (\alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta),$$

并且可立即得出 $ad - bc = 0$。反过来，若 $ad - bc = 0$，则 Ψ 的秩为 ≤ 1，因此它可以因式分解为 $\Psi = (\alpha,\ \beta)^{\mathsf{T}}(\gamma,\ \delta)$，因此对应于一个乘积态。因此

$$\text{product} \iff \operatorname{rank}(\Psi) = 1 \iff ad - bc = 0.$$

在射影　　几何术语中，乘积态的集合是塞格雷嵌入的像

$$\mathrm{Seg} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3, \tag{1}$$

an，而这个像是由单个二次方程定义的光滑二次曲面　　n

$$ad - bc = 0.$$

因此，某个态是否为乘积态，完全可以用代数几何的方式描述为该点是否位于某个代数簇上(另见注2.28）。concurrence 正是由这个塞格雷簇的定义方程给出的一个基本纠缠证书。

局域操作与对称性。局域幺正变换 $U_A \otimes U_B$ 在矩阵表示中对应于

$$\Psi \longmapsto (U_A)\,\Psi\,(U_B)^{\mathsf{T}}.$$

因此

$$\det(\Psi) \longmapsto \det(U_A)\det(U_B)\det(\Psi),$$

尤其是，如果 $U_A,\ U_B \in SU(2)$，那么 $\det(\Psi)$（因此 C）是不变量。从这个意义上说，$\det(\Psi)$ 是一个在局域操作下表现良好的代数量，而 $\det(\Psi) = 0$ 的消失条件则是在局域操作下不变的几何条件（这首次体现了这样一个事实：尽管纠缠取决于子系统的选择，但局域操作不会破坏纠缠）。

展望高维情形。对于两个量子比特，可分性可由一个行列式表示。类似地，对于一般的双部系统 $\mathbb{C}^{d_A} \otimes \mathbb{C}^{d_B}$，如果将系数排列成一个$d_A \times d_B$ 矩阵，那么乘积态恰好是秩为 1 的态，其特征是所有 2×2 子式都为零（塞格雷簇）。更一般地，施密特秩 $\le k$ 由所有 $(k+1) \times (k+1)$ 子式均为零来刻画。因此，纯态的纠缠过滤可以描述为

$$\text{minors vanish} \iff \text{the state lies on a determinantal variety},$$

也就是说，用多项式方程／代数簇的语言来表述。

从这个简单示例中提炼出的理念是：

量子信息的基本结构（可分性和多项式不变量）自然地表现为射影空间中的塞格雷簇及其定义方程。

本文将这一观点推广到族（即量子系统随经典参数变化的情形），并进一步推广到扭曲背景（塞韦里–布劳尔纤维化），从代数几何角度表述以下问题：塞格雷簇何时（以及会遇到哪些障碍）能够在全局上定义？并且在可能的情况下，我们构造一个全局滤过。

1.4 本文结构。

在本文余下部分，为了将上述讨论精确化，我们将逐步引入相关工具，用于描述射影丛的扭曲、保持塞格雷嵌入的粘合（结构群约化），以及二分情形下行列式簇的相对表述。

第2节回顾纯态的射影几何描述和塞格雷嵌入（标准背景）。第3 节介绍一种关于可分性模式的分拆格观点，并简要讨论数论类比（本文原创）。第4节回顾张量秩、割线簇和边界秩，将其作为纠缠过滤的加性细化（标准背景；例如参见文献 [4] ）。第5 节聚焦二分情形，联系乘积态与矩阵秩及行列式簇（标准背景）。

第 6–15 节以参考文献 [2] 及相关已确立的事实为基础。第 6–8 节转而讨论参数空间 X 上的量子系统族，并说明局部子系统分解如何对应于将结构群约化至塞格雷簇稳定子的约化，以及障碍如何由布劳尔类编码。第 9–14 节探讨塞韦里–布劳尔概形 $\mathrm{SB}(A) \to X$上纠缠态的几何。第 15 节给出一个环面上的具体自旋系统示例，其中粘合全纯产生了一个纠缠门。

第 16–17节提出一种纠缠的谱/海克理论判据（本文原创）。我们定义 d乘积态 Satake 参数，将其视为对偶群中的张量积像，并说明如何通过有限多个不变多项式检测这一像条件，同时对 $d = (2,\ 2)$和 $d = (2,\ 2,\ 2)$情形进行明确计算。第 18 节总结几何与谱的观点，附录汇集了关于行列式消解（A）以及环面示例中粘合计算（B）的辅助材料。

2 纯态的几何

2.1 纯态即射影空间

表示纯态的态矢量 $\psi \in H$ 若乘以一个整体非零标量 λ，其物理状态不变。因此，我们将纯态视为射影空间中的一个点。

> **定义 2.1** （射影空间）。 对于复向量空间 $H \simeq \mathbb{C}^n$，将射影空间 $\mathbb{P}(H)$定义为
>
> $$\mathbb{P}(H) := (H \setminus \{0\})/\sim, \qquad \psi \sim \lambda\psi \ \ (\lambda \in \mathbb{C}^\times).$$
>
> 这意味着， $\mathbb{P}(H)$中的一个点就是 H中的一个一维线性子空间（一条直线）。

命题 2.2 （纯态的两种等价描述）。 设 H 是一个有限维复内积空间。以下集合之间存在自然的双射：

1. 射影空间 $\mathbb{P}$（H）中的点，

2. 秩一正交投影（密度矩阵）

$$\left\{ P \in \mathrm{End}(H) \;\middle|\; P^2 = P,\ P^\dagger = P,\ \mathrm{rk}(P) = 1 \right\}.$$

证明。**(步骤 1) 定义一个映射** $\mathbb{P}(H) \to$ **秩一投影。** 取 $[\psi] \in \mathbb{P}(H)$ 并选择一个代表元 $\psi \in H \setminus \{0\}$。定义

$$P_\psi := \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

(步骤 2) 证明它与代表元的选取无关。若选择另一个代表元 $\psi' = \lambda\psi$ 满足 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$，则

$$|\psi'\rangle\langle\psi'| = |\lambda\psi\rangle\langle\lambda\psi| = (\lambda|\psi\rangle)(\overline{\lambda}\langle\psi|) = |\lambda|^2|\psi\rangle\langle\psi|,$$

并且

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\lambda\psi|\lambda\psi\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle\psi|\psi\rangle = |\lambda|^2\langle\psi|\psi\rangle.$$

因此

$$P_{\psi'} = \frac{|\lambda|^2|\psi\rangle\langle\psi|}{|\lambda|^2\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle} = P_\psi.$$

因此 P_ψ 仅取决于 $[\psi]$。

(步骤 3) 证明 P_ψ **是一个秩一正交投影。**我们计算

$$P_\psi^2 = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|\psi\rangle(\langle\psi|\psi\rangle)\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle^2} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle^2} = P_\psi.$$

取伴随可得

$$P_\psi^\dagger = \left(\frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}\right)^\dagger = \frac{(|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger}{\overline{\langle\psi|\psi\rangle}} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle} = P_\psi$$

（因为 $\langle\psi|\psi\rangle$ 是实数），因此 P_ψ 是自伴的。此外，$\mathrm{im}(P_\psi) = \mathbb{C}\psi$ 是一维的，因此 $\mathrm{rk}(P_\psi) = 1$。

(步骤 4) 构造逆映射。令 P 为秩一正交投影。那么 $\mathrm{im}(P) \subset H$ 是一个一维子空间。我们将点 $[\psi]$ 与 P 对应：$= \mathrm{im}(P) \in \mathbb{P}(H)$。

(步骤 5) 证明这两个映射互为逆映射。从 $[\psi]$ 出发，投影算子 P_ψ 的像是 $\mathbb{C}\psi$，因此应用逆映射会返回 $[\psi]$。反过来，从 P 出发并令 $[\psi] = \mathrm{im}(P)$，取这条直线的一个代表元 ψ 。由于 P 是到 $\mathbb{C}\psi$ 上的正交投影，我们有 $P = P_\psi$。因此，这种对应关系是一个双射。 t

上述识别对应于一般情形下的布洛赫球表示。

2.2 乘积态与塞格雷映射

目前我们关注二分情形。多部推广见 §17。

定义 2.3（二分情形下的乘积态）。 设 $H_A \simeq \mathbb{C}^{d_A}$ 和 $H_B \simeq \mathbb{C}^{d_B}$，并令$H := H_A \otimes H_B$。纯态 $[\psi] \in \mathbb{P}(H)$ 称为乘积态，如果存在 $a \in H_A \setminus \{0\}$ 和$b \in H_B \setminus \{0\}$ 使得

$$[\psi] = [a \otimes b].$$

选取 H_A 的一组基 $\{e_i\}_{i=1}^{d_A}$ 和 H_B 的一组基 $\{f_j\}_{j=1}^{d_B}$，并写作

$$a = \sum_{i=1}^{d_A} a_i e_i, \qquad b = \sum_{j=1}^{d_B} b_j f_j.$$

Then

$$a \otimes b = \left(\sum_i a_i e_i \right) \otimes \left(\sum_j b_j f_j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j (e_i \otimes f_j).$$

也就是说，相对于 H 的基 $\{e_i \otimes f_j\}$，这些系数具有“乘积形式”

$$\psi_{ij} = a_i b_j.$$

将这一构造射影化，得到塞格雷映射：

$$\sigma : \mathbb{P}(H_A) \times \mathbb{P}(H_B) \longrightarrow \mathbb{P}(H_A \otimes H_B), \qquad ([a], [b]) \longmapsto [a \otimes b].$$

其像 $\Sigma_{A,\ B}$:=im(σ) 是塞格雷簇（乘积态的轨迹）。

2.3 乘积态与矩阵秩

定义 2.4（张量展平）。 相对于选定的基，将任意 $\psi \in H_A \otimes H_B$ 写作

$$\psi = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} \psi_{ij} \, (e_i \otimes f_j).$$

通过排列系数得到的 $d_A \times d_B$ 矩阵，

$$M(\psi) := (\psi_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{d_A \times d_B}(\mathbb{C}),$$

称为 ψ的展平矩阵。

命题 2.5 (乘积态 $\Leftrightarrow$ 矩阵秩 **1)**。 假设 $\psi \neq 0$。以下结论等价：

1. $[\psi]$ 是乘积态（$[\psi] = [a \otimes b]$），
2. $\mathrm{rk}(M(\psi)) = 1$。

证明。 **(1)⇒(2). </style}**若 $[\psi] = [a \otimes b]$，则根据上述计算可得 $\psi_{ij} = a_i b_j$，因此

$$M(\psi) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{d_A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{d_B} \end{pmatrix} = a\, b^{\mathsf{T}}$$

每一列都是 a 的标量倍，因此列空间的维数为 1。因此 $\mathrm{rk}(M(\psi)) = 1$。

(2)⇒(1). 假设 $\mathrm{rk}(M(\psi)) = 1$。那么所有列都位于$\mathbb{C}^{d_A}$的同一个一维子空间中，因此存在 $a \neq 0$，使得每一列都是 a 的标量倍。将第 j 列写作 $c^{(j)}$，则存在 $b_j \in \mathbb{C}$，使得

$$c^{(j)} = b_j a.$$

用分量表示，这意味着

$$\psi_{ij} = a_i b_j.$$

令 $b := (b_1, \ldots, b_{d_B})$。那么

$$\psi = \sum_{i,j} \psi_{ij}(e_i \otimes f_j) = \sum_{i,j} a_i b_j (e_i \otimes f_j) = \left(\sum_i a_i e_i\right) \otimes \left(\sum_j b_j f_j\right) = a \otimes b,$$

因此 $[\psi] = [a \otimes b]$ 是乘积态。 🐾

秩一条件等价于所有 2×2 子式都为零。下面给出一个初等证明。

定理 2.6。 对于一个 $d_A \times d_B$ 矩阵 M，以下条件等价：

1. $\mathrm{rk}(M) \leq 1$,
2. 对任意 $1 \leq i_1 < i_2 \leq d_A$ 和 $1 \leq j_1 < j_2 \leq d_B$,

$$\det \begin{pmatrix} M_{i_1 j_1} & M_{i_1 j_2} \\ M_{i_2 j_1} & M_{i_2 j_2} \end{pmatrix} = 0.$$

证明。**(1)⇒(2)**。若 $\mathrm{rk}(M) \leq 1$，则任意两列都线性相关，因此任意 2×2子矩阵的秩为 ≤ 1，其行列式也就为 0。更直接地，若 $\mathrm{rk}(M) \leq 1$，则 $M = ab^{\mathsf{T}}$可由某些向量 a，b表示，因此

$$\det \begin{pmatrix} a_{i_1} b_{j_1} & a_{i_1} b_{j_2} \\ a_{i_2} b_{j_1} & a_{i_2} b_{j_2} \end{pmatrix} = a_{i_1} a_{i_2} \det \begin{pmatrix} b_{j_1} & b_{j_2} \\ b_{j_1} & b_{j_2} \end{pmatrix} = 0.$$

(2)⇒(1)。我们用反证法。若 $\mathrm{rk}(M) \geq 2$，则至少有两列线性无关。设这两列为 u，$v \in \mathbb{C}^{d_A}$。由于 u 和 v 线性无关，存在指标 i_1，i_2 使得

$$\det \begin{pmatrix} u_{i_1} & v_{i_1} \\ u_{i_2} & v_{i_2} \end{pmatrix} \neq 0$$

（否则 u和 v 就会线性相关）。但是 u和 v 是对应于某些 j_1，j_2的列，因此这个行列式恰好是一个非零的 2×2 子式，与 (2) 矛盾。因此 $\mathrm{rk}(M) \leq 1$。t

注 2.7. 该　　由子式定义的轨迹，在几何上是塞格雷嵌入的像　　f

$\mathbb{P}^{d_A-1}\times\mathbb{P}^{d_B-1}$（塞格雷簇）。这将初等例子（式（1））推广到了通用情形。

2.4 多体量子系统的理想

本节将二分情形中的对应关系推广到

$$\text{product states} \iff \text{lying on a Segre variety} \iff \text{all } 2\times 2 \text{ minors vanish}$$

多体情形。此外，我们将整理出一套词汇表，以理想的形式梳理以下问题的逻辑：

对于哪些划分，态可以因式分解为乘积态?

以理想的形式。

对于一般的子系统分解 $H \simeq H_1\otimes\cdots\otimes H_r$，基本思想是相同的：乘积态构成一个塞格雷簇，而纠缠态则位于其外部。在多体情形中，子系统的选择方式有更多自由度，关于子系统的纠缠也不再仅由子式为零这类条件刻画。因此，本节旨在尽可能建立一般理论，使其无需过度依赖子式仍然适用。

2.4.1 划分与 π乘积态

Fix th子系统的数量为 $N\geq 2$，且有一个有限维复向量空间

$$H \;=\; H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_N \qquad (\dim H_i = d_i).$$

纯态是射影空间 $P(H)$ 中的点。

定义 2.8 (划分与细化)。 集合 $[N]:=\{1,2,\ldots,N\}$ 的一个划分 π 是由两两不相交的非空子集 $B_1,\ldots,B_r\subset[N]$ 组成的集合，使得

$$[N] = B_1\sqcup B_2\sqcup\cdots\sqcup B_r.$$

我们将每个 B_j 称为一个块。

对于两个划分 π，ρ，我们定义

$$\pi\preceq\rho \quad\overset{\text{def}}{\iff}\quad \pi \text{ is a refinement of } \rho,$$

这意味着 π 的每个块都包含在 ρ 的某个块中。

定义 2.9 （π-乘积态与塞格雷簇 Σ_π）。 对于一个分拆 $\pi=\{B_1,\ldots,B_r\}$，定义

$$H_{B_j} := \bigotimes_{i\in B_j} H_i.$$

若存在非零向量 $0\neq\psi_{B_j}\in H_{B_j}$，使得纯态 $[\psi]\in P(H)$ 称为 π-乘积态

$$[\psi] = [\psi_{B_1}\otimes\cdots\otimes\psi_{B_r}].$$

我们将所有此类态组成的集合记为

$$\Sigma_\pi \subset \mathbb{P}(H)$$

并将其称为 π-乘积轨迹。

由于 Σ_π 是 Segre 嵌入的像

$$\mathbb{P}(H_{B_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(H_{B_\ell}) \hookrightarrow \mathbb{P}(H),$$

它是一个闭子集，而且还是不可约的。因此（就齐次坐标环而言），其消失理想

$$I(\Sigma_\pi) \subset k[\mathbb{P}(H)]$$

是一个素理想。

如果分拆 π 细化了 π'（$\pi \preceq \pi'$，即 π' 的每个块都是 π 的若干块的并集），那么

$$\Sigma_\pi \subset \Sigma_{\pi'}.$$

由反变性可得

$$I(\Sigma_{\pi'}) \subset I(\Sigma_\pi).$$

注 2.10（与类型 d（子系统类型）的关系）。对于每个块 B，令 $D_B :=$ 维数 $H_B = \prod_{i\in B} d_i$。那么，一个划分 $\pi = \{B_1, \ldots, B_r\}$ 会诱导出一个维数元组

$$d(\pi) := (D_{B_1}, \ldots, D_{B_r}) \qquad \Big(\prod_{j=1}^{r} D_{B_j} = \dim H \Big).$$

从这个意义上说，Σ_π 与类型为 d（π）的塞格雷簇相同（即 $P^{D_{B_1}-1} \times \cdots \times P^{D_{B_r}-1}$ 的 Segre 像。块的顺序并不重要）。

命题 2.11（更粗的划分给出更大的 Σ_π /更小的理想）。如果划分 π, ρ 满足$\pi \preceq \rho$（因此 π 更细），那么

$$\Sigma_\pi \subseteq \Sigma_\rho \qquad and \qquad I(\Sigma_\pi) \supseteq I(\Sigma_\rho).$$

证明。说 π 更细，意味着该条件可以写成乘积的要求更强，因为它要求分解为更多张量因子。设 $\pi = \{B_1, \ldots, B_r\}$ 和 $\psi = \psi_{B_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{B_r}$。由于 ρ 是通过将 π 的若干块分组得到的，ρ 的每个块 C 都可以写成 $C = B_{i_1} \sqcup \cdots \sqcup B_{i_m}$。令

$$\psi_C := \psi_{B_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \psi_{B_{i_m}} \in H_C$$

给出 $\psi = \bigotimes_{C\in\rho} \psi_C$，因此 ψ 是 ρ-乘积态。因此 $\Sigma_\pi \subseteq \Sigma_\rho$。一般而言，若 $X \subseteq Y$，则 $I(X) \supseteq I(Y)$，所以理想包含关系的方向相反。t

2.4.2 消失理想与 2×2 子式（二分拆情形）

在射影几何中，应将点 $[v] \in \mathbf{P}(H)$ 看作一条直线$\mathbf{C}v \subset H$，而不是某个特定的向量 $v \in H \setminus \{0\}$。另一方面，齐次多项式 $f \in \mathrm{Sym}^t(H^\vee)$ 自然地是向量空间 H 上的一个多项式函数。下面的仿射锥正是连接这两种观点的桥梁。

定义 2.12（零点集和消失理想）。设 $P(H) \cong P^{D-1}(D = \prod_i d_i)$，其齐次坐标环为

$$S := \mathrm{Sym}(H^\vee) = \bigoplus_{t \geq 0} \mathrm{Sym}^t(H^\vee)$$

按 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 分次。
对于子集 $X \subset P(H)$，定义其（齐次）仿射锥为

$$\widehat{X} := \{\, v \in H \mid v = 0 \text{ or } [v] \in X \,\} \subset H.$$

X 的消失理想 定义为

$$I(X) := \{\, f \in S \text{ homogeneous} \mid f(v) = 0 \text{ for all } v \in \widehat{X} \,\}.$$

（对于齐次的 f，条件 $f([v]) = 0$ 定义良好，且与代表元 v 的选取无关。）

反过来，对于齐次理想 $I \subset S$，定义零点集

$$V(I) := \{\, [v] \in P(H) \mid f(v) = 0 \text{ for all homogeneous } f \in I \,\}.$$

若 $f \in \mathrm{Sym}^t(H^\vee)$ 是次数为 t 的齐次多项式，则对于任意 $\lambda \in$ **复数域** 和 $v \in H$，有

$$f(\lambda v) = \lambda^t f(v).$$

特别地，对于 $v \neq 0$，条件 $f(v) = 0$ 只取决于射影类 $[v]$，因为$f(\lambda v) = 0$当且仅当 $f(v) = 0$。这就是我们在定义 $I(X)$ 和 $V(I)$ 时只考虑齐次多项式的原因。

另外请注意，将 $v = 0$ 纳入 X 并无妨：每个正次数齐次多项式都在 0 处取零，而在 0 处取零的 0 次齐次多项式只有零多项式。因此，$I(X)$ 不含非零常数，并且自动是齐次理想。

例 2.13（$\mathbf{P}^1$ 中的一个点）。设 $H =$ **复数域**^{2}，并在 H 上选取对偶坐标 $(x_0,\ x_1)$，于是$S =$ **复数域**$[x_0, x_1]$。令

$$X = \{[1:0]\} \subset \mathbf{P}(H) = \mathbf{P}^1.$$

于是，仿射锥是经过 $(1,\ 0)$ 的直线：

$$\widehat{X} = \{(t, 0) \mid t \in \mathbf{C}\} \subset \mathbf{C}^2.$$

齐次多项式 $f(x_0,\ x_1)$ 在 X 上取零，当且仅当对于所有 t，$f(t,\ 0) = 0$。因此

$$I(X) = (x_1) \subset \mathbf{C}[x_0, x_1], \qquad V\big((x_1)\big) = \{[1:0]\} = X.$$

因此，在这个最简单的情形下，射影子集 X 可恢复为 $V(I(X))$。

在二分情形中，$\Sigma_{A|B}$ 由矩阵秩 1 刻画，而这一条件等价于所有 2×2 子式均为零。在多体情形下，对于二分划分 $A|B$，结论也同样成立。

定义 2.14（展平）。固定一个二分划分 $A|B$（因此 $A \sqcup B = [N]$），并令

$$H_A := \bigotimes_{i\in A} H_i, \qquad H_B := \bigotimes_{j\in B} H_j.$$

选定基后，系数张量可用多重指标 $x_{a_1\cdots a_N}$ 表示。将指标分组成 A侧和 B侧后，可将系数排列成一个 $D_A \times D_B$矩阵（$D_A =$ 维 H_A， $D_B =$ 维 H_B）

$$M_{A|B} = \big(x_{\alpha,\beta}\big),$$

这称为展平。

二分划分 $A|B$ 对应的乘积轨迹的消失理想，

$$\Sigma_{A|B} := \mathrm{Seg}\big(P(H_A) \times P(H_B)\big) \subset P(H),$$

由下式给出：

$$I_{A|B} := I(\Sigma_{A|B}) = \big\langle \text{all } 2\times 2 \text{ minors of } M_{A|B}\big\rangle.$$

注 2.15。 $V(I_{A|B})$ 是秩一矩阵的塞格雷簇，而 $I_{A|B}$ 是一种典型的行列式理想。由于 $\Sigma_{A|B}$ 不可约， $I_{A|B}$ 是一个素理想。

例 2.16 （两个量子比特）。令 $H =$ **复数域**$^2 \otimes$ **复数域**^{2}，并选取基 $\{e_0, e_1\}$ 和 $\{f_0, f_1\}$。记

$$\psi = \sum_{i,j\in\{0,1\}} \psi_{ij}\, e_i \otimes f_j, \qquad [a:b:c:d] := [\psi_{00}:\psi_{01}:\psi_{10}:\psi_{11}] \in \mathbf{P}(H) \cong \mathbf{P}^3,$$

因此 $S =$ **复数域**$[a,b,c,d]$。

该展平矩阵为

$$M(\psi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

乘积轨迹（塞格雷簇）为

$$\Sigma_{2,2} = \mathrm{Seg}\big(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1\big) \subset \mathbf{P}^3,$$

并且根据一个线性代数事实，可得

$$[\psi] \in \Sigma_{2,2} \iff \operatorname{rank} M(\psi) \le 1 \iff \det M(\psi) = ad - bc = 0.$$

因此，乘积轨迹的消失理想是主理想

$$I(\Sigma_{2,2}) = (ad-bc) \subset \mathbf{C}[a,b,c,d], \qquad \Sigma_{2,2} = V(ad-bc).$$

例2.17 （一般二分割）。设 $H = H_A \otimes H_B$，其中 $\dim H_A = d_A$ 和 $\dim H_B = d_B$。选定基后，在 H 上将坐标写作 (x_{ij})，于是展平矩阵为

$$M(\psi) = (x_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{d_A\times d_B}(\mathbf{C}).$$

对于指标 $1 \le i_1 < i_2 \le d_A$ 和 $1 \le j_1 < j_2 \le d_B$，定义 2×2 子式

$$\Delta_{i_1,i_2;\,j_1,j_2} := x_{i_1j_1}x_{i_2j_2} - x_{i_1j_2}x_{i_2j_1} \ \in\ S_2.$$

令 $I_{A|B} \subset S$ 为由所有这些子式生成的齐次理想：

$$I_{A|B} := \left\langle \Delta_{i_1,i_2;j_1,j_2} \;\middle|\; i_1 < i_2,\ j_1 < j_2 \right\rangle.$$

那么，二分划分 $A|B$ 对应的乘积轨迹恰为

$$\Sigma_{A|B} = V(I_{A|B}) \subset \mathbf{P}(H),$$

因为 $\Delta_{i_1,\ i_2;\ j_1,\ j_2}(\psi) = 0$ 对所有子式成立，等价于秩 $M(\psi) \le 1$。因此，ψ 可分解为 $\psi = a \otimes b$，相差一个比例因子。

2.4.3 或/与及相应的理想运算

命题 2.18（集合运算与理想运算之间的对应关系）。对于射影空间中的扎里斯基闭子集 $X, Y \subset P(H)$，有如下结论：

1. 或（并集）：
$$I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y).$$

2. 与（交集）：
$$I(X \cap Y) = \left(\sqrt{I(X) + I(Y)}\right)^{\mathrm{sat}}.$$

这里 $\mathfrak{m} := S_{>0}$ 是无关理想，而齐次理想 J 的饱和定义为

$$J^{\mathrm{sat}} := \bigcup_{k \ge 0} (J : \mathfrak{m}^k) = \{\, f \in S \mid \exists k,\ \mathfrak{m}^k f \subset J \,\}.$$

在射影情形下，齐次理想 J 及其饱和 J^{sat} 可能定义相同的零点集，但它们作为消失理想时可能不同。命题中的陈述 (2) 意味着，要描述 $X \cap Y$ 本身的消失理想，需要进行饱和（并取根基）。然而，作为点集，总有

$$V(I(X) + I(Y)) = X \cap Y.$$

2.4.4 The N分部系统的双乘积轨迹与主分解

在本小节中，我们首先用理想来梳理一般 N分部系统中哪些二分划分会使态因式分解，然后以简单但非平凡的情形 $N = 3$ 为例进行讨论。

从现在起，令基域为 $k = \mathbb{C}$（或某个代数闭域），并固定

$$H = H_1 \otimes \cdots \otimes H_N, \qquad d_i := \dim H_i \ge 2.$$

二分划分以及双乘积态 / 真多体纠缠态的定义。

> **定义 2.19**（二分划分 $A|A^c$ 与双乘积态 / 真多体纠缠态）。对于非空真子集 $\emptyset \neq A \subsetneq [N]$，记其补集为 $A^c := [N] \setminus A$。乘积轨迹
>
> $$\Sigma_{A|A^c} := \Sigma_{\{A,A^c\}} \subset \mathbb{P}(H)$$
>
> 是塞格雷嵌入的像
>
> $$\mathbb{P}(H_A) \times \mathbb{P}(H_{A^c}) \hookrightarrow \mathbb{P}(H),$$

其中 $H_A := \bigotimes_{i\in A} H_i$。我们定义：

- 双乘积轨迹：相对于某个二分划分而言为乘积态的纯态集合，

$$X^{(N)}_{\text{bisep}} := \bigcup_{\emptyset\neq A\subsetneq[N]} \Sigma_{A|A^c} \subset \mathbb{P}(H).$$

- *GME* 轨迹（真正多体纠缠）：相对于任意二分划分而言都不是乘积态的纯态集合，

$$X^{(N)}_{\text{GME}} := \mathbb{P}(H) \setminus X^{(N)}_{\text{bisep}}.$$

Si因此 $\Sigma_{A|A^c} = \Sigma_{A^c|A}$，可以通过限制范围来避免重复计数，例如 e,

$$X^{(N)}_{\text{bisep}} = \bigcup_{\substack{\emptyset\neq A\subsetneq[N]\\ 1\in A}} \Sigma_{A|A^c},$$

这会得到相同的集合。

命题 2 20 $\subset$。

$\mathbb{P}$ H
（双乘积轨迹的主分解）。 的消失理想双分离（ ）为

$$I\big(X^{(N)}_{\text{bisep}}\big) = \bigcap_{\emptyset\neq A\subsetneq[N]} I\big(\Sigma_{A|A^c}\big).$$

每个 $I(\Sigma_{A|A^c})$ 都是素理想，因此右侧是一个主分解（事实上是素理想的交集）。

证明。由 命题 2.18(1)，有限个闭集之并的理想是它们的交集：

$$I\Big(\bigcup_A \Sigma_{A|A^c}\Big) = \bigcap_A I(\Sigma_{A|A^c}).$$

此外，塞格雷映射是闭浸入，而 $\mathbb{P}(H_A)\times\mathbb{P}(H_{A^c})$ 不可约（不可约簇的乘积态仍不可约），因此其像 $\Sigma_{A|A^c}$ 也不可约。不可约射影簇的消失理想是素理想，所以 $I(\Sigma_{A|A^c})$ 是素理想。由于素理想是主理想，右侧给出了一个主分解。t

注 2.21。 命题 2.20意味着，一般而言，

$$X^{(N)}_{\text{bisep}} \text{ is not irreducible, and is formed as a union of the } \Sigma_{A|A^c}.$$

因此，二积性带有一种离散的“或”结构：

which bipartition does it factorize in?

