arXiv:2601.19123v1 [gr-qc] 27 Jan 2026

克尔几何中的螺旋密度波与力矩平衡

Conor Dyson[1], * 和 Daniel J. D'Orazio[2,3,4,†] [1]*Center of Gravity*，尼尔斯·玻尔研究所，*Blegdamsvej 17*，*2100* 哥本哈根，丹麦 [2]空间望远镜科学研究所，*3700 San Martin Drive*，巴尔的摩，*MD 21218*，美国 [3]约翰斯·霍普金斯大学物理与天文学系，*3400 North Charles Street*，巴尔的摩，马里兰州 *21218*，美国 [4]尼尔斯·玻尔研究所，*Blegdamsvej 17*，*2100* 哥本哈根，丹麦（日期：2026年1月28日）

相对论吸积盘中的极端质量比旋近（LISA）是即将开展的 LISA 任务的一项重要科学目标。现有的吸积盘—极端质量比旋近相互作用模型通常依赖粗略的动力摩擦或牛顿行星迁移方案，无法捕捉双星势所引发的相对论流体响应。本文通过提供相对论计算来弥补这一不足。我们采用自力理论、黑洞微扰理论和相对论恒星微扰理论中的标准方法，首次对行星迁移的相对论对应过程进行了完整的流体计算。我们计算了流体在极端质量比旋近扰动势中的响应，并一致地纳入压力效应。利用主焓类变量和线性化流体理论，我们重建了克尔几何中一系列自旋值下的流体扰动和相对论螺旋臂结构。最后，我们推导出相对论力矩平衡方程，可用于计算和比较局域力矩与穿过吸积盘的平流角动量。这为建立由流体扰动产生的吸积盘积分力矩与作用于嵌入物质中的极端质量比旋近天体的力之间的力矩平衡关系开辟了一条有前景的途径。

一、引言

自 2015 [1], 首次探测到双黑洞并合以来，引力波天文学取得了快速进展，截至目前已发表超过 200 个事件 [2–5]。随着爱因斯坦望远镜 [6] 和 Cosmic Explorer [7] 等下一代地面探测器投入使用，这一进展还将持续。展望地面天文台之外，未来十年还将发射工作于毫赫兹频段的空间探测器，包括激光干涉仪空间天线（LISA） [8], 天琴 [9, 10], 和太极 [11]。在这一频段，中等质量比和极端质量比旋近是最令人期待的源之一 [12–14]。这类系统由一个质量为 $\gtrsim 10^4 M_\odot$ 的超大质量黑洞和一个质量小得多、围绕其运行的伴星组成。由于质量比悬殊，次级天体可以在频段内停留数年，从而为探测中心天体附近的几何和物质含量提供窗口 [15–20]。围绕这一主题，对吸积盘和活动星系核的研究表明，引力波信号会受到周围环境的影响 [21–50]。因此，将此类效应纳入波形模型，对于信号探测、控制参数估计中的偏差以及检验广义相对论都十分重要 [37, 46, 51, 52]。

当前最先进的真空极端质量比旋进波形建模依赖于引力自力形式，该形式利用极端质量比旋进系统不同的长度尺度和绝热特性，构建精确的波形模型[53–64]。在这一框架下，耗散与轨道时间尺度的分离可实现受控的相位展开，

$$\Phi = \frac{1}{q}\,\phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \mathcal{O}(q). \tag{1}$$

其中， $q = m_p/M$ 是系统中的质量比， Φ是总波形相位。其中， $\phi^{(0)}$ 项是零阶绝热后（0PA）贡献，驱动系统的绝热演化，而 $\phi^{(1)}$ 表示一阶绝热后（1PA）修正。对于克尔时空中的一般真空轨道，获得完整的 1PA 动力学仍是二阶自力研究计划的一项长期重要目标。

放眼真空模型之外，考虑存在环境的系统时，这一图景会发生变化。若附加场在主导阶是保守的，相位展开变为

$$\Phi = \frac{1}{q}\left(\phi^{(0,0)} + \lambda\,\phi^{(0,1)}\right) + \phi^{(1,0)} + \mathcal{O}(q,\lambda), \tag{2}$$

其中， λ 表征物质场的强度，现在会修正主导阶 0PA 相位，因此有必要准确计算其贡献。从历史上看，此类修正通常采用基于直线运动或恒定背景牛顿流的近似方法处理。近期研究已开始以更一致的方式计算这些效应 [65–74]。

对物体在周围环境中运动时的轨道演化进行建模由来已久，其中早期的重要工作包括钱德拉塞卡 [75] 和奥斯特里克 [76], 分别建立了在均匀、各向同性的无碰撞介质和有碰撞介质中直线运动的动力摩擦理论。聚焦于后者，即流体，

* conor.dyson@nbi.ku.dk
† dorazio@stsci.edu

在随后数十年中，许多研究致力于将线性理论的结果推广到更一般的轨道 [，例如 77及其中的参考文献], ，并通过数值计算研究非线性效应 [，例如 78],相对论速度 [79], 和广义相对论；相关研究最初针对无自旋黑洞 [80–82] 随后将自旋纳入考量 [83, 84]。近年来，研究人员利用爱因斯坦方程的精确解，对环境中的极端质量比旋近进行了自洽计算 [72, 85]。这些方法虽前景可期，但依赖于几何和物质分布均具有球对称性，因此难以推广到更一般的构型。

对于薄吸积盘中绕中心天体运行的扰动体，均匀介质具有均匀背景流这一假设并不成立，因为吸积盘的剪切开普勒流会产生显著不同的流体响应。Lin 和 Papaloizou [86], 以及 Goldreich 和 Tremaine[87, 88] 等人的开创性研究表明，此类吸积盘中的角动量交换主要由次级天体与吸积盘之间的共振相互作用主导。这些相互作用会激发螺旋密度波，为大量关于牛顿“盘—卫星”相互作用的研究奠定了基础 [例如，89–100],并促使扰动天体在吸积盘中发生“迁移”。这些计算结果已广泛应用于行星系统构型的形成研究 [例如， 101], 以及其他各种研究领域，包括极端质量比旋进系统动力学 [例如， 26, 27, 102]。Hirata [103, 104] 将其中一些方法推广到相对论性极端质量比旋进系统，并采用基于哈密顿量的力矩平衡形式体系。近期，这类哈密顿量方法已用于研究无碰撞盘中的力矩交换 [71, 73, 74]。然而，相对论研究尚未针对极端质量比旋进系统一致地完成完整的流体计算。

本研究旨在计算自旋黑洞时空中 EMRI 系统的流体扰动及相关力矩密度。我们将双参数展开框架 [67–70, 105, 106] 与自力理论、牛顿行星迁移方法以及 Ipser 和 Lindblom 的主焓形式 [107, 108] 相结合，以实现这一目标。

我们研究了克尔黑洞周围具有径向温度梯度的绝热盘，其中存在一个质量小得多的伴星，其间距处于约为 10 个引力半径的强相对论间距范围内。我们将研究范围限定在次级天体质量小于吸积盘热质量的情形 [109]，此时线性化流体处理应当成立。本文的结构如下。在第II节，我们介绍相对论非线性流体方程。在第III 节，我们推导线性化扰动方程。在第IV 节，我们构造主焓方程。在第V节，我们推导背景盘解。在第VI 节，我们描述用于求解主方程的数值方法和算子分析。在第VII 节，我们探讨相关解：§VIIA 节研究螺旋密度波形态，§VIIB 节给出一种新的角动量平衡方程形式，将牛顿框架下的平流-力矩平衡处理推广到相对论区间。最后，我们总结全文并讨论未来方向见第VIII节。

我们采用“主要为正”的度规号差$\eta_{\mu\nu}$ =(−，+，+，+)，并使用满足 $G = c = 1$ 的几何单位制。张量的时空分量以希腊指标表示。

II. 设定与非线性运动方程

我们从与物质耦合的爱因斯坦方程出发，

$$G_{\mu\nu} = T^{fl}_{\mu\nu} \tag{3}$$

将物质建模为理想流体，

$$T^{\mu\nu}_{fl} = (\mathfrak{e} + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}. \tag{4}$$

其中， U^μ 描述流体的四流， p 为压力，而 $\mathfrak{e} = \rho($ $c^2 + \epsilon$) 表示流体静质量密度与内能密度的组合。由此得到能量—动量守恒方程，

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{fl} = 0. \tag{5}$$

该方程的显式形式为，

$$(\mathfrak{e} + p)\, A^\nu = -\nabla^\nu p - U^\nu \nabla_\mu \left([\mathfrak{e} + p]\, U^\mu\right), \tag{6}$$

其中， $U^\mu \nabla_\mu U^\nu = A^\nu$是流体元的四维加速度。由于四速度$U^\mu U_\mu = -1$的归一化，我们必须满足条件 $A^\mu U_\mu = 0$ ，并定义投影张量

$$\mathrm{q}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu. \tag{7}$$

与该张量收缩可选出与流体流动正交的四矢量分量，并满足条件$\mathrm{q}^{\mu\nu}$ $= \mathrm{q}^{\mu\alpha}\mathrm{q}_{\ \alpha}^{\nu}$，$\mathrm{q}^{\mu}_{\ \alpha}A^\alpha$ $= A^\mu$，以及q $^{\mu}_{\ \alpha}U^\alpha$ $= 0$。从（6）出发，我们分别与 U_μ 和$\mathrm{q}^{\alpha}_{\ \mu}$ 收缩，可得相对论性能量守恒方程和动量守恒方程，

$$(\mathfrak{e} + p)\, \nabla_\mu U^\mu + U^\mu \nabla_\mu \mathfrak{e} = 0, \tag{8}$$

$$(\mathfrak{e} + p)\, U^\mu \nabla_\mu U^\nu + \mathrm{q}^{\mu\nu}\nabla_\mu p = 0. \tag{9}$$

III. 微扰方案

A. 度规的线性化

为了解决这一问题，我们选择采用微扰方法。在许多天体物理背景下，可以围绕某个背景几何进行展开。取一个与克尔时空 [110],参数上十分接近的度规，那么我们可以将完整度规展开为以下形式：

$$g_{\mu\nu} = g^{\mathrm{kerr}}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{10}$$

在此处所讨论的背景下，我们隐含地假设，小天体和物质场对几何造成的影响相较于背景而言是微扰级的小量。这里， $g^{kerr}_{\mu\nu}$为Kerr度规，而 $h_{\mu\nu}$ 包含了所有微扰项。为使这种展开形式成立，我们必须指出，在不存在次级天体的情况下，孤立流体的应力-能量张量也是次阶小量，并由一个小参数 [67, 69, 70, 105, 106]控制。不同于 [69], ，我们不指定该参数，而是将其作为一个$\mathcal{O}(1)$ 计数参数 λ。接下来，我们要引入次级黑洞的影响。形式上，可以通过匹配渐近展开和Pound自洽形式将其纳入 [55], ；不过，本文采用骨架化方法，将较小黑洞的真空部分重新表述为点粒子源项，从而得到：

$$G_{\mu\nu} = \lambda T^{fl}_{\mu\nu} + qT^{pp}_{\mu\nu}, \tag{11}$$

其中， q 现在是一个$\mathcal{O}$(1)计数参数，与次级黑洞和中心黑洞之间的质量比 $m_p/M \ll 1$ 相关，且

$$T^{\mu\nu}_{pp} = m_p \int \dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)\frac{\delta\big(x^\mu - x^\mu(\tau)\big)}{\sqrt{-g}}d\tau. \tag{12}$$