这一点体现为素理想的交集。

如果多个划分同时成立，会发生什么?

定义 2.22（划分的公共细化）。对于两个划分 $\pi = \{B_a\}$ 和 $\pi' = \{C_b\}$，所有非空交集组成的集合

$$B_a \cap C_b \qquad (1 \le a \le \ell,\ 1 \le b \le \ell')$$

再次形成一个分拆。这称为 π 和 π'的公共细化（交），我们记作

$$\pi \wedge \pi'.$$

这对应于划分格中的 $\wedge$ 运算。

引理 2.23（若一个态是关于两个划分的乘积态，则它也是关于这两个划分之交的乘积态）。对于任意划分 π，π'，作为点集，有

$$\Sigma_\pi \cap \Sigma_{\pi'} = \Sigma_{\pi \wedge \pi'}.$$

证明。包含关系 $\Sigma_{\pi\wedge\pi'} \subset \Sigma_\pi \cap \Sigma_{\pi'}$ 显然成立，因为 $\pi \wedge \pi'$ 是 π 和π'的公共细化：如果能进行更细致的因式分解，那么它既是 π-乘积态，也是 π'-乘积态。
反过来，设$[\psi] \in \Sigma_\pi \cap \Sigma_{\pi'}$ 并选取一个代表元 $\psi \neq 0$。由于我们处于射影空间中，可以吸收标量，并假设等式在向量层面成立：

$$\psi = \bigotimes_{B\in\pi} u_B \ = \ \bigotimes_{C\in\pi'} v_C \qquad (u_B \in H_B \setminus \{0\},\ v_C \in H_C \setminus \{0\}).$$

固定一个块 $B_0 \in \pi$ 并令

$$u_{B_0^c} := \bigotimes_{B\in\pi,\ B\neq B_0} u_B \in H_{B_0^c} \setminus \{0\},$$

其中 $B_0^c = [N] \setminus B_0$。
（泛函的选取）对于 π' 的每个块 C，考虑 $C \cap B_0^c$（若为空则忽略）。于是

$$H_{B_0^c} \ \cong \ \bigotimes_{C\in\pi'} H_{C\cap B_0^c},$$

因此

$$H^\vee_{B_0^c} \ \cong \ \bigotimes_{C\in\pi'} H^\vee_{C\cap B_0^c}.$$

在此对应关系下，可分解（纯）泛函 $\varphi = \bigotimes_{C\in\pi'} \varphi_{C\cap B_0^c}$ 线性生成 $H^\vee_{B_0^c}$。由于 $u_{B_0^c} \neq 0$，存在这样一个可分解泛函，使得

$$\exists\ \varphi = \bigotimes_{C\in\pi'} \varphi_{C\cap B_0^c} \in H^\vee_{B_0^c} \quad \text{s.t.} \quad \varphi(u_{B_0^c}) \neq 0.$$

（否则，所有纯泛函都会消去 $u_{B_0^c}$，因此它们的线性张成也会消去 $u_{B_0^c}$，也就是说，$H^\vee_{B_0^c}$ 中的所有元素都会消去它，这就产生了矛盾。）经过缩放，我们可以假设 $\varphi(u_{B_0^c}) = 1$。
（沿交进行因式分解）应用缩并映射

$$(\mathrm{id}_{H_{B_0}} \otimes \varphi) : H_{B_0} \otimes H_{B_0^c} \to H_{B_0}$$

到 ψ。使用 $\psi = u_{B_0} \otimes u_{B_0^c}$ 得到

$$(\mathrm{id} \otimes \varphi)(\psi) = (\mathrm{id} \otimes \varphi)(u_{B_0} \otimes u_{B_0^c}) = \varphi(u_{B_0^c})\, u_{B_0} = u_{B_0}.$$

另一方面，写出$\psi = \bigotimes_{C\in\pi'} v_C$ 并使用 $\varphi = \bigotimes_{C\in\pi'} \varphi_{C\cap B_0^c}$，我们得到

$$(\mathrm{id} \otimes \varphi)(\psi) = \bigotimes_{C\in\pi'} \Big((\mathrm{id}_{H_{B_0\cap C}} \otimes \varphi_{C\cap B_0^c})(v_C) \Big) \in \bigotimes_{C\in\pi'} H_{B_0\cap C}.$$

因此， u_{B_0} 沿着各部分 $\{B_0 \cap C\}_{C\in\pi'}$因式分解。
对每个 $B_0 \in \pi$都这样做，我们得到

$$\psi = \bigotimes_{B\in\pi} u_B = \bigotimes_{B\in\pi} \bigotimes_{C\in\pi'} w_{B\cap C} = \bigotimes_{D\in\pi\wedge\pi'} w_D,$$

因此 $[\psi] \in \Sigma_{\pi\wedge\pi'}$。 🐾

注 2.24。 作为线性代数中的陈述，集合论等式 $\Sigma_\pi \cap \Sigma_{\pi'} = \Sigma_{\pi\wedge\pi'}$ 是正确的。相比之下，概形论交（由理想和 $I(\Sigma_\pi) + I(\Sigma_{\pi'})$定义的闭子概形）通常更为微妙；特别是，当交集不是横截时，它可能包含幂零元。在本文中，讨论乘积/纠缠判据时，我们首先考虑集合层面上的等式。

一个非平凡例子。 现在令 $N = 3$ 和 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes H_3$。只有三种二分划分：

$$1|23, \qquad 2|13, \qquad 3|12.$$

因此，定义 2.19变为

$$X^{(3)}_{\mathrm{bisep}} = \Sigma_{1|23} \cup \Sigma_{2|13} \cup \Sigma_{3|12}, \qquad X^{(3)}_{\mathrm{GME}} = \mathbb{P}(H) \setminus X^{(3)}_{\mathrm{bisep}}.$$

本文中我们也将 $X^{(3)}$ 双分离称为双乘积轨迹。

命题 2.25 （三部双乘积轨迹的主分解）。

$$I\big(X^{(3)}_{\mathrm{bisep}}\big) = I(\Sigma_{1|23}) \cap I(\Sigma_{2|13}) \cap I(\Sigma_{3|12}).$$

每个 $I(\Sigma_{i|jk})$ 都是素理想，因此右侧是一个主分解（事实上是一个素数分解）。

证明。 这只是命题 2.20 在 $N = 3$上的特例。 🐾

引理 2.26。设 $\psi \neq 0$。如果

$$[\psi] \in \Sigma_{1|23} \cap \Sigma_{2|13},$$

那么 $[\psi] \in \Sigma_{1|2|3}$。类似地，任意两个不同二分划分的交集满足

$$\Sigma_{1|23} \cap \Sigma_{2|13} = \Sigma_{1|23} \cap \Sigma_{3|12} = \Sigma_{2|13} \cap \Sigma_{3|12} = \Sigma_{1|2|3} \qquad (\textit{as point sets}).$$

证明。 例如，利用关于划分之交的一般论述（引理 2.23），

$$(1|23) \wedge (2|13) = 1|2|3.$$

对于 $N = 3$，两个不同二分划分的交总是完整划分，因此

$$\Sigma_{1|23} \cap \Sigma_{2|13} = \Sigma_{1|2|3}.$$



注 2.27 （为什么 $N = 3$ 很特殊）。对于 $N = 3$，只有三个二分划分；如果一个态对于两个不同的二分划分都是乘积态，那么它们的交就是完整划分。因此

$$(\text{pr对于一个二分划分是乘积态}) \wedge (\text{对于另一个二分划分是乘积态}) \Rightarrow \text{完全乘积态} .$$

然而，对于 $N \geq 4$，即使满足两个不同的二分划分，它们的交也未必能一直细化到 N 块。比如，它可能变成

$$1|2|(\text{the rest}).$$

因此，该态未必是完全乘积态。例如，当 $N = 4$ 时，如果

$$\psi = a_1 \otimes a_2 \otimes \Phi_{34} \qquad (\Phi_{34} \in H_3 \otimes H_4 \text{ is entangled}),$$

then

$$[\psi] \in \Sigma_{1|234} \cap \Sigma_{2|134},$$

但 $[\psi] \notin \Sigma_{1|2|3|4}$。这种现象（取部分边缘态后，剩余因子中仍可能存在纠缠）是多体情形（$N \geq 4$）中特有的新特征。

2.4.5 GME 的代数性质

二分划分纠缠是“子式 $\neq 0$ 的逻辑或”。

注 2.28 （二分划分 $A|A^c$：乘积态是逻辑与，纠缠是逻辑或）。 对于二分划分 $A|A^c$，轨迹 $\Sigma_{A|A^c} \subset \mathbb{P}(H)$（通过展平）是秩一张量的集合，其理想由

$$I(\Sigma_{A|A^c}) = \langle\ 2 \times 2 \text{ minors of } M_{A|A^c}\ \rangle.$$

将生成元集合记为 $\mathcal{M}_{A|A^c}$，则有

$$\Sigma_{A|A^c} = V\big(I(\Sigma_{A|A^c})\big) = \bigcap_{\Delta \in \mathcal{M}_{A|A^c}} V(\Delta).$$

因此，补集为

$$\mathbb{P}(H) \setminus \Sigma_{A|A^c} = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{M}_{A|A^c}} D(\Delta), \qquad D(\Delta) := \{[\psi] \in \mathbb{P}(H) \mid \Delta(\psi) \neq 0\}.$$

作为逻辑命题，

$$(\text{product in } A|A^c) \iff \bigwedge_{\Delta \in \mathcal{M}_{A|A^c}} (\Delta = 0), \qquad (\text{entangled in } A|A^c) \iff \bigvee_{\Delta \in \mathcal{M}_{A|A^c}} (\Delta \neq 0).$$

也就是说，至少一个子式不为零是判断相对于该二分划分而言是否纠缠的初等判据。

N方体 GME 是“对所有二分划分取 OR，再取 AND”。

注 2.29 （GME 是“或的与”（一般 N））。 根据定义 2.19，

$$X_{\mathrm{GME}}^{(N)} = \mathbb{P}(H) \setminus \Big(\bigcup_{\emptyset \neq A \subsetneq [N]} \Sigma_{A|A^c} \Big) = \bigcap_{\emptyset \neq A \subsetneq [N]} \big(\mathbb{P}(H) \setminus \Sigma_{A|A^c} \big).$$

每个 $\mathbb{P}(H) \setminus \Sigma_{A|A^c}$ 都可以根据注记 2.28写成 $\bigcup_{\Delta \in \mathcal{M}_{A|A^c}} D(\Delta)$，因此

$$[\psi] \in X_{\mathrm{GME}}^{(N)} \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{\emptyset \neq A \subsetneq [N]} \Big(\bigvee_{\Delta \in \mathcal{M}_{A|A^c}} (\Delta(\psi) \neq 0) \Big).$$

因此，GME 可以如下刻画：

对于每个二分划分，至少有一个 2×2 子式非零。

注记 2.30 （重要：纠缠轨迹不是零点集）。 轨迹 $\Sigma_{A|A^c}$ 和 $X^{(N)}$ 双分离 是由方程定义的闭集，因此可以用理想来描述（如 $V(I)$）。相比之下，它们的补集 $X^{(N)}$ GME 一般是一个开集。

由于射影空间 $\mathbb{P}(H)$ 不可约，既开又闭的子集只有空集和整个空间。因此，

从代数几何上看，用理想描述非纠缠（乘积态）是自然的，并将纠缠态视为其补集（一个开轨迹）。

GME 是扎里斯基开集。

命题 2.31 （GME 轨迹是扎里斯基开且稠密的（一般 N））。 假设 $d_i \geq 2$。那么$X^{(N)}$ GME 是扎里斯基开的，而且还是稠密的。特别地， $X^{(N)}$ GME 非空。

> 证明。 轨迹 $X^{(N)}$ 双分离 是闭集（塞格雷簇）的有限并，因此它是闭的，而其补集 $X^{(N)}$ GME 是开集。
>
> 此外，每个 $\Sigma_{A|A^c} \subset \mathbb{P}(H)$ 都是塞格雷簇，因此 $\dim \Sigma_{A|A^c} = (\dim H_A - 1) + (\dim H_{A^c} - 1)$，而 $\dim \mathbb{P}(H) = \dim H - 1$。如果 $d_i \geq 2$，那么 $\dim H = (\dim H_A)(\dim H_{A^c})$，并且
>
> $$(\dim H - 1) - \dim \Sigma_{A|A^c} = (\dim H_A - 1)(\dim H_{A^c} - 1) > 0.$$
>
> 因此， $\Sigma_{A|A^c}$ 始终是一个真闭子集。因此，有限并 $X^{(N)}$ 双分离 也是真闭的，所以它的补集 $X^{(N)}$ GME 是稠密的。t

3 观察：一个简短的数论类比

由于本文所考虑的量子态仅限于纯态，因此在某些方面，量子态看起来似乎会像“素数”一样表现。特别是，本文的核心问题——一个态是否能够进行因式分解（即它是乘积态还是纠缠态）——与自古以来人们一直思考的经典问题并非完全不同：一个整数是否存在素因数分解。（“量子态是否能够进行因式分解？”这一问题将引发基础性问题

在不久的将来。）因此，在本节中，我们将思考这一富有直觉性的类比究竟能延伸到何种程度，以及它又会在何处失效。

由于向量形式的态相加已经有定义，我们保留其原样（忽略整体标量；若某个运算产生零向量，则将该态视为“消失”）。我们将张量积重新解释为整数乘法的类比。

相关文献。 本文从“因式分解”的角度探讨数论与量子可分性，但早期研究也讨论过素因数分解和中国剩余定理（CRT）在有限维量子系统中的结构性呈现 [5]。此外，也有人提出根据整除性来组织有限量子系统之间的包含关系 $m \mid n$，并据此构建 T_0 拓扑 [6]。此外，还有“素数态”这一构造，它直接利用素数序列构建量子态，并分析其纠缠 [7]。

素数。 在数论中，“素”一词至少有以下两种含义。

- **素元类型的“素”：** 指不能进行乘法分解的元素意义上的“素”。一个典型例子是素数 $p \in \mathbb{Z}$，其特征为

$$p = ab \;\Rightarrow\; a = \pm 1 \text{ or } b = \pm 1.$$

- **素理想型“素”：** 交换环 R 的一个素理想 $\mathfrak{p}$ 是满足$\mathfrak{p} \subsetneq R$ 且对所有 $f,\ g \in R$的理想，

$$fg \in \mathfrak{p} \;\Rightarrow\; f \in \mathfrak{p} \text{ or } g \in \mathfrak{p}.$$

  此外，如果我们在 $X = \operatorname{Spec} R$ 上赋予扎里斯基拓扑，那么

$$V(\mathfrak{p}) := \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\} = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$$

  是一个不可约闭子集，而 $\mathfrak{p}$ 是 $V(\mathfrak{p})$ 的泛点。反过来，$\operatorname{Spec} Z \subset R$ 中的任意不可约闭子集都有唯一的泛点 $\eta \in Z$，使得

$$Z = \overline{\{\eta\}} = V(\eta).$$

  因此，素理想与不可约闭子集通过下式一一对应

$$\mathfrak{p} \longleftrightarrow V(\mathfrak{p})$$

  其逆映射为 $Z \mapsto I(Z)$。

由于 $\mathbb{Z}$ 是唯一因子分解整环（UFD），上述“素”的概念在 $\mathbb{Z}$ 中是一致的。然而，一般而言，它们并不一致。

因此，从现在起，我们将分别讨论量子态集合中“素”的这两种含义。

(1) 素元类型的“素”（相对不可约性）：在张量积（“乘法”）下不可分解。

定义 3.1（关于二分划分的乘积态／纠缠（“点”的一种性质））。令 $H = H_1 \otimes \cdots \otimes H_N$。对于非空真子集 $\emptyset \neq A \subsetneq [N] := \{1, \ldots, N\}$，设

$$H_A := \bigotimes_{i \in A} H_i, \qquad H_{A^c} := \bigotimes_{j \in A^c} H_j.$$

纯态 $[\psi] \in \mathbb{P}(H)$ 被称为

- $A|A^c$-乘积态（在划分 $A|A^c$下的乘积态），如果存在非零向量 $0 \neq u \in H_A$ 和$0 \neq v \in H_{A^c}$，使得
$$[\psi] = [u \otimes v].$$
- $A|A^c$-纠缠（在划分 $A|A^c$ 下纠缠），如果它不是 $A|A^c$-乘积态。

整数的素性相对于乘法结构而言是绝对的。相比之下，纯态能否因式分解取决于所选的张量积结构，也取决于所考虑的二分划分 $A|A^c$。因此，从

相对于固定划分，不存在张量分解，

可以说，纠缠态具有“类素性”。

正如自然数的素因数分解是唯一确定的，完全乘积态的分解（在射影空间中）也唯一确定。

命题 3.2（完全乘积分解的射影唯一性）。设 $H = H_1 \otimes \cdots \otimes H_N$，并设 $v_i,\ w_i \in H_i \setminus \{0\}$。若

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \ = \ w_1 \otimes \cdots \otimes w_N \ \in H,$$

则存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in k^\times$，使得

$$w_i = \lambda_i v_i \quad (1 \leq i \leq N), \qquad \prod_{i=1}^{N} \lambda_i = 1.$$

特别地，射影点是唯一确定的：

$$[v_i] = [w_i] \in \mathbb{P}(H_i) \qquad (1 \leq i \leq N).$$

证明。固定 i，并对每个 $j \neq i$选取 $\varphi_j \in H_j^\vee$，使得 $\varphi_j(v_j) = 1$。根据张量积的泛性质，这定义了一个缩并映射

$$T_i := \bigotimes_{j \neq i} \varphi_j : \ H \longrightarrow H_i,$$

将 $H = \left(\otimes_{j \neq i} H_j\right) \otimes H_i$ 视为.....。于是

$$T_i(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N) = v_i.$$

另一方面，

$$T_i(w_1 \otimes \cdots \otimes w_N) = \left(\prod_{j \neq i} \varphi_j(w_j)\right) w_i.$$

由于它们相等，对于某个 $\alpha_i \neq 0$，我们有 $v_i = \alpha_i w_i$，因此 $w_i = \lambda_i v_i$，其中 $\lambda_i = \alpha_i^{-1}$。最后，

$$w_1 \otimes \cdots \otimes w_N = (\lambda_1 \cdots \lambda_N)\,(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N),$$

因此，与原等式比较可得 $\prod_i \lambda_i = 1$。

推论 3.3（Segre 映射的单射性）。塞格雷映射

$$\mathrm{Seg}: \ \mathbb{P}(H_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(H_N) \longrightarrow \mathbb{P}(H), \qquad ([v_1], \ldots, [v_N]) \longmapsto [v_1 \otimes \cdots \otimes v_N]$$

是单射。因此，对于全乘积态 $[\psi] \in \Sigma_{1|\cdots|N} := \mathrm{im}(\mathrm{Seg})$，满足条件的射影点元组 $([v_1], \ldots, [v_N])$

$$[\psi] = [v_1 \otimes \cdots \otimes v_N]$$

是唯一地确定的。

接下来，我们说明，关于态 $[\psi]$可以按照其可分性模式进行因式分解的划分信息，可以通过一个最细划分唯一地组织起来。以下陈述在点集意义下成立。

定义 3.4。对于态 $[\psi] \in \mathbb{P}(H)$，定义

$$\mathcal{P}([\psi]) := \{\ \pi \text{ a partition} \mid [\psi] \in \Sigma_\pi\ \}$$

使 $[\psi]$ 成为乘积态的划分集合（它非空，因为其中总包含平凡划分 $\{[N]\}$）。

定义 $[\psi]$ 的最细乘积划分为

$$\pi_{\min}([\psi]) := \bigwedge_{\pi \in \mathcal{P}([\psi])} \pi,$$

其中 $\wedge$ 表示公共细化。

定理 3.5（最细划分的存在性与唯一性）。设 $[\psi] \in \mathbb{P}(H)$ 为任意对象。那么：

1.（存在性）相对于 $\pi_{\min}([\psi])$，$[\psi]$ 是乘积态：

$$[\psi] \in \Sigma_{\pi_{\min}([\psi])}.$$

2.（唯一性）使 $[\psi]$ 成为乘积态的划分 ρ，恰好是 $\pi_{\min}([\psi])$ 的更粗的划分（即通过合并块得到的划分）。也就是说，对于任意划分 ρ，

$$[\psi] \in \Sigma_\rho \quad \Longleftrightarrow \quad \rho \textit{ is obtained by merging blocks of } \pi_{\min}([\psi]).$$

因此，最细划分（可分性模式）是唯一的，并且可以仅从 $\pi_{\min}([\psi])$ 中恢复关于 $[\psi]$乘积结构的所有信息。

证明。由于固定 N时划分的总数有限，因此集合 $\mathcal{P}([\psi])$是有限的。因此，$\wedge_{\pi\in\mathcal{P}([\psi])}\pi$ 定义良好。

(1) 对任意 π，$\rho \in \mathcal{P}([\psi])$，有 $[\psi] \in \Sigma_\pi \cap \Sigma_\rho$，因此由引理 2.23 可得 $[\psi] \in \Sigma_{\pi\wedge\rho}$。如此有限次重复即可得到

$$[\psi] \in \Sigma_{\wedge_{\pi\in\mathcal{P}([\psi])}\pi} = \Sigma_{\pi_{\min}([\psi])}.$$

(2) 若 ρ 是通过合并 $\pi_{\min}$ 的块得到的（$[\psi]$）（因此 ρ 更粗），那么 $\pi_{\min}$（$[\psi]$）-乘积态分解只需重新组合一些张量因子，就会变成 ρ-乘积态分解，因此 $[\psi] \in \Sigma_\rho$。

反过来，假设 $[\psi] \in \Sigma_\rho$。那么 $\rho \in \mathcal{P}$（$[\psi]$）。根据定义，$\pi_{\min}$（$[\psi]$）是 $\mathcal{P}$（$[\psi]$）中所有元素的公共细化，因此特别地，$\pi_{\min}$（$[\psi]$）细化了 ρ（等价地，ρ 比 $\pi_{\min}$（$[\psi]$）更粗）。因此，ρ 是通过合并 $\pi_{\min}$ 的块得到的（$[\psi]$）。t

这个定理的陈述及含义可以解释如下。如果 $\pi_{\min}([\psi]) = \{B_1, \ldots, B_k\}$，那么 $[\psi]$ 可以写成

$$[\psi] = [\psi_{B_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{B_k}],$$

而且，这种块分解在射影意义下是唯一的。

此外，由于 $\pi_{\min}([\psi])$ 是最细的，每个块态 $[\psi_{B_a}]$ 都不能在该块内进一步因式分解。事实上，如果 B_a 存在非平凡的进一步划分，并且 $[\psi_{B_a}]$ 关于该划分是乘积态，那么整个划分 $\pi_{\min}([\psi])$ 就可以进一步细化，这就产生了矛盾。因此，每个 B_a都可以被理解为内部“真正纠缠的块”。

例 3.6（情形 $N = 3$）。让我们考察情形 $N = 3$。这种情况下只有五种划分：

$$1|2|3, \quad 1|23, \quad 2|13, \quad 3|12, \quad 123.$$

因此，$\pi_{\min}([\psi])$ 总是其中之一。

- 如果 $\pi_{\text{最小值}}([\psi]) = 1|2|3$，那么 $[\psi]$ 是完全乘积态。
- 如果 $\pi_{\text{最小值}}([\psi]) = 1|23$（或循环置换），那么 $[\psi]$是双乘积（仅在某个二分划分下为乘积态）。
- 如果 $\pi_{\text{最小值}}([\psi]) = 123$，那么 $[\psi]$ 是 GME（在任何二分划分下都不是乘积态）。

如注释 2.27所述，对于 $N = 3$，两个不同二分划分的交，例如 $1|23$ 和 $2|13$，是$1|2|3$，因此在两个不同二分划分下均为乘积态，意味着是完全乘积态。对于 $N \geq 4$，这一点通常不成立（交可能具有 $1|2|$（其余部分）的形式）。

(2) 素理想类型的“素”：乘积轨迹是不可约闭集，其消失理想是素理想。 正如我们在命题 2.20中已经看到的，对于二分划分 $A|A^c$，乘积轨迹

$$\Sigma_{A|A^c} \subset \mathbb{P}(H)$$

是一个不可约闭子集，其消失理想

$$I_{A|A^c} := I(\Sigma_{A|A^c}) \subset S$$

是一个**素理想**。此外，定义2.19中的双乘积轨迹，

$$X_{\text{bisep}}^{(N)} := \bigcup_{\emptyset \neq A \subsetneq [N]} \Sigma_{A|A^c} \subset \mathbb{P}(H),$$

具有主分解——对应于分解为不可约分支——（命题 2.20）：

$$I\left(X_{\text{bisep}}^{(N)}\right) = \bigcap_{\emptyset \neq A \subsetneq [N]} I_{A|A^c}.$$

回顾数论中的基本例子 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$：对于一个整数 $n \neq 0$,

$$V(n) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \mid (n) \subset \mathfrak{p}\} = \{(p) \mid p \text{ is prime and } p \mid n\},$$

so

$$V(n) = \bigcup_{p|n} V(p), \qquad I(V(n)) = \bigcap_{p|n} (p).$$

以完全相同的形式，在量子侧我们有

$$X_{\text{bisep}}^{(N)} = \bigcup_{A|A^c} \Sigma_{A|A^c}, \qquad I\left(X_{\text{bisep}}^{(N)}\right) = \bigcap_{A|A^c} I_{A|A^c}.$$

从这个意义上说，这个类比相当贴切。

然而，一个重要的区别在于，在 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 中，“素数 p”直接生成“素理想（p）”，而在 $\mathbb{P}$（H）中，“态 $[\psi]$”并不会自然地产生上述类型的素理想。另一个区别是，在数论中，（p）是 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$中的闭点，而 GME 轨迹是扎里斯基开集（命题2.31）。

注 3.7（给细心读者的注释）。• $V(n)$ 只记住 n 的素因子集合，而忽略指数（ p-进赋值）。例如， $V(p^k) = V(p)$。因此，上述比较并不是针对素因数分解本身，而是针对根基层面／不可约分支集合层面。

• 一个点 $[\psi] \in \mathbb{P}(H)$ 对应于点理想 $I([\psi])$（一个极大齐次理想），它是素理想。然而，这里与量子态相关的素理想，是诸如 $I_{A|A^c} = I(\Sigma_{A|A^c})$ 这样的理想，也就是定义乘积轨迹（由方程定义的闭集）的素理想。从这个意义上说，两者的作用不同：单个态 $[\psi]$ 并不会自然地产生一个以这种方式编码“乘积性”的素理想。

总结。概括上述讨论，可以这样说。

1. **素元类型的“素”：** 对于固定的二分划分，或对于所有二分划分，可以将 GME 性质——不能分解为张量积——与整数“不可分解（素）”这一概念进行比较。然而，这是一种取决于所选分拆的相对不可约性，并非数论中的绝对概念。（如果存在因式分解，那么它在射影意义下是唯一的。）

2. **素理想型“素”：** 乘积轨迹 $\Sigma_{A|A^c}$ 是一个不可约闭子集，因此$I_{A|A^c}$ 是一个素理想。双乘积轨迹是这些轨迹的并集，其消失理想具有如下主分解：素理想的交集。

因此，用一句话概括，

GME 是不属于　　乘积轨迹所给出的素分量并集的点的集合。

本节中，我们从乘法的视角，略窥了量子态与数论的世界。在§4中，我们将从加法的视角作进一步观察。

4　Add性分解：张量秩与割线簇

本节中，作为迄今讨论过的“乘法侧”（能否在张量积下进行因式分解）的对应视角，我们将介绍**加法侧**（叠加）。正如数论中有一对基本问题

乘法　　n：素因数分解；加法：华林问题（需要多少个加数？）　　，

对于量子态，自然可以考虑：

乘法：该态能否分解为乘积态？加法：求和时需要多少个乘积态？

我们在§3中探讨了“乘法”视角。现在我们转向“加法”视角。本小节的标准参考文献是 [4]。

4.1 通过乘积态之和进行度量：张量秩

固定一个子系统分解

$$H \;=\; H_1 \otimes \cdots \otimes H_N,$$

并将纯态视为射影空间 $\mathbb{P}(H)$中的点。

定义 4.1（张量秩）。对于 $0 \neq \psi \in H$，定义张量秩 $\mathrm{rank}_{\otimes}(\psi)$为

$$\mathrm{rank}_{\otimes}(\psi) := \min\left\{ r \;\middle|\; \psi = \sum_{i=1}^{r} v_{i1} \otimes \cdots \otimes v_{iN} \text{ for some } v_{ij} \in H_j \right\}.$$

对于射影态 $[\psi]$，标量乘法不会改变这一点，因此我们可以写作

$$\mathrm{rank}_{\otimes}([\psi]) := \mathrm{rank}_{\otimes}(\psi).$$

一般而言，即使写成

$$\psi = \sum_{i=1}^{r} c_i \, (v_{i1} \otimes \cdots \otimes v_{iN}) \qquad (c_i \in \mathbb{C}),$$

也可以将每一项中的 c_i 吸收到（比如） v_{i1} 中：

$$c_i \, (v_{i1} \otimes \cdots \otimes v_{iN}) = (c_i v_{i1}) \otimes v_{i2} \otimes \cdots \otimes v_{iN}.$$