由于式（4）中的流体应力-能量张量的性质，在最低阶下，流体变量的标度为： $\mathfrak{e} \sim \mathcal{O}(\lambda)$， $p \sim \mathcal{O}(\lambda)$，以及 $U^\mu \sim \mathcal{O}(1)$。对度规扰动进行微扰展开，可得其形式：

$$h_{\mu\nu} = \sum_{|n|+|m|\geq 1} q^m\lambda^n h^{(m,n)}_{\mu\nu},$$

由此我们可以展开方程（8）和（9），并整理$\mathcal{O}$（λq）阶表达式，得到：

$$(\mathfrak{e}+p)\nabla_\mu U^\mu + U^\mu\nabla_\mu\mathfrak{e} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{e}+p)U^\mu\nabla_\mu h^{(1,0)}, \tag{13}$$

$$(\mathfrak{e}+p)U^\mu\nabla_\mu U^\nu + \mathrm{q}^{\mu\nu}\nabla_\mu p = \mathrm{q}^\nu_{\ \mu} f^\mu_{(1,1)}. \tag{14}$$

其中，

$$f^{(1,1)}_\mu = (\mathfrak{e}+p)U^\alpha U^\beta\left(\frac{h^{(0,1)}_{\alpha\beta;\mu}}{2} - h^{(0,1)}_{\mu\alpha;\beta}\right) + h^{(0,1)}_{\mu\nu}\partial^\nu p. \tag{15}$$

这里，所有梯度和投影算子现在均相对于背景Kerr度规和非线性流体流动定义。展开后，我们用投影张量重新投影了第二个方程，以保持四加速度与四流正交。

至此，我们定义了在固定背景下受次级黑洞有效力作用的非线性流体方程。原则上，此时的方程可以纳入静态度规上的数值相对论流体动力学求解器，例如 [AthenaK 111]。然而，本文接下来将采用一种简化的线性化流体处理。

B. 流体的线性化

按照 [106] ，并基于我们先前的动机，我们将流体变量展开为

$$\mathfrak{e} = \sum_{n\geq 1, m\geq 0} q^m\lambda^n\mathfrak{e}^{(m,n)},$$
$$p = \sum_{n\geq 1, m\geq 0} q^m\lambda^n p^{(m,n)},$$
$$U^\mu = \sum_{n\geq 0, m\geq 0} q^m\lambda^n U^\mu_{(m,n)}.$$

其中， $\mathfrak{e}^{(0,1)}$， $p^{(0,1)}$，以及 $U^\mu{}_{(0,\ 0)}$ 构成了在不存在次级黑洞和自引力时，克尔几何上的背景流体量。引入流体变量的展开后，我们现在可以将式（13）中的流体元线性化，并得到线性化欧拉方程的 $\mathcal{O}(\lambda q)$ 分量，

$$\left(\mathfrak{e}^{(1,1)} + p^{(1,1)}\right)\nabla_\mu U^\mu + (\mathfrak{e}+p)\,\nabla_\mu U^\mu_{(1,0)} + U^\mu\partial_\mu\mathfrak{e}^{(1,1)} + U^\mu_{(1,0)}\partial_\mu\mathfrak{e} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{e}+p)U^\mu\nabla_\mu h^{(1,0)}, \tag{16}$$

$$\left(\mathfrak{e}^{(1,1)} + p^{(1,1)}\right)U^\mu\nabla_\mu U^\nu + (\mathfrak{e}+p)\left(U^\mu\nabla_\mu U^\nu_{(1,0)} + U^\mu_{(1,0)}\nabla_\mu U^\nu\right) + \mathrm{q}^{\mu\nu}\nabla_\mu p^{(1,1)} + U^\nu U^\mu_{(1,0)}\nabla_\mu p = \mathrm{q}^\nu_{\ \mu} f^\mu_{(1,1)}. \tag{17}$$

为简化记号，所有背景流体量 $\mathfrak{e}^{(0,1)}$， $p^{(0,1)}$，以及 $U^\mu{}_{(0,\ 0)}$ 中出现的计数指标均已省略；所有协变导数的出现形式向量和投影算子现在与Kerr度规及背景流体流相关联，而 $h^{(1,0)} = g^{\mu\nu}h^{(1,0)}_{\mu\nu}$是我们度规扰动的迹。

IV. 主焓方程

在次级扰动体存在的情况下，使用主焓方程研究吸积盘动力学，已在牛顿力学领域得到广泛应用。从 Goldreich 和 Tremaine 的开创性研究 [87, 88] 到近期对吸积盘流出条件和扩展密度结构的研究 [96–98, 112–116]。在相对论领域，Ipser 和 Lindblom 等开创性研究 [107, 108]，推导了适用于非正压、自引力理想流体流的主焓方程的相对论形式。在下一节中，我们将通过推导一个完全相对论性的主焓方程来衔接这些方法。该方程描述克尔时空中由独立源产生的度规扰动（即由一个小型次级扰动体引起）所诱发的理想流体微扰。推导过程与 Ipser 和 Lindblom 的方法 [107]十分相近，但存在一些细微差异；鉴于此，以及该方法在次级扰动体研究中的新颖应用，我们将完整详述这一推导过程。

A. 背景流体流动的 Killing 对称性

正如在推导此类主方程时通常至关重要的一样，为了使线性化流体方程充分简化，并便于将其重新表述为单个标量方程，我们要求背景流具有一定程度的对称性。具体而言，对于相对论吸积盘，我们要求背景流遵循克尔几何的等距变换，即背景流为定常且轴对称，并可写为：

$$U^{\mu}_{(0,0)} = \alpha \left(t^{\mu} + \Omega \phi^{\mu}\right). \tag{18}$$

在博耶-林德奎斯特（BL）坐标中，t^{μ} 和 ϕ^{μ}表示克尔几何的坐标 Killing 向量，而 α 和 Ω 是径向与极向（r 和 θ）BL 坐标的任意函数。在对背景流施加这些限制后，动量方程在首阶近似下可简化为：

$$U^{\mu}_{(0,0)} \nabla_{\mu} U^{\nu}_{(0,0)} = -\frac{\nabla^{\mu} p}{\mathfrak{e} + p} \equiv -R^{\mu}. \tag{19}$$

B. 流体微扰设定

到目前为止，我们的运动方程仍未完全确定。为解决这一问题，我们必须在流体的共动拉格朗日参考系中选择一个状态方程。我们首先用 Δp、$\Delta \mathfrak{e}$ 表示拉格朗日微扰的最低阶项。随后，通过要求流体的局部绝热扰动具有如下形式，便可“封闭”该系统：

$$\Delta p = c_s^2 \Delta \mathfrak{e} \tag{20}$$

令 c_s 为任意的轴对称、稳态函数，并将其与背景关系 $p = c_s^2 \mathfrak{e}$ 给出的声速对应起来，我们便确定流体处于 $\gamma \to 1$ 绝热状态；正如[97, 117] 中所讨论的，这不同于标准的局部等温近似。为建立流体拉格朗日微扰与欧拉扰动之间的关系，我们写作 $\Delta p = p^{(1,1)} + \mathcal{L}_{\xi} p$ 和 $\Delta \mathfrak{e} = \mathfrak{e}^{(1,1)} + \mathcal{L}_{\xi} \mathfrak{e}$，其中 $\mathcal{L}\xi$ 是沿拉格朗日位移矢量场 ξ 的李导数。对于绝热扰动，我们可以通过下式定义扰动流与背景流之间的位移向量：

$$U^{\nu}_{(1,0)} = -\left(\mathcal{L}_{\xi} U\right)^{\nu} = U^{\mu} \partial_{\mu} \xi^{\nu}_{(1,0)} - \xi^{\mu}_{(1,0)} \partial_{\mu} U^{\nu}. \tag{21}$$

假设微扰具有$\sim e^{im\phi - i\omega t}$ 和 $\tilde{\omega} = m\Omega - \omega$的形式，则可将其化简为：

$$U^{\mu}_{(1,0)} = \xi^{\nu}_{(1,0)} \left(i\tilde{\omega}\alpha \delta^{\mu}_{\nu} - \partial_{\nu} U^{\mu}\right). \tag{22}$$

由于背景具有假定的对称性，最后一项 $\partial_{\nu} U^{\mu}$ 是一个秩一张量。因此，给定 $M^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \partial_{\nu} U^{\mu}/(i\tilde{\omega}\alpha)$，我们有 $\left(M^{-1}\right)^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu} U^{\mu}/(i\tilde{\omega}\alpha)$。指定 U^{μ} 的形式后，便可得到以下方程：

$$\xi^{\mu}_{(1,0)} = \frac{1}{i\tilde{\omega}\alpha} \left(\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{\partial_{\nu} U^{\mu}}{i\tilde{\omega}\alpha}\right) U^{\nu}_{(1,0)}. \tag{23}$$

现在，我们已用流体扰动表示出位移向量，可以着手在欧拉框架中建立密度扰动与压力扰动之间的关系：

$$\mathfrak{e}^{(1,1)} = \Delta \mathfrak{e} - \xi^{\mu} \partial_{\mu} \mathfrak{e} \tag{24}$$

$$= \frac{1}{c_s^2} \left[p^{(1,1)} + \xi^{\mu}_{(1,0)} \partial_{\mu} p\right] - \xi^{\mu}_{(1,0)} \partial_{\mu} \mathfrak{e}. \tag{25}$$

代入方程（23）的显式形式，可得以下表达式：

$$\mathfrak{e}^{(1,1)} = (\mathfrak{e} + p) \left[\frac{p^{(1,1)}}{(\mathfrak{e} + p) c_s^2} - \frac{B_{\nu} U^{\nu}_{(1,0)}}{i\tilde{\omega}\alpha}\right], \tag{26}$$

其中，

$$B_{\mu} = \frac{1}{\mathfrak{e} + p} \left(\partial_{\mu} \mathfrak{e} - \frac{\partial_{\mu} p}{c_s^2}\right) = -\frac{\partial_{\mu} \log c_s^2}{1 + c_s^2}, \tag{27}$$