因此，定义中使用的不带系数形式已经足够。

当 $N = 2$、 $H = H_A \otimes H_B$ 可以与矩阵对应，且秩一张量对应于秩一矩阵。因此，秩$_{\otimes}(\psi)$ 与矩阵（施密特）秩（定理 5.2）一致。

4.2 作为闭集的滤过：割线簇与边界秩

张量秩衡量一个态能否写成乘积态的有限和，但在多体系统中会出现一个重要现象：

$$\text{the set “rank} \le r\text{” is not Zariski closed.}$$

由于代数几何自然地处理由方程定义的对象（闭集），我们于是引入通过取扎里斯基闭包得到的概念（边界秩）。

注 4.2 （闭性失效通常发生在 $N \ge 3$）。 在二分情形（$N = 2$）中，集合 $\{[\psi] \mid \text{秩}_{\otimes}(\psi) \le r\}$ 是由（$r+1$）$\times (r+1)$ 子式定义的行列式簇，因此是扎里斯基闭的（见 §4.3）。相较之下，对于 $N \ge 3$，此集合通常不是闭集，而且张量秩可能在极限中下降（后一个例子中的 W 态就是典型实例）。

> **定义 4.3** （r 阶割线簇）。 对于射影簇 $X \subset \mathbb{P}^m$，定义其 r 阶割线簇 $\sigma_r(X)$ 为
>
> $$\sigma_r(X) := \overline{\bigcup_{x_1,\dots,x_r \in X} \langle x_1, \dots, x_r \rangle} \subset \mathbb{P}^m.$$
>
> 这里 $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ 表示包含它们的最小射影线性子空间（当 $r = 2$ 时为割线，当 $r = 3$ 时为割平面），而 $\overline{(\cdot)}$ 表示扎里斯基闭包。

注 4.4。 上的横线表示 $\overline{\sigma_r(X)}$ 的扎里斯基闭包。因此，条件 $[\psi] \in \sigma_r(X)$ 也可以改述为，例如：存在一个单参数族 $[\psi(t)] (t \in k^{\times})$，使得对每个 $t \neq 0$，$[\psi(t)]$ 都位于由 r 个 X 中的点张成的射影线性子空间 $\langle x_1(t) \dots, x_r(t) \rangle$ 中，并且（允许在射影空间中进行标量缩放）$[\psi]$ 是极限 $t \to 0$。

> **定义 4.5** （边界秩（割线秩））。 对于 $0 \neq \psi \in H$，定义边界秩 （割线秩）为
>
> $$\underline{\text{rank}}_{\otimes}(\psi) := \min\{\, r \mid [\psi] \in \sigma_r(\Sigma) \,\}.$$
>
> 同一定义也适用于射影态 $[\psi]$。

不等式 $\text{rank}_{\otimes}(\psi) \le r$ 表示，$[\psi]$ 可以由位于由 r 个乘积态张成的射影空间中的点取极限得到。因此，一般而言，

$$\underline{\text{rank}}_{\otimes}(\psi) \le \text{rank}_{\otimes}(\psi),$$

因为允许取极限可以减少所需的加和项数。

命题 4.6 （张量秩、边界秩与割线簇）。 设 $0 \neq \psi \in H$。则：

1. 若 $\text{rank}_{\otimes}(\psi) \le r$，则 $[\psi] \in \sigma_r(\Sigma)$。
2. $[\psi] \in \sigma_r(\Sigma) \iff \underline{\text{rank}}_{\otimes}(\psi) \le r$。

> 证明。 (1) 如果 $\psi = \sum_{i=1}^{r} \psi_i$ 中的每个 ψ_i 都是一个乘积态，那么 $[\psi]$ 位于由 $\langle [\psi_1]、\dots\dots、[\psi_r] \rangle$ 张成的射影线性子空间中，其中张成元为 $[\psi_1]、\dots\dots、[\psi_r] \in \Sigma$。因此，$[\psi]$ 位于所有此类线性子空间的并集中，因而位于其扎里斯基闭包 $\sigma_r(\Sigma)$ 中。

(2) 这正是边界秩的定义。 🐾

由于 $\sigma_r(\Sigma)$是扎里斯基闭的（因此是射影簇），其消失理想

$$I(\sigma_r(\Sigma))$$

是有定义的。由此，能够由 $\leq r$ 乘积态逼近的态的滤过便成为一个可由方程（齐次多项式）检测的对象。

4.3 二分情形

二分滤过 $R_{\leq r}$ 在§5.4中讨论的内容恰好与割线簇一致。

命题 4.7 (二分情形： $\sigma_r(\Sigma) = R_{\leq r}$)。 设 $H = H_A \otimes H_B$，并令 $\Sigma = \mathbb{P}(H_A) \times \mathbb{P}(H_B) \subset \mathbb{P}(H)$ 为塞格雷簇。那么对于任意 r，

$$\sigma_r(\Sigma) = R_{\leq r}$$

成立。（当 $r \geq \min(d_A, d_B)$ 时，两边都等于 $\mathbb{P}(H)$，因此这是显然的。）特别地，在二分情形下，

$$\underline{\mathrm{rank}}_{\otimes}(\psi) = \mathrm{rank}_{\otimes}(\psi) = \mathrm{SR}(\psi)$$

成立（秩与边界秩相同）。

证明。 $\sigma_r(\Sigma) \subset R_{\leq r}$：根据定义， $\sigma_r(\Sigma)$ 是由 r 个秩一矩阵张成的射影子空间之并的扎里斯基闭包。显然，该并中的任意点的矩阵秩均为$\leq r$，而“矩阵秩 $\leq r$”这一条件是一个闭条件，由 $(r+1)$ 阶子式的消失定义。因此取扎里斯基闭包后，该条件仍然成立，所以 $\sigma_r(\Sigma) \subset R_{\leq r}$。

$\sigma_r(\Sigma) \supset R_{\leq r}$：任意秩为 $\leq r$ 的矩阵都可以（根据基本线性代数）分解为至多 r 个秩一矩阵之和。因此， $R_{\leq r}$ 中任意一点都落在由 r 个 Σ 中的点张成的射影线性子空间上，故属于 $\sigma_r(\Sigma)$。t

因此，在二分情形中，由子式定义的理想给出

$$I(\sigma_r(\Sigma)) = I(R_{\leq r}).$$

4.4 在多分系统中：秩与边界秩可能不同

在多分系统中，由于张量秩轨迹并非闭集，秩与边界秩不同是一种典型现象。作为一个非平凡例子，我们考察 3 个量子比特的 W 态，并证明 $\mathrm{rank}_{\otimes} = 3$ ，而 $\underline{\mathrm{rank}}_{\otimes} = 2$。

令 $H = \overline{(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}}$ ，并考虑

$$|W\rangle := |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle.$$

该态的张量秩为 3，边界秩为 2。

要了解边界秩 ≤ 2，考虑依赖于 t 的态

$$\psi(t) := (|0\rangle + t|1\rangle)^{\otimes 3} - |000\rangle.$$

右侧是两个乘积态之差，因此对于 $t \neq 0$ ，我们有 $\mathrm{rank}_{\otimes}(\psi(t)) \leq 2$。展开后，

$$\psi(t) = t(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) + t^2(\cdots) + t^3|111\rangle.$$

由于射影空间将标量倍视为相同，

$$[\psi(t)] = \left[\frac{1}{t}\psi(t)\right] = \left[\, |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + t(\cdots) + t^2|111\rangle \,\right] \qquad (t \neq 0),$$

因此 $[\psi(t)] \to [W]$ 如 $t \to 0$。（并且由于 W不是乘积态，这意味着秩$_{\otimes}(W) = 2$。）

注 4.8 （关于秩$_{\otimes}(W) = 3$的一个简单证明）。 由 $W = |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle$可知，秩$_{\otimes}(W) \leq 3$。

反过来，假设秩$_{\otimes}(W) \leq 2$。那么存在一个分解

$$W = u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_2.$$

将 W 视为 $H_1 \otimes (H_2 \otimes H_3)$ 的一个元素，并考虑缩并映射 $W\colon H_1^\vee \to H_2 \otimes H_3$。那么 $\mathrm{Im}(W)$ 包含于 $\{v_1 \otimes w_1,\ v_2 \otimes w_2\}$的张成空间中。特别地，若 W的秩为 2，那么其像必定由两个线性无关的秩 1（乘积态）向量生成（若它们线性相关，W 的秩就为 1）。

然而，直接计算可得，对于 H_1 的基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 和对偶基 $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} \subset H_1^\vee$，

$$\varepsilon_0(W) = |01\rangle + |10\rangle, \qquad \varepsilon_1(W) = |00\rangle,$$

因此

$$\mathrm{Im}(W) = \mathrm{span}\{|00\rangle,\ |01\rangle + |10\rangle\} \subset H_2 \otimes H_3.$$

在这个二维子空间中，唯一的秩 1 向量是 $|00\rangle$ 的标量倍。事实上，将 $H_2 \otimes H_3 \simeq$ 视为 $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$，向量 $a|00\rangle + b(|01\rangle + |10\rangle)$ 对应于 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$，其行列式为 $-b^2$。因此，只有当 $b = 0$ 时，它的秩才是 1（$\det = 0$）。这与 $\mathrm{rank}_{\otimes}(W) \leq 2$ 矛盾。

因此 $\mathrm{rank}_{\otimes}(W) \geq 3$，进而 $\mathrm{rank}_{\otimes}(W) = 3$。

这个关于 W 态的例子带来了以下启示。

- **张量秩** 衡量的是能否将该态精确地写成 r 项之和（但轨迹通常不是闭集）。
- **割线簇**用于衡量能否用 r 项之和来近似该态（它们是闭集，并且具有消失理想）。

4.5 割线簇的理想

定义 4.9 （割线簇的消失理想）。 对于割线簇 $\sigma_r(\Sigma) \subset \mathbb{P}(H)$，将其消失理想记为

$$I\big(\sigma_r(\Sigma)\big) \subset S.$$

这是边界秩为 $\leq r$ 的态必须满足的齐次多项式方程的集合。

一般来说，很难写出 $I(\sigma_r(\Sigma))$ 的一组完整生成元，但由展平得到的子式仍然是一个强有力的工具，如下所示。

如果 $\operatorname{rank}_{\otimes}(\psi) \le r$，那么对于每一个二分划分 $A|B$，任何展平都必须满足

$$\operatorname{rk}\big(M_{A|B}(\psi)\big) \le r.$$

事实上，如果 ψ 是 r 个秩一张量的极限，那么经过任意展平后，它都会成为秩为 $\le r$ 的矩阵的极限，而矩阵秩条件是闭的。（更准确地说：展平由线性映射 $H \to \operatorname{Hom}(H_B^\vee, H_A)$ 诱导，因此是射影空间态射。秩为 $\le r$ 的矩阵轨迹是一个行列式扎里斯基闭子集，因此其原像是闭的，并且包含 $\sigma_r(\Sigma)$。）

因此，对于任意二分划分 $A|B$，

$$\text{all } (r+1)\times(r+1) \text{ minors vanish.}$$

等价地，

$$\sigma_r(\Sigma) \;\subseteq\; \bigcap_{A|B} V\big(I_{A|B}^{(r+1)}\big),$$

其中，$I_{A|B}^{(r+1)}$ 表示由展平矩阵 $M_{A|B}$ 的 $(r+1)$ 阶子式生成的理想。

在二分情形下，这个包含关系是等式（命题 4.7），但在多体情形下，仅靠展平子式通常不能生成 $I(\sigma_r(\Sigma))$。要精确描述还需要高次方程。

割线簇构成一个递增序列：

$$\sigma_1(\Sigma) = \Sigma \;\subset\; \sigma_2(\Sigma) \;\subset\; \cdots \;\subset\; \mathbb{P}(H).$$

这产生了一个按边界秩排列的滤过。由于理想是逆变的，我们得到一个下降理想链：

$$I(\Sigma) = I(\sigma_1(\Sigma)) \;\supset\; I(\sigma_2(\Sigma)) \;\supset\; \cdots \;\supset\; (0).$$

这是命题 2.11 中图示的加法类比：更粗的划分对应更大的簇和更小的理想。

设 $\dim \Sigma = \sum_{i=1}^{N}(d_i - 1)$。一般而言，

$$\dim \sigma_r(\Sigma) \;\le\; \min\big\{\, r(\dim \Sigma + 1) - 1,\; \dim \mathbb{P}(H) \,\big\}.$$

右侧称为预期维数。直观而言，它是选择 r 个点于 Σ 上的自由度（即 $r \dim \Sigma$）与在它们张成的射影子空间中选择一点的自由度（即 $r-1$）之和。当实际维数严格小于预期维数时，Σ 称为割线亏格（例如参见 [8, 4]）。

5 二分量子纠缠

5.1 端omorphism空间 $(H_A \otimes H_B)$ 的分解

作为有限维空间的基本同构，我们有

$$\operatorname{End}(H_A \otimes H_B) \simeq \operatorname{End}(H_A) \otimes \operatorname{End}(H_B),$$

在选定基后，它由矩阵的克罗内克积表示。

利用向量空间直和分解

$$\operatorname{End}(H_A) = \mathbb{C}\cdot I_A \oplus \operatorname{End}_0(H_A), \qquad \operatorname{End}(H_B) = \mathbb{C}\cdot I_B \oplus \operatorname{End}_0(H_B)$$

此处 End_0 表示迹零部分，我们可以将张量积展开为

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(H_A)\otimes\mathrm{End}(H_B) &= (\mathbb{C}I_A\oplus\mathrm{End}_0(H_A))\otimes(\mathbb{C}I_B\oplus\mathrm{End}_0(H_B))\\ &= (\mathbb{C}I_A\otimes\mathbb{C}I_B)\oplus(\mathrm{End}_0(H_A)\otimes\mathbb{C}I_B)\oplus(\mathbb{C}I_A\otimes\mathrm{End}_0(H_B))\oplus(\mathrm{End}_0(H_A)\otimes\mathrm{End}_0(H_B)).\end{aligned}$$

这里，$\mathbb{C}I_A\otimes\mathbb{C}I_B = \mathbb{C}(I_A\otimes I_B) = \mathbb{C}I_{AB}$ 是整个代数的标量部分。因此，迹零部分 $\mathrm{End}_0(H_A\otimes H_B)$ 分解为

$$\mathrm{End}_0(H_A\otimes H_B)\simeq(\mathrm{End}_0(H_A)\otimes I_B)\ \oplus\ (I_A\otimes\mathrm{End}_0(H_B))\ \oplus\ (\mathrm{End}_0(H_A)\otimes\mathrm{End}_0(H_B)).$$

由于最后一个加项在两侧的迹都为零，因此它通常是使这些态产生纠缠的分量（纠缠扇区）。

5.2 施密特秩

> **定义 5.1**（施密特秩）。对于 $\psi\in H_A\otimes H_B$，定义<必须 rank>$\mathrm{SR}(\psi)$ 为
>
> $$\mathrm{SR}(\psi):=\min\left\{r\;\middle|\;\psi=\sum_{\alpha=1}^{r}a_\alpha\otimes b_\alpha\ \text{for some}\ a_\alpha\in H_A,\ b_\alpha\in H_B\right\}.$$
>
> 对于射影态 $[\psi]$，其代表元乘以非零标量后，施密特秩不变，因此也可以记作 $\mathrm{SR}([\psi])$。

从这里开始，我们约定内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 对第二个变量是线性的（对第一个变量是共轭线性的）。对于复希尔伯特空间 H，从共轭空间H 到对偶空间 $H^\vee$的里斯同构，

$$J_H:\overline{H}\xrightarrow{\simeq}H^\vee,\qquad J_H(\overline{y})(x):=\langle y,x\rangle,$$

是 $\mathbb{C}$-线性的。

一般来说，对于有限维复向量空间 V，W，存在一个典范同构

$$V\otimes W\ \simeq\ \mathrm{Hom}(W^\vee,V),\qquad (v\otimes w)\mapsto(\ell\mapsto v\,\ell(w)).$$

将其与 J_{H_B} 复合，得到

$$H_A\otimes H_B\ \simeq\ \mathrm{Hom}(\overline{H}_B,H_A).$$

固定 $\{e_i\}$ 的基和 H_A、$\{f_j\}$ 的基和 H_B，以及对偶基 $\{f^j\}\subset H_B^\vee$。对于

$$\psi=\sum_{i,j}\psi_{ij}\,e_i\otimes f_j,$$

定义

$$\widetilde{T}_\psi:H_B^\vee\to H_A,\qquad \widetilde{T}_\psi(\ell):=(\mathrm{id}\otimes\ell)(\psi).$$

Then

$$\widetilde{T}_\psi(f^j)=\sum_i\psi_{ij}e_i,$$

因此，T_ψ 的矩阵表示恰好是 $M(\psi)=(\psi_{ij})$。此外，令 $T_\psi:=T_\psi\circ J_{H_B}$，得到一个映射 $T_\psi:H_B\to H_A$。

> **定理 5.2**。若 $\psi\neq0$，则
>
> $$\mathrm{SR}(\psi)=\mathrm{rk}(M(\psi)).$$

~ ~证明。令 $T_\psi : H_B^\vee \to H_A$ 如上所述。根据矩阵表示，$\mathrm{rk}(T_\psi) = \mathrm{rk}(M(\psi))$。（步骤 1）若 $\psi = \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \otimes b_\alpha$，则对任意 $\ell \in H_B^\vee$，

$$\widetilde{T}_\psi(\ell) = (\mathrm{id} \otimes \ell)(\psi) = \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \, \ell(b_\alpha).$$

~ ~因此，$\mathrm{im}(T_\psi) \subset$ 张成空间$\{a_1, \ldots, a_r\}$，所以 $\mathrm{rk}(T_\psi) \le r$。因此，$\mathrm{rk}(M(\psi)) \le r$，从而 $\mathrm{SR}(\psi) \ge \mathrm{rk}(M(\psi))$。

~(步骤 2) 反过来，假设 $\mathrm{rk}(M(\psi)) = \mathrm{rk}(T_\psi) \le r$。取 $\mathrm{im}(T_\psi)$ 的一组基 $a_1, \ldots, a_s$，使得$s \le r$。那么存在唯一的线性泛函 $c_\alpha \in (H_B^\vee)^\vee$，使得

$$\widetilde{T}_\psi(\ell) = \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha \, c_\alpha(\ell) \qquad (\forall \ell \in H_B^\vee).$$

由于我们处于有限维情形，$(H_B^\vee)^\vee \simeq H_B$，因此每个 c_α 都可以与某个 $b_\alpha \in H_B$对应，我们可以写成 $c_\alpha(\ell) = \ell(b_\alpha)$。因此

$$\widetilde{T}_\psi(\ell) = \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha \, \ell(b_\alpha) = (\mathrm{id} \otimes \ell)\Big(\sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha \otimes b_\alpha\Big).$$

由于这对所有 ℓ都成立，因此我们有 $\psi = \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha \otimes b_\alpha$。所以 $\mathrm{SR}(\psi) \le s \le r$，从而 $\mathrm{SR}(\psi) \le \mathrm{rk}(M(\psi))$。
结合步骤1和步骤2即可证明该结论。 🐾

5.3 施密特分解（奇异值分解）

定理5.3（施密特分解）。设 $\psi \in H_A \otimes H_B$ 满足 $\|\psi\| = 1$。则存在正交归一系统 $\{u_\alpha\} \subset H_A$、$\{v_\alpha\} \subset H_B$以及非负实数 $\sigma_\alpha \ge 0$，使得

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{m} \sigma_\alpha \, u_\alpha \otimes v_\alpha, \qquad \sigma_\alpha > 0 \ (1 \le \alpha \le m), \ \sigma_\alpha = 0 \ (\alpha > m).$$

这里 $m = \mathrm{SR}(\psi) = \mathrm{rk}(M(\psi))$，且

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \sigma_\alpha^2 = 1.$$

证明。（步骤 1）固定基，并令 $M := M(\psi)$。则 $MM^\dagger$是厄米半正定的。根据谱定理，存在酉矩阵 U 和特征值 $\lambda_\alpha \ge 0$，使得 $U^\dagger(MM^\dagger)U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{d_A})$。将 U的列向量写作 u_α，则有 $(MM^\dagger)u_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha$。

（步骤 2）集合 $\sigma_\alpha := \sqrt{\lambda_\alpha} \ge 0$。对于 $\sigma_\alpha > 0$，定义

$$v_\alpha := \frac{1}{\sigma_\alpha} M^\dagger u_\alpha.$$

那么 $\|v_\alpha\| = 1$，对于那些 α 且满足 $\sigma_\alpha > 0$ 的向量 $\{v_\alpha\}$，它们彼此正交。

（步骤 3）此外， $Mv_\alpha = \sigma_\alpha u_\alpha$。因此，对于任意 x,

$$Mx = \sum_{\alpha:\sigma_\alpha>0} \sigma_\alpha u_\alpha v_\alpha^\dagger x,$$

so

$$M = \sum_{\alpha:\sigma_\alpha>0} \sigma_\alpha u_\alpha v_\alpha^\dagger.$$

（步骤 4）将秩一矩阵 $u_\alpha v_\alpha^\dagger$ 还原为张量，得到

$$\psi = \sum_{\alpha:\sigma_\alpha>0} \sigma_\alpha \, u_\alpha \otimes v_\alpha.$$

$\sigma_\alpha > 0$ 的数量等于 $\mathbf{rk}(M)$，因此 $m = \mathbf{rk}(M) = \mathrm{SR}(\psi)$。根据正交性 ,

$$\|\psi\|^2 = \sum_{\alpha=1}^{m} \sigma_\alpha^2.$$

由于 $\|\psi\| = 1$，我们得到 $\sum_{\alpha=1}^m \sigma_\alpha^2 = 1$。 🐾

5.4 行列式簇

定理 5.4。 对于一个 $d_A \times d_B$ 矩阵 M，以下条件等价：

1. $\mathrm{rk}(M) \le k$, *2.* 所有 $(k+1) \times (k+1)$ 子式都为 M 零。

证明。 **(1)⇒(2).** 若 $\mathbf{rk}(M) \le k$，则任意 $(k+1)$ 列都线性相关，因此任意 $(k+1)\times(k+1)$ 子矩阵的行列式都为 0。
(2)⇒(1). 我们用反证法。若 $\mathbf{rk}(M) \ge k+1$，则至少有 $(k+1)$ 列线性无关。由这些列构成 $d_A \times (k+1)$ 矩阵。它的列秩为 $k+1$，因此行秩也为 $k+1$。因此，可以选取 $(k+1)$ 行，使所得的 $(k+1)\times(k+1)$ 子矩阵的行列式非零，这与 (2) 矛盾。因此 $\mathbf{rk}(M) \le k$。 t

考虑 $H_A \otimes H_B \simeq \mathbb{C}^{d_A d_B}$ 中非零向量构成的子集

$$Z_{\le k} := \{\, \psi \neq 0 \mid \mathrm{rk}(M(\psi)) \le k \,\}.$$

由于该集合由齐次多项式（子式）定义，其射影化

$$R_{\le k} := \mathbb{P}(Z_{\le k}) \subset \mathbb{P}(H_A \otimes H_B)$$

是射影空间中的闭子集（代数簇）。我们称 $R_{\le k}$ 为行列式簇[9, 10, 8]。

5.5 维数公式

以下是关于行列式簇的一个经典事实。

命题 5.5。 设 $1 \le k \le \min(d_A, d_B)$。射影行列式簇 $R_{\le k} \subset \mathbb{P}^{d_A d_B - 1}$的维数为

$$\dim(R_{\le k}) = k(d_A + d_B - k) - 1,$$

以及余维

$$\operatorname{codim}(R_{\le k}) = (d_A - k)(d_B - k).$$

证明。 (步骤 1) 秩恰为 k 的 $d_A \times d_B$ 矩阵 M 可写为

$$M = UV,$$

其中

$$U \in \mathrm{Mat}_{d_A \times k}, \qquad V \in \mathrm{Mat}_{k \times d_B},$$

U 满列秩 k，且 V 满行秩 k。事实上，$\mathrm{im}(M) \subset \mathbb{C}^{d_A}$ 是一个 k 维子空间。取一组基并将其排列为列，便得到 U。 M 的每一列都是这组基的线性组合，其系数组成矩阵 V，从而得到 $M = UV$。

(步骤 2) 对任意 $g \in \mathrm{GL}_k$，都有

$$(Ug^{-1})(gV) = UV = M,$$

因此，$(U,\ V)$ 和 $(Ug^{-1},\ gV)$ 确定相同的 M。反过来，在满秩情形下，任何给出相同 M 的两对 $(U,\ V)$ 都通过这种等价关系相关联：若 $UV = U'V'$ 和 $U,\ U'$ 的列秩为 k，则它们的列空间都等于 $\mathrm{im}(M)$，因此存在 $g \in \mathrm{GL}_k$ 使得$U' = Ug^{-1}$。于是由 $UV = U'V' = Ug^{-1}V'$ 可得 $V = g^{-1}V'$。

（步骤 3）维数为

$$\dim(\mathrm{Mat}_{d_A \times k}) = d_A k, \qquad \dim(\mathrm{Mat}_{k \times d_B}) = k d_B.$$

对上述等价关系取商后，维数减去 $\dim(\mathrm{GL}_k) = k^2$，因此

$$\dim(\{\text{rank } k \text{ matrices}\}) = d_A k + k d_B - k^2 = k(d_A + d_B - k).$$

秩为 $\le k$ 的轨迹具有相同的维数，因为秩为 k 的轨迹在其中稠密（其闭包是秩为 $\le k$ 的轨迹）。

（步骤 4）转到射影空间会去除标量缩放带来的 1 维自由度，因此

$$\dim(R_{\le k}) = k(d_A + d_B - k) - 1.$$

由于环境空间是 $\mathbb{P}^{d_A d_B - 1}$，余维为

$$(d_A d_B - 1) - \big(k(d_A + d_B - k) - 1\big) = d_A d_B - k d_A - k d_B + k^2 = (d_A - k)(d_B - k).$$



6 Quantum 子系统的代数几何处理

6.1 局部识别与过渡函数（粘合）

从这里开始，我们考虑参数空间 X （它可以是流形或代数簇）上的一族量子系统 。

取一个n open 覆盖 $\{U_i\}$ 的 X，并假设在每个 U_i 上我们都有局部识别

$$H_x \simeq \mathbb{C}^n \quad (x \in U_i).$$

比较局部片 U_i和 U_j上的标识，在交叠 U_{ij}上：$= U_i \cap U_j$这里出现了一个基变换

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{g_{ij}(x)} \mathbb{C}^n.$$

由于纯态将向量视为相差非零标量的等价类，矩阵 $g_{ij}(x)$ 只有在标量缩放意义下才有意义，因此它自然定义了 中的一个元素

$$g_{ij}(x) \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times.$$

假设 U_{ij} 上的粘合由下式给出

$$([v], x) \longmapsto ([g_{ij}(x) \cdot v], x), \qquad g_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{PGL}_n.$$

当余循环条件 $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ 在三重交 U_{ijk} 上（在 PGL_n中）成立时，这一数据等价于一个主 PGL_n-丛（一个 PGL_n-托orsor） $P \to X$，而纯态空间族可以写成伴随丛

$$\text{family of pure states} \quad \simeq \quad P \times_{\mathrm{PGL}_n} \mathbb{P}^{n-1}.$$

> **定义 6.1**（塞韦里–布劳尔概形）。 一个射影族
>
> $$\pi : SB \to X, \qquad \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$$
>
> wh其纤维在忠实平坦有限表现局部同构于 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的概形称为塞韦里–布劳尔概形。

6.2 可观测代数（矩阵代数层）

在量子力学中，可观测量是端omorphism空间(H)的元素（矩阵）。传统上，人们通常将范围限制在自伴哈密顿量，但近年来的许多物理情境会考虑非自伴哈密顿量。因此，这里我们使用完整的矩阵代数。

如果我们有一个局部同构 $H|_{U_i} \simeq \mathbb{C}^n \times U_i$，那么 U_i 上的可观测代数看起来像

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \times U_i \simeq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \times U_i.$$

在交叠处，矩阵通过基变换进行共轭粘合：

$$A_j(x) \;\longmapsto\; A_i(x) = g_{ij}(x)\, A_j(x)\, g_{ij}(x)^{-1}.$$

由此，我们得到一个矩阵代数层，它局部上是矩阵代数，并通过共轭进行粘合。这为我们考虑阿祖玛雅代数提供了一个基本动机 [11, 12]。

6.3 局部子系统分解与塞格雷簇

现在固定一个因式分解

$$n = d_1 \cdots d_r,$$

我们将其视为一种 子系统类型。假设在每个局部片 U_i 上，我们进一步细化局部识别，得到一个张量积分解

$$H_x \simeq \mathbb{C}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{d_r} \quad (x \in U_i).$$

于是，纤维上，乘积态构成塞格雷簇

$$\Sigma_d \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{d_r}) \simeq \mathbb{P}^{n-1}.$$

如果在交叠 U_{ij} 上，转移函数 $g_{ij}(x)$ $\in$PGL$_n$ 满足

$$g_{ij}(x) \cdot \Sigma_d = \Sigma_d,$$

那么在 U_i 上看到的乘积态轨迹与在 U_j 上看到的轨迹一致，并且它们以相容的方式粘合。在这种情况下，可以得到 X 上的全局乘积态子纤维化。

反过来，如果过渡函数将塞格雷簇移到不同的位置，那么局部定义的乘积态轨迹就无法粘合，因此无法全局定义乘积态的集合。

6.4 稳定子

> **定义 6.2**（稳定子 G_d）。 作为射影线性自同构群 PGL$_n$ （ $\mathbb{P}^{n-1}$ 的）的一个子群，定义
>
> $$G_d := \{\, g \in \mathrm{PGL}_n \mid g(\Sigma_d) = \Sigma_d \,\}.$$
>
> 我们称 G_d 为 塞格雷簇的稳定子 Σ_d [13, 14]。

在二分情形 $d = (d_A,\ d_B)$ 中， G_d 通常被理解为对应于局域操作（$A \otimes B$），

$$\mathrm{PGL}_{d_A} \times \mathrm{PGL}_{d_B}$$

并且当 $d_A = d_B$ 时还包括因子交换对称性。这与量子信息中所谓的<STYLE id="2">局部可逆操作 （SLOCC 型对称性）相一致。因此， G_d 是不会破坏全局兼容的子系统结构的允许规范变换所构成的群。

命题 6.3（子系统结构作为粘合条件）。 假设纯态射影丛的过渡函数相对于某个开覆盖给定为

$$g_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{PGL}_n.$$

对于给定的二分子系统类型 $d =$ （d_A, d_B），全局乘积态子纤维化存在，当且仅当（经过将覆盖细化这一可能步骤后）可以取

$$g_{ij}(x) \in G_d$$

在每个交叠 *[2]*上。

> 证明。 （必要性）。假设存在一个全局乘积态子纤维化 Σ_d（族） $\subset SB$。在每个局部片 U_i 上，识别 $SB|_{U_i} \simeq \mathbb{P}^{n-1} \times U_i$。那么，该子纤维化与 $\Sigma_d \times U_i$ 一致（至少在所选识别下如此）。在交叠上，粘合映射是.....的自同构

$\mathbb{P}^{n-1}$ 由 g_{ij}（x）诱导，因此我们必须有

$$g_{ij}(x)\cdot(\Sigma_d\times\{x\})=\Sigma_d\times\{x\}.$$

因此 $g_{ij}(x)\in G_d$。
（充分性）。反过来，假设 $g_{ij}(x)\in G_d$。在每个 U_i 上取 $\Sigma_d\times U_i$ 作为一个子族。在交叠 U_{ij} 上，我们有

$$([v],x)\in\Sigma_d\times U_{ij}\mapsto([g_{ij}(x)\cdot v],x)\in\Sigma_d\times U_{ij},$$

由于 Σ_d 得以保持，这些局部片段便能相容地粘合。因此，全局纤维化子系统存在。



7 障碍

7.1 布劳尔类

本节中，为了直观理解为何全局子系统可能不存在，我们计算将粘合数据提升一个层级时出现的标量偏差。

选择在局部表示射影过渡函数 $g_{ij}\in$PGL$_n$ 的 GL$_n$值函数 $\tilde{g}_{ij}$（使得 $\tilde{g}_{ij}$ 在 PGL$_n$ 中的像为 g_{ij}）。在一个三重交叠上，我们在 PGL$_n$ 中得到余循环条件：

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki}=1.$$

然而，对于 GL$_n$提升，一般会出现纯粹的标量偏差：

$$\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki}=c_{ijk}\,I_n\qquad(c_{ijk}:U_{ijk}\to\mathbb{C}^\times).$$

换言之，PGL$_n$余循环不一定能提升为 GL$_n$余循环。

我们直接验证 $\{c_{ijk}\}$构成一个切赫 2-余循环。在四重交叠 U_{ijkl}上，考虑如下乘积态

$$(\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki})(\tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{kl}\tilde{g}_{li})$$

并以两种不同的方式重新分组。所得的标量因子必须相等。事实上，上述表达式等于

$$(c_{ijk}I)(c_{ikl}I)=c_{ijk}c_{ikl}I.$$

另一方面，同一个乘积态也可以改写为

$$(\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jl}\tilde{g}_{li})(\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{kl}\tilde{g}_{lj}),$$

这等于

$$(c_{ijl}I)(c_{jkl}I)=c_{ijl}c_{jkl}I.$$

因此我们必须有

$$c_{ijk}c_{ikl}=c_{ijl}c_{jkl},$$

ˇ这正是切赫 2-余循环条件

$$(\delta c)_{ijkl}=1.$$

上同调类 $[c]$ 编码了这样一个障碍：射影丛存在，但无法拼接成向量丛。这个障碍被记录为一个布劳尔类。

7.2 与子系统结构的关系

现在固定一种子系统类型 $d=(d_1,\ldots\ldots,\ d_r)$，并假设过渡函数的取值属于 G_d （因此子系统结构在全局上是有意义的）。在这种情况下，局部的过渡函数可以表示为张量积基变换：

$$\tilde{g}_{ij}\sim A_{ij}^{(1)}\otimes\cdots\otimes A_{ij}^{(r)}\qquad (A_{ij}^{(m)}\in \mathrm{GL}_{d_m}).$$

此外，将每个 $A_{ij}^{(m)}$ 乘以一个标量，使其属于 SL_{d_m}后，剩余的标量不确定性仅限于相差一个 d_m 次单位根。因此，三重交上出现的差异满足以下约束

$$\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki}\in \mu_{d_1}\times\cdots\times\mu_{d_r},$$

其中， μ_d 表示 d 次幂为 1 的复数组成的群。因此，将该差异提升到 ℓ 次幂后即变为平凡：$=$最小公倍数$(d_1、\ldots\ldots、\ d_r)$（其 ℓ 次幂为 1）。这直观地说明了，若存在子系统结构，则障碍是 ℓ挠的。我们将其总结如下。

命题 7.1。 固定一个类型 $d=(d_1、\ldots\ldots、\ d_r)$，并令 $\ell=$最小公倍数$(d_1、\ldots\ldots、\ d_r)$。如果一个阿祖玛雅代数（或相应的布劳尔类）具有类型为 d 的子系统结构，那么相应的布劳尔类是 ℓ 挠的：

$$[A]\in Br(X)[\ell]:=\ \{\,\beta\in Br(X)\mid \ell\beta=0\,\}.$$

~更准确地说，对于一个适当的提升 $G_d\subset \mathrm{GL}_n$ *of* G_d，存在一个中心扩张

$$1\to\mu_\ell\to\widetilde{G}_d\to G_d\to 1,$$

且障碍2-余循环取值于 μ_ℓ。

8 上半部分总结

- 纯态表示为射影空间 $\mathbb{P}(H)$中的一个点 $[\psi]$ （忽略整体缩放）。

- 在二分情形下，所有乘积态构成的集合是塞格雷簇，可通过展平矩阵的秩为 1 来判定（等价地，通过所有 2×2 子式均为零来判定）。
- 施密特秩与展平矩阵的秩相同，而秩为$\le k$ 的条件由 $(k+1)$ 个子式为零给出（一个行列式簇）。

- 即使对于参数空间 X上的扭曲量子系统，也可以通过粘合在全局上构造纯态空间族（一个射影丛）。

- 然而，一般的量子系统还包含经典态（乘积态）。要讨论某个态是否是真正的量子态（纠缠态），必须先确定一个子系统分解（张量积结构）。

- 子系统分解未必能在全局上存在。只有当转移函数属于塞格雷簇的稳定子子群 G_d （结构群可约化为 G_d）时，乘积态和纠缠层级才在 X上具有全局意义。

- （与数论的类比：**乘法侧**）在固定的子系统分解下，乘积轨迹表现为一个不可约闭子集（塞格雷簇），而双乘积轨迹是这些轨迹的并集。因此，其消失理想可以写成素理想的交（主分解），类似于 Spec $\mathbb{Z}$ 中的 $V(\bigcap_{p\mid n} p) = \bigcup_{p\mid n} V(p)$ 和 $I(V(\cdot))$（只比较根基层面，忽略指数）。

- （与数论的类比：**加法侧**）将一个态表示为若干态之和所需的最少乘积态数，就是张量秩；由其闭包（边界秩）给出的滤过，则由塞格雷簇 Σ 的割线簇 $\sigma_r(\Sigma)$ 几何化。在二分情形$\sigma_r(\Sigma)$ 中，这与行列式簇一致；但在多体情形中，展平子式只能给出必要条件，要实现精确分类还需要额外的高次方程。

9 塞弗里–布劳尔概形上的量子纠缠几何

9.1 后半部分概述

后半部分的目标是将前半部分引入的概念提升，

$$\Sigma_d \subset \mathbb{P}(H), \qquad R_{\le k} \subset \mathbb{P}(H) \qquad (\text{fixed Hilbert space } H)$$

即乘积轨迹和纠缠过滤，应用于参数空间上的扭曲族 X这一情形。

这里，扭曲指的是以下现象：尽管在每个点 $x \in X$ 处确实都能看到一个纯态空间

$$\mathbb{P}(H_x) \simeq \mathbb{P}^{n-1},$$

在 X 上，无法在全局范围内将 H_x 组成单个向量丛 H。（其物理意义是：系统在局部看来是一个 n 级系统，但规范扭曲会阻碍全局识别。）

描述这种扭曲最自然的语言是阿祖玛雅代数。更多详情请参见 [15, 16, 17] 和 [18, 19]。利用阿祖玛雅代数，可以始终构造塞韦里–布劳尔概形

$$\pi : SB(A) \to X$$

作为纯态空间族。然而，当我们想要讨论 $SB(A)$ 上的纠缠时（甚至在此之前），有几个关键问题：

> 1. 讨论纠缠必须选择一种子系统分解，而从几何上看，这体现为结构群约化。（未必存在方便的约化。）2. 只有在这种约化存在之后，乘积轨迹和纠缠过滤（行列式簇）才能作为全局闭子概形在 $SB(A)$ 内下降。

本节将从两个角度解释这一论断：

- **（通过 Čech 粘合）**：转移函数保持塞格雷嵌入这一具体条件。

- **（通过希尔伯特概形）**：塞格雷型子族被模块化为一个参数空间，并证明这恰好就是约化。

为什么需要绕这么一圈? 在量子信息中，纠缠的定义以子系统分解 $H = H_1 \otimes \cdots \otimes H_r$ 为前提。但对于诸如 $SB(A)$ 这样的扭曲族，由于 H_x无法在全局范围内组装成一个单一的 H，因此在全局范围内选择张量分解本身就变得复杂。这种复杂性的正确几何形式化就是约化，而此类约化的存在与否可以通过布劳尔类来衡量，表现为一种障碍。这就是本文的整体图景。

9.2 阿祖玛雅代数 A 与纯态空间 $SB(A)$

设 A是 $\mathcal{O}_X$-模的层（或 $\mathcal{O}_X$-代数），定义在 X上，并设 $f\colon U \to X$是一个态射。我们将 A 沿着 f的拉回记作,

$$f^*A,$$

as

$$A|_U \quad \text{or} \quad A_U.$$

特别地，当 $X = \operatorname{Spec} R$和 $U = \operatorname{Spec} S$均为仿射的，且 A来自一个 R-代数（或R-模）时，我们将

$$A|_U \;\simeq\; A \otimes_R S$$

视为将系数环从 R 更换为 S的操作。

> **定义 9.1** （´étale 覆盖）。 X 的 ***´étale* 覆盖** 是一族态射 $\{f_i : U_i \to X\}$，满足
>
> 1. 每个 f_i 都是 ´étale 的,
> 2. 这些像覆盖 X ($\bigcup_i f_i(U_i) = X$)。

作为解析／微分几何类比，étale 态射就像一个局部同胚（局部微分同胚）的映射，但在整体上可能以多层覆盖目标。因此，将 etale 覆盖局部化，意味着允许有限（或局部有限）的非分歧覆盖，以消除仅凭扎里斯基开集无法看出的扭曲。

例 9.2. 对于有限乘积域扩张 $k \subset k'$，态射 $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$ 是有限 étale 的。

> **定义 9.3** (fppf 覆盖)。 ***fppf*** 是法语 ***fid`element plat et de pr´esentation finie***的缩写，即忠实平坦且局部有限表示。一个 ***fppf* 覆盖的** X 是由一族态射组成的 $\{f_i : \ U_i \to X\}$ 满足
>
> 1. 每个 f_i 都是忠实平坦的,
> 2. 每个 f_i 都是（局部）有限表示的,
> 3. 这些像覆盖 X。

平坦性表达了这样一种思想：方程之间的关系在基变换（标量扩张）下不会消失，也不会凭空出现。更代数地说，在仿射情形中 $X =$ 谱 R, $U =$谱 S,

$$R \to S \text{ is flat} \quad \Longleftrightarrow \quad (-) \otimes_R S \text{ preserves exactness.}$$

忠实意味着没有信息丢失，例如

$$M \neq 0 \Rightarrow M \otimes_R S \neq 0,$$

因此，张量化不会湮灭非零数据。

注 9.4（为什么考虑 fppf? ）。当需要处理那些在 ´étale 局部不可见的扭曲或粘合现象时，fppf拓扑是一个非常自然的框架。然而，对于阿祖玛雅代数，由于它们本质上可以通过一个 PGL$_n$-托orsor 来描述， ´étale 拓扑通常已经足够，而且有些参考文献甚至将阿祖玛雅代数定义为在 ´étale 局部为矩阵代数的对象。

定义 9.5（阿祖玛雅代数）。设 X 为一个概形，并设 $n \geq 2$。一个 $\mathcal{O}_X$-代数的层A 称为次数为 n 的阿祖玛雅代数，若存在一个 ´étale（或 fppf）覆盖 $f: U \to X$ 使得

$$A|_U \simeq M_n(\mathcal{O}_U),$$

$\mathcal{O}_U$上的 $n \times n$ 矩阵代数。

在一个覆盖上选取同构，

$$\phi_i: A|_{U_i} \xrightarrow{\sim} M_n(\mathcal{O}_{U_i}).$$

在交叠（纤维积） $U_{ij} := U_i \times_X U_j$上，我们有两个识别

$$A|_{U_{ij}} \xrightarrow{\phi_i|_{U_{ij}}} M_n(\mathcal{O}_{U_{ij}}), \qquad A|_{U_{ij}} \xrightarrow{\phi_j|_{U_{ij}}} M_n(\mathcal{O}_{U_{ij}}),$$

因此，它们的差定义了一个自同构

$$\alpha_{ij} := (\phi_i|_{U_{ij}}) \circ (\phi_j|_{U_{ij}})^{-1}.$$

局部地，存在一个可逆矩阵 $g_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{U_{ij}})$，使得

$$\alpha_{ij}(T) = g_{ij}\, T\, g_{ij}^{-1} \qquad (T \in M_n(\mathcal{O}_{U_{ij}})).$$

由于 g_{ij} 并且 $\lambda I_n \cdot g_{ij}$ 诱导相同的共轭作用，粘合本质上由以下内容编码

$$[g_{ij}] \in \mathrm{PGL}_n(\mathcal{O}_{U_{ij}}).$$

将转移函数抽象为 PGL$_n$-值的函数，可得一个主 PGL$_n$-丛（托orsor） $P \to X$。阿祖玛雅代数 A 与 PGL$_n$-托orsor P 可视为等价数据。

现在，即使 A是扭曲的，纯态空间的射影族始终能在全局上存在。这就是塞韦里–布劳尔概形

$$\pi : SB(A) \to X.$$

局部上看起来像

$$SB(A)|_U \simeq \mathbb{P}^{n-1} \times U.$$

因此，基本的量子信息原理“纯态 = 射影空间”由 $SB(A)$在族中保证。（从代数角度看， $SB(A)$具有表示秩1右理想的普遍性。）如果 A 是分裂的（$A \simeq$端omorphism空间(E)），那么

$$SB(A) \simeq \mathbb{P}(E),$$

从而恢复向量丛通常的射影化。从这个意义上说， $SB(A)$ 是一个规范底空间，它总能给出纯态空间。

9.3 稳定子 G_d 与约化

这是后半部分的主要主题。固定一个因式分解

$$n = \prod_{i=1}^{r} d_i, \qquad d = (d_1, \dots, d_r),$$

作为子系统类型。

在通常的（分裂）模型中，

$$\mathbb{P}^{n-1} \simeq \mathbb{P}\big(k^{d_1} \otimes \cdots \otimes k^{d_r}\big),$$

塞格雷嵌入的像

$$\Sigma_d = \mathbb{P}^{d_1-1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{d_r-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

是乘积态的轨迹。正如我们在上半部分讨论的，纠缠态是这个乘积轨迹之外的点。

关键在于，只有在选定张量分解后才定义 Σ_d。尽管 $SB(A)$在局部同构于 $\mathbb{P}^{n-1}$，但这些同一关系是通过取值于 PGL_n 的过渡函数粘合起来的。如果这些过渡函数是 PGL_n 中的任意元素，它们未必会将塞格雷簇映射到塞格雷簇。因此，“这个点是乘积态/纠缠态”的判断可能会依赖于局部坐标的选择。

因此，要在全局上定义乘积态，必须要求过渡函数保持塞格雷簇。这个要求恰好就是一种约化。

现在我们使用如下定义的稳定子群 G_d （定义6.2）。

> **定义 9.6**（子系统结构 [2]）。设 $P \to X$ 为与阿祖玛雅代数n相关联的 PGL A。类型为 的子系统结构 d 是满足以下条件的数据
>
> $$P \text{ admits a reduction to a } G_d\text{-torsor } P_d \to X,$$
>
> 也就是说，可以写成
>
> $$P \simeq P_d \times_{G_d} \mathrm{PGL}_n.$$

若我们在开覆盖 $\{U_i\}$上平凡化 P，则过渡函数为

$$g_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{PGL}_n.$$

用这些术语来说，可约等价于以下条件

$$g_{ij}(x) \in G_d \quad (\forall x),$$

这与前半部分陈述的条件完全相同：

$$g_{ij}(x) \cdot \Sigma_d = \Sigma_d.$$

给定一个 G_d-托orsor P_d，可以定义

$$\Sigma_d(A) := P_d \times_{G_d} \Sigma_d \to X,$$

且塞格雷嵌入粘合为一个闭浸入

$$\iota_d : \Sigma_d(A) \hookrightarrow SB(A).$$

这是全局乘积轨迹。

虽然 $SB(A)$ 始终定义为纯态族，但若不引入子系统，判断哪些态是乘积态（经典），哪些态是纠缠态（真正的量子态）便毫无意义。此外，全局一致的子系统选择也并非必然存在。对子系统选择进行正确的几何诠释，就是约化。

9.4 希尔伯特概形与子系统结构的模化

到目前为止，我们一直以具体形式讨论各种构造。现在，让我们使用希尔伯特概形对它们进行统一处理。

具有子系统结构意味着局部存在一个塞格雷型子族

$$(SB(A)|_{U_i},\ \Sigma_d(A)|_{U_i}) \simeq (\mathbb{P}^{n-1} \times U_i,\ \Sigma_d \times U_i).$$

反过来，如果在 $SB(A)$ 内可以找到一个闭子概形族，使其在纤维上呈现为塞格雷簇，那么交叠过渡映射就必然保持塞格雷簇。因此，转移函数取值于 G_d，从而可以恢复约化。

由于 $\pi:\ SB(A) \to X$ 是射影的，相对希尔伯特概形 $\mathbf{Hilb}(SB(A)/X)$ 存在，并且参数化了 $SB(A)$中所有在 X 上平坦的闭子概形族。在其中，我们选出满足以下条件的闭子概形族：

$$fppf\text{-locally, they are isomorphic to } (\mathbb{P}^{n-1} \times T,\ \Sigma_d \times T).$$

由此条件定义的轨迹是 $\mathbf{Hilb}(SB(A)/X)$ 的一个局部闭子概形，我们称之为子系统结构轨迹（位于相对希尔伯特概形中）。

例 9.7。 在分裂情形下，在 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的希尔伯特概形中取点

$$[\Sigma_d] \in \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^{n-1}).$$

它的 $\mathbf{PGL}_n$ 轨道为

$$O_{\Sigma_d} \simeq \mathrm{PGL}_n/G_d.$$

这体现了一个简单的结构：$\mathbf{PGL}_n$ 将塞格雷簇移来移去，而 G_d 则是使其保持不动的自由度。

> **定义 9.8**。由于 $\pi:\ SB(A) \to X$ 是射影的，相对希尔伯特概形 $\mathbf{Hilb}(SB(A)/X)$ 存在。由塞格雷型闭子族组成，且 $fppf$-局部同构于 $(\mathbb{P}^{n-1} \times T,\ \Sigma_d \times T)$ 的局部闭子概形称为子系统结构轨迹 [2]。

定理 9.9 ([2])。 固定一个阿祖玛雅代数 A 和一种类型 d。子系统结构（G_d-约化）的模空间由以下对象表示

$$P/G_d,$$

并且这与相对希尔伯特概形中的子系统结构轨迹相对应。特别是，

$$\boxed{a\ subsystem\ structure\ exists \iff \Sigma_d(A) \subset SB(A)\ exists}.$$

总结一下目前的讨论：

- 可以通过判断是否存在一个表示它的概形，以统一的方式确定是否存在全局子系统结构。

- 一旦模对象（P/G_d）构造完成，就可以通过构造关联丛，系统地得到后续的下降陈述。

使用希尔伯特概形可以让这一图景更加清晰。

10 二分量子纠缠几何

10.1 纠缠过滤

从这里开始，我们再次考虑二分情形 $d = (d_A,\ d_B)$（因此 $n = d_A d_B$）。我们明确讨论量子信息中最熟悉的概念——施密特分解／施密特秩——与代数几何纠缠过滤之间的关系。更详细的技术讨论见§A.2。

设 $H_A \simeq k^{d_A}$ 和 $H_B \simeq k^{d_B}$。那么，张量 $\psi \in H_A \otimes H_B$ 可以与一个矩阵对应，而施密特秩为 $\leq r$ 的条件等价于

$$\text{all } (r+1)\times(r+1) \text{ minors vanish.}$$

由此条件定义的闭子概形是

$$R_{\leq r} \subset \mathbb{P}(H_A \otimes H_B).$$

这里，$R_{\leq 1}$ 是乘积轨迹；随着 r 增大，滤过也逐渐加厚。我们得到行列式簇的自然滤过（由闭子簇构成）：

$$R_{\leq 1} \subset R_{\leq 2} \subset \cdots \subset \mathbb{P}(H_A \otimes H_B),$$

我们将其称为纠缠过滤 [2]。

注 10.1（为什么子式能够检测纠缠？）。子式是多项式条件，可用于检测秩是否为 $\leq r$，这可以理解为多项式方程的消失。这种与多项式／代数条件的相容性，正是这一观点特别适用于代数几何的原因。我们的讨论旨在回答：纠缠判据何时能够在 X上整体化?

给定子系统结构 $P_d \to X$ 时，$R_{\leq r}$ 是 G_d–不变的，因此通过构造伴随丛，可以定义

$$\Sigma_{\leq r}(A,d) := P_d \times_{G_d} R_{\leq r} \subset P_d \times_{G_d} \mathbb{P}(H_A \otimes H_B) \simeq SB(A).$$

具体而言，可以这样理解：局部地，在将 $SB(A)$识别为 $\simeq \mathbb{P}(H_A \otimes H_B)$之后，插入 $R_{\leq r}$ 并进行粘合。由于子系统结构存在，这种粘合是一致的。此外，$\Sigma_{\leq r}(A,\ d) \to X$在忠实平坦有限表现局部同构于 $R_{\leq r} \times U \to U$，因此是平坦的。平坦性保证纤维的几何（维数等）不会发生跳变，从而使其作为一个族的行为保持稳定。

对于每个点 $x \in X$，在纤维 $(SB(A))_x \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ 内，我们得到一个滤过

$$(\Sigma_{\leq 1})_x \subset (\Sigma_{\leq 2})_x \subset \cdots \subset (SB(A))_x,$$

它恰好就是施密特秩 $\leq r$ 的滤过。因此，对于纯态 $[\psi] \in (SB(A))_x$，我们可以定义一个离散纠缠不变量

$$SR_d([\psi]) := \min\{r \mid [\psi] \in (\Sigma_{\leq r}(A,d))_x\}.$$

条件 $SR_d([\psi]) = 1$ 表示乘积态，数值越大则越符合纠缠程度更高的直觉。

10.2 纠缠过滤与奇点

行列式簇 $R_{\le r}$ 通常是奇异的，其奇点遵循一种强而规律的模式。当存在约化时，这种模式会在各族中一致地保留下来。具体而言，对于$1 \le r < \min(d_A,\ d_B)$,

$$\mathrm{Sing}(R_{\le r}) = R_{\le r-1}$$

成立 [10, 9]。直观地说，秩越低，定义方程的雅可比矩阵就越退化，因此滤过的边界本身会变得奇异。

由于 $\Sigma_{\le r}(A,\ d)$ 在局部是 $R_{\le r} \times U$，上述对奇点轨迹的描述可直接下降为

$$\mathrm{Sing}\big(\Sigma_{\le r}(A,d)\big) = \Sigma_{\le r-1}(A,d).$$

因此，纠缠过滤的边界是奇异的这一性质在 X 上处处成立。利用格拉斯曼流形，可以构造出 $R_{\le r}$ 的标准奇点消解。利用

$$\mathrm{Gr}_A(r) = \mathrm{Gr}(r, H_A), \qquad \mathrm{Gr}_B(r) = \mathrm{Gr}(r, H_B)$$

及其典范子丛 U_A，U_B，定义

$$\widetilde{R}_{\le r} := \mathbb{P}(U_A \boxtimes U_B) \to \mathrm{Gr}_A(r) \times \mathrm{Gr}_B(r).$$

于是存在一个自然态射（关联解消）

$$\rho_r : \widetilde{R}_{\le r} \to R_{\le r},$$

它是射影且双有理的，并且在秩恰为 r 的矩阵开轨迹上是同构。由此，它给出了 $R_{\le r}$ 的典范消解。具体构造见 §A.2。

该构造是 G_d–等变的。因此，通过构造伴随丛，我们得到

$$\widetilde{\Sigma}_{\le r}(A,d) := P_d \times_{G_d} \widetilde{R}_{\le r}, \qquad \rho_r : \widetilde{\Sigma}_{\le r}(A,d) \to \Sigma_{\le r}(A,d).$$

~全空间 $\Sigma_{\le k}(A,\ d)$ 在 X 上光滑，且 ρ_k 是射影且双有理的，并且在秩恰为 k [2]的开轨迹上是同构。

注 10.2 （实际意义）。一旦固定子系统结构， $\Sigma_{\le r}$ 就不再仅仅是一个子集，而是具有良好的性质：

- 它是平坦的（因此该族具有稳定的几何性质），
- 它与基变换相容，并且
- 它配备了典范奇点消解。

10.3 量子信息视角下的具体重新诠释

（QI-1）施密特分解的代数几何版本 =SLOCC标准形。在量子信息中，取 将 $k = \mathbb{C}$ 纯态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 在基中展开可得

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} \psi_{ij}\, |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B,$$

并且我们可以将其与系数矩阵 $\Psi = (\psi_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{d_A \times d_B}$ 以及相关的线性映射 $\psi_B : \mathcal{H}_B^\vee \to \mathcal{H}_A$) 进行对应。于是

$$\mathrm{SR}(|\psi\rangle) = \mathrm{rank}(\Psi) = \mathrm{rank}(\psi_B).$$

此外（一旦选定内积），就存在施密特分解:

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell \, |a_\ell\rangle \otimes |b_\ell\rangle, \qquad \lambda_\ell > 0,$$

整数 r （非零施密特系数的个数）与上述矩阵秩一致。另一方面，本笔记中出现的自然群并非酉群，而是

$$\mathrm{GL}(\mathcal{H}_A) \times \mathrm{GL}(\mathcal{H}_B),$$

即局部可逆操作，在量子信息中对应于**随机局域操作与经典通信** （随机局域操作与经典通信的可逆部分 [20]）。系数矩阵按如下方式变换:

$$\Psi \;\longmapsto\; (g_A)\, \Psi\, (g_B)^{\mathsf{T}} \quad (g_A \in \mathrm{GL}(d_A),\, g_B \in \mathrm{GL}(d_B)),$$

矩阵秩保持不变。因此，由施密特秩确定的滤过 $R_{\le 1} \subset R_{\le 2} \subset \cdots \subset \mathbb{P}(H_A \otimes H_B)$ 是一种在局部可逆操作下保持不变的纠缠滤过。正文中的 G_d–不变性／下降，正是这种随机局域操作与经典通信不变性的几何体现。

（QI-2）代数集合与纠缠（双量子比特例子）。任意双量子比特纯态都可以写成

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

在此情况下，乘积态（施密特秩 1）等价于

$$\det(\Psi) = ad - bc = 0.$$

这里 $\det(\Psi)$ 是唯一的 2×2 子式，因此只需一个多项式即可检验可分性。用量子信息的语言来说，这就是纯态 concurrence 的拓扑核心（$C(|\psi\rangle) = 2|ad - bc|$）： **为零** 等价于处于乘积态。

对于一般的（d_A， d_B），类似地，如果某个（$r+1$） $\times (r+1)$ 子式非零，那么

$$\mathrm{SR}(|\psi\rangle) \ge r + 1$$

便可代数地推出（反过来，如果所有此类子式都为零，那么 $\le r$）。纠缠的存在与否可以用多项式（坐标环的元素）表示，这正是前文讨论乘积轨迹能否在基概形上全局化为子概形的根源。

(QI-3) 纠缠过滤的量子信息含义。 在双线性情形中，“张量秩 $=$ 矩阵秩”，因此施密特秩 $\le r$ 等价于 r乘积态的线性组合

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell=1}^{r} |a_\ell\rangle \otimes |b_\ell\rangle.$$