这与 [118]，中类似方程 18 的项完全对应，该方程描述了吸积盘的热结构。

C. 化简为单一主变量

在封闭方程组后，我们便可以用一个单一主变量来表示流体扰动。这个变量是类似焓的扰动，我们将其定义为 $\mathfrak{h}^{(1,0)}$。我们通过如下对应关系来定义这一扰动：

$$p^{(1,1)} = (\mathfrak{e} + p) \mathfrak{h}^{(1,0)}, \tag{28}$$

从而得到表达式，

$$\mathfrak{e}^{(1,1)} = (\mathfrak{e}+p)\left[\frac{\mathfrak{h}^{(1,0)}}{c_s^2} - \frac{B_\nu U^\nu_{(1,0)}}{i\tilde{\omega}\alpha}\right], \tag{29}$$

对于能量密度扰动。我们的最后一项任务是用焓标量重新表示速度扰动。为此，我们将方程（28、29）中的表达式代入方程（17）。由此可见，背景流中假定的对称性使所得方程关于 $U^\mu{}_{(1,\,0)}$ 成为纯代数方程，其形式为：

$$\left(\mathcal{Q}^{-1}\right)^\nu{}_\mu U^\mu_{(1,0)} = \frac{\mathrm{q}^\nu_\mu f^\mu_{(1,1)}}{\mathfrak{e}+p} - \mathrm{q}^{\nu\mu}\nabla_\mu \mathfrak{h}^{(1,0)} - \mathfrak{h}^{(1,0)} B^\nu, \tag{30}$$

其中我们定义了算子，

$$\left(\mathcal{Q}^{-1}\right)^\nu{}_\mu = i\tilde{\omega}\alpha\delta^\nu_\mu + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}U^\alpha + \nabla_\mu U^\nu + U^\nu R_\mu + \frac{R^\nu B_\mu}{i\alpha\tilde{\omega}}. \tag{31}$$

鉴于我们可以求逆 $\mathcal{Q}^{-1}$，现在已将所有流体量表示为已知表达式和主焓型扰动的形式。与 [107, 108],不同，我们推导方程时采用的是完整的流体扰动，而非其投影形式 $\hat{}$ $U^\mu{}_{(1,\,0)} = q^\mu_\nu U^\nu_{(1,0)}$，从而可以显式求逆 $\mathcal{Q}^{-1}$，前提是 $m \neq 0$。这一选择带来的后续影响是，四流的归一化不会自动守恒；不过，在之后引入对流体速度的扰动性非仿射重参数化即可补救。将方程（28）、（29）和（30）中的表达式代入能量方程（16），可得一个标量方程，将所有扰动流体量完全表示为主变量 $\mathfrak{h}^{(1,0)}$和低阶量的形式，如 [69, 105]所示。主方程的显式形式如下：

$$c_s^2\nabla_\mu\left(\mathcal{Q}^\mu_{\ \alpha} q^{\alpha\nu}\nabla_\nu \mathfrak{h}^{(1,0)}\right) + \left[R_\mu \mathcal{Q}^\mu_{\ \alpha} q^{\alpha\nu} + c_s^2 \mathcal{Q}^\nu_{\ \alpha} B^\alpha\right]\nabla_\nu \mathfrak{h}^{(1,0)} - \left[i\alpha\tilde{\omega} - (c_s^2\nabla_\mu + R_\mu)\mathcal{Q}^\mu_{\ \alpha} B^\alpha\right]\mathfrak{h}^{(1,0)} = \mathfrak{F}. \tag{32}$$

其源项为，

$$\mathfrak{F} = \frac{i\alpha\tilde{\omega}c_s^2}{2}h^{(1,0)} + \left[c_s^2\nabla_\mu + R_\mu\right]\left(\frac{\mathcal{Q}^\mu_\nu \mathrm{q}^\nu_\alpha f^\alpha_{(1,1)}}{\mathfrak{e}+p}\right), \tag{33}$$

且其中，$\mathrm{q}^\mu_\nu f^\nu_{(1,1)}$ 是由式（15）给出的度规扰动对流体施加的有效力。

V. 背景吸积盘与次级度规扰动

在求解主焓方程之前，我们首先定义背景吸积盘状态，并计算次级黑洞引起的度规扰动。我们的背景吸积盘设置主要沿用 Tanaka和Okada [99] 提出的三维设置，并将其推广为克尔几何中的完全相对论形式。我们考虑一个三维局部等温薄盘，其极向温度为等温，同时允许径向温度梯度，并且吸积盘的纵横比恒定。随后，将小型次级黑洞存在所引起的度规扰动与位于一条克尔几何中的圆形赤道测地线上的点源联系起来。其中，

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{\Delta}{\Sigma}\left(dt - a\sin^2\theta d\phi\right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 \\ &+ \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left(adt - (r^2+a^2)d\phi\right)^2, \end{aligned} \tag{34}$$

是与博耶-林德奎斯特坐标系中的Kerr度规相关联的线元。其中，

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta\,, \quad \Delta = r^2 - 2r + a^2\,, \tag{35}$$

a 为克尔自旋参数，且我们令 $M = 1$。

A. 背景薄吸积盘

我们将背景吸积盘设定为克尔几何中的定常、轴对称、局部等温薄盘。此外，我们将吸积盘的纵横比设定为恒定（且较小）的值，并记作 $h \ll 1$。纵横比的正式定义将在下文给出；不过，根据上下文应当始终能够判断，给定公式中的 h 表示的是纵横比还是度规扰动的迹。

引入较小的纵横比后，便得到一个新的微扰参数，我们据此将解投影到赤道面上，并围绕赤道面展开。我们将在 §VI 中将这一额外展开称为投影修正局域近似（PMLA），与 Potter 先前的研究 [119]以及 Tanaka 等人 [94, 95, 99]的工作保持一致。

除非另有说明，所有计算均一致展开至并包括$\cos^2\theta = z^2$ $\sim\mathcal{O}(h^2)$ 阶贡献。我们的设定从背景流体方程（式（9））开始，

$$(\mathfrak{e}+p)\,U^\mu\nabla_\mu U^\nu + \mathrm{q}^{\mu\nu}\nabla_\mu p = 0. \tag{36}$$

我们假设背景流遵循克尔时空的等距变换，即为定常且轴对称，$U^\mu = \alpha(r,\ \theta)\{1,\ 0,\ 0,\ \Omega(r,\ \theta)\}$ 并采用博耶-林德奎斯特坐标；我们还要求，$p(r,\ \theta) = c_s^2(r)\mathfrak{e}(r,\ \theta)$ 使吸积盘在极向上等温、径向上非等温。我们假设吸积盘处于流体静力平衡，这使式（36）化为以下形式：

$$\Gamma^\mu_{\alpha\nu}U^\nu U_\mu = \frac{c_s^2}{1+c_s^2}\frac{\partial_\alpha p}{p}. \tag{37}$$

在薄盘框架内，我们预期流体变量随盘面纵横比的标度关系会类似于牛顿情形 [120, 121], ，即$p \sim h^2$, $c_s \sim h$, $\delta\omega \sim h^2$, 以及 $\delta\alpha \sim h^2$, 其中 $\Omega = \Omega^k(1+\delta\omega)$ 是流体元的角频率，其角频率相对于克尔值（Ω^k）有 $\delta\omega$ 的偏离；类似地，$\alpha = \alpha^k(1+\delta\alpha)$。在此，区分克尔几何中角频率的非赤道贡献与压力导致的修正很有帮助。纯几何项为

$$\Omega^k = \frac{1}{r^{3/2}+a}\left(1+\frac{r^2+2a\sqrt{r}-3a^2}{2\sqrt{r}(a+r^{3/2})}z^2\right), \tag{38}$$

$$\alpha^k = -\frac{\left(a+r^{3/2}\right)}{\sqrt{2ar^{3/2}+(r-3)r^2}}\times \left(1-\frac{\left(3a^4-6a^3\sqrt{r}+4a^2r(r+1)-r^4\right)}{2r^2\left(2a+(r-3)\sqrt{r}\right)\left(a+r^{3/2}\right)}z^2\right), \tag{39}$$

两个压力修正项之间的关系为，

$$\delta\alpha = \frac{\left(a^2-2a\sqrt{r}+r^2\right)}{2ar^{3/2}+(r-3)r^2}\delta\omega. \tag{40}$$

角频率扰动 $\delta\omega$ 由热力学分布的选取确定，因此也由吸积盘中的压力梯度确定。接下来，取用方程（37），我们自洽地将极向方程展开至 $\mathcal{O}(z^2)$ ，并得到压力场的解，其形式为，

$$p(r,z) = p_0(r)e^{-\frac{z^2}{2h^2}}, \tag{41}$$

其中我们定义了，

$$h(r) \equiv c_s\sqrt{\frac{2ar^{3/2}-(3-r)r^2}{(1+c_s^2)(3a^2-4a\sqrt{r}+r^2)}}, \tag{42}$$

作为无量纲吸积盘纵横比的博耶-林德奎斯特对应量。

现在将 h 固定为常数，就能确定吸积盘的热力学分布。对上述关系求逆可得声速，

$$c_s = h\sqrt{\frac{4a\sqrt{r}-3a^2-r^2}{3a^2h^2+(3+h^2-r)r^2-2a\sqrt{r}(2h^2+r)}}. \tag{43}$$

将此结果代入方程（37）的径向分量，即可确定角频率扰动，

$$\delta\omega = \frac{h^2\left(3a^2-4a\sqrt{r}+r^2\right)\partial_r p_0}{\left(2ar^{3/2}+(-3+r)r^2\right)p_0}. \tag{44}$$

吸积盘中仅剩的自由度是确定赤道密度分布。为简单起见并便于与牛顿力学文献衔接，我们选择，

$$\mathfrak{e}_{(0,1)} = \mathfrak{e}_I\left(\frac{r}{r_I}\right)^{-2}, \tag{45}$$

其中，下标 I 表示变量在最内稳定圆轨道（ISCO）处的取值。提醒读者，在相对论情形下，$\mathfrak{e}_{(0,1)}$ 同时包含质量和内能密度。至此，我们已在克尔几何 [1]中自洽地确定了具有压力和恒定标高的背景吸积盘分布。

B. 有效驱动函数

在构建了背景盘面轮廓后，我们现在转而构造由小天体引起的度规扰动。自力形式为系统地按照质量比 [55, 62, 122, 123]展开来描述非对称双星提供了一个第一性原理框架。通过这一形式可以发现，在全局时空的领先阶中，较小天体的存在可表示为一个点粒子，而其度规扰动由下式控制：

$$E_{\mu\nu}[h^{(0,1)}] = T^{pp}_{\mu\nu}. \tag{46}$$

其中 $E_{\mu\nu}$ 是线性化爱因斯坦算子，而 $T^{pp}_{\mu\nu}$是在固定轨道上运行的点粒子的应力-能量张量（方程（12））。

1. 洛伦兹规范解

在计算此类度规微扰时，广义相对论自然地保留了广泛的规范自由度。

---

[1] 为了获得渐近平坦解，需要密度分布至少以 $\sim r^{-3}$的速度衰减。不过，这对我们的目的而言并不是问题，因为我们只关注中心超大质量黑洞有限范围内的流体动力学。

某些规范，例如辐射规范 [124]，会导致延展的奇异结构，而这些结构并不局限于小天体所在的位置，因此难以将其用作高阶运动方程中的源。在可用的规范中，克尔几何中最实用的一种一直是洛伦兹规范，其定义条件为

$$\nabla^{\mu}\bar{h}^{(1,0)}_{\mu\nu} = 0, \tag{47}$$

其中 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}h$ 是迹反转度规扰动。在此规范下，度规微扰在物体附近呈现出熟悉的 $h^{(1,0)} \sim 1/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\rm p}|$奇异结构，其中 r_p 是次级天体的位置，因此与牛顿理论对应物密切相关。近年来，在克尔几何中计算此类微扰方面取得了突破。Dolan 等人 [125–127]提出了一种方案，可根据满足解耦可分离方程 [128] 的标量变量，在 Kerr 背景上构造洛伦兹规范度规扰动。本文采用参考文献 [126] 中的实现，计算洛伦兹规范下旋转黑洞中沿圆形赤道轨道运行的点状天体所产生的度规扰动。

值得注意的是，在点粒子度规解类中，洛伦兹规范本质上在渐近区域是不规则的。为了获得在此规范下正则的解，必须移除系统的静态单极和偶极微扰；这些微扰源于小天体的存在。这类经过修正的洛伦兹规范解通常称为 Berndtson解类 [63, 126, 129]。本文采用这一解类。

2. 度规数据构造

为数值生成所需的度规数据，我们采用 [69] 中的方法。我们的目标是构造点粒子度规微扰的傅里叶 m 模式，记为 h^{m}_{ij}，其中，

$$h_{ij} = \sum_{m} h^{m}_{ij} e^{im\phi - i\omega_m t} \tag{48}$$

在此语境下，标架分量用拉丁指标表示。为此，我们首先按照 [126] 中的方法，构造投影到自旋加权球谐基上的洛伦兹规范解的 Kinnersley标架分量。在获得球谐模式后，我们随后通过下式构造 m 模式：

$$h^{m}_{ij}(r,\theta) = \sum_{\ell=\max(m,s)}^{\ell_{\max}} h^{\ell m}_{ij}(r)\ {}_sY_{\ell m}(\theta, \phi = 0), \tag{49}$$

通常取 $\ell_{\max} \sim 30$。自旋权重 s由所构造的特定标架分量决定。构造出 m 模态的标架分量后，

我们随后通过基变换运算，将 Kinnersley标架数值变换为 Boyer–Lindquist 坐标分量，

$$h^{(m)}_{\mu\nu} = \sum_{ij} \tilde{Z}^{i}_{\mu}\tilde{Z}^{j}_{\nu}h^{(m)}_{ij}, \tag{50}$$

其中 $\tilde{Z}^{i}_{\mu} = \{-n_{\mu}, -l_{\mu}, \bar{m}_{\mu}, m_{\mu}\}$。其中，$l, n$ 和 m 是克尔时空中 Kinnersley标架的标准主零方向，表示为：

$$\begin{aligned} l^{\mu} &= \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta}\right), \\ n^{\mu} &= \frac{1}{2\Sigma}\left(r^2+a^2, -\Delta, 0, a\right), \\ m^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r+ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right). \end{aligned}$$

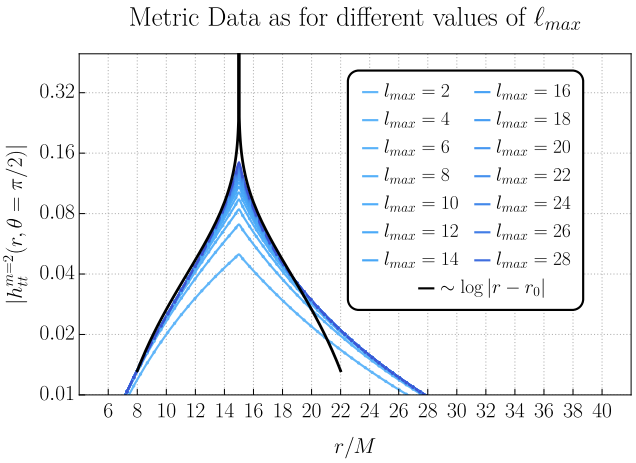

图 1. 单个 m 模式的度规微扰赤道切片，该模式使用不同数量的输入 l 模式构造。最浅的曲线对应于 $l_{\max} = 2$，颜色依次加深的曲线表示 $l_{\max} = 4, 6, \ldots$ 直到 $l_{\max} = 28$。图中叠加了一个特征性的对数发散，以说明源项在软化长度以内的预期标度关系。

3. 奇异结构

如前所述，洛伦兹规范解在次级天体附近具有特殊的奇异结构，因此特别适合用于我们方程中的源函数。由于角分解中的投影操作，洛伦兹规范解的正则性水平各不相同，具体取决于所考虑的是四维解、傅里叶 m 模解，还是球谐ℓ模解。每种情况下的一般奇异结构如下：

$$h^{4d}_{\mu\nu}|_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_p} \sim \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_p|},$$

$$h^m_{\mu\nu}|_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_p} \sim \log|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_p|,$$
$$h^{\ell m}_{\mu\nu}|_{r\to r_p} \sim |r-r_p|.$$

由于我们从有限个球谐 m模的总和构造 l模，所得的输入 m模度规数据在粒子所在位置处呈现出尖锐但连续的行为，而不是精确解真正的对数行为。这种 C^0 行为导致有效驱动函数不连续但有限，其中涉及度规数据的导数。因此，尽管源函数恰好在次级天体所在位置具有不正确的奇 ℓ异结构，用于构造的$r_{\rm soft} \sim r_p/\ell_{\max}$ [2]模有限和实际上在度规中起到了软化长度尺度的作用，1。图展示了这一行为的一个例子。在距 $r_{\rm soft}$ 处，度规扰动呈现出软化的势；而在距粒子超过这一距离的位置，场已适当收敛，并且能够重现向次级天体方向增长的正确对数行为。

多尺度自力合作组即将开展的工作将构建非线性真空自力计算的二阶源项，并提出一种方法，利用穿孔法对该场进行正则化，同时一致地恢复正确的奇异结构 [131, 132]。

构建二维 m 模式后，我们接下来沿赤道面构造数据的精确分段插值函数。这使我们能够计算解析导数，从而捕捉由度规扰动的径向导数产生的强迫函数的精确 C^0 以及随后的 C^{-1} 行为。

VI. 求解方法与实现

在得到主焓方程（32）以及所有必要的背景和度规贡献后，我们便可以开始求解该方程。当前形式下，它是一个二阶线性偏微分方程。我们不会直接求解这一形式的方程，而是利用背景解的薄盘剖面，将其投影为一个常微分方程组。为定义工作方程，我们按照 Potter 的方法进行垂直（高度）平均 [119]，并采用 Tanaka 和 Okada [99]所述的主焓方程（方程（32））修正局域近似，将这两种方法结合起来称为投影修正局域近似（PMLA）。这一过程将问题化简为一组彼此解耦的径向常微分方程。这相当于求解一个类似于完全相对论类比形式的方程

[2] 这里，软化长度尺度自然源于构造度规数据的过程。在牛顿计算中，采用此类软化是标准做法 [97, 98, 115], , 近期的相对论计算中也采用了这种方法 [130]。

中占主导地位的 $n=0$ 模态，该模态在 [99] 中得到了识别。从这个意义上说，我们求解的是三维流体构型中占主导地位的柱面对称贡献，而不是预先采用二维盘设置。我们将在以下小节中详细介绍这一设置。

A. 高度平均主方程

我们密切沿用了先前牛顿研究中的方法，在内积下对方程进行一致的高度平均，

$$\langle\cdot\rangle = \int \frac{(\cdot)e^{-\frac{z^2}{2h^2}}}{\sqrt{2\pi}h}dz, \tag{51}$$

其中 $z=\cos\theta$ 和 h 被固定为一个常数，并通过方程（42）定义。

我们同时按纵横比重新展开，并在修正局域近似（即 PMLA）中保留直至并包括 h^2 的所有项。由此得到的方程可视为类似于支配极向自由度厄米多项式展开中零阶项解的方程。提供这些投影方程显式形式的笔记本将在后续工作中公开。为了在这一层次获得一个解耦的方程组，我们还利用了背景吸积盘和赤道轨道固有的上下对称性。这一性质使主方程中不会出现 h 或 z 形式的项，但 $z\partial_z\mathfrak{h}$或 $\partial_z^2\mathfrak{h}$ 形式的麻烦项仍会出现。我们通过分部积分来消除这类项，直到内积（由方程（51）定义）中不再有极向导数作用于主变量。

对式（32）取平均，通过分部积分适当简化导数，并将方程重新展开至$\mathcal{O}(h^2)$，得到一组解耦的常微分方程，

$$\mathcal{L}_m[\mathfrak{h}(r)] = \mathfrak{F}_m(r), \tag{52}$$

在 PMLA 中。我们对 $\mathcal{L}_m[\mathfrak{h}(r)]$ 进行了化简，将主导项的系数移入源函数，从而得到如下形式，

$$\mathfrak{h}_m''(r) + A_m(r)\mathfrak{h}_m'(r) + B_m(r)\mathfrak{h}_m(r) = \mathfrak{F}_m(r). \tag{53}$$

在算子层面，我们保留 h $A_m \sim A^{(0)}\ r\ +\ h^2$ $B_m = B^{(-2)}\ r\ /h^2 + B^{(0)}\ r\ +\ h^2$ 中的前两阶，即 ( ) $\mathcal{O}$( ) 和 ( ) ( )$\mathcal{O}$( )。

为便于阅读，我们现在省略了微扰指标。项 $B^{(0)}(r)$ 包含了有关背景吸积盘压力和热力学结构的所有信息。其余各项纯属几何因素，源自克尔时空的测地线结构。我们采用标准的参数变易法求解这一方程组：首先构造

该方程组的格林函数，方法是利用其齐次解，然后直接对源项积分。最后，我们采用相同的近似来构造源函数，但有一个关键之处需要注意：我们并未对次级天体引起的完整度规微扰进行适当的高度平均，而是直接取度规在赤道面上的值，类似于[119] 及其 m模微扰。源项中的所有其他量均一致地进行高度平均。

B. 算子分析与共振位置

在构造方程（53）的解时，首先分析微分算子及其对应朗斯基行列式的结构会很有帮助。朗斯基行列式可写为：

$$\mathcal{W}_m(r) = \mathcal{W}_m^p e^{-\int^r A_m(s)\,ds}. \tag{54}$$

这里 $A_m(s)$ 的定义见方程（53），而 $\mathcal{W}^p$ 是一个未指定的常数，将由边界条件确定。值得注意的是，尽管主焓方程的结构复杂，仍可求得朗斯基行列式的解析解：

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_p \frac{m^2\left(\Omega_r^k - \Omega_{r_p}^k\right)^2 - \kappa_r^2}{(2a + (r-3)\sqrt{r})\,(\Omega_r^k)^2(\Omega_{r_p}^k)^2\Delta_r}\sqrt{r}. \tag{55}$$