从几何角度可以将其视为

$$R_{\le r} = \overline{\mathrm{Sec}_r(\mathrm{Segre})}$$

作为 Segre [4] 的 r-割线簇的闭包。从这个意义上说，也可以将纠缠过滤理解为编码叠加中需要多少个乘积态。

(QI-4) 族与约化的量子信息含义。从量子信息的角度来看，可以将 $x \in X$ 视为经典参数（外场、耦合常数、缺陷构型等），而将纤维 $\mathbb{P}^{n-1} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{H}_x)$ 视为该参数对应的纯态空间。

- 对于扭曲阿祖马亚背景，即使局部有 $\mathcal{H}_x \simeq k^n$，也无法在全局上固定一个$\mathcal{H}$ （坐标变换会因 PGL_n 而扭曲）。
- 要讨论纠缠（正如反复强调的那样），还需要补充数据来断言：对于每个 x， $\mathcal{H}_x$ 都以与$\mathcal{H}_A$ 相同的含义$x \otimes \mathcal{H}_B$来x分解。

正文中的 G_d约化恰好就是这项补充数据：在量子信息的图景中，这意味着坐标变换（规范变换）从完整的 PGL_n 限制为局域操作 $g_A \otimes g_B$。只有这样，陈述

$$\text{this state is product / has Schmidt rank} \le r$$

才具有与 无关且可粘合的含义，而 $\Sigma_{\le r}(A,\ d)$ 则成为定义在整个参数空间 X上的纠缠“相图”。

(QI-5) 对奇点和量子相变的直观理解。如前所述，从量子信息的角度来看，一个施密特秩为 r 的态在随机局域操作与经典通信下等价于

$$\sum_{i=1}^{r} |i\rangle \otimes |i\rangle$$

（这表明秩 r 是一个完备的随机局域操作与经典通信不变量）。然而，当秩降低时，同一个 $R_{\le r}$ 内的局域自由度（轨道维数）会发生变化，几何结构也会形成清晰的边界。

例如，在 3×3 情形下，对于 $r = 2$,

$$R_{\le 2} = \{\det(\Psi) = 0\} \subset \mathbb{P}^8$$

这是由单个三次方程定义的超曲面。由于 det 的梯度恰好在秩为 ≤ 1 时消失（所有 2×2 余子式均消失），因此有

$$\mathrm{Sing}(R_{\le 2}) = R_{\le 1}.$$

这正是一个熟悉现象的几何表述：当一个施密特系数塌缩为 0 且秩降低时，雅可比矩阵也会发生退化。在凝聚态物理或统计物理的语言中，这种维数的突然变化对应于量子多体系统中能量本征态简并度的变化，因而对应于量子相变。

（QI-6）关联解消的物理意义。一个秩-r 态 $|\psi\rangle$ 自然地在两侧分别确定 r维子空间：

$$U_A(\psi) := \mathrm{im}(\psi_B) \subset \mathcal{H}_A, \qquad U_B(\psi) := \mathrm{im}(\psi_A) \subset \mathcal{H}_B.$$

（在给定内积的情况下，这与约化密度矩阵$\rho_A = \mathrm{Tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|$的支撑集 $\mathrm{supp}(\rho_A)$ 一致。）

关联解消

$$\widetilde{R}_{\le r} = \mathbb{P}(U_A \boxtimes U_B) \to R_{\le r}$$

可以直观地理解为一种增强

不仅保留态 $[\psi]$，还要保留其支撑子空间 $U_A,\ U_B$。

- 如果秩恰好为 r，那么 $U_A(\psi)$ 和 $U_B(\psi)$ 就是唯一确定的，因此该消解在那个开轨迹上是一个同构。

- 如果秩为 $< r$，那么包含 ψ 的 r 维子空间有多种选择，而纤维恰好因这种非唯一性而增厚，从而消解奇点。

同样的图景也适用于族：$\Sigma_{\leq r}(A,\ d)$ 是一个光滑空间，它不仅编码了态，也编码了支撑子空间如何随参数变化。用量子信息的术语来说，这提供了一个统一的几何框架，用于描述纠缠结构及其局域有效自由度的几何。

(QI-7) 关于秩的说明。由于轨迹

$$\{\,\mathrm{rank}(\Psi) \leq r\,\}$$

是闭的，在参数族中，一般点处的秩通常较大，而在判别式轨迹上（所有相关子式都消失之处）会突然下降。例如，对于

$$|\psi(t)\rangle = |00\rangle + t\,|11\rangle$$

其在 $t \neq 0$ 处的秩为 2，在 $t = 0$处的秩为 1，而判别式为 $\det(\Psi) = t$。纠缠过滤能够作为子概形整体化，这一事实与这类“纠缠相边界”能够在全局上写成多项式条件直接相关。

11 纠缠的布劳尔理论障碍分类

前半部分所述的现象——在三重交上可能出现标量偏差（§7）——可以用布劳尔群的语言来表述。阿祖玛雅代数的布劳尔类属于 $Br(X)$。在这些类中，我们收集那些存在一个具有 d类型子系统结构的代表元的类，并定义子集

$$Br_d(X) = \mathrm{Im}\Big(H^1(X, G_d) \to H^1(X, \mathrm{PGL}_n) \xrightarrow{\delta} Br(X)\Big) \subset Br(X).$$

定义 11.1 ([2])。 若类 $\beta \in Br(X)$是某种类型 d 子系统结构的障碍类，则称其为

$$\beta \notin Br_d(X).$$

这意味着，如果 $\beta \notin Br_d(X)$，那么无论选择哪个代表布劳尔类 β 的阿祖玛雅代数，它都不具有 d 类型的子系统结构。因此，如果 $\beta \notin Br_d(X)$，那么

$SB(A) \to X$ 始终存在，但乘积态族 $\Sigma_d(A) \subset SB(A)$ 不存在 .

如果一个全 局一致的乘积态不存在，那么它就是本征纠缠的 .

定义 11.2 （ℓ-挠子群）。 对于阿贝尔群 A 和整数 $\ell \geq 1$，定义 e

$$A[\ell] \ := \ \{\,a \in A \mid \ell a = 0\,\}.$$

> 特别地，
>
> $$Br(X)[\ell] \;:=\; \{\,\beta \in Br(X) \mid \ell\beta = 0\,\}.$$
>
> 这里，$\beta \in Br(X)[\ell]$ 表示周期 per(β) 整除 ℓ。

命题 11.3 ([2])。令 $\ell =$ 最小公倍数$(d_1, \ldots, d_r)$。那么对于任意 X 都有

$$Br_d(X) \subset Br(X)[\ell].$$

特别地，若 $\beta \in Br_d(X)$ 则 $\mathrm{per}(\beta) \mid \ell$。

注 11.4（为什么它会变成 ℓ-挠元？）。尝试将 PGL 值过渡函数提升为 GL 时，会在三重交上出现标量偏差。如果存在子系统结构（过渡函数取值于 G_d），那么这一标量偏差必须与 Segre 分解相容，最终只能取值于 μ_ℓ（即 ℓ 次单位根组成的群）。因此，布劳尔类变成 ℓ-挠元。前半部分的直觉在这里通过上同调术语得到了精确表述。

相关文献：将纠缠视为固定背景上的障碍 本文用概形X上的阿祖玛雅代数 A 表示量子系统的背景，并将纯态空间族描述为塞韦里–布劳尔概形 $SB(A) \to X$。另一方面，要在整体上判断一个量子态是否纠缠，必须具体说明关联存在于何处。这是一个相对概念，应与底层空间或群结构分开指定。换言之，要在整体上定义一个态是否纠缠，必须将子系统类型整体化（即由 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_N)$ 给出的张量积分解类型）。本文的核心观点是，这种子系统结构的整体化，等价于能否将相应 PGL_n-托orsor的结构群约化为稳定塞格雷簇的稳定子子群 G_d；而这种约化是否可行，则表现为一种几何障碍（包括背景的扭曲）。为组织这一障碍，我们引入 $Br_d(X) \subset Br(X)$（定义 11.1）。若 $[A] \notin Br_d(X)$，则给定类型的子系统结构无法在整体上存在。

另一方面，即使背景希尔伯特空间和张量积结构在全局上固定，纠缠仍可能以另一种意义出现，成为粘合的障碍。例如，在 [21]，中，局部数据（子系统上的局部态和边缘态）看起来彼此一致，但全局态却（不存在／不唯一）这一现象，被表述为态与见证的预层的 ˇCech 上同调，并据此提出了一种将纠缠视为全局重构障碍的框架。（另见 [22] 中的相关研究。）

因此，在量子系统中，“障碍”一词所指的对象应区分如下：

（I）（结构的障碍）本文：能否在 X 上定义子系统结构（即张量积分解本身的类型）这一问题，也就是能否实现结构群约化。

（II）（态的障碍） [21, 22]：固定背景和子系统结构后，局部给定的态数据能否重构（粘合）为全局态，以及该全局态是否唯一。

二者都秉持“从局部到整体”的相同理念，但务必不要将它们混为一谈，因为障碍出现的层次（**结构** 与**态**）不同。

12 存在 $SB(A)$，但不存在全局一致的子系统

12.1 符号阿祖玛雅代数

定义 12.1 ([2])。设 p 是一个素数，并令 $m = p^2$。假设 k 包含一个本原m次单位根 ζ_m。在

$$X = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2 = \operatorname{Spec} k[u^{\pm 1}, v^{\pm 1}],$$

通过生成元 x，y 和关系定义一个 $\mathcal{O}_X$-代数层 $A(u,\ v)_m$

$$x^m = u, \qquad y^m = v, \qquad yx = \zeta_m xy.$$

我们称 $A(u,v)_m$ 为符号阿祖玛雅代数。

定理 *12.2*（[2]）。设 $\beta = [A(u,v)_{p^2}] \in Br(X)$ 是 $A(u,v)_{p^2}$ 的布劳尔类。那么 $per(\beta) = p^2$。另一方面，对于二部类型 $d = (p,p)$，有 $\ell = lcm(p,p) = p$，因此

$$Br_{(p,p)}(X) \subset Br(X)[p].$$

因此 $\beta \notin Br_{(p,p)}(X)$：尽管存在 $SB(A) \to X$，但无法将(p,p)-子系统结构（因此也无法将纠缠过滤）全局化。

12.2 一个具体的量子示例

固定一个素数 p，并令 $m = p^2$。作为外部参数空间，考虑

$$\mathcal{X} = (\mathbb{C}^\times)^2, \qquad (u,v) \in \mathcal{X},$$

并令

$$\zeta := e^{2\pi i/m}$$

为一个本原 m 次单位根。下面我们用量子信息的语言（一个具体的希尔伯特空间和算子）给出符号阿祖玛雅代数的局部表示，并明确说明全纯不是局域操作，而是会产生纠缠。

步骤 1：局部平凡化以及依赖于 $(u,\ v)$ 的算子实现。取一个单连通开子集 $U \subset \mathcal{X}$，并在其上（解析地）选取 m 次根 $u^{1/m}$，$v^{1/m}$的分支。令

$$H := \mathbb{C}^m$$

并固定基 $\{|r\rangle\}_{r \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$。定义 Weyl型移位/时钟算子如下：

$$\mathbf{X}|r\rangle = |r+1\rangle, \qquad \mathbf{Z}|r\rangle = \zeta^r |r\rangle, \tag{2}$$

使得$\mathbf{ZX} = \zeta \mathbf{XZ}$ 成立。对于 $(u,v) \in U$，令

$$x(u,v) := u^{1/m}\mathbf{X}, \qquad y(u,v) := v^{1/m}\mathbf{Z}.$$

于是我们立即得到

$$x(u,v)^m = u\,\mathrm{id}_H, \qquad y(u,v)^m = v\,\mathrm{id}_H, \qquad y(u,v)\,x(u,v) = \zeta\, x(u,v)\,y(u,v).$$

因此，局部而言，符号代数的生成元 x，y 可实现为依赖于 $(u,\ v)$ 的具体量子算子。

步骤 2：由多值性（m 次方根）产生的规范全纯。固定一个基点（$u_0,\ v_0$）$\in U$ 并考虑这些回路

$$\gamma_u(t) = (u_0 e^{2\pi i t},\, v_0), \qquad \gamma_v(t) = (u_0,\, v_0 e^{2\pi i t}) \qquad (0 \le t \le 1).$$

对所选分支进行解析延拓可得

$$u^{1/m} \longmapsto \zeta\, u^{1/m} \quad (\text{along } \gamma_u), \qquad v^{1/m} \longmapsto \zeta\, v^{1/m} \quad (\text{along } \gamma_v),$$

因此，$x(u,\ v)$ 沿着 γ_u 会获得相位 ζ，而 $y(u,\ v)$ 沿着 γ_v 会获得相位 ζ。然而，使用共轭变换

$$yxy^{-1} = \zeta x, \qquad x^{-1}yx = \zeta y,$$

这些相位变化可以作为规范变换（基底粘合）被吸收。由于纯态会将整体非零标量视为相同，全纯可以取为射影群$PGL(H) = GL(H)/\mathbb{C}^\times$中的元素：

$$g_u = [\, y(u_0, v_0)\,] \in PGL(H), \qquad g_v = [\, x(u_0, v_0)^{-1}\,] \in PGL(H)$$

（其中 $[\cdot]$ 表示射影化）。

此外，在 $GL(H)$-提升中计算交换子会留下一个标量：

$$g_u g_v g_u^{-1} g_v^{-1} \ \sim\ (\mathbf{Z})(\mathbf{X}^{-1})(\mathbf{Z}^{-1})(\mathbf{X}) = \zeta^{-1}\mathrm{id}_H.$$

也就是说，在 PGL 中看起来是可交换的，但在 GL 中仍然存在一个相位（中心标量）ζ^{-1}。这就是布劳尔理论扭曲（不一致性）的局部图景。

步骤 3：局域$(p,\ p)$ 分解 $H \simeq \mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^p$。将 $r \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 唯一地写成

$$r = a + pb, \qquad a, b \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

这给出了一个局部识别

$$H \ \cong\ H_A \otimes H_B, \qquad H_A \cong \mathbb{C}^p,\ H_B \cong \mathbb{C}^p,$$

by

$$|a\rangle_A \otimes |b\rangle_B \ \leftrightarrow\ |a + pb\rangle.$$

在此识别下，沿着 γ_v 的全纯 g_v（相差一个整体非零标量）作用为$\mathbf{X}^{-1}$。用 $(a,\ b)$ 表示，

$$\mathbf{X}^{-1}|a, b\rangle = \begin{cases} |a-1,\ b\rangle & (a \neq 0), \\ |p-1,\ b-1\rangle & (a = 0), \end{cases}$$

因此，只有在 $a = 0$（发生借位）时，b 才会改变。因此，直观上也很清楚，$\mathbf{X}^{-1}$不可能是 $U_A \otimes U_B$（一个局域操作）的形式。

步骤 4：验证乘积态会变成纠缠态。取乘积态

$$|\psi\rangle := (|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes |0\rangle_B.$$

应用$\mathbf{X}^{-1}$ 得到

$$\mathbf{X}^{-1}|\psi\rangle = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |p-1\rangle_A \otimes |p-1\rangle_B.$$

其施密特秩为 2（系数矩阵有两个线性无关的分量），因此它是纠缠态。因此，相对于这一局域（$p,\ p$）分解，全纯 g_v 的 γ_v 是产生纠缠的，且它不属于稳定子（局部操作群）$PGL_p \times PGL_p$。

补充（$p=2$ 情形）。当 $p=2$（因此 $m=4$）时，

$$(|0\rangle+|1\rangle)\otimes|0\rangle \;\longmapsto\; |00\rangle+|11\rangle,$$

经过归一化后，它是一个贝尔态。从这个意义上说，由 (u,v) 中的扭转所产生的规范全纯，具体展现了一个产生纠缠的分量。

由于纯态是射影空间 $\mathbb{P}(H)$ 中的点，而且整体的非零标量在物理上被视为相同，任意 $g\in \mathrm{PGL}(H)$ 都会通过 $[\psi]\mapsto g[\psi]$ 对纯态进行作用（忽略相位）。因此，与回路 γ 相关联的射影全纯 $\rho(\gamma)\in\mathrm{PGL}(H)$ 可以解释为一个 *holonomic* 量子门。在局部分解 $H\simeq H_A\otimes H_B$ 下，局部操作群为 $\mathrm{PGL}(H_A)\times\mathrm{PGL}(H_B)\subset\mathrm{PGL}(H)$（稳定子），而条件 $\rho(\gamma)\notin\mathrm{PGL}(H_A)\times\mathrm{PGL}(H_B)$ 等价于 $\rho(\gamma)$ 是一个纠缠门。特别地，当 $p=2$ 时，沿 γ_v 的全纯 g_v 在局域操作意义下等价于 CNOT 类；若能在每个因子上制备一组通用单量子比特门，则它们与 g_v 一起会生成 $\mathrm{PU}(H_A\otimes H_B)\cong\mathrm{PU}(4)$ 的一个稠密子群（因此可以实现通用量子计算）。

相关文献：与全纯量子计算的关系 本文将以下现象解释为“holonomic 量子门”：对参数空间 X 上的坐标图进行粘合所产生的单值化（全纯）表现为射影群 $\mathrm{PGL}(H)$ 中的一个元素；当它超出局域操作群时，粘合后便可以生成纠缠。

这一观点在概念上与全纯量子计算相似；后者以几何相位（贝里相位）为基础 [23] 以及 Wilczek–Zee 非阿贝尔几何相位 [24]，并将简并子空间的全纯用作逻辑门 [25, 26]。它也与非绝热 holonomic 量子计算的研究方向相符；该方向无需依赖绝热性即可构造 holonomic 量子门 [27]。

然而，标准的 holonomic 量子计算通过控制参数流形上简并特征空间向量丛的贝里联络全纯，获得酉变换；而在我们的框架中，单值化源于塞韦里–布劳尔概形数据以及子系统结构（结构群约化）中的不一致。因此，我们的例子提供了一种代数几何视角，将 holonomic 量子计算的理念与扭曲背景及子系统结构无法整体化这一问题联系起来。

13 子系统可约性并非仅由布劳尔类决定

即使布劳尔类为 0（分裂），子系统结构也不会自动存在。换句话说，未扭曲并不意味着子系统分解会自动存在。

可以在 $X=\mathbb{P}^1$ 上构造这样的例子：

$$A=\mathrm{End}(E),\qquad A'=\mathrm{End}(E')$$

二者均为分裂情形（布劳尔类为 0），但 E 存在张量分解，因此子系统结构也存在；而 E' 不存在张量分解，因此也不存在子系统结构。

在 $X=\mathbb{P}^1$ 上，由 Grothendieck 分裂定理可知

$$E\simeq\bigoplus_{m=1}^{n}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_m)\quad(a_1\le\cdots\le a_n).$$

射影丛 $P(E)$（等价地，PGL$_n$-托orsor）由此分裂类型确定，但允许整体扭曲 $E \mapsto E \otimes \mathcal{O}(t)$。

定理 13.1 ([2]). 以下各项等价：

1. P 可约化为 G_d （它具有二分子系统结构）。
2. 存在秩为 d_A 的丛 F、秩为 d_B 的丛 G，以及线丛 L，使得
$$E \simeq (F \otimes G) \otimes L.$$
3. 存在整数序列 $b_1 \le \cdots \le b_{d_A}$、$c_1 \le \cdots \le c_{d_B}$ 和整数 t，使得
$$\{a_m\}_{m=1}^{n} = \{\, b_i + c_j + t \mid 1 \le i \le d_A,\ 1 \le j \le d_B \,\}$$
作为多重集合。

特别地，对于 (2,2)，这就变成了平行四边形条件
$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3.$$
这反映了这样一种现象：在 $\mathbb{P}^1$上，乘积轨迹（= 矩阵秩 1）的几何可以转化为关于分裂类型的算术条件。

14 数值不变量

一旦固定子系统结构并定义了 $\Sigma_{\le r}(A, d)$，每个纤维总是同一个行列式簇 $R_{\le r}$。因此，维数、次数和希尔伯特多项式等数值不变量都变得统一，不依赖于点 $x \in X$。

维数和余维为
$$\dim(R_{\le r}) = r(d_A + d_B - r) - 1, \qquad \operatorname{codim}(R_{\le r}) = (d_A - r)(d_B - r).$$
因此，每个纤维 $(\Sigma_{\le r})_x$ 的维数和余维都相同。

次数和希尔伯特多项式（相对于标准极化）也都是常数，且完全由 $(d_A, d_B; r)$ 决定。特别地，对于 $r = 1$，有
$$\deg(\Sigma_{A,B}) = \binom{d_A + d_B - 2}{d_A - 1}, \qquad h^0(\Sigma_{A,B}, \mathcal{O}(t)) = \binom{t + d_A - 1}{d_A - 1}\binom{t + d_B - 1}{d_B - 1}.$$
因此，纠缠诱导的分层在整个族中提供了恒定的几何结构，其数值不变量可以得到明确追踪。

命题 14.1 ([2])。 假设 $d_A \le d_B$。行列式簇的射影次数$R_{\le r} \subset \mathbb{P}^{d_A d_B - 1}$ 为
$$\deg(R_{\le r}) = \prod_{i=0}^{d_A - r - 1} \frac{(d_B + i)!\, i!}{(r + i)!\, (d_B - r + i)!}.$$

命题 14.2 ([2])。 记作 $R_{\le r}$ =Proj(S/I_{r+1}) （其中 I_{r+1} 是由$(r+1)$阶子式生成的理想），次数为 t 的部分具有如下表示论分解
$$(S/I_{r+1})_t \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash t,\ \ell(\lambda) \le r} \mathbb{S}_\lambda(k^{d_A}) \otimes \mathbb{S}_\lambda(k^{d_B}),$$
因此，希尔伯特多项式完全由(d_A, d_B, r)决定。

定理 14.3 （[2]）。 给定一个二分子系统结构，每个 $\Sigma_{\leq r}(A,\ d) \subset SB(A)$ 在 X上是平坦的，并且对于每个点 $x \in X$ ，纤维（$\Sigma_{\leq r}$）$_x$ 同构于经典 $R_{\leq r}$。因此，维数、次数和希尔伯特多项式在 x 中保持不变，并且仅取决于（$d_A,\ d_B,\ r$）。

15 物理学示例：环面上的量子自旋系统（基态与哈密顿量的粘合）

本节以一个具有周期性边界条件的四位点自旋系统为例，尽可能具体地说明以下现象：虽然在每个坐标图上（局部地），基态都可以呈现为乘积态，但一旦在参数空间上进行粘合，过渡（规范变换）就可能不再是局域操作，因此基态看起来会是纠缠态。要点如下：

1. 在单连通开集（一个坐标图）上，我们可以将希尔伯特空间局部识别为 $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$，并据此安排局域基态为乘积态。2. 然而，移至另一个坐标图时的粘合（过渡函数）可能不属于 PGL($\mathcal{H}$) 中的局域操作群 (PGL$_2$ ×PGL$_2$)。3. 因此，局部选取的乘积态集合（塞格雷簇）无法在全局上粘合；即使是同一条基态线（射影态），在不同坐标图中观察时也会变成纠缠态。

原始自旋链的总希尔伯特空间是 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 4}$，这是物理上自然的张量积分解。相比之下，在本节中，我们处理的是单磁振子子空间$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^4$，而进一步的分解 $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 则是通过基变换构造的有效双量子比特系统的分解。因此，这里讨论的纠缠并非相对于物理分解 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 4}$而言，而是相对于 $\mathcal{H}$ 的局部识别而言（即一种局域子系统结构）。重要的是，这种子系统结构无法以相容的方式在全局上传输。

相关文献：与能带拓扑的比较（贝里相位、陈数）。在凝聚态物理中，“能带拓扑”研究布里渊区上占据能带的特征空间 T^d 如何构成 T^d 上的复向量丛（布洛赫丛），以及局部标架的粘合（规范变换）如何导出贝里联络和贝里曲率。诸如陈数和 K-理论分类这样的普适量，用于衡量某个子丛（占据能带）是否能够被全局平凡化（例如 [23, 28, 29, 30, 31]）。

相比之下，本文研究的全局几何纠缠衡量的是（至少在概念上）另一个层面的结构：

- 能带拓扑主要关注本征态线丛（或占据能带子空间）如何在全局范围内扭曲并粘合。粘合群通常是一个 $U(r)$ 规范变换（其中 r 是占据能带的秩），障碍则表现为陈数等。

- 在本文中，我们也允许背景（量子系统本身）仅通过粘合局部识别而实现射影地整体化，并进一步探讨子系统

分解（张量积结构）能否在整体上保持相容（即结构群约化是否可能）。如果这种约化失败，那么坐标图之间的过渡函数（单值化）将离开局域操作群，从而可能出现某个在局部看来是乘积态的态，经过粘合后却产生纠缠的现象。

因此，此处讨论的障碍类并非贝里数或陈数，而是另一类不变量。贝里/陈数据源自对本征态（或本征丛）的整体化，而我们的类则源自对子系统结构本身的整体化。当坐标变换的单值化离开局域操作群时，便可能产生纠缠。在这种情况下，相关的障碍类原则上至少可以独立于贝里/陈不变量进行研究（见 [2]）。

15.1 参数空间与单磁振子希尔伯特空间

与§12.2中一样，我们将参数空间取为

$$X := (\mathbb{C}^\times)^2, \qquad (u, v) \in X.$$

在考虑一族物理上厄米（可观测）的哈密顿量时，我们将范围限制为

$$X_{\text{phys}} := (S^1)^2 \subset (\mathbb{C}^\times)^2, \qquad u = e^{i\theta_u},\ v = e^{i\theta_v}.$$

下面固定 $p = 2$ 并设

$$m = p^2 = 4, \qquad \zeta := e^{2\pi i/m} = i.$$

考虑一条具有周期性边界条件的自旋链，其格点 r 为自旋-1/2 粒子，且 $r \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。为简单起见，假设该链由四个粒子组成。令 $\sigma_r^\pm$ 表示格点 r处的升降算符，并定义

$$n_r := \frac{1 - \sigma_r^z}{2}$$

表示向下自旋（磁振子）的数算符。以完全极化态 $|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ 为参照，定义单磁振子基

$$|r\rangle := \sigma_r^- |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, \qquad r \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

这是态 ，其中只有位置 r 处为向下自旋，其余位置均为向上自旋。单磁振子子空间

$$\mathcal{H} := \text{span}\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\} \cong \mathbb{C}^4$$

在任何保持磁振子总数不变的哈密顿量作用下都是不变的（磁振子移动，但仍保持为单个磁振子）。直观地说， $\mathcal{H}$ 是一个 4 维有效空间，其自由度仅为磁振子的位置。

在 $\mathcal{H}$上，定义韦尔型算符，如式（3）所示：

$$\mathbf{X}|r\rangle = |r + 1\rangle, \qquad \mathbf{Z}|r\rangle = \zeta^r |r\rangle \quad (\zeta = i),$$

因此

$$\mathbf{ZX} = \zeta\, \mathbf{XZ}.$$

从物理角度看，$\mathbf{X}$可以视为限制在单磁振子子空间上的晶格平移（单格点平移），而$\mathbf{Z}$ 则可视为格点依赖相位（例如可通过局域场实现的相位门）。

15.2 局域哈密顿量与局域基态

取一个单连通开集（坐标图） $U \subset X^{\mathrm{an}}$，并在其上选择 $u^{1/4}$的一个解析分支（在单连通集合上可以连续地选择一个分支）。详情请参见附录B 。固定常数 $\Delta > J > 0$，并在自旋链的整个希尔伯特空间上定义如下局域哈密顿量：

$$H_U(u,v) := -J\Big(u^{-1/4}\,\sigma_0^+\sigma_1^- + u^{1/4}\,\sigma_0^-\sigma_1^+\Big) \;+\; \Delta\,(n_2+n_3). \tag{3}$$

用文字来说：

- 第一项是一个跃迁项，使磁振子在格点 0 和 1 之间移动，跃迁振幅中带有复相位 $u^{\pm 1/4}$ ——也就是佩尔斯相位。为了使哈密顿量在物理上是厄米的，这些系数必须互为复共轭。若 $|u| = 1$，则 $u^{-1/4} = u^{1/4}$，因此它确实是厄米的。

- 第二项是一个惩罚项：如果磁振子位于格点 2 或 3，就会赋予能量 Δ 。因此，若 Δ 很大，低能态就会主要被限制在由 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 张成的子空间中。

由于 H_U 保持磁振子数不变，它将限制到 $\mathcal{H}$。在基 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ 下，该限制为

$$H_U\big|_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -Ju^{1/4} & 0 & 0 \\ -Ju^{-1/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

右下角的 Δ，Δ 表示磁振子位于位置 2，3 时的能量。左上角的 2×2 块描述 $|0\rangle$与 $|1\rangle$之间的跃迁。

命题 15.1 （局域基态）。 假设 $\Delta > J > 0$ 和 $|u| = 1$。那么，$H_U|_{\mathcal{H}}$ 的特征值为 $-J$、$+J$、Δ、Δ，且唯一的基态（能量为 $-J$）是

$$|\mathrm{GS}\rangle_U = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(u^{1/4}|0\rangle + |1\rangle\Big). \tag{5}$$

此外，完全极化态 $|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ 的能量为 0，而在高磁振子数扇区中，能量为 ≥ 0 或 $\geq \Delta$，因此 (5) 与 $-J < 0$ 也是整个希尔伯特空间的基态。

重要的一点：态（5）依赖于 $u^{1/4}$，但 $u^{1/4}$ 是全局多值的。因此，按当前写法，很难将它定义为一个在整个 $|\mathrm{GS}(u,\ v)\rangle$ 上连续变化的单一向量。如何处理这一问题，正是下文关于粘合的讨论内容。更多详情请参见附录B 。