这里我们将克尔时空中的径向上 epicyclic 频率定义为 [133]，

$$\kappa_r^2 = \frac{-3a^2\sqrt{r} + 8ar + (r-6)r^{3/2}}{r^{5/2}\left(a + r^{3/2}\right)^2}. \tag{56}$$

克尔时空中的圆形测地线频率现在取其纯赤道形式 $\Omega^k = 1/(a + r^{3/2})$；现有的压力修正和高度修正已重新展开，并作为 $A_m(s)$ 展开中二阶之后的次领先项出现。

我们发现，朗斯基行列式恰好在次级天体与流体元之间的角频率差等于流体径向上 epicyclic 频率的位置处为零。这会导致这些位置的解空间可能出现退化。这些点通常称为林德布拉德共振位置，且已在文献中得到广泛研究 [87, 88]。在近开普勒圆盘中，众所周知，这些共振是次级天体与流体之间传递能量和角动量的主要机制。对于给定的 m 模，每个共振都会成对出现：一个位于次级天体轨道半径以内，另一个位于其轨道半径以外。

如图（2）所示，对于给定的 m 模，这两个位置（充当转折点）之间的区域在方程（53）中具有负的有效势。在此区域，流体扰动呈指数增长，波在此处“激发”。在这些转折点之外

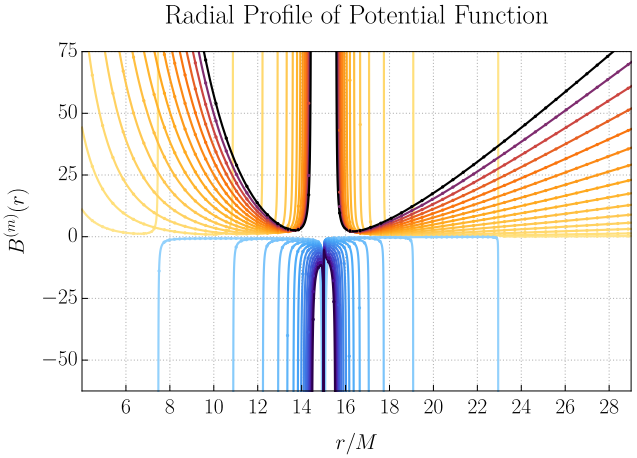

图 2. 该图以基准参数组 $r_p = 15$、$h = 0.1$ 和 $a = 0.6$ 为例，展示了对于一系列 m-模态，焓波动方程中势项的主导结构。该图的关键在于识别波动区域，即势为正的区域，而不是势为负的激发区域。自然地，对于更高的 m-模态，激发区域会向次级天体的位置收缩。这里，最浅的线条在远离粒子位置处出现发散，对应于 $m = 1$ 势；随后颜色较深的线条在更靠近次级天体的位置发散，表示 $m = 2$、$m = 3\cdots$ $m = 15$ 势函数的势。配色方案的差异仅用于明确各方程从波动特性转变为指数增长特性的位置。

，势变为正值，从而产生可在吸积盘中传播的波状解。

重要的是，PMLA 并不会消除压力的影响；压力通常会使共振位置发生偏移。相反，它会有效地重新展开这些偏移，并将其置于描述波动区的势中，从而使模态传播始终能够在距次级天体有限的距离处发生，进而得到收敛的力矩和模态求和。然而，就奇点分析而言，发散位置被简化为[134, 135]。

相对论性林德布拉德共振的位置与牛顿理论中的对应位置有显著差异。如图（3）所示，我们展示了由共振点界定的指数增长区域。图中显示了林德布拉德共振之间的区域，从远离中心天体处开始，针对 $m = 1$ 共振，每跨越一对新的共振，颜色便加深一次。

值得注意的是，在牛顿情形下，$m = 1$ 共振没有对应的内侧共振，因为其位置固定在 $r = 0$。在相对论情形下，所有自旋值都会为该模式产生一个内共振，进而可能对系统的动力学产生影响。从史瓦西到克尔，自旋通常会拓宽共振位置（我们将其归因于

自旋下总力矩的减小，正如 [71, 73]中所发现的那样）。此外，自旋使内共振向中心黑洞靠近的速度，快于其将外共振向外推移的速度。

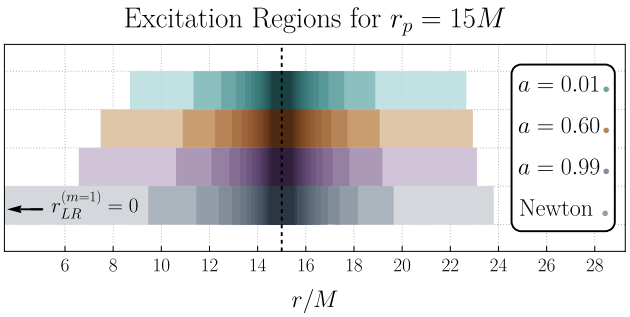

图 3. 示意在 $r_p = 15M$ 处，对于一系列黑洞自旋以及一个牛顿理论对应物，林德布拉德共振之间产生的激发区域。每个色条上最外侧的区域以最浅（非白色）表示，对应于 $m = 1$内侧和外侧林德布拉德共振之间的区域。从边缘向内朝次级天体所在位置移动时，每次颜色加深都表示跨越了一个额外的共振点。与牛顿情形相比，这种颜色变化直观地展示了共振结构和激发区域如何随黑洞自旋而演变。

在相对论吸积盘–极端质量比旋近研究中，一个重要但常被忽视的方面，是轨道运动体与共振位置处流体元之间的角动量传递。在极端质量比旋近与流体近乎共转的系统中，主导系统演化的是这些相互作用，而非经典动力摩擦。因此，通过近似的动力摩擦力来模拟吸积盘效应的强场极端质量比旋近计算，几乎总是存在根本性缺陷。

C. 边界条件

为了构造方程（53的解，我们必须先为主方程定义物理边界条件 $\mathfrak{L}[\mathfrak{h}_m] = 0$。我们分别在最内稳定圆轨道和大半径处设定入射波和出射波条件 $r_{\max}$，从而确保波不会在计算域边界发生反射。与[97, 115, 136], 类似，我们对边界处的场进行二阶 WKB 近似，得到

$$\frac{d\mathfrak{h}_m^{\pm}}{dr} = (\pm ik_m - \frac{1}{2k_m}\frac{dk_m}{dr} - \frac{1}{2}A_m)\mathfrak{h}_m^{\pm}. \tag{57}$$

对应于 $r_{\max}$ 处的外向（+）解，以及最内稳定圆轨道处的内向解（–）。其中，我们将波数定义为：

$$k_m^2(r) = B_m - \frac{1}{2}\frac{dA_m}{dr} - \frac{1}{4}A_m^2. \tag{58}$$

指定内向和外向边界条件后，我们现在可以求解参数变易法所需的齐次解。然而，齐次解在共转（$r = r_p$）处会出现可积发散，必须先对其进行处理才能继续。

D. 共转处的发散

共转共振是行星迁移领域另一个备受关注的问题，它出现在流体元的轨道频率与次级扰动体的频率相匹配的位置。对高度平均方程进行局部展开后，我们发现该处的主方程在最低阶下具有以下形式，

$$\mathcal{L}[\mathfrak{h}]|_{r\to r_p} = \frac{d^2\mathfrak{h}}{dr^2} - \frac{4\kappa_{r_p}^2}{9m^2 r_p \Delta_{r_p}(\Omega_{r_p}^k)^4 (r-r_p)^2}\mathfrak{h}. \tag{59}$$

其中 r_p 是次级天体的位置。我们发现，算子在此处出现了一个正则奇点，因此不适合进行数值实现。值得注意的是，与Tanaka和Okada [99]中的情况不同，我们发现共转处并未出现不规则奇点。我们认为，这是因为我们的设定实质上仅限于 [99] 的$n = 0$ 模态；我们预计，未来致力于求解完整三维结构的研究也会遇到类似困难。虽然该奇点是正则奇点，但穿过此点进行数值积分仍然棘手。我们通过解析地去除其奇异行为，数值求解剩余的正则化场，再在事后恢复奇点，从而规避这一问题。在对点$r = r_p$附近的算子$\mathcal{L}_m[\mathfrak{h}_m] = 0$ 进行局部分析后，我们发现有两个线性无关解，一个正则，另一个奇异。奇异解的形式为，

$$S_m^p = (r-r_p)^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{16\kappa_{r_p}^2}{9m^2 r_p \Delta_{r_p}(\Omega_{r_p}^k)^4}}\right)}. \tag{60}$$

对于基准参数 $a = 0.6M$、$r_p = 15M$和 $m = 2$，我们得到 $S_m^p \sim (r-r_p)^{-0.08}$，从而产生可积发散。为消除这一奇点，我们将 $\mathfrak{h}_m = S_m^p \psi_m$ 代入方程（53），得到一个新方程$\hat{\mathfrak{L}}[\psi_m] = 0$，现在可以使用 `Mathematica` 中简单的内置常微分方程求解器进行求解。

E. 齐次解

通过在方程（60）中引入发散因子，对主方程进行了适当的重新缩放，并对边界条件作了相应的缩放。我们计算了 ψ_m 的齐次解，分别对应内行和外行边界条件；计算域从最内稳定圆轨道（r_I）延伸至某个

$r_{max} \sim 100M$。随后，我们通过解析方法恢复共转处正确的奇异结构，得到贯穿整个计算域的完整内行齐次解（$\mathfrak{h}_m^+(r)$）和外行解（$\mathfrak{h}_m^-(r)$）。图 4展示了这些解：内行模态以蓝色表示，外行模态以橙色表示。内行解的绝对值在粒子以内的域内区域呈现平滑变化（不透明蓝色），而在外部区域则快速振荡（半透明蓝色）。外行解则呈现相反的模式。如图 2所示，每种配色方案中最浅的线对应 $m = 1$ 模态，颜色依次加深的线则分别代表 $m = 2$、$m = 3$，……，直至 $m_{\max} = 15$。

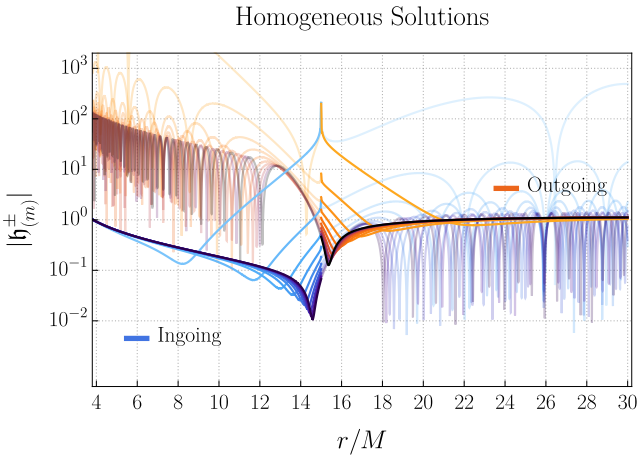

图4. 使用与前文相同的由浅到深配色方案表示不断增加的 m-模贡献，展示了齐次焓方程的独立 m-模解。该示例对应于基准参数组 $r_p = 15$、$h = 0.1$ 和 $a = 0.6$。在外边界满足出射边界条件的解显示为橙色，而在内边界满足入射边界条件的解显示为蓝色。入射解在粒子以内的域内区域（不透明蓝色）表现出平滑行为，而在外部区域（半透明蓝色）则表现出快速振荡行为。使用不同的不透明度有助于更容易地识别相应区域中一致的解行为。

F. 特解

在获得齐次解后，我们通过参数变易法构造完整的特解。即将我们的解写成如下形式：

$$\mathfrak{h}_m(r) = C_m^+(r)\mathfrak{h}_m^+(r) + C_m^-(r)\mathfrak{h}_m^-(r), \tag{61}$$

其中，

$$C_m^+(r) = \int_{r_I}^{r} \frac{\mathfrak{h}_m^-(s)\mathfrak{F}_m(s)}{\mathcal{W}_m^+(s)} ds, \tag{62}$$

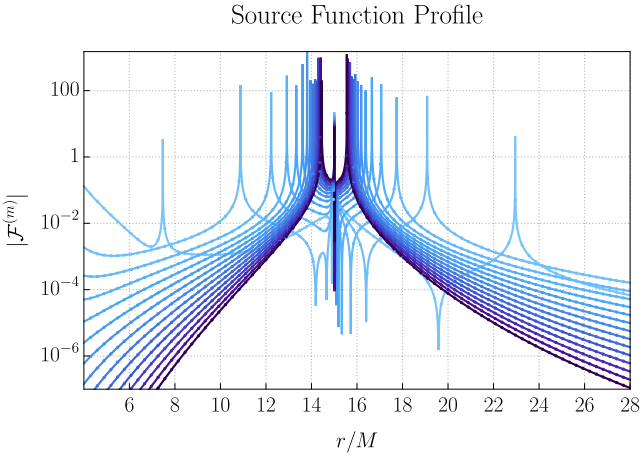

图5. 展示源函数（式（33））的示例图，该源函数属于主焓方程，其贡献来自有效驱动函数的高精度插值函数（15），并与 PMLA 中的逆矩阵 $\mathcal{Q}$ 进行缩并。该示例采用基准参数组 $r_p = 15$、$h = 0.1$ $a = 0.6$ m ，并涵盖一系列 -模。值得注意的是，该图明确显示了林德布拉德共振位置。

$$C_m^-(r) = \int_{r}^{r_{max}} \frac{\mathfrak{h}_m^+(s)\mathfrak{F}_m(s)}{\mathcal{W}_m^-(s)} ds. \tag{63}$$

朗斯基行列式定义见式（54），相应的朗斯基行列式系数，$\mathcal{W}p$，由下式确定

$$\mathcal{W}p^{\pm} \equiv \mathfrak{h}^- \frac{d\mathfrak{h}^+}{dr} - \mathfrak{h}^+ \frac{d\mathfrak{h}^-}{dr}\bigg|_{r=r\text{max},\ r=r_I}. \tag{64}$$

实际上，我们计算两个不同的朗斯基系数：在外边界 $r = r\text{max}$ 处计算的$\mathcal{W}p^+$，以及在内边界 $r = r_I$ 处计算的$\mathcal{W}_p^-$。为 C^+和 C^- 归一化常数分别引入朗斯基系数，纯粹是出于数值因素的考虑。具体而言，我们发现，当在每个边界处分别固定朗斯基行列式时，重构物理流体变量所需的精细抵消会稳定得多。

我们发现，方程（62）中的积分因内、外 Lindblad 共振处的贡献而发散，这些共振对应于方程（55）中朗斯基行列式的零点，此时我们的解空间变得退化。

与牛顿力学文献中通常采用的数值格式不同[97, 98, 115, 137], ，参数变易法格式会使这些共振表现为$1/\delta r^2$ 方程（62）被积函数中的发散（其中δr 表示距发散位置的距离）。这是因为在共振附近，$\mathcal{W} \sim \delta r$ 和 $\mathcal{F} \sim 1/\delta r$，从而导致总发散具有如下形式： $1/\delta r^2$ 。将我们的方法应用于[97] 中的牛顿理论对应物，得到的奇异结构完全相同。参数变易法框架中这种发散的组合会在我们的最终解中产生非物理的共振贡献

。图中可以清楚地看到我们的 $1/\delta r$ 源函数中的发散5。

我们通过 Hadamard 正则化 [138] 消除这些非物理发散。该正则化过程的原理很简单：去除被积函数中导致积分发散的最少部分。在实践中，具体做法如下：给定一个积分，

$$I(r) = \int_a^r \frac{F(x)}{(r_s - r)^2} dx, \tag{65}$$

若其在未指定位置 r_s 处有奇异部分，我们将其有限部分贡献定义为

$$\text{p.f.}[I](r) = F(r_s)\left[\frac{1}{a - r_s} - \frac{1}{r - r_s}\right] + \int_a^r \frac{F(x) - F(r_s)}{(r_s - r)^2} dx \tag{66}$$

这会明确地从具有以下特征形式的被积函数中去除发散贡献，

$$\int_{r_s-\epsilon}^{r_s+\epsilon} \frac{F(x)}{(r_s - r)^2} dx \sim \frac{F(r_s)}{\epsilon}. \tag{67}$$

对每个 m 模式，在两个林德布拉德位置对完整解进行相同的正则化，即可得到主方程的完整特解，

$$\mathfrak{h}_m(r) = \text{p.f.}[C_m^+](r)\mathfrak{h}_m^+(r) + \text{p.f.}[C_m^-](r)\mathfrak{h}_m^-(r). \tag{68}$$

我们计算了主焓方程的特解，直至方位数为 $m_{max} = 15$。需要指出的是，在本文中，我们从未求解系统的静态 $m = 0$ 模式。

G. 流体变量的重构

接下来，我们转而重构流体变量。首先，我们将 PMLA 应用于式（30）中给出的速度重构算子。在进行重构时，我们发现，焓的一阶项与度规微扰的一阶项之间存在精细的抵消。概括而言，我们发现算子 $\mathcal{Q}$ 在 Lindblad 共振附近按 $\mathcal{Q} \sim 1/\delta r$ 发散。相比之下，涉及焓和度规微扰的各项保持有限。然而，它们在式（30）右侧的合成贡献在 Lindblad 共振处线性消失，其标度为 $\sim \delta r$。这种精细抵消有助于获得远离共转处流体正确且平滑的速度剖面。我们发现，如式（64）所示，通过在两个区域边界分别固定两个独立的 Wronskian 系数，可以使这种抵消在数值上保持稳定。计算出流体微扰的四速度后，通过式（28）和（29）计算压力和密度扰动便十分直接。

H. 四流归一化

需要注意的是，在这一过程中，我们并未按照要求，将沿流线的归一化 ($U_\mu U^\mu = -1$) 显式守恒到 $\mathcal{O}(q^2)$ 阶。为此，我们引入了非线性四流的微扰性非仿射参数化，形式为：

$$\tilde{U}^\mu(\lambda) = U^\mu(\chi + qf(\chi)) = U^\mu(\chi) - qf'(\chi)U^\mu(\chi). \tag{69}$$

其中，$\tilde{U}$ 是经过重新参数化后的新四流。允许进行这种变换（我们始终可以这样做）后，现在可以利用这一额外自由度来确定$\tilde{U}^\mu\tilde{U}_\mu = -1 + \mathcal{O}(q^2)$。可以直接证明，只要将变换设为以下形式，

$$f' = -\left(U_\mu^{(0,0)}U^\mu_{(1,0)} + \frac{1}{2}h^{(1,0)}_{\mu\nu}U^\mu_{(0,0)}U^\nu_{(0,0)}\right), \tag{70}$$

即可确定归一化。由此得到四速度的另一种表达式：

$$\tilde{U}^\mu = U^\mu_{(0,0)} + q\left(U^\mu_{(1,0)} - f'U^\mu_{(0,0)}\right) \tag{71}$$

在我们的情形中，这种重新参数化不会影响标量流体变量 $\mathfrak{e}$ 和 p 的定义，因为它们在沿背景流传播时保持不变（即 $U^{\mu}{}_{(0,\,0)}\nabla_\mu p = 0$）。因此，在利用主焓形式重构扰动四流后，我们作如下替换：

$$U^\mu_{(1,0)} \to U^\mu_{(1,0)} - f'U^\mu_{(0,0)}. \tag{72}$$

VII. 解的性质

推导出克尔几何中理想流体的非正压线性扰动主方程（§III，§IV），并建立了求解薄背景吸积盘受轨道运行的次级天体扰动问题的方法（§V，§VI）之后，我们现在来探讨解的特征，重点关注吸积盘中的密度波形态和角动量平衡。

A. 螺旋形态

在图6 中，我们绘制了扰动盘能量密度（对应于牛顿质量密度），可以看到清晰的内侧和外侧螺旋臂在次级天体所在位置相连，这与牛顿情形的预期一致。

虽然我们的解覆盖整个区域，但出于绘图目的，我们去除了次级天体轨道周围宽度为$\sim 1M$ 的区域，因为重构二维解会导致与共转奇点相交的圆周上出现发散。内侧的白色圆表示最内稳定圆轨道。为比较相对论情形与牛顿情形的相位结构，我们叠加了

解析近似（对于 $|r - r_p|/r_p \gtrsim h$）以及来自 [114]的牛顿螺旋波前（白色虚线）。

在上方面板中，两者吻合得十分出色：克尔螺旋的外侧部分比牛顿螺旋略微缠绕得更紧（偏移至更小的半径）。聚焦于下方面板中的内盘，可以看清内侧螺旋臂的细致结构，以及克尔与牛顿预测之间迅速扩大的差异；克尔螺旋臂同样缠绕得更紧。下方面板还清楚地展示了次级螺旋臂的出现，其起始于 $r \lesssim 0.5 r_p$[3]。Miranda 和 Rafikov [97] 已表明，内盘中多条螺旋臂的出现是差分旋转盘中密度波传播的自然结果，因此它们在克尔几何中的出现既引人入胜，也并不令人意外。

图7 探讨了在双星间距相同的情况下，中心黑洞自旋取不同值时内侧螺旋结构的变化，$r_p = 30M$。值得注意的是，自旋的主要影响是由于最内稳定圆轨道收缩，使螺旋能够传播到更接近中心黑洞的位置。因此，在自旋最高的情况下，右侧面板中的高阶螺旋会更加显著。此外，对于顺行盘，自旋越高，螺旋臂的缠绕程度通常越弱。螺旋的强度也会随着自旋增大而减弱，这意味着对于固定轨道半径，积分力矩可能会随着自旋增大而减弱。这与近期的研究结果一致[71, 74]。