15.3 粘合的理念：如何将哈密顿量整体化

一般来说，如果改变量子系统中的基（应用酉变换），哈密顿量会发生共轭变换：

$$H \;\longmapsto\; U^{-1}HU.$$

然而，特征值（能谱）和射影特征空间并不改变，因此，表示相同物理过程的哈密顿量只在酉共轭意义下确定。我们将这种共轭等价作为参数空间 X上的粘合规则 。

在这个例子中，使用格点平移进行粘合最为自然。在整个自旋链希尔伯特空间上定义平移算符 T 如下：

$$T\sigma_r^{\pm}T^{-1} = \sigma_{r+1}^{\pm} \qquad (\text{indices mod } 4).$$

将 T 限制到单磁振子子空间，得到

$$T|_{\mathcal{H}} = \mathbf{X},$$

与（2）中的平移相符。

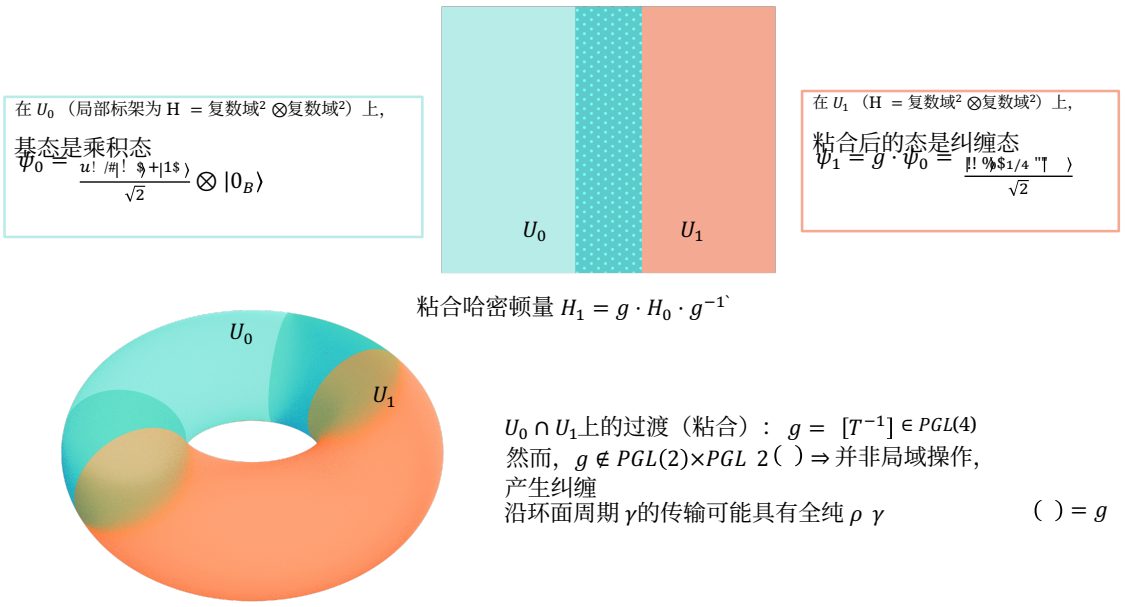
在另一个单连通坐标图 $U' \subset X^{\text{an}}$ 上，通过共轭定义哈密顿量：

$$H_{U'}(u,v) := T^{-1} H_U(u,v)\, T. \tag{6}$$

将 $H_{U'}$ 写成自旋算符的形式，得到

$$H_{U'}(u,v) = -J\left(u^{-1/4}\,\sigma_3^+\sigma_0^- + u^{1/4}\,\sigma_3^-\sigma_0^+\right) \;+\; \Delta\,(n_1+n_2), \tag{7}$$

这仍然是局域相互作用（仅包含最近邻相互作用）。因此 H_U 耦合键（0，1），而 $H_{U'}$ 耦合键（3，0），相当于平移了一个位置。



注 15.2。在交叠 $U \cap U'$处，（6）表明 H_U 和 $H_{U'}$ 之间通过酉共轭变换相关。因此，我们不再在 X上书写单个全局哈密顿量，而是定义一个全局扭曲的哈密顿量族：

取局部表达式 $\{H_U,\ H_{U'}, \ldots\}$，并通过共轭在交叠处将它们粘合起来。

从数学上说，这相当于构造一个仅在逐纤维共轭意义下确定的族（一个通过射影群中的规范变换粘合起来的族）。

15.4 粘合基态直线：射影态的过渡函数

接下来我们解释基态如何粘合。由于 $H_{U'} = T^{-1} H_U T$，若 $|\psi\rangle$ 是 H_U 的特征向量，则 $T^{-1}|\psi\rangle$ 是 $H_{U'}$ 的特征向量，且具有相同的特征值。特别地，对于局域基态（5），定义

$$|\mathrm{GS}\rangle_{U'} := T^{-1}|\mathrm{GS}\rangle_U.$$

在单磁振子子空间上，$T^{-1} = \mathbf{X}^{-1}$，因此在射影空间 $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ 中，我们得到粘合规则

$$[\mathrm{GS}]_{U'} = [\,\mathbf{X}^{-1}\mathrm{GS}\,]_U$$

（其中 $[\cdot]$ 表示模去整体非零标量后的态）。

直接计算可得

$$|\mathrm{GS}\rangle_{U'} = \mathbf{X}^{-1}|\mathrm{GS}\rangle_U = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(u^{1/4}|3\rangle + |0\rangle\Big). \tag{8}$$

这种粘合自然地适用于射影空间的元素，而非态矢量，因此粘合群为 $\mathrm{PGL}(\mathcal{H})$。

15.5 局部双量子比特分解与通过粘合产生纠缠

现在设置已就绪，我们来检查这个态：它局部上是乘积态，但经过粘合后会变得纠缠。要将 $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^4$ 视为两个量子比特，我们用一个 2 位字符串（a，b）来编码基 $|r\rangle$：

$$r = a + 2b, \qquad a, b \in \{0, 1\},$$

并作如下识别

$$|a\rangle_A \otimes |b\rangle_B \;\longleftrightarrow\; |r = a + 2b\rangle.$$

Then

$$|0\rangle = |00\rangle, \quad |1\rangle = |10\rangle, \quad |2\rangle = |01\rangle, \quad |3\rangle = |11\rangle.$$

（同样，这是单磁振子空间内的局部识别，而不是对四自旋系统本身作物理分解。）

在此识别下，（5）变为

$$|\mathrm{GS}\rangle_U = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(u^{1/4}|00\rangle + |10\rangle\Big) = \left(\frac{u^{1/4}|0\rangle_A + |1\rangle_A}{\sqrt{2}}\right) \otimes |0\rangle_B. \tag{9}$$

因此，$|\mathrm{GS}\rangle_U$ 是一个乘积态（就子系统 A 和 B而言）。

另一方面，粘合基态（8）为

$$|\mathrm{GS}\rangle_{U'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle + u^{1/4}|11\rangle\Big).$$

对于熟悉量子信息的读者来说，这一点显而易见；不过，我们也可以如下看出这个态是纠缠的：

- 一般来说，双量子比特 $|\phi\rangle = \sum_{a,\,b=0}^{1} c_{ab}|a\rangle_A \otimes |b\rangle_B$ 对应于系数矩阵 $C = (c_{ab})$，而 是乘积态等价于 C 秩为 1（命题 2.5）。

• 这里的系数矩阵是 $C = \mathrm{diag}(1,\ u^{1/4})$，因此只要 $u^{1/4} \neq 0$，秩就是 2。因此施密特秩为 2，所以它是一个纠缠态。

特别是，如果 $u = 1$ 那么

$$|\mathrm{GS}\rangle_{U'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big),$$

这恰好是归一化贝尔态。

15.6 为什么粘合后会出现纠缠：过渡元不是局域操作

最后，我们从规范变换的角度总结这一现象为何会发生 s.

交叠 $U \cap U'$ 上的粘合是

$$[\mathrm{GS}]_{U'} = [\,\mathbf{X}^{-1}\mathrm{GS}\,]_{U}.$$

也就是说，过渡元为

$$g_v = [\mathbf{X}^{-1}] \in \mathrm{PGL}(\mathcal{H}).$$

如果 g_v 属于局域操作群 $\mathrm{PGL}(\mathbb{C}^2) \times \mathrm{PGL}(\mathbb{C}^2)$，那么局部选取的乘积态集合（塞格雷簇）将在交叠处保持不变，并且应当能够一致地粘合出一个全局的乘积态族。

然而，$\mathbf{X}^{-1}$ 并不是相对于该局部分解的局域操作。事实上，对于写作 $r = a + 2b$ 的基，它作用于一个态时（忽略符号）表现为

$$\mathbf{X}^{-1}|a, b\rangle = \begin{cases} |a-1,\ b\rangle & (a = 1), \\ |1,\ b-1\rangle & (a = 0), \end{cases}$$

因此，b 的变化取决于 a。这是 B 随 A的态而变化的操作类型，这正是受控门（CNOT 型门）所具有的非局域性 。当从另一个坐标图观察时，这个非局域过渡元正是将局部乘积态基态带到纠缠形式的机制。

总而言之，这个例子可以理解如下：

> 在局部层面，可以引入双量子比特视角（$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$），并将基态变为乘积态。然而，由于定义坐标图之间粘合的过渡元不属于局域操作群，这一视角无法扩张到全局。这种扩张的失败表现为由粘合产生的（几何）纠缠。

这是一个示例，它将“参数空间中的回路上的平行输运如同量子门（整体几何门）”这一观点，以及它能够产生纠缠（几何障碍的一种物理体现），转化为一个更易于直接实现且更具普适性的简单模型。

物理启示。对于自旋系统，可以合理地预期，许多具有纠缠本征态的模型也会在参数族中呈现粘合诱导的纠缠现象。这类效应鲜少被讨论的一个原因是，许多研究只采用单个坐标片，即使参数流形需要多个坐标图。例如，环面和球面都无法由单个坐标图覆盖，但在许多情形下（如布里渊区上的拓扑绝缘体），人们仍在单个坐标片上处理它们。当然，这些是量子多体系统，因此本征态（尤其是基态）在局部坐标图上就已经是纠缠的。不过，应用本文的观点自然会揭示，**存在与坐标变换相关联的新的（全局几何）纠缠**。我们对此进行了系统阐述，并通过一些基础示例加以说明。此外，伴随这种全局几何纠缠的普适量（障碍类）——据我们所知，现有物理学研究尚未强调这些量——如今可以被观测到（且与能带的贝里数和陈数相区分）。

16 球面Hecke谱与纠缠的代数判据

到目前为止，我们讨论了一族扭曲的量子态。在这里，我们将考虑把纠缠测量视为某些算子的谱。为此，我们考察将系统映射到其对偶空间的映射。原因如下所述。

16.1 指导思想

本节旨在建立一套语言，用于描述几何侧的以下现象：

“局部上可以看到张量分解，但在整体上无法粘合起来。”

这种局部到整体失效（纠缠单值化）在对偶侧应编码为对易算子的同时本征值数据。

几何侧的单值化（取值于 PGL_n 的全纯）和对偶侧的 Satake 参数（ $G^\vee$ 中的一个半单共轭类），并非通过识别同一群中的同一个元素得到。

尽管如此，这种对应之所以“可见”，是因为两侧的问题在逻辑结构上基本相同：

“能否约化（因式分解）为张量类型？”

更准确地说：

- 几何侧：如果结构群无法约化为 $G_{\mathbf{d}}$，那么过渡函数就会离开 $G_{\mathbf{d}}$，并出现将局部乘积数据变为纠缠数据的全纯。
- Satake 侧：如果 Satake 参数不属于 $r_{\mathbf{d}}$ 的像，那么施加在不变量上的像条件（多项式关系）就不成立。

这里我们正在比较两边的可分解性 。

16.2 术语

关于“球”

“球性”一词 al”在本截面中以两种不同的含义出现，因此我们首先将它们区分开来：

- **(Sph-Hecke)** 球 Hecke 代数中的“球”，即非分歧情形：取 G为非分歧约化群（特别是，只要 G 是分裂群即可），固定一个超特殊子群 K，并考察 $\mathcal{H}(G,K)$。对于（分裂）约化群，这通常成立，与齐性空间 $X=G/H$的球性无关。

- **(Sph-var)** 球簇意义上的“球”：对于 $X=G/H$，一个 Borel 子群有一个开轨道。要从解析角度解释谱条件，需要这一点；但在本节中，它只出现在§16.3，其他地方均未用到。

从现在起，像条件的多项式描述（谱定义理想），以及关于如何通过萨特克同构将它们解读为 Hecke 特征值的讨论，仅假设 (Sph-Hecke)。

我们还要强调，我们讨论乘积态／纠缠所针对的对象并非所有量子态的集合，而是可由（非分歧）萨特克参数描述的半单共轭类。

记号与基本术语

设 F 是一个非阿基米德局部域， G 是一个分裂约化群， $K\subset G$ 是一个超特殊极大紧子群。将球 Hecke 代数记为

$$\mathcal{H}(G,K):=C_c^\infty(K\backslash G/K)$$

（其乘积为卷积乘积）。

设 π 是 G 的一个不可约光滑表示，且具有一个非零的 K-固定向量（球表示）。那么 dim $\pi^K=1$，因此 $\mathcal{H}(G,K)$ 在 V^K 上的作用为标量，从而得到 Hecke 特征标

$$\lambda_\pi:\ \mathcal{H}(G,K)\to\mathbb{C},\qquad \pi(f)|_{\pi^K}=\lambda_\pi(f)\cdot\mathrm{id}.$$

本节中的“参数”是通过 Satake 同构对这个特征标进行坐标化而得到的。

定义 16.1（对偶群 $G^\vee$）。令 $G^\vee$ 表示由 G的对偶根数据定义的连通复约化群。在本文的基本例子中，

$$G=\mathrm{PGL}_n\quad\Longrightarrow\quad G^\vee=\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}).$$

定义 16.2（对偶环面）。固定一个分裂极大环面 $T\subset G$。对偶环面 $T^\vee\subset G^\vee$ 是由以下条件刻画的复环面：

$$X^*(T^\vee)=X_*(T).$$

注记 16.3（本节所说的“参数”）。我们需要的是一个为 $\mathcal{H}(G,\ K)$ 给出同时特征值的点。根据萨特克同构，这可以表示为 $T^\vee/W_G$ 中的一个点（等价地说，是 $G^\vee$ 中的一个半单共轭类）。

定义 16.4（伴随商（半单共轭类的空间））。 将 $G^\vee$ 的共轭作用的伴随（GIT）商定义为

$$G^\vee /\!\!/ G^\vee \;:=\; \mathrm{Spec}\big(\mathbb{C}[G^\vee]^{G^\vee}\big).$$

这是由共轭不变函数刻画的共轭类空间；在 $\mathbb{C}$ 上，半单共轭类自然地表示为点。

定理 16.5 (切瓦利限制同构**)**。 利用极大环面 $T^\vee \subset G^\vee$ 和 ***Weyl*群** $W_G := N_{G^\vee}(T^\vee)/T^\vee$，有

$$\mathbb{C}[G^\vee]^{G^\vee} \;\cong\; \mathbb{C}[T^\vee]^{W_G}, \qquad \textit{hence} \qquad G^\vee /\!\!/ G^\vee \;\simeq\; T^\vee/W_G.$$

示例：情形 $G=\mathrm{PGL}_n$。 这里 $G^\vee=\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$， $T^\vee$ 是对角环面（$\prod_{i=1}^n z_i=1$），且$W_G\simeq S_n$。因此

$$\mathbb{C}[T^\vee]^{W_G} \;\cong\; \mathbb{C}[e_1,\dots,e_{n-1}]$$

（其中 e_k 是初等对称多项式，且 $e_n=\prod z_i=1$ 固定），本笔记中的“Satake变量”对应于这个不变多项式环的生成元。

塞格雷簇与稳定子（来自几何侧的输入）

固定 $\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_r)$ 并令 $n=\prod_{i=1}^r d_i$。 将.....视为

$$V\cong V_1\otimes\cdots\otimes V_r, \qquad \dim V_i=d_i,$$

我们得到塞格雷嵌入

$$\Sigma_{\mathbf{d}} := \mathbb{P}(V_1)\times\cdots\times\mathbb{P}(V_r)\hookrightarrow\mathbb{P}(V).$$

考虑

$$G:=\mathrm{PGL}(V)\simeq\mathrm{PGL}_n, \qquad G_{\mathbf{d}}:=\mathrm{Stab}_G(\Sigma_{\mathbf{d}}), \qquad X_{\mathbf{d}}:=G/G_{\mathbf{d}}.$$

空间 $X_{\mathbf{d}}$ 是类型 $\mathbf{d}$ 的子系统结构空间。

$G_{\mathbf{d}}$ 的形状以及下面的维数计算，基于这样一个标准事实：其单位连通分支本质上是 $\prod_i\mathrm{PGL}_{d_i}$（来自等维因子的置换的有限群部分，对于维数和像条件的论证并无影响，因此从现在起将其省略）。

16.3 $X_{\mathbf{d}}$ 的球性

定义 16.6（球面簇）。 若某个（因而任意一个）Borel 子群 $B\subset G$ 在 X 上有开轨道，则称一个 G-簇 X 为球面簇。

关于检验球性的基本观点，参见例如 [32]:

1. **（是否存在开博雷尔轨道）**： B 在 X上有开轨道吗?

2. **（必要条件：维数不等式）**：如果存在开轨道，那么 $\dim(B\cdot x)=\dim X$，因此

$$\dim X \;\le\; \dim B$$

必须成立（球性的必要条件）。

3. **（秩与小 Weyl 群）**：球面 X 有一个与之关联的 Cartan 部分 A_X 和小 Weyl 群 W_X，并定义 $\mathrm{rank}(X):=$维数 A_X。

4. **（与已知分类的比较）**：当 G为经典且 H 为约化时，可以与约化球面子群的分类进行比较（经典地，Kr¨amer [33],等）。

命题 16.7（通过维数障碍排除球性）。假设 $d_i\ge 2$, $r\ge 2$, $n=\sum_i d_i$，并取 $G=\mathrm{PGL}_n$, $X_{\mathbf{d}}=G/G_{\mathbf{d}}$。球性的必要条件 维数 $X_{\mathbf{d}}\le$维数 B（对于一个 *Borel* B）只有在以下情形下才可能成立

$$\mathbf{d}=(2,2)\quad (n=4).$$

因此，如果 $\mathbf{d}\neq$（2，2），这个特定的齐性空间 $X_{\mathbf{d}}$ 就不可能是球面簇（至少可以通过维数障碍将其排除）。

证明。首先，

$$\dim G=\dim \mathrm{PGL}_n=n^2-1.$$

PGL_n 的 Borel 子群的维数为

$$\dim B=\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)=\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

接下来，忽略有限群部分（同构因子的置换），我们可以将单位连通分支视为

$$G_{\mathbf{d}}^{\circ}\simeq\prod_{i=1}^{r}\mathrm{PGL}_{d_i}$$

(a s来自塞格雷簇显然对称性的标准模型）。该 n

$$\dim G_{\mathbf{d}}^{\circ}=\sum_{i=1}^{r}(d_i^2-1)=\sum_i d_i^2-r.$$

因此

$$\dim X_{\mathbf{d}}=\dim G-\dim G_{\mathbf{d}}^{\circ}=(n^2-1)-\Big(\sum_i d_i^2-r\Big)=n^2-\sum_i d_i^2+(r-1).$$

必要条件 $\dim X_{\mathbf{d}}\le\dim B$等价于

$$n^2-\sum_i d_i^2+(r-1)\;\le\;\frac{(n-1)(n+2)}{2},$$

i.e.

$$n^2-n-2\sum_i d_i^2+2r\;\le\;0\qquad(*).$$

(i) 情形 $r = 2$。令 $\mathbf{d} = (a,\ b)$，其中 $a,\ b \geq 2$ 且 $n = ab$。于是 (∗) 等价于 $(a^2-2)(b^2-2) \leq ab$。若 $a,\ b \geq 3$，则 $a^2-2 > a$ 且 $b^2-2 > b$，因此左边为 $> ab$，这与已知矛盾。因此，$a,\ b$ 中至少有一个等于 2。例如，若 $a = 2$，则 $2(b^2-2) \leq 2b$，即 $(b-2)(b+1) \leq 0$，所以 $b = 2$。

（ii）情形 $r \geq 3$。于是 $n = \prod_i d_i \geq 2^3 = 8$。此外，由于 $n/d_i \geq 2^{r-1}$，我们有 $d_i \leq n/2^{r-1}$，因此 $d_i^2 \leq n^2/4^{r-1}$。所以

$$\sum_i d_i^2 \leq \frac{r}{4^{r-1}}\, n^2.$$

代入（∗）的左边，得到

$$n^2 - n - 2\sum_i d_i^2 + 2r \ \geq\ n^2\Big(1 - \frac{2r}{4^{r-1}}\Big) - n + 2r.$$

对于 $r \geq 3$，有 $1 - \frac{2r}{4^{r-1}} > 0$，代入 $n \geq 8$ 后右边为正，因此（∗）不成立。t

注 16.8。命题16.7 断言，对于构造 $X_{\mathbf{d}} = G/G_{\mathbf{d}}$，球性基本上仅在（2，2）时得以保留。

另一方面，本文后续用于通过不变多项式刻画像条件（**d**-乘积轨迹）的论证纯属代数论证，并不假设 (Sph-var)。因此，即使在 $\mathbf{d} \neq$（2，2）（例如命题17.7 和定理17.11）的情况下仍能得到充要条件，也不构成矛盾。

16.4 球海克代数与萨特克同构

（本节通用的）基本假设：设 F 是一个非阿基米德局部域，G 是一个分裂约化群（本文主要讨论 $G = \mathrm{PGL}_n(F)$），$K \subset G$ 是一个超特殊极大紧子群（非分歧情形）。下文中我们只使用 (Sph-Hecke)。

球海克代数 $\mathcal{H}(G,\ K)$

从这里开始，我们将说明海克作用如何定义，以及特征值（海克特征值）意味着什么。

设 F 是一个非阿基米德局部域（例如 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张），$\mathcal{O}$ 是它的整数环，ϖ 是一个一致化子，并设 q 为剩余域的大小。

在本文的具体例子中，我们取

$$G = \mathrm{PGL}_4(F), \qquad K = G(\mathcal{O}).$$

这里 K 是一个极大紧子群，在球理论中发挥着核心作用。

定义 16.9（球 Hecke 代数）。设

$$\mathcal{H}(G,K) := C_c^\infty(K\backslash G/K)$$

为该空间　　具有紧支集、局部常值且双侧K不变的复值函数 f　　s.

将 Haar测度 dg 归一化，使其满足 $\mathrm{Vol}(K)=1$。则卷积

$$(f_1 * f_2)(g) := \int_G f_1(gh^{-1}) f_2(h)\, dh$$

使 $\mathcal{H}(G,\ K)$ 成为一个代数。这称为（球）海克代数。

由于 f 由其在双陪集 $K\backslash G/K$ 上的取值确定，因此它是有限个双陪集的特征函数的有限线性组合。卷积对应于“先对 f_2 求平均，再对 f_1 求平均”的操作，因此代数乘积编码了“算子的复合”。

定义 16.10 （卷积作用（在一个表示上））。设 π 是 G 的一个光滑表示，其表示空间为 V。对于 $f \in \mathcal{H}(G,\ K)$，定义

$$\pi(f)v := \int_G f(g)\, \pi(g)v\, dg,$$

这给出了一个算子 $\pi(f)\colon\ V \to V$。

由于 v 是光 滑的，且 f 有紧支集，上述积分实际上是一个有限和 .

当 π 不可约且具有一个 K不变向量（球／非分歧）时，有 $\dim \pi^K = 1$。于是，每个 $f \in \mathcal{H}(G,K)$ 都以标量作用于 V^K，并且

$$\pi(f)v_K = \lambda_\pi(f)\, v_K \qquad (0 \neq v_K \in V^K).$$

这个标量 $\lambda_\pi(f)$称为**Hecke特征值**。

由于 $\mathcal{H}(G,K)$是交换的， K-球向量的行为就像可交换观测量的共同本征态。特征值数据由下一小节中的萨特克参数加以概括。

萨特克同构与萨特克参数

萨特克同构给出

$$\mathrm{Sat}_G :\ \mathcal{H}(G,K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[T^\vee]^{W_G}.$$

因此，球表示 π 的海克特征值 λ_π 可以写成在点 $[s(\pi)] \in T^\vee/W_G$处的取值：

$$\lambda_\pi(f) = \mathrm{Sat}_G(f)\big(s(\pi)\big) \qquad (f \in \mathcal{H}(G,K)).$$

这 $[s(\pi)]$ 称为（球）萨特克参数。

注 16.11 （算子、数据与参数）。

- 海克代数：作用于 $G(F)$上的“取平均（卷积）算子”构成的交换代数。
- Satake 同构：将交换代数 $\mathcal{H}(G,\ K)$与对偶环面上的对称多项式对应起来。
- Satake参数：给出特征值的“环面上的点”（对偶群中的一个共轭类）。

16.5 $\mathbf{d} = (2,\ 2)$的情形

(1）设置（张量积同态与环面嵌入）

对于$\mathbf{d} = (2,\ 2)$，考虑复群之间的张量积同态

$$r:\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}), \qquad (g_1, g_2) \longmapsto g_1 \otimes g_2.$$

对于 SL_2, 中的标准环面元素

$$t(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \qquad t(b) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix},$$

$t(a) \otimes t(b)$ 的特征值为

$$(ab,\ ab^{-1},\ a^{-1}b,\ a^{-1}b^{-1}). \tag{10}$$

因此我们得到一个环面嵌入

$$\iota:\ (\mathbb{C}^\times)^2 \to (\mathbb{C}^\times)^4, \qquad (a, b) \mapsto (ab, ab^{-1}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}).$$

定义 **定理 16.12**（萨特克同构的限制映射（$\mathbf{d} = (2,2)$））。定义

$$\mathrm{Res}_{(2,2)} := \iota^* \circ \mathrm{Sat}_G:\ \mathcal{H}(G, K) \to \mathbb{C}[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}].$$

根据对称性（$a \mapsto a^{-1}$、$b \mapsto b^{-1}$，以及交换 a 和 b），其像自然地落在$\mathbb{C}[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}]^{W_{(2,2)}}$中，因此在需要时，我们将其视为

$$\mathrm{Res}_{(2,2)}:\ \mathcal{H}(G, K) \to \mathbb{C}[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}]^{W_{(2,2)}}.$$

(2） e_1、e_2、e_3的拉回

现在我们显式计算 $\iota^*(e_1)$ $\iota^*(e_2)$ $\iota^*(e_3)$，目标是将 Hecke 特征值写成 (a, b) 的函数。

令 z_i 为 ι 下的像坐标（因此 $z_1 = ab$、$z_2 = ab^{-1}$、$z_3 = a^{-1}b$ $z_4 = a^{-1}b^{-1}$）。那么:

1. 由于 $e_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$,

$$\iota^*(e_1) = ab + ab^{-1} + a^{-1}b + a^{-1}b^{-1} = (a + a^{-1})(b + b^{-1}).$$

2. 对于 $e_2 = \sum_{i<j} z_i z_j$，逐项计算:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (ab)(ab^{-1}) = a^2, \\ z_1 z_3 &= (ab)(a^{-1}b) = b^2, \\ z_1 z_4 &= (ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1, \\ z_2 z_3 &= (ab^{-1})(a^{-1}b) = 1, \\ z_2 z_4 &= (ab^{-1})(a^{-1}b^{-1}) = b^{-2}, \\ z_3 z_4 &= (a^{-1}b)(a^{-1}b^{-1}) = a^{-2}. \end{aligned}$$

求和得

$$\iota^*(e_2) = a^2 + a^{-2} + b^2 + b^{-2} + 2.$$

3. 由于 $e_3 = \sum_{i<j<k} z_i z_j z_k$ 和 $\prod z_i = 1$，我们有

$$e_3 = (z_1 z_2 z_3 z_4) \sum_{i=1}^{4} z_i^{-1} = \sum_{i=1}^{4} z_i^{-1}.$$

在这种情况下，集合 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ 在取逆 ($z_1^{-1} = z_4$, $z_2^{-1} = z_3$) 下封闭，因此

$$\iota^*(e_3) = z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} + z_4^{-1} = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \iota^*(e_1).$$

(3) 球面谱的 Hecke 特征值

我们将 T_k 规范化为 $\mathrm{Sat}_G(T_k) = e_k$，因此

$$\mathrm{Res}_{(2,2)}(T_k) = \iota^*(e_k).$$

因此

$$\mathrm{Res}_{(2,2)}(T_1) = (a+a^{-1})(b+b^{-1}), \quad \mathrm{Res}_{(2,2)}(T_2) = a^2+a^{-2}+b^2+b^{-2}+2, \quad \mathrm{Res}_{(2,2)}(T_3) = \mathrm{Res}_{(2,2)}(T_1).$$

注 16.13 (Satake 同构的规范化)。在文献中，常采用一种规范化方式，使特征函数 $\mathbf{1}_{K\varpi^\lambda K}$ 的 Satake 像带有因子 $q^{\langle \rho,\ \lambda\rangle}$(或 $\delta_B^{1/2}$)。在本文中，我们定义 $T_k := \mathrm{Sat}_G^{-1}(e_k)$，并将该 q-因子吸收到规范化中。

这些结果可概括如下：

- $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) /\!\!/ \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \simeq T^\vee/W_G$ 的维数为 $= 3$（可取坐标 e_1, e_2, e_3）。
- 另一方面，$(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) /\!\!/ (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ 的维数为 $= 2$（参数为 $(a,\ b)$）。
- 因此，像的余维为 1，且最小关系确实是 $e_1 = e_3$（等价地 $T_1 - T_3 = 0$）。

（4）乘积轨迹与“纠缠见证”