最后，我们指出，对于压力梯度较弱的赤道盘，螺旋结构与牛顿情形高度吻合是意料之中的，因为牛顿与克尔情形下的盘旋转频率相似$\Omega_{\rm N} = r^{-3/2}$ 而 $\Omega_{\rm k} = (r^{3/2}+a)^{-1}$。通过分析螺旋波前，可以进一步了解螺旋波形态如何依赖于自旋和盘厚度。可利用式（58）[97, 114, 139], 中的径向波数来确定这些波前。不过，克尔几何中丰富的螺旋结构有待今后进一步研究；现在我们转而讨论吸积盘中的角动量与力矩平衡。

B. 力矩密度与平流角动量平衡

在黑洞微扰理论中，若要理解次级黑洞在物质存在时的演化，一种常见方法是先求解物质场的响应，然后将由此产生的微扰视为背景时空上的试探场，并利用时空的 Killing 对称性定义穿过视界的能量与角动量通量，以及

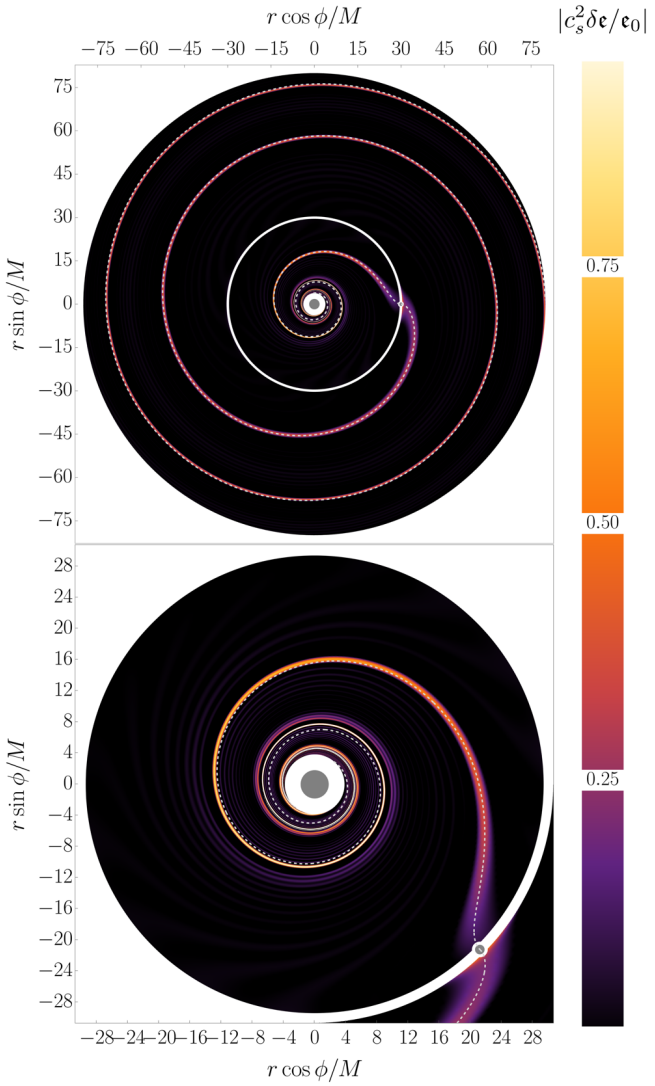

图 6. 参数为 $h = 0.1$、$a = 0.6M$ 和 $r_p = 30M$ 时，克尔几何中螺旋密度波的延展结构。上图：吸积盘的大尺度结构，叠加了牛顿螺旋臂解析预测 [114]。下图：内盘的放大视图，突出显示次级天体附近的精细螺旋臂结构，以及中心黑洞附近主螺旋臂和次级螺旋臂的形成。克尔螺旋臂与牛顿解析预测之间的差异在内侧区域清晰可见。所绘制的量经过选择，因为它在大半径处呈现恒定的微扰振幅。为清晰起见，我们在图例中将 $\delta\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_{(1,1)}$ 和 $\mathfrak{e}_{(1,0)} = \mathfrak{e}_0$ 分别记为……。

无穷远 [69, 105, 106, 140, 141]。这些能量通量和角动量通量随后往往与次级天体轨道的演化直接联系起来。

将这种方法应用于存在黏性和热耗散的吸积盘时，会遇到重大困难；更一般地说，对于物质与次级天体之间的相互作用不会直接反映在无穷远通量上的物质构型，这种方法也会面临类似问题。在许多情况下，物质场与次级天体会交换能量

[3] 鉴于此处考虑的最高 m模，较高阶螺旋中的特征可能无法完全分辨。

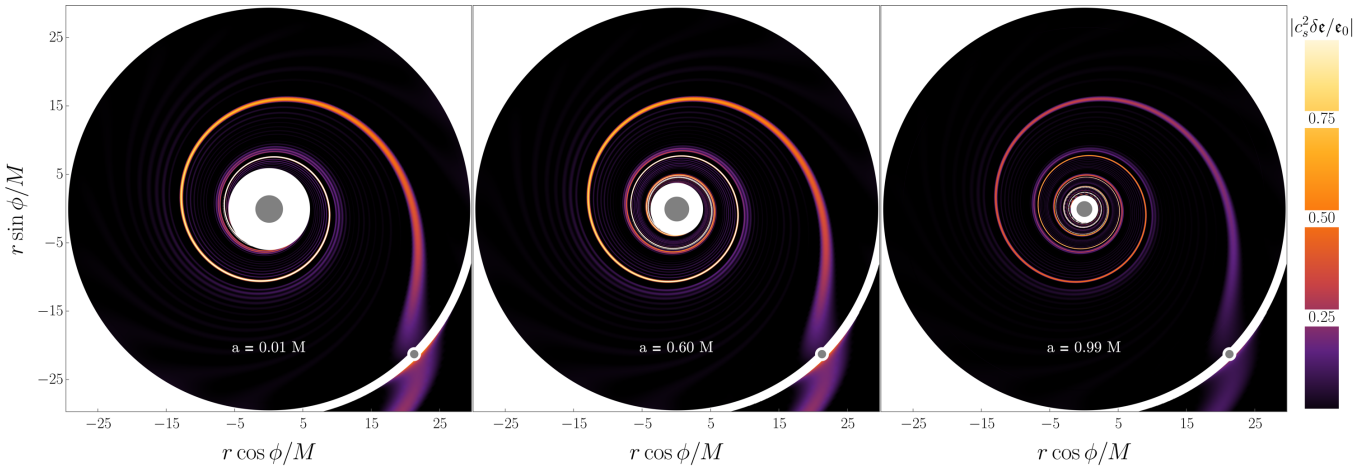

图 7. 固定盘面纵横比 $h = 0.1$ 和次级天体轨道半径 $r_p = 30M$下的赤道面密度剖面，展示了黑洞自旋参数 $a = 0.01M$、 $0.6M$和 $0.99M$ 从左至右逐渐增大时的情况。这些面板展示了随着黑洞自旋增大，内侧旋臂结构发生的系统性变化，突显了其在相对论区间内逐渐偏离低自旋形态的趋势。这一变化也证明了我们的方法在高自旋值下依然稳健，使我们能够在相对论效应最强的克尔势深处解析螺旋密度波。图例与图 6中所述相同。

和角动量，但在视界或无穷远处测得的相应通量，并不能代表支配次级天体轨道演化的实际交换。因此，穿过视界和流向无穷远的净通量往往无法捕捉对轨道产生的、具有物理意义的反作用。

相比之下，在牛顿理论和流体动力学模拟文献中，盘面—次级天体相互作用通常通过计算局域力矩来量化，再将其积分以求得扰动体施加于吸积盘上的总力；反之亦然，这遵循牛顿第三定律。[4] 本节概述如何在黑洞微扰理论的相对论框架内实现类似的构造。尽管我们是在吸积盘的背景下介绍这一方法，但所述方法更普遍地适用于微扰双黑洞时空中任何关于物质的相对论描述。文献中此前曾出现过相关思路，用于描述局域激发的守恒量，例如与 GR-Chombo 数值相对论合作项目相关的研究[143, 144]；不过，尽管这些方法的方向与我们相似，却无法直接推广为我们所要构造的局域动量—力矩平衡的类比形式。因此，我们的目标是建立一个局域平衡方程，将动量交换与该区域内各半径处局域施加的力联系起来。

1. 一般力矩平衡方程

我们希望给出一种吸积盘力矩的表示形式，使其与牛顿力学文献直接衔接，并采用 [145] 附录 A 中所述的代表性形式。为此，我们回到完全非线性的爱因斯坦方程。对于圆轨道，理解轨道演化的主要途径是考察吸积盘与次级天体之间的角动量交换。基于这一思路，我们从以下方程开始：

$$\nabla_\mu \left(\xi^\nu_\phi T^\mu_\nu\right) = T^\mu_\nu \nabla_\mu \xi^\nu_\phi. \tag{73}$$

此处， $T^{\mu\nu}$ 表示整个时空流形上的完整流体应力—能量张量，假设其满足通常的守恒方程； $\xi^\mu_\phi = \{0,\ 0,\ 0,\ 1\}$ 是与方位方向相关联的坐标基矢量。在此阶段， ξ^μ_ϕ 不假设为Killing矢量。

这个表达式也可以等价地写为

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g} T^\mu_\phi\right) = \sqrt{-g} T^\mu_\nu \Gamma^\nu_{\mu\phi}, \tag{74}$$

其中， $\sqrt{-g}$ 是完整非线性时空的体积元，所有其他量也都保持完全非线性。接下来，我们将该方程展开到$\mathcal{O}(\lambda q^2)$阶；我们预计能量和角动量传递正是在这一阶出现。

不过，在进行这一展开之前，我们注意到，我们的目标是得到轨道平均力矩的表达式。因此，我们使用式（74）的轨道平均形式。圆轨道的平均算子定义如下：

$$\langle X \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} X dt.$$

[4] 例如，参见针对中等质量比旋近的 [142], 。

这里， ω 表示扰动体的轨道频率；它可以推广到圆周运动以外的情形，从而涵盖倾斜轨道、偏心轨道以及完全一般的轨道，如 [146]所示。在$\mathcal{O}(\lambda q^2)$阶，我们只关注一阶扰动的二次量，或与二阶扰动的静态（$m=0$ 圆轨道对应）模式相关的量。由于我们的解是按方位角 m模构造的，对于圆轨道，一阶量的二次组合可直接通过下式得到：

$$\langle XY\rangle = \mathrm{Re}\left[\sum_m x_m\,\bar{y}_m\right]. \tag{75}$$

其中，横线表示共轭算子，$X = \sum x_m e^{im\phi}e^{-i\omega_m t}$ 是一个一般的微扰项， Y亦然。在本研究中，我们仅将场方程求解到一阶，因此无法获得进入主导阶角动量平衡的静态二阶贡献。我们将这些缺失项统称为 $S^{(2)}_{m=0}$。