这里，我们基于上述结果，讨论乘积态和纠缠态如何出现在萨特克映射的像中。

> **定义 16.14**（（2，2）-乘积态/纠缠）。若半单共轭类 $[s] \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})/\sim$ 具有以下特征值模式，则称其为（2，2）-乘积态
>
> $$(ab,\ ab^{-1},\ a^{-1}b,\ a^{-1}b^{-1})$$
>
> （允许重新排列）。否则称为（2，2）-纠缠。

让我们检查一下，这个定义是否与量子信息中的乘积态/纠缠概念相符。如果 $A \in \mathrm{SL}_2$ 的特征值为 $\{\alpha, \alpha^{-1}\}$，而 $B \in \mathrm{SL}_2$ 的特征值为 $\{\beta, \beta^{-1}\}$，那么 $A \otimes B$ 的特征值就会像（10）中那样变为两两乘积。

这正是量子信息中的同一个基本事实：局部门的谱

$$U = U_A \otimes U_B \quad (\text{local gate})$$

分解为“局部谱的乘积态”。因此，

s可以写成　十作为 $s_A \otimes s_B$　$\Longleftrightarrow$ 谱分解为两个“局部参数”　，

这恰好就是乘积态的情形。

命题16.15 （像条件的等价表述）。 设 $s \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ 为半单的，其（无序）特征值为 $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$。以下各条件等价：

1. s 是(2,2)-乘积态。

2. 特征值集合在取逆运算下保持不变：

$$\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \{z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}, z_4^{-1}\},$$

也就是说，它可以写成 $\{u, u^{-1}, v, v^{-1}\}$。

3. 特征多项式是回文的：

$$\chi_s(T) = T^4 - c_1 T^3 + c_2 T^2 - c_1 T + 1.$$

4. 作为对称函数， $e_1(s) = e_3(s)$。

证明。 (1)⇒(2)：由于 $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ 且 $(ab^{-1})^{-1} = a^{-1}b$，像上的特征值集合在取逆运算下封闭。

(2)⇔(3)：特征多项式的系数是对称多项式，而对于 SL_4 ，我们有 $e_4 = z_1 z_2 z_3 z_4 = 1$。一般来说，

$$\chi_s(T) = T^4 - e_1 T^3 + e_2 T^2 - e_3 T + e_4.$$

回文性意味着 $T^4 \chi_s(T^{-1}) = \chi_s(T)$，通过比较系数，这等价于 $e_1 = e_3$。

(3)⇔(4)：这可直接由上面的通用公式得出。
(2)⇒(1)：假设 $\{z_i\} = \{u, u^{-1}, v, v^{-1}\}$。选取 $a \in \mathbb{C}^\times$ 使得 $a^2 = uv$（在 $\mathbb{C}$上总是可能的）。然后令 $b := u/a$，于是 $b \in \mathbb{C}^\times$ 、 $ab = u$ 和 $a/b = v$ 均成立。因此，重新排序后，
$\{ab, ab^{-1}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}\} = \{u, v, u^{-1}, v^{-1}\}$，所以 s 是 (2， 2)-乘积态。t

由上面的计算可得 $\iota^*(e_1) = \iota^*(e_3)$。因此

$$e_1 - e_3 \in \ker(\iota^*) \subset \mathbb{C}[e_1, e_2, e_3].$$

另一方面， $\mathbb{C}[e_1, e_2, e_3]$ 是唯一因子分解整环，而 ι 的像（伴随商上的像）是一个维数为 2 的不可约集合，因此 $\ker(\iota^*)$ 是一个高度为1的素理想。因此

$$\ker(\iota^*) = (e_1 - e_3).$$

通过萨特克同构 $T_k := \mathrm{Sat}_G^{-1}(e_k)$，我们可以写成

$$\ker(\mathrm{Res}_{(2,2)}) = (T_1 - T_3) \subset \mathcal{H}(G, K).$$

注 16.16 （与量子信息中的纠缠见证比较）。 在量子信息中，纠缠见证被定义为一种不等式，它以 Hahn–Banach 的方式分离可分态的凸集（例如，$\mathrm{Tr}(W\rho) < 0$ 意味着存在纠缠）。因此，单个见证并不能完整地分类所有态。

相比之下，本注中用于乘积态/纠缠测试的谱，从一开始就限定为**（非分歧）海克共同本征态**。特征值由以下方式给出：

在 Satake参数 $s(\pi) \in G^\vee /\!\!/ G^\vee$ 上计算不变多项式。在此意义下，在 (2，2) 的情形中，我们有

$$(T_1 - T_3)v = \big(e_1(s(\pi)) - e_3(s(\pi))\big)\, v,$$

and

$$e_1(s(\pi)) = e_3(s(\pi)) \quad \Longleftrightarrow \quad s(\pi) \text{ lies in the } (2,2)\text{-product locus},$$

因此，在非分歧谱内，恰好可以用一个等式条件刻画乘积轨迹。

17 推广到一般 d 的情形

原则上，本节的讨论由以下两部分组成：

1. **（代数）**：将 d-乘积轨迹定义为对偶群上张量积映射的像（伴随商），并用有限多个不变多项式加以识别。
2. **（海克）**：通过 Satake 同构，将这些多项式拉回为海克算子，并将该条件识别为非分歧海克特征值条件。这里需要假设 (Sph-Hecke)。

17.1 张量积映射与 d-乘积（代数定义)

In 接下来，令 $n = \prod_{i=1}^{r} d_i$，并且我们在局部非分歧的分裂情形下工作 .

定义 17.1 （一般情形下的对偶群与d端对偶群）。 对于分裂类型$\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$，令

$$G^\vee = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \qquad G^\vee_{\mathbf{d}} := \prod_{i=1}^{r} \mathrm{SL}_{d_i}(\mathbb{C})$$

（并且在必要时，添入一个来自相同因子置换的有限群）。在本文中，为了描述张量积映射的像条件，我们只使用这个最直接的模型。

定义 17.2 （张量积同态）。 我们称

$$r_{\mathbf{d}} : \ G^\vee_{\mathbf{d}} \longrightarrow G^\vee, \qquad r_{\mathbf{d}}(g_1, \ldots, g_r) = g_1 \otimes \cdots \otimes g_r$$

为张量积同态。

如果 s 属于 $r_{\mathbf{d}}$ 的像，那么 s 的特征值（含重数）具有如下形式

$$\Big\{ \prod_{i=1}^{r} a_{i,j_i} \ : \ 1 \le j_i \le d_i \Big\},$$

其中，我们将 g_i 的特征值写作 $a_{i,\,1}$，…，$a_{i,\,d_i}$。对于 $\mathbf{d} = (2,\ 2)$，可如式（10）所示写出。

定义 17.3 (d-乘积态 / 纠缠)。A 半单共轭类 $[s] \in G^\vee /\!\!/ G^\vee$ 称为**d-乘积态**，如果

$$[s] \in \mathrm{Im}(r_{\mathbf{d}} /\!\!/),$$

否则称为**d-纠缠**。

17.2 不变多项式与纠缠

定义 17.4 （SL_m 的对称群与 Weyl 群）。对于 $m \geq 1$，令 S_m 为集合 $\{1, \ldots, m\}$ 的所有置换构成的群（ m 个字母上的对称群）。对于 $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$ 的标准极大环面 $T_m^\vee$ （对角线元素乘积为 1 的对角矩阵），Weyl 群

$$W(\mathrm{SL}_m) \;:=\; N_{\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})}(T_m^\vee) \,/\, T_m^\vee$$

通过置换矩阵作用于共轭，因此会置换对角线元素。由此，它可以自然地识别为

$$W(\mathrm{SL}_m) \;\cong\; S_m.$$

下面，对于子系统的一种分解$\mathbf{d}$ ，我们设

$$W_{\mathbf{d}} := \prod_i W(\mathrm{SL}_{d_i}) \cong \prod_i S_{d_i}$$

（如有必要，还可通过半直积加入相同因子的置换群）。

注 17.5。这里 $W(\mathrm{SL}_2) \cong \mathbb{Z}/2$ 通过 $a \mapsto a^{-1}$作用，因此

$$W_{\mathrm{dom}} := W(\mathrm{SL}_2) \times W(\mathrm{SL}_2) \cong (\mathbb{Z}/2)^2$$

作用于 $(a,\ b)$。由于两个因子同构，也可以考虑通过交换作用得到的扩张

$$W_{(2,2)}^{\mathrm{ext}} := W_{\mathrm{dom}} \rtimes S_2,$$

但对于本文中的像条件（核的生成元）而言，无论采用哪一种都没有本质区别。

首先， $r_{\mathbf{d}}$ 在伴随商上诱导出一个态射

$$r_{\mathbf{d}} /\!\!/ :\ (G_{\mathbf{d}}^\vee /\!\!/ G_{\mathbf{d}}^\vee) \;\longrightarrow\; (G^\vee /\!\!/ G^\vee).$$

在坐标环（不变环）上，反变地得到

$$r_{\mathbf{d}}^* :\ \mathbb{C}[G^\vee]^{G^\vee} \;\longrightarrow\; \mathbb{C}[G_{\mathbf{d}}^\vee]^{G_{\mathbf{d}}^\vee}.$$

根据切瓦利限制同构（定理16.5），

$$\mathbb{C}[G^\vee]^{G^\vee} \cong \mathbb{C}[T^\vee]^{W_G}, \qquad \mathbb{C}[G_{\mathbf{d}}^\vee]^{G_{\mathbf{d}}^\vee} \cong \mathbb{C}[T_{\mathbf{d}}^\vee]^{W_{\mathbf{d}}},$$

因此，在本文中我们通过这些识别写作，

$$r_{\mathbf{d}}^* :\ \mathbb{C}[T^\vee]^{W_G} \longrightarrow \mathbb{C}[T_{\mathbf{d}}^\vee]^{W_{\mathbf{d}}}$$

（其中 $T_{\mathbf{d}}^\vee$ 是 $G_{\mathbf{d}}^\vee$的极大环面）。

定义 17.6（谱定义理想）。 定义

$$I_{\mathbf{d}} := \ker(r_{\mathbf{d}}^*) \subset \mathbb{C}[T^\vee]^{W_G}$$

并称其为定义谱定义理想 的$\mathbf{d}$重乘积轨迹。

元素 $f \in I_{\mathbf{d}}$ 意味着 f 在张量积像上恒等于零。因此，一旦知道了 $I_{\mathbf{d}}$ 的生成元，就可以通过有限多个方程来检测像条件。

命题 17.7（代数事实）。 理想 $I_{\mathbf{d}}$ 是有限生成的。因此，存在有限多个元素 f_1、……、$f_m \in \mathbb{C}[T^\vee]^{W_G}$，使得

$$I_{\mathbf{d}} = (f_1, \ldots, f_m).$$

那么，对于任意半单共轭类 $[s] \in G^\vee /\!\!/ G^\vee$，

$$[s] \text{ is } \mathbf{d}\text{-product} \quad \Longrightarrow \quad f_1(s) = \cdots = f_m(s) = 0.$$

此外，由于 $r_{\mathbf{d}}/\!\!/$ 的像是扎里斯基闭的（见下文引理 *17.8* ），逆命题也成立：

$$[s] \text{ is } \mathbf{d}\text{-product} \quad \Longleftrightarrow \quad f_1(s) = \cdots = f_m(s) = 0.$$

证明概要。 由于 $\mathbb{C}[T^\vee]^{W_G}$ 是诺特的， $I_{\mathbf{d}} = \ker(r_{\mathbf{d}}^*)$ 是有限生成的。必要性和充分性取决于像是否为扎里斯基闭，这一点将在引理 17.8中证明。 🐾

引理 17.8（命题 $r_{\mathbf{d}}/\!\!/$ 中像的扎里斯基闭性 17.7）。 设 $\mathbb{C}$，令 $G^\vee$ =SL$_n$和 $G_{\mathbf{d}}^\vee = \prod_i \mathrm{SL}^{d_i}$，并考虑张量积同态 $r_{\mathbf{d}}$ ： $G_{\mathbf{d}}^\vee \to G^\vee$。那么在伴随商上诱导的态射

$$r_{\mathbf{d}}/\!\!/ : (G_{\mathbf{d}}^\vee /\!\!/ G_{\mathbf{d}}^\vee) \longrightarrow (G^\vee /\!\!/ G^\vee)$$

的像是扎里斯基闭的。

证明。 令 $T_{\mathbf{d}}^\vee \subset G_{\mathbf{d}}^\vee$ 和 $T^\vee \subset G^\vee$ 为极大环面，令 $W_{\mathbf{d}}$、W_G 为相应的韦伊群。由切瓦利限制同构，

$$G_{\mathbf{d}}^\vee /\!\!/ G_{\mathbf{d}}^\vee \simeq T_{\mathbf{d}}^\vee / W_{\mathbf{d}}, \qquad G^\vee /\!\!/ G^\vee \simeq T^\vee / W_G,$$

且 $r_{\mathbf{d}}/\!\!/$ 对应于 $T^\vee{}_{\mathbf{d}} / W_{\mathbf{d}} \to T^\vee / W_G$。
首先， $r_{\mathbf{d}}$ 限制为环面的一个同态

$$r_{\mathbf{d}}|_{T_{\mathbf{d}}^\vee} : T_{\mathbf{d}}^\vee \longrightarrow T^\vee.$$

代数环面之间的态射的像是一个代数子群（即子环面），因此是扎里斯基闭的。因此

$$S := r_{\mathbf{d}}(T_{\mathbf{d}}^\vee) \subset T^\vee$$

是一个闭子集。
接下来，由有限群 W_G 给出的商映射，即 q: $T^\vee \to T^\vee / W_G$，是一个有限态射，因此也是闭映射。因此， $q(S) \subset T^\vee / W_G$ 是闭的。

另一方面，$T^\vee{}_{\mathbf{d}} \to T^\vee_{\mathbf{d}}/W_{\mathbf{d}}$ 也是满射，因此诱导映射 $T^\vee{}_{\mathbf{d}}/W_{\mathbf{d}} \to T^\vee/W_G$ 的像与从 $T^\vee{}_{\mathbf{d}}$ 看到的像一致：

$$\mathrm{Im}\big(T^\vee_{\mathbf{d}}/W_{\mathbf{d}} \to T^\vee/W_G\big) = \mathrm{Im}\big(T^\vee_{\mathbf{d}} \to T^\vee/W_G\big) = q(S).$$

因此，像是闭的。 🐾

17.3 通过 Hecke 特征值进行检测

通过 Sat_G：对每个 f_i，取相应的海克算子 $\mathcal{H}(G,\ K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[T^\vee]^{W_G}$

$$\mathsf{W}_i := \mathrm{Sat}_G^{-1}(f_i) \in \mathcal{H}(G,K).$$

那么，对于非分歧表示 π，可得

$$[s(\pi)] \in \mathrm{Im}(r_{\mathbf{d}}/\!\!/) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_\pi(\mathsf{W}_1) = \cdots = \lambda_\pi(\mathsf{W}_m) = 0$$

（必要性和充分性取决于像的闭性）。

备注 17.9. 这一部分——利用海克特征值检测像条件——仅依靠 (Sph-Hecke) 即可完成，并且与 $X_{\mathbf{d}}$ 是否为球面簇无关。

17.4 三量子比特情形 ($\mathbf{d} = (2,\ 2,\ 2)$)

对于 $\mathbf{d} = (2,\ 2,\ 2)$，商 $X_{\mathbf{d}} = G/G_{\mathbf{d}}$ 根据命题 16.7 不是球面簇。然而，(2，2，2)-乘积轨迹（伴随商上的像条件）可以纯粹用代数方式描述。

考虑张量积同态

$$r := r_{(2,2,2)} :\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^3 \longrightarrow \mathrm{SL}_8(\mathbb{C}),$$

以及在不变量的坐标环上诱导的拉回

$$r^* :\ \mathbb{C}[\mathrm{SL}_8]^{\mathrm{SL}_8} \ \longrightarrow\ \mathbb{C}[\mathrm{SL}_2^3]^{\mathrm{SL}_2^3}.$$

根据切瓦利限制同构（定理 16.5），我们可以将其识别为

$$\mathbb{C}[\mathrm{SL}_8]^{\mathrm{SL}_8} \ \cong\ \mathbb{C}[e_1,\dots,e_7], \qquad \mathbb{C}[\mathrm{SL}_2^3]^{\mathrm{SL}_2^3} \ \cong\ \mathbb{C}[x,y,z]$$

（例如，x 对应于 $a + a^{-1}$，等等）。令

$$I_{(2,2,2)} := \ker(r^*) \subset \mathbb{C}[e_1,\dots,e_7]$$

是（概形论的）(2，2，2)-乘积轨迹的定义理想。

令下文所用的四次多项式为

$$F := e_3^2 + 2e_1e_3 + e_1^4 - (e_4 + 2e_2 + 1)e_1^2 \ \in \mathbb{C}[e_1,e_2,e_3,e_4]. \tag{11}$$

引理 17.10（四次多项式的不可约性与素性 F）。多项式 $F \in \mathbb{C}[e_1,e_2,e_3,e_4]$不可约。因此，$(F)$ 是素理想，特别地，它是根基。此外，

$$J := \big(e_7 - e_1,\ e_6 - e_2,\ e_5 - e_3,\ F\big) \subset \mathbb{C}[e_1,\dots,e_7]$$

也是一个素理想（因此是根基）。

证明。 在系数环 $A := \mathbb{C}[e_1, e_2, e_4]$ 上，将 F 视为关于 e_3的多项式；于是 $F \in A[e_3]$是一个首一二次多项式。首一二次多项式可约，当且仅当其判别式是 A中的一个平方，因此计算判别式：

$$\Delta = (2e_1)^2 - 4\big(e_1^4 - (e_4 + 2e_2 + 1)e_1^2\big) = 4e_1^2\,(e_4 + 2e_2 + 2 - e_1^2).$$

由于 $4e_1^2$ 已经是 A中的平方，因此要使 Δ 成为平方，必须满足

$$L := e_4 + 2e_2 + 2 - e_1^2 \in A$$

是一个平方。但 L 关于 e_4是线性的，而 A中的任意平方在 e_4中的次数都是偶数，因此 L 不可能是平方。所以 F 不可约，故（F）是素理想。
接下来，在理想 J 中，我们可以利用 $e_5 = e_3,\quad e_6 = e_2,\quad e_7 = e_1$消去 e_5、e_6、e_7，于是

$$\mathbb{C}[e_1, \dots, e_7]/J \;\cong\; \mathbb{C}[e_1, e_2, e_3, e_4]/(F).$$

右边是一个整环（因为（F）是素理想），所以左边也是整环，因此 J 是素理想。t

定理 17.11 （三量子比特乘积轨迹：像条件与定义理想）。 对于半单元素 $s \in \mathrm{SL}_8(\mathbb{C})$，以下条件等价：

（a） $[s] \in \mathrm{SL}_8(\mathbb{C}) /\!\!/ \mathrm{SL}_8(\mathbb{C})$ 是（2，2，2）乘积态，即存在（a，b，c）$\in (\mathbb{C}^\times)^3$，使得特征值多重集为

$$\{\, a^{\pm 1} b^{\pm 1} c^{\pm 1} \,\}.$$

(b) 以下三个回文关系和四次方程 (11)成立：

$$e_7(s) = e_1(s), \qquad e_6(s) = e_2(s), \qquad e_5(s) = e_3(s),$$

$$F(s) = 0.$$

此外，在概形论意义下，

$$I_{(2,2,2)} = \ker(r^*) = \big(e_7 - e_1,\ e_6 - e_2,\ e_5 - e_3,\ F\big).$$

证明。 **(a)⇒(b).** 如果 s 是 (2，2，2)-乘积态，那么其特征值多重集在 $z \mapsto z^{-1}$ 下保持不变（且乘积为 1），因此特征多项式是自倒数的，从而对于 $k = 1$，2，3，有 $e_k = e_{8-k}$。此外，记 $x = a + a^{-1}$、$y = b + b^{-1}$、$z = c + c^{-1}$，并令

$$E(t) := \prod_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^3} \big(1 + t\, a^{\varepsilon_1} b^{\varepsilon_2} c^{\varepsilon_3}\big) = \sum_{k=0}^{8} e_k\, t^k,$$

按前面的计算方法进行直接化简，可得 $F = 0$。
(b)⇒(a). 假设 (b)。根据回文关系，e_5, e_6, e_7 由 e_1, e_2, e_3确定，因此本质上只需检查 (e_1, e_2, e_3, e_4) 的一致性。然后，根据前面给出的重构（分解为 $e_1 \neq 0$ 和 $e_1 = 0$ 两种情况），可以构造一些

$(a,b,c) \in (\mathbb{C}^\times)^3$ 和

$$t = \mathrm{diag}(a, a^{-1}) \otimes \mathrm{diag}(b, b^{-1}) \otimes \mathrm{diag}(c, c^{-1}) \in \mathrm{SL}_8(\mathbb{C})$$

具有与 s 相同的初等对称多项式（因此具有相同的特征值多重集）。因此，$[s] = [t] \in \mathrm{Im}(r/\!\!/)$，所以 s 是 (2，2，2)-乘积态。

理想相等的证明 $I_{(2,2,2)} = J$。由于已证明 (a)⇒(b)，理想

$$J := \big(e_7 - e_1,\ e_6 - e_2,\ e_5 - e_3,\ F\big)$$

在像上消失，因此 $J \subset I_{(2,2,2)}$。另一方面，(b)⇒(a) 蕴含，在伴随商上，

$$V(J) = \mathrm{Im}(r/\!\!/)$$

（即消失轨迹与像重合）。因此，由零点定理，

$$\sqrt{J} = I_{(2,2,2)}.$$

由于 $I_{(2,2,2)}$ 是到一个整环的同态的核，因此它是素理想，进而是根基。最后，由引理 17.10，J 是素理想（尤其是根基），所以 $\sqrt{J} = J$。因此 $I_{(2,2,2)} = J$。🐾

推论 17.12（通过 Hecke特征值进行检测）。设 π 是PGL_8（F）的一个不可约非分歧表示，其 *Satake*参数为 $[s(\pi)]$，*Hecke* 特征值为 $\lambda_k := e_k(s(\pi))$。那么，当且仅当（2、2、2）- π 是乘积态（即 $[s(\pi)] \in \mathrm{Im}(r_{(2,2,2)}/\!\!/)$）时，

$$\lambda_7 = \lambda_1, \qquad \lambda_6 = \lambda_2, \qquad \lambda_5 = \lambda_3,$$

$$\lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1^4 - (\lambda_4 + 2\lambda_2 + 1)\lambda_1^2 = 0.$$

注 17.13。对于$\mathbf{d} = (2, 2)$，一个定义方程就足够了，因为余维为 1，且定义理想成为主理想。对于$\mathbf{d} = (2, 2, 2)$，我们有 $\mathrm{rank}(\mathrm{SL}_8) = 7$，而 $\mathrm{rank}(\mathrm{SL}_2^3) = 3$，因此余维为 4；所以需要多个（且为非线性的）定义方程是很自然的。

18 总结

上半部分关于纠缠局部性质的讨论，在下半部分被拓展为以下整体几何：

- 纤维化 $SB(A) \to X$ 适用于任意阿祖马亚背景，并提供一族典范的纯态空间。
- 然而，乘积轨迹／纠缠过滤并非必然存在：需要一种子系统结构（约化到 G_d），而且可能存在障碍。
- 子系统结构的模空间由 P/G_d 表示，并且与 $SB(A)$ 的相对希尔伯特概形中的子系统结构轨迹一致。
- 在二分情形下，针对 $R_{\le k}$（平坦性、奇点、关联解消、数值不变量）的完整行列式性质可直接下降到 $\Sigma_{\le k}(A,\ d) \subset SB(A)$。

- 布劳尔类衡量一个子系统能否从一开始就在全局上存在，由此产生子集 $Br_d(X) \subset Br(X)$ 和挠约束 $Br_d(X) \subset Br(X)[\ell]$。
- 然而，子系统可约性并非仅由布劳尔类决定：它取决于底层 PGL$_n$-托orsor 的更精细信息（即使在分裂情形下也可能不成立）。

通过子系统结构轨迹检测乘积态/纠缠态 我们可以将判断是否存在纠缠态的方法总结如下。

首先，选择子系统维数（若存在），将其作为类型 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_r)$，并考虑局部闭子概形

$$\mathrm{Hilb}^{\Sigma_d}(SB(A)/X)$$

（子系统结构轨迹），它位于塞韦里–布劳尔概形 $\pi : SB(A) \to X$ 的相对希尔伯特概形内。这是子系统结构（G_d-约化）的模空间；作为一个 X-概形，它可识别为

$$\mathrm{Hilb}^{\Sigma_d}(SB(A)/X) \simeq P/G_d.$$

当且仅当态射 $\mathrm{Hilb}^{\Sigma_d}(SB(A)/X) \to X$ 存在截面 $s\colon X \to \mathrm{Hilb}^{\Sigma_d}(SB(A)/X)$ 时，才能在全局上定义与坐标无关的可分性/纠缠概念。在这种情况下，截面 s 生成一个闭子族 $\Sigma_d(A) \subset SB(A)$（即乘积轨迹）。

因此，对于每个点 $x \in X$ 处的纯态 $[\psi] \in SB(A)_x$，都可以作出判断：

$$[\psi] \text{ is product} \iff [\psi] \in \Sigma_d(A)_x, \qquad [\psi] \text{ is entangled} \iff [\psi] \notin \Sigma_d(A)_x.$$

(在局部坐标中，这与引言（ 2×2 §1.3）中说明的子式消失条件一致。)

通过海克算子的纠缠判据

此外，通过对萨特克参数的讨论，可以将纠缠单值化与海克算子的特征值联系起来；在双量子比特情形中，我们看到

$$\text{product state} \iff \text{(a certain) eigenvalue } = 0.$$

在本文重点讨论的情形 $\mathbf{d} = (2,2)$ 中，萨特克参数空间里的 (2,2)-乘积态条件可简化为一个关系式

$$e_1(s) = e_3(s),$$

其中 e_k 表示特征值中的第 k 个初等对称多项式。

这与量子信息一侧完全平行（如引言中所述），其中

$$\Sigma_{2,2} \subset \mathbb{P}^3 \text{ is defined by a single equation } \det(C) = 0.$$

换言之，我们得到如下完全类似的对应关系：

量子信息（态几何）	朗兰兹（赫克谱几何）
乘积轨迹 $\Sigma_{2,2}$	(2,2)-乘积轨迹 $\mathrm{Im}(r)$
单个方程 $\det(C) = 0$	单个方程 $e_1 - e_3 = 0$
补集是纠缠态	补集是（2，2）纠缠参数

对于三量子比特情形，充要条件由一个非线性方程与若干线性方程组合给出（定理 17.11）。更一般地，对于 n 量子比特，对偶侧上的张量乘积态态射 $r_{\mathbf{d}}$ 确定了一个谱定义理想；由诺特性可知，它是有限生成的。因此，$\mathbf{d}$-乘积轨迹的（扎里斯基）闭包可以描述为有限个不变多项式的公共零点集（若像是扎里斯基闭的，则这就给出了一个等价条件）。

此外，如果 Sakellaridis–Venkatesh 的相对朗兰兹框架 [34, 35, 36] 得以建立，我们或许可以从更具结构性的角度理解这些像条件，将其视为表示论谱选择规则。（然而，正如命题 16.7 所示，$X_{\mathbf{d}} = G/G_{\mathbf{d}}$一般而言并非球，因此若要将 SV 形式体系直接应用于 $\mathbf{d} = (2,\ 2)$ 以外的情形，还需要其他思路。）

无论其实用价值如何，量子态能否因式分解这一基本问题竟可通过 Hecke 特征值和 Satake 参数与现代数学相联系，这一点颇耐人寻味。

A 技术说明

本节补充说明以下三点：

1. 为什么 P/G_d 表示子系统结构（约化）。2. 为什么 Segre 轨道会成为希尔伯特概形的局部闭子概形。3. 如何直接从展平（矩阵化）推导出关联解消。

A.1 为什么 P/G_d 表示子系统结构（关于约化的一般性说明）

这里，为了以比最大限度采用概形论的方式更直观的方式进行解释，我们将 X 视为参数空间，并通过开覆盖 $\{U_i\}$上的粘合（过渡函数）来描述一切。

> **定义 A.1**（主 G-丛的粘合描述）。 设 G 为一个群（这里我们考虑的是 $G =$PGL$_n$ 等）。假设在 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}$ 上，我们可以局部地作如下同构
>
> $$P|_{U_i} \ \simeq\ U_i \times G,$$
>
> 并且在交叠 $U_{ij} := U_i \cap U_j$ 上，过渡同构
>
> $$(U_{ij} \times G) \ \xrightarrow{\sim}\ (U_{ij} \times G)$$
>
> 由下式给出
>
> $$(x, g) \longmapsto \big(x,\ g_{ij}(x)\, g\big) \qquad (g_{ij}(x) \in G),$$
>
> 并满足三重交 U_{ijk}上的余循环条件：
>
> $$g_{ij}(x)\, g_{jk}(x)\, g_{ki}(x) = 1.$$
>
> 然后，这些数据 $\{g_{ij}\}$ 拼接成一个全局主 G丛（托orsor） $P \to X$。

现在令 $H \subset G$ 为一个子群。将主 G丛 $P \to X$ 约化到 H，可以理解为能够选择定义 P 的转移函数$g_{ij}(x) \in G$，使其始终取值于 H（如有必要，可先细化覆盖）。

从几何角度看，它等价于以下数据：

- 一个主 H丛 $P_H \to X$（局部上可识别为 $U_i \times H$），以及
- 一个将其延拓回 G 并恢复 P的同构：

$$P_H \times_H G \;\simeq\; P.$$

这里，$P_H \times_H G$ 表示 $P_H \times G$ 关于以下等价关系的商

$$(p, g) \sim (p \cdot h,\; h^{-1}g) \qquad (h \in H).$$

如果局部地有 $P_H|_{U_i} \simeq U_i \times H$，那么这在局部上就是 $U_i \times G$，因此可以将其视为把一个 H丛提升为一个 G丛的操作。

群 H在 P上右作用（$p \mapsto p \cdot h$）。由于每个纤维 P_x都是 G的托orsor（ G的扭曲副本），我们可以构造商 P_x/H。将这些纤维上的商汇集起来，就得到丛P/H。直观地说，这是一个纤维为关于 H的左陪集的丛，因此纤维的形式为 G/H。

命题 A.2. 对于主 G-丛 $P \to X$ 及其子群 $H \subset G$，以下条件自然等价：

1. 存在 P 到 H 的约化。
2. 商丛 $P/H \to X$ 存在一个截面

$$s : X \longrightarrow P/H.$$

证明. **(步骤 1) 约化 $\Rightarrow$ 截面**。假设约化存在。也就是说，存在一个主 H-子丛 $P_H \subset P$，使得对每个 x，都有一个 H-轨道 $P_{H,x} \subset P_x$。对于每个$x \in X$，任取一点 $p \in P_{H,x}$ 并定义

$$s(x) := \text{the } H\text{-equivalence class of } p \in P_x/H.$$

(步骤 2) 代表元选择的独立性。同一纤维中的任何其他点都可以写成 $p \cdot h$。但是

$$[p \cdot h] = [p] \in P_x/H,$$

所以 s 定义良好。

（步骤 3）截面 $\Rightarrow$ 约化。反过来，给定截面 s: $X \to P/H$，定义

$$P_H := \{\, p \in P \mid \text{the } H\text{-class of } p \text{ equals } s(\pi(p)) \,\} \subset P,$$

其中 π： $P \to X$ 是投影。

（步骤 4） $P_H \to X$ **是一个主** H**丛**。若 $p \in P_H$和 $h \in H$，则 $p \cdot h$ 定义相同的 H-类，因此 $p \cdot h \in P_H$。由此，P_H在右侧 H作用下保持不变。

此外，对于每个 x，纤维$P_{H,\,x}$恰好是 P_x中的一个 H-轨道，因此（局部地）带有一个自由且传递的 H作用。因此， $P_H \to X$ 是一个主 H丛。

（步骤 5）构造 $P_H \times_H G \simeq P$。考虑映射

$$P_H \times G \longrightarrow P, \qquad (p, g) \longmapsto p \cdot g$$

（这有意义，因为 P 是一个右 G-托orsor）。该映射在等价关系 $(p \cdot h,\ h^{-1}g) \sim (p, g)$ 下为常值，因此它下降为一个映射

$$P_H \times_H G \longrightarrow P.$$

局部上它变成恒等映射 $U_i \times G \to U_i \times G$，因此是一个同构。最后，从一个约化出发，按照步骤 1 构造截面，再按照步骤 3 重构，可以恢复原来的 P_H，反过来也一样。这就证明了该断言。t

在正文的设定中，我们取 $G = \mathbf{PGL}_n$ 和 $H = G_d$，其中 $H = G_d$ 是保持塞格雷簇 Σ_d 的子群。因此

$$P/G_d$$

是通过逐纤维收集 $\mathbf{PGL}_n$自由度并对保持塞格雷嵌入的子群取商而得到的丛。根据命题 A.2，我们得到

$$\text{subsystem structure } (G_d\text{-reduction}) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{a section of } P/G_d.$$

等价地， P/G_d 中的一个点（或截面）表示如何在一个扭曲背景上逐纤维插入乘积轨迹。

当群 G 作用于集合 S时，对于点 $s \in S$，定义

$$\mathrm{Orb}(s) = \{g \cdot s \mid g \in G\}, \qquad \mathrm{Stab}(s) = \{g \in G \mid g \cdot s = s\}.$$

于是有如下基本对应关系

$$\mathrm{Orb}(s) \ \simeq \ G/\mathrm{Stab}(s).$$

现在将 S 视为 $\mathbb{P}^{n-1}$的所有子概形的集合。以它们为参数的几何对象是希尔伯特概形

$$\mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^{n-1})$$

（更准确地说，是一个表示概形，其点对应于子概形）。关键在于：

> 如果 PGL_n 作用于 $\mathbb{P}^{n-1}$，那么它就作用于 $\mathbb{P}^{n-1}$的所有子概形，因此也作用于希尔伯特概形。

固定塞格雷簇（乘积轨迹） $\Sigma_d \subset \mathbb{P}^{n-1}$，并将希尔伯特概形上对应的点记为 $[\Sigma_d]$ 。

定义 A.3 (Segre 轨道)。

$$\mathcal{O}_{\Sigma_d} := \mathrm{PGL}_n \cdot [\Sigma_d] \ \subset \ \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^{n-1})$$

称为*Segre* 轨道。

命题 A.4。 $[\Sigma_d]$ 的稳定子是

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}_n}([\Sigma_d]) = \{g \in \mathrm{PGL}_n \mid g(\Sigma_d) = \Sigma_d\} = G_d.$$

证明。 这直接由定义得出。希尔伯特概形中不动的点，当且仅当对应的子概形是不变的。因此，稳定子就是保持塞格雷簇不变的射影变换群。t

A.1.1 轨道映射经由PGL_n/G_d

定义轨道映射

$$\varphi : \mathrm{PGL}_n \longrightarrow \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^{n-1}), \qquad g \longmapsto g \cdot [\Sigma_d].$$

若 $h \in G_d$，则 $h \cdot [\Sigma_d] = [\Sigma_d]$，因此

$$\varphi(gh) = \varphi(g).$$

因此 φ 只取决于左陪集 gG_d。因此得到一个诱导态射

$$\bar{\varphi} : \mathrm{PGL}_n/G_d \longrightarrow \mathrm{Hilb}(\mathbb{P}^{n-1}),$$

其像恰好是轨道 $\mathcal{O}_{\Sigma_d}$。

A.1.2 为什么它是局部闭的

关键点如下。

1. $\bar{\varphi}$ 不会将不同的陪集识别为同一陪集（包括在族中）。2. 因此， $\mathcal{O}_{\Sigma_d}$ 在希尔伯特概形中是局部闭的。

（A）点的情形。如果 $g_1(\Sigma_d) = g_2(\Sigma_d)$ ，那么

$$g_2^{-1} g_1(\Sigma_d) = \Sigma_d,$$

因此 $g_2^{-1} g_1 \in G_d$，因此 $g_1 G_d = g_2 G_d$。所以，从集合论的角度看，$\mathrm{PGL}_n/G_d \to \mathcal{O}_{\Sigma_d}$ 是单射 e.

（B）为什么要考虑 fppf 覆盖。在概形理论中，人们不仅要区分点，还要区分随基底 T 连续变化的族。假设 $x_1(t)$ $x_2(t) \in (\mathrm{PGL}_n/G_d)(T)$ 定义了轨道中的同一个点。那么在 T 上局部地（经过一个 fppf 覆盖后），可以选取代表元$g_1(t)$ $g_2(t) \in \mathrm{PGL}_n(T)$，使得

$$g_1(t)(\Sigma_d \times T) = g_2(t)(\Sigma_d \times T).$$

由此可得

$$g_2(t)^{-1} g_1(t) \in G_d(T),$$

因此 $x_1 = x_2$。此外，该映射在族上也具有单射性：给出同一个塞格雷簇的两个坐标变换，只相差一个稳定子中的元素。

（C）像为何是局部闭的概述。如果 $\bar{\varphi}$ 是一个浸入，那么它的像必然是一个局部闭子概形（类似于微分几何中嵌入的像是一个子流形）。直观地说，该轨道是通过 PGL_n 坐标变换得到的所有塞格雷簇的参数空间，因此它在希尔伯特概形中构成一个光滑齐性空间，并作为局部闭轨迹出现在包含 $[\Sigma_d]$ 的分支中。

A.2 直接从展平推导关联解消

本小节仅从$R_{\le k}$ (§10.2)展平 （张量的矩阵化）出发，明确构造行列式簇的标准关联解消。

A.2.1 张量的展平（矩阵化）

设 $H_A \simeq k^{d_A}$ 和 $H_B \simeq k^{d_B}$ 为有限维向量空间，并令

$$P := \mathbb{P}(H_A \otimes H_B).$$

利用基本的线性代数同构

$$H_A \otimes H_B \;\simeq\; \mathrm{Hom}(H_B^\vee, H_A)$$

（收缩 在 H_B 因子中），张量 $\psi \in H_A \otimes H_B$ 可识别为一个线性映射

$$\psi_B : H_B^\vee \longrightarrow H_A.$$

选定基后，这就成为前半部分的展平矩阵 $M(\psi)$。类似地，交换因子可得

$$\psi_A : H_A^\vee \longrightarrow H_B,$$

这在矩阵层面对应于转置。

> **定义 A.5** （施密特秩与行列式簇）。 对于 $\psi \neq 0$，定义
>
> $$\mathrm{rk}(\psi) := \mathrm{rk}(\psi_B) = \mathrm{rk}(\psi_A).$$
>
> 将矩阵秩为 $\le k$ 的轨迹定义为射影行列式簇：
>
> $$R_{\le k} \;:=\; \{[\psi] \in P \mid \mathrm{rk}(\psi) \le k\}.$$

A.2.2 消解思路：记录秩为 k 时的像空间

当 $\mathrm{rk}(\psi) = k$ 时，这些子空间

$$U_A := \mathrm{im}(\psi_B) \subset H_A, \qquad U_B := \mathrm{im}(\psi_A) \subset H_B$$

被唯一确定为 k维子空间。

另一方面，当 $\mathrm{rk}(\psi) \;<\; k$ 时，包含 $\mathrm{im}(\psi_B)$ 的 k 维子空间 U_A 有许多种选择。这种选择的不唯一性，直观地解释了行列式簇奇点的来源。关联解消通过将这些选择与张量一同参数化来解消奇点。

A.2.3 构造：格拉斯曼流形与关联簇

所有 k 维子空间的集合由格拉斯曼流形参数化 s

$$\mathrm{Gr}_A(k) := \mathrm{Gr}(k, H_A), \qquad \mathrm{Gr}_B(k) := \mathrm{Gr}(k, H_B).$$

每个格拉斯曼流形都带有典范子丛：

$$\mathcal{U}_A \subset H_A \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_A(k)}, \qquad \mathcal{U}_B \subset H_B \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_B(k)}.$$

$\mathcal{U}_A$ 在 $[U_A] \in \mathbf{Gr}_A(k)$ 上方的纤维恰好是 U_A。

定义 A.6（关联簇（对称版本））。定义

$$\widetilde{R}_{\le k} := \mathbb{P}(\mathcal{U}_A \boxtimes \mathcal{U}_B) \longrightarrow \mathrm{Gr}_A(k) \times \mathrm{Gr}_B(k).$$

等价地，一个点等同于

$$(U_A,\ U_B,\ [\psi]) \quad \text{where} \quad U_A \in \mathrm{Gr}_A(k),\ U_B \in \mathrm{Gr}_B(k),\ [\psi] \in \mathbb{P}(U_A \otimes U_B).$$

定义 A.7（关联解消）。利用包含关系 $U_A \otimes U_B \subset H_A \otimes H_B$，定义遗忘映射

$$\rho_k : \widetilde{R}_{\le k} \longrightarrow \mathbb{P}(H_A \otimes H_B) = P, \qquad (U_A, U_B, [\psi]) \longmapsto [\psi].$$

A.2.4 仅使用展平来证明$\mathrm{Im}(\rho_k) \subset R_{\le k}$

引理 A.8. $\rho_k(R_{\le k}) \subset R_{\le k}$，即任何 $\psi \in U_A \otimes U_B$ 的秩均为 $\le k$。

证明。设 $\psi \in U_A \otimes U_B$，并考虑展平映射 $\psi_B : H_B^\vee \to H_A$。由于 ψ 属于$U_A \otimes U_B$，在 H_B 因子上进行缩并只会产生 U_A中向量的线性组合。因此

$$\mathrm{im}(\psi_B) \subset U_A.$$

由于 U_A 的维数为 k，我们有

$$\mathrm{rk}(\psi) = \mathrm{rk}(\psi_B) = \dim \mathrm{im}(\psi_B) \le \dim U_A = k,$$

因此 $[\psi] \in R_{\le k}$。 🐾

A.2.5 它在秩恰为k 的轨迹上是同构

Let

$$R_{=k} := R_{\le k} \setminus R_{\le k-1}$$

是秩恰为 k 的张量的开轨迹。我们证明， ρ_k 限制后在 $R_{=k}$ 上是一个同构。这正是该构造为双有理的原因，也是消解的核心。

Prop命题 A.9（秩-k 轨迹上的显式逆映射）。对于点 $[\psi] \in R_{=k}$，s et

$$U_A := \mathrm{im}(\psi_B) \in \mathrm{Gr}_A(k), \qquad U_B := \mathrm{im}(\psi_A) \in \mathrm{Gr}_B(k).$$

Then

$$[\psi] \in \mathbb{P}(U_A \otimes U_B).$$

因此，该映射

$$s : R_{=k} \longrightarrow \widetilde{R}_{\leq k}, \qquad [\psi] \longmapsto (U_A, U_B, [\psi])$$

定义良好，并满足 $\rho_k \circ s = \text{恒等}_{R_{=k}}$。此外，在 $\rho_k^{-1}(R_{=k})$ 上还满足 $s \circ \rho_k = \text{恒等}$，因此

$$\rho_k : \rho_k^{-1}(R_{=k}) \xrightarrow{\sim} R_{=k}$$

是一个同构。

证明。（步骤 **1**） U_A **和** U_B **均为** k**维的**。由于 $[\psi] \in R_{=k}$，我们有 $\mathrm{rk}(\psi) = k$。因此 s

$$\dim U_A = \dim \mathrm{im}(\psi_B) = k, \qquad \dim U_B = \dim \mathrm{im}(\psi_A) = k,$$

所以 $U_A \in \mathrm{Gr}_A(k)$ 和 $U_B \in \mathrm{Gr}_B(k)$。

（步骤 2）证明 $\psi \in U_A \otimes U_B$ **（关键点）**。我们通过选取基并将 ψ 视为矩阵，给出一个完全初等的证明。将 $U_A = \mathrm{im}(\psi_B)$ 的一组基 $u_1, \ldots\ldots, u_k$ 扩充为 H_A的一组基 $u_1, \ldots\ldots, u_{d_A}$。类似地，将 $U_B = \mathrm{im}(\psi_A)$ 的一组基 $v_1, \ldots\ldots, v_k$ 扩充为 H_B的一组基 $v_1, \ldots\ldots, v_{d_B}$。

令 $M(\psi)$ 为 ψ 在这些基下的展平矩阵。条件 $\mathrm{im}(\psi_B) = U_A = \langle u_1, \ldots\ldots, u_k \rangle$ 意味着 $M(\psi)$ 的列空间包含于 $u_1, \ldots\ldots, u_k$ 的张成空间中，因此底部（$d_A - k$）各行均为零。同理，$\mathrm{im}(\psi_A) = U_B$ （等价地，考察转置矩阵）意味着最右侧（$d_B - k$）各列均为零。

因此， $M(\psi)$ 具有如下块形式

$$M(\psi) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（只有左上角的 $k \times k$ 块可能非零）。等价地，将其视为张量，

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\, u_i \otimes v_j,$$

它属于 $U_A \otimes U_B$。因此

$$[\psi] \in \mathbb{P}(U_A \otimes U_B).$$

因此， s 定义良好，且等于 $\rho_k \circ s = \mathrm{id}$，因为 ρ_k 只是遗忘了（U_A， U_B）。

（步骤 3）证明 $s \circ \rho_k = \mathrm{id}$ **在秩为** k **的轨迹上成立**。一个 ρ_k^{-1} （$R_{=k}$）中的点具有如下形式

$$(U_A, U_B, [\psi]) \quad \text{with} \quad \mathrm{rk}(\psi) = k,$$

以及 $[\psi] \in \mathbb{P}(U_A \otimes U_B)$。通过相同的展平论证，$\mathrm{im}(\psi_B) \subset U_A$。由于两边的维数均为 k，我们得到

$$\mathrm{im}(\psi_B) = U_A.$$

类似地，$\mathrm{im}(\psi_A) = U_B$。因此， $s([\psi])$ 的构造恢复了原始三元组 $(U_A, U_B, [\psi])$，所以 $s \circ \rho_k = \mathrm{id}$ 是 $\rho_k^{-1}(R_{=k})$ 上的恒等映射。

因此， ρ_k 在 $R_{=k}$上是同构，特别地是双有理的。 🐾

~ ~因此， $R_{\leq k}$ 是光滑的，而 ρ_k ： $R_{\leq k} \to R_{\leq k}$ 是一个射影双有理态射，在秩为k 的开轨迹上是同构。因此， ρ_k 是行列式簇 $R_{\leq k}$的（标准）关联解消。

如果不再用每个点处的矩阵来表述上述论证，而是改用射影空间 P 上的泛张量，就能重新得到后文用到的两个泛平坦化映射：

$$\Phi_A : H_A^\vee \otimes \mathcal{O}_P(-1) \to H_B \otimes \mathcal{O}_P, \qquad \Phi_B : H_B^\vee \otimes \mathcal{O}_P(-1) \to H_A \otimes \mathcal{O}_P.$$

在秩恒定开子集 $R_{=k}$ 上，像成为秩为 k 的子丛；根据格拉斯曼流形的泛性质，可得到 $(U_A,\ U_B)$，进而得到如上所述的映射 s 。

B 环面上的分支与坐标粘合

B.1 什么是分支?

本附录将说明§12.2 和15中使用的环面上的坐标粘合。在这些例子中，我们考虑了外部参数空间

$$X = (\mathbb{C}^\times)^2, \qquad (u, v) \in X,$$

其中 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$，因此 u 和 v 都是非零复数。从物理角度看，可以限制到 $|u| = |v| = 1$ ，并将其视为环面 $X_{\text{phys}} = (S^1)^2 \subset (\mathbb{C}^\times)^2$ 上的参数空间。

记号 X^{an} 表示 X 的解析化，也就是在复分析的框架下考察 X （采用通常的拓扑、连续性和全纯性概念）。直观地说，可以将其视为

$$X^{\text{an}} \cong (\mathbb{C}^\times)^2$$

一个复流形（按通常意义来说，是一个具有开集、连续路径和回路的空间）。

我们明确写出 X^{an}，因为我们想讨论解析概念，例如沿回路进行解析延拓，以及由此产生的单值化（绕回路一周后出现的不一致）。

在这个空间上，通常会出现分支现象。例如，对于一个复数 $u \in \mathbb{C}^\times$，四次根 $u^{1/4}$ 通常有四个值。写作

$$u = re^{i\theta} \qquad (r > 0),$$

我们有

$$u^{1/4} = r^{1/4} e^{\,i(\theta+2\pi k)/4} \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

因此，从函数的角度来看， $u^{1/4}$ 最初是一个多值函数。

因此，选择一个分支是指:

> 在区域 U 上，在每个点处选择四个值中的一个（u， v）， $\in U$并确保所选值在 U 上连续一致（最好是全纯的）。

如果我们将 ch 由 $u^{1/4}\big|_U$ 选定分支后，它就成为 U 上的单值函数，并满足 s

$$\left(u^{1/4}\big|_U\right)^4 = u.$$

B.2 如何选择分支?

构造分支的一种标准方法是使用对数。映射 $u \mapsto \log u$ （复对数）本身是多值的，但在单连通区域 $U \subset \mathbb{C}^\times$ 上，可以选择合适的分支切割，从而得到一个单值对数（对数的一个分支）

$$\mathrm{Log}_U : U \to \mathbb{C} \quad \text{(holomorphic)}, \qquad e^{\mathrm{Log}_U(u)} = u.$$

接着定义

$$u^{1/4}\big|_U := \exp\left(\frac{1}{4}\mathrm{Log}_U(u)\right)$$

便在 U 上得到一个全纯四次根。

就物理环面 $X_{\text{phys}} = (S^1)^2$，而言，若记

$$u = e^{i\theta_u},$$

那么 θ_u 本质上是 2π-周期的（$\theta_u \sim \theta_u + 2\pi$），因此无法在全局上选取为单值函数。不过，在通过切开环面得到的单连通片 U 上（例如，将 θ_u 限制在长度为 $< 2\pi$ 的区间内），可以连续地选取 θ_u。在这种情况下，

$$u^{1/4}\big|_U = e^{\,i\theta_u/4}$$

可以通过解析方式定义。

简而言之，

take a s若为单连通，则 U 存在一个分支（即 $u^{1/4}$ 的单值选择），定义在 U. 上。

B.3 为什么单连通是必要的：沿回路的单值化

由于 $\mathbb{C}^\times$ 在原点 0 处有一个洞，绕 0 一周的回路无法收缩为一个点（它不是单连通的）。正因为这个洞，沿这样的回路绕行一周后，$u^{1/4}$ 的值通常不会回到原来的值，而是会乘上一个常数相位因子。

具体而言，从基点（u_0，v_0）出发并考虑回路

$$\gamma_u(t) = (u_0 e^{2\pi i t},\, v_0) \qquad (0 \le t \le 1),$$

对所选分支进行解析延拓会得到如下变换

$$u^{1/m} \longmapsto \zeta\, u^{1/m} \qquad \big(\zeta = e^{2\pi i/m}\big).$$

在环面上的自旋链例子中，我们有 $m = 4$，因此 $\zeta = i$，从而

$$u^{1/4} \longmapsto i\, u^{1/4}.$$

也就是说，尽管我们回到了同一个点（u_0，v_0），四次根的值却乘上了 i。因此，无法将 $u^{1/4}$ 定义为整个 X 上的单值函数（也无法定义在任何包含此类回路的区域上）。这就是为什么必须限制在单连通坐标图 U 内，才能选取一个分支。

B.4 粘合哈密顿量与基态

在 §15 中，自旋链例子中的局域哈密顿量 $H_U(u,\ v)$ 包含如下系数：$u^{\pm 1/4}$。如果 $u^{1/4}$ 仍然是多值的，那么 H_U 就无法指定为 $(u,\ v)$ 的单一函数，矩阵表示和本征态（包括基态）等计算也会变得模糊不清（这种模糊性是有意为之的。它提供了一种标准方法，可在非平凡参数流形上获得定义良好的哈密顿量族。）。

因此，我们按以下步骤进行：

1. 取一个单连通的 U；
2. 定义一个单值分支；
3. 在 U 上得到定义良好的 $H_U(u,\ v)$

这样就可以先在每个坐标图上正确地写出哈密顿量和基态。

在交叠处，不同的分支选择通过规范变换（此处为平移算符的共轭作用）粘合起来，从而产生一个扭曲族。如果由此产生的单值化离开了局部操作群，那么一个局部上为乘积态的态，在粘合后就可能变成纠缠态。验证这一现象正是整个示例的目的。

在许多物理学文献中（尤其是凝聚态和量子信息领域），人们通常只在单一的坐标描述中进行研究，这可能会使整体粘合效应不那么显著。从本文采用的几何学视角来看，这种整体纠缠自然会产生，也可以系统地加以研究。

致谢

我深深感谢各位合作者，在多年的密切合作中，这些想法逐渐成形，尤其要感谢 Dmitri Kharzeev、Yaron Oz 和 Steven Rayan。

第 57 页使用的插图由 Megumi Ikeda 创作。

本研究由美国国家科学基金会（NSF）战略倡议办公室通过资助项目 OSI-2328774 提供支持。

参考文献

[1] M. Nielsen 和 I. Chuang，量子计算与量子信息，《剑桥信息与自然科学丛书》，剑桥大学出版社（2000年）。[2] K. Ikeda，塞韦里-布劳尔概形上的量子纠缠几何：阿祖玛雅代数的子系统约化，*arXiv* 电子预印本（2026年）arXiv:2601。13764 [2601。13764]。[3] S.A. Hill 和 W.K. Wootters，一对量子比特的纠缠，《物理评论快报》**78**（1997年）5022。[4] J.M. Landsberg，张量：几何与应用：几何与应用，第128卷，美国数学学会（2011年）。[5] D. Ellinas 和 E.G. Floratos，有限量子系统的素数分解与纠缠度量，《物理学杂志*A*》**32**（1999年）L63 [quant-ph/9806007]。

[6] *A. Vourdas*，有限量子系统集合上的偏序与 T_0-拓扑，《数学物理学杂志》*53*（*2012*年）122101 [1204.5107]。[7] *D. Garcıa-Martín*、*E. Ribas*、*S. Carrazza*、*J. Latorre* 和 *G. Sierra*，素数态及其量子相关态，*Quantum 4*（*2020*年）*371*。[8] *J. Harris*，《代数几何：第一门课程》，《数学研究生教材》第*133*卷，施普林格（*1992*年）。[9] *W. Bruns* 和 *U. Vetter*，《行列式环》，《数学讲义》第*1327*卷，施普林格（*1988*年）。[10] *J. Weyman*，《向量丛上同调与合冲》，《剑桥数学专著》第*149*卷，剑桥大学出版社（*2003*年）。[11] *P. Gille* 和 *T. Szamuely*，《中心单代数与伽罗瓦上同调》，剑桥大学出版社（*2006*年）。[12] *F.R. DeMeyer* 和 *E. Ingraham*，《交换环上的可分代数》，《数学讲义》第*181*卷，施普林格（*1971*年）。[13] *R. Westwick*，张量空间上的变换，《太平洋数学杂志》*23*（*1967*年）*613*。[14] *F. Gesmundo*、*K. Han* 和 *J.P. Lovitz*，关于张量秩的线性保持映射，*2024*年。[15] *A. Grothendieck*，《布劳尔群：*I.* 阿祖玛雅代数与各种诠释》，第*9*卷，第*199–219*页，法国数学会（*1964—1966*年），*http://eudml.org/doc/109691*。[16] *A. Grothendieck*，《布劳尔群：*II.* 上同调理论》，载于《布尔巴基研讨班》

：

《波恩年鉴》*1964/65*年、*1965/66*年，第*277–312*篇，第*9*号《布尔巴基研讨班》，第*287–307*页，法国数学会（*1966*年）。[17] *A. Grothendieck*，《布劳尔群 *III*：例子与补遗》，*North-Holland* 出版公司（*1968*年）。[18] *G. Azumaya*，论极大中心代数，《名古屋数学杂志》*2*（*1951*年）*119–150*。[19] *M. Auslander* 和 *O. Goldman*，交换环的布劳尔群，《美国数学会会刊》*97*（*1960*年）*367*。[20] *C.H. Bennett*、*S. Popescu*、*D. Rohrlich*、*J.A. Smolin* 和 *A.V. Thapliyal*，多体纯态纠缠的精确与渐近度量，《物理评论 *A*》*63*（*2000*年）*012307*[量子物理/（9908073]）。[21] *K. Ikeda*，作为上同调障碍的量子纠缠，*arXiv* 电子预印本（*2025*年）*arXiv:2511.04326* [2511.04326]。[22] *S. Abramsky* 和 *A. Brandenburger*，非定域性与情境性的层论结构，《新物理学杂志》*13*（*2011*年）113036 [1102.0264]。[23] *M.V. Berry*，伴随绝热变化的量子相位因子，《伦敦皇家学会会刊 *A*：数学与物理科学》*392*（*1984*年）*45*。

[24] F. Wilczek 和 A. Zee，规范结构在简单动力系统中的显现，《物理评论快报》**52** (1984年) 2111。[25] P. Zanardi 和 M. Rasetti，全纯量子计算，《物理快报*A*》**264** (1999年)94 [量子物理/9904011]。[26] J. Pachos、P. Zanardi 和 M. Rasetti，用于量子计算的非阿贝尔贝里联络，《物理评论 *A*》**61**(1999年) 010305。[27] E. Sj¨oqvist、D.M. Tong、L.M. Andersson、B. Hessmo、M. Johansson 和 K. Singh，非绝热全纯量子计算，《新物理学杂志》**14**(2012年) 103035 [1107。5127]

[28] *D.J. Thouless*、*M. Kohmoto*、*M.P. Nightingale* 和 *M. den Nijs*，二维周期势中的量子化霍尔电导，《物理评论快报》*49 (1982) 405*。[29] *J. Zak*，固体能带的贝里相，《物理评论快报》*62 (1989) 2747*。[30] *M.Z. Hasan* 和 *C.L. Kane*，专题综述：拓扑绝缘体，《现代物理评论》*82 (2010) 3045*。[31] *X.-L. Qi* 和 *S.-C. Zhang*，拓扑绝缘体与超导体，《现代物理评论》*83 (2011*年*) 1057*。[32] *M. Brion*，球簇导论，载于《代数变换群中的拓扑方法：罗格斯大学会议论文集》，*H. Kraft*、*T. Petrie* 和 *G.W. Schwarz* 编，（马萨诸塞州波士顿），第 *11–26* 页，*Birkh¨auser Boston (1989)*。[33] *M. Kr¨amer*，经典群的球子群，《数学杂志》*(1979)* 。[34] *Y. Sakellaridis* 和 *A. Venkatesh*，球簇上的周期与调和分析，*arXi*

电子预印本 (2012年) arXiv:1203.0039 [1203.0039].[35] Y. Sakellaridis，关于 *p*进域上球簇的非分歧谱，*arXiv* 数学电子预印本 (2006年) math/0606130 [math/0606130].[36] F. Knop 和 B. Schalke，球面簇的对偶群，*arXiv* 电子预印本 (2017)arXiv:1702.08264 [1702.08264].