此时，我们还必须说明本方案中始终采用的一项简化。具体而言，我们将背景盘解视为与时间无关。一般来说，这一假设对于现实的盘构型并不成立，尤其是对于绝热流体，或存在热耗散或黏度的吸积盘而言，因为这类情况必须考虑吸积盘的长期演化。更恰当的假设是，背景盘各物理量的时间导数很小。例如，若能量密度可以展开为 $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_{(0,1)} + \mathfrak{e}_{(1,1)}$，则我们要求

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_{(0,1)}}{\partial t} \sim \mathcal{O}(\lambda q^2)\,. \tag{76}$$

或者，也可以采用多尺度展开，通过引入一个新的独立快时间（t），恢复背景量对时间的独立性；再引入一个新的独立慢时间（T_D）变量，用以描述吸积盘的长期演化，其定义为 $T_D = q^2 t$。在这一框架下，

$$\partial_t \mathfrak{e}_{(0,1)} \;\Rightarrow\; \left(\partial_t + q^2\partial_{T_D}\right)\mathfrak{e}_{(0,1)} = q^2\frac{\partial \mathfrak{e}_{(0,1)}}{\partial T_D}\,. \tag{77}$$

即使在此处考虑的例子中，也预期背景吸积盘参数会随慢时间演化；我们的绝热流体的初始热力学分布必须按照能量方程演化，如 [97]中所述。

然后，取方程（74），纳入新的慢时间尺度，展开至$\mathcal{O}$（λq^2）阶，并对圆轨道取平均，我们便得到如下新的平衡方程，

$$\begin{aligned}\partial_{T_D}\left(\sqrt{-g}T^t_\phi\right) + \partial_i\left[\sqrt{-g}\left(\left\langle\delta^2 T^i_\phi\right\rangle + \left\langle h\delta T^i_\phi\right\rangle + \frac{1}{4}T^i_\phi\left(\left\langle h^2\right\rangle - 2\left\langle h^\alpha_\beta h^\beta_\alpha\right\rangle\right)\right)\right] \\ = \sqrt{-g}\left[\left\langle\delta T^{\alpha\beta}\nabla_\phi h_{\alpha\beta}\right\rangle - 2T^{\alpha\beta}\left(\left\langle h^\gamma_\alpha\nabla_{[\gamma}h_{\beta]\phi}\right\rangle - \frac{1}{4}\left\langle h\nabla_\phi h_{\alpha\beta}\right\rangle\right)\right] + S^{(2)}_{m=0},\end{aligned} \tag{78}$$

其中，所有梯度和行列式均相对于背景克尔几何而言，所有 h 均指度规扰动及其迹，而 $i\in\{r,\ \theta\}$。现在，如果我们在式（78）中施加对背景流的限制，

$U^r = U^\theta = 0$，那么平衡方程中的显式贡献为：

$$T^t{}_\phi = (\mathfrak{e}+p)U^t_{(0,0)}U^{(0,0)}_\phi, \tag{79}$$

$$\delta T^i{}_\phi = (\mathfrak{e}+p)U^i_{(1,0)}U^{(0,0)}_\phi, \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\delta T^{\mu\nu} =& 2(\mathfrak{e}+p)U^{(\mu}_{(1,0)}U^{\nu)} \\ &+(\mathfrak{e}^{(1,1)}+p^{(1,1)})U^\mu U^\nu \\ &+p^{(1,1)}g^{\mu\nu} - ph^{\mu\nu}_{(1,0)},\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}\delta^2 T^i{}_\phi =& (\mathfrak{e}+p)U^i_{(1,0)}\left(U^{(1,0)}_\phi + h^{(1,0)}_{\phi\mu}U^\mu\right) \\ &+\left(\mathfrak{e}^{(1,1)}+p^{(1,1)}\right)U^i_{(1,0)}U_\phi.\end{aligned} \tag{82}$$

在上述所有内容中用 t 替换 ϕ，也可以得到能量平衡方程。尽管我们是在施加基灵背景流和圆轨道频率的条件下推导该方程的，但这一结果可以自然地推广到一般构型。

结合牛顿力学文献以及此前黑洞微扰理论中的工作，我们将平流角动量密度定义为应力-能量张量变分中二次项的一部分，其表达式为：

$$j^i_{\mathrm{Adv}} = \sqrt{-g}\left\langle\delta^2 T\right\rangle^i{}_\phi - j^i_{\mathrm{M}}. \tag{83}$$

with

$$j^i_{\mathrm{M}} = \sqrt{-g}\left\langle\left(\mathfrak{e}^{(1,1)}\right)U^i_{(1,0)}\right\rangle U_\phi. \tag{84}$$

我们明确地选择这种分离方式，使其在牛顿极限下满足：

$$\dot{J}^i_{\rm Adv} \to r^2 \rho_0 \left\langle \delta U^r \delta U^\phi \right\rangle , \tag{85}$$

$$\dot{J}^i_{\rm M} \to r^2 \left\langle \delta\rho \, \delta U^r \right\rangle U^\phi . \tag{86}$$

直接识别出， $\dot{J}^i_{\rm Adv}$ 与穿过吸积盘的平流角动量通量的相对论类比量[例如， 87], 以及 $\dot{J}^i_{\dot{M}}$ 与受扰流体元径向运动相关的角动量输运。至关重要的是，正如先前的牛顿力学分析所强调的 [147, 148], ，项 $\dot{J}^i_{\dot{M}}$ 恰好是抵消其他未知静态二阶项所需的贡献，我们将这些项统称为 $S^{(2)}_{m=0}$ [5]

在计入二阶应力-能量贡献后，我们现在对力矩平衡方程中的其余项进行正则分解。我们将剩余贡献分为两类：一类对单个应力-能量张量变分和单个度规扰动呈线性，我们将其识别为物质力矩的导数， $\partial T^\phi{}_{\rm Mat}$；另一类仅取决于背景流体流，并且关于由次级体激发的度规微扰呈二次，我们将其解释为几何力矩的导数， $\partial T^\phi{}_{\rm Geo}$。这种分解得到：

$$\begin{aligned} \partial T^\phi_{\rm Mat} =& \sqrt{-g} \left\langle \delta T^{\alpha\beta} \nabla_\phi h_{\alpha\beta} \right\rangle \\ & - \partial_i \left(\sqrt{-g} \left\langle h \delta T^i_\phi \right\rangle \right) , \end{aligned} \tag{87}$$

and

$$\begin{aligned} \partial T^\phi_{\rm Geo} =& -2\sqrt{-g} T^{\alpha\beta} \left\langle h^\gamma_\alpha \nabla_{[\gamma} h_{\beta]\phi} \right\rangle \\ & + \frac{1}{2}\sqrt{-g} T^{\alpha\beta} \left\langle h \nabla_\phi h_{\alpha\beta} \right\rangle \\ & - \frac{1}{4} \partial_i \left[\sqrt{-g} T^i_\phi \left(\left\langle h^2 \right\rangle - 2 \left\langle h^\mu_\nu h^\nu_\mu \right\rangle \right) \right] . \end{aligned} \tag{88}$$

方程组的这种规范分离导出了其汇总形式，

$$\begin{aligned} \partial_{T_D} \left(\sqrt{-g} T^i_\phi \right) + \partial_i \left(\dot{J}^i_{\rm Adv} + \dot{J}^i_{\dot{M}} \right) = \\ \partial T^\phi_{\rm Mat} + \partial T^\phi_{\rm Geo} + S^{(2)}_{m=0} . \end{aligned} \tag{89}$$

与我们对角动量通量的分析类似，现在我们发现，在牛顿极限下，

$$\partial T^\phi_{\rm Mat} \to r^2 \left\langle \delta\rho \partial_\phi \Phi_p \right\rangle , \tag{90}$$

$$\partial T^\phi_{\rm Geo} \to 0, \tag{91}$$

其中， Φ_p 是较小天体的牛顿势。这与先前采用力矩-对流平衡的研究建立了直接联系 [例如， 145]。结合对平流角动量的识别，可得出完整的平流角动量–力矩密度平衡方程的直接相对论类比。

[5]感谢 Callum Fairbairn 提请我们注意这些参考文献。

2. 相对论吸积盘的应用

获得流体变量的解后，结合输入的度规数据和给定的背景流体，我们将 PMLA 应用于力矩平衡方程（78），并保留尺度高度展开中的首阶$\mathcal{O}(1)$ 项。由此得到一个纯径向的轨道平均方程。我们在图 8中展示将力矩平衡方程应用于流体解所得的结果。

在图8及下文中，我们以类似于牛顿力学文献的方式对力矩和力矩密度进行归一化[例如， 88, 149], 但不同之处在于，我们的力矩是单位体积而非单位面积的力矩；此外，我们在此通过乘以因子 45)) $\mathfrak{e}_I (r_p/r_I)^{-2}$，对最初选择的吸积盘归一化方式在最内稳定圆轨道处进行调整（方程（

$$J_0 = \left(\frac{m_p}{M} \right)^2 h^{-3} r_p^2 \mathfrak{e}_I r_I^2 \Omega_p^2 . \tag{92}$$

图8 的左侧面板显示，即使采用 PMLA，轨道平均平流角动量通量密度（$\partial_r J^r_{\rm Adv}$）的径向分布，也与我们对应的相对论吸积盘激发力矩密度（$\partial T^\phi{}_{\rm Mat}$）高度吻合。此外，力矩的延展结构明显呈现出与牛顿力学文献中先前计算的力矩相同的定性行为，包括次级天体半径内侧和外侧紧邻处的主谷和主峰，以及距离次级天体较远处所谓的负力矩密度和力矩振荡（近期实例见 [149, 150] ）。

$J^r_{\rm Adv}\partial_r$ 贡献完全取决于扰动流体量，而 $\partial T^\phi{}_{\rm Mat}$ 则取决于度规扰动与扰动流体量之间的叉积。这一比较有力地检验了本文所用近似的有效性、数值实现的正确性（包括用于消除林德布拉德共振处非可积发散的 Hadamard 正则化过程），以及我们对流体变量的重建。

图 8 的右侧面板聚焦于几何项（式 88）和径向质量流项（式 84）。我们发现，上文称为“几何力矩”的新型力矩相较于其他贡献处于次要地位。不过，我们确实预期，在包含热力学冷却和黏性应力的更现实流体模型中，这类项可能会增强。$\dot{J}^r_{\dot{M}}$ 项中占主导但未达到平衡的贡献会随着远离次级天体而增大。然而，正如文献 [147, 148], 中此前指出的，以及将轨道平均能量方程展开至二阶后可以看到的那样，这种增长源于忽略了静态二阶贡献。具体而言，我们预期形如 $\mathfrak{e}_{(0,1)} U_{(0,0)\phi} \quad U^r_{(2,0),m=0}$的项会与这一贡献相平衡。最后，若不仔细计算静态二阶项，或背景变量的慢时间变化（这同样出现在二阶），我们就无法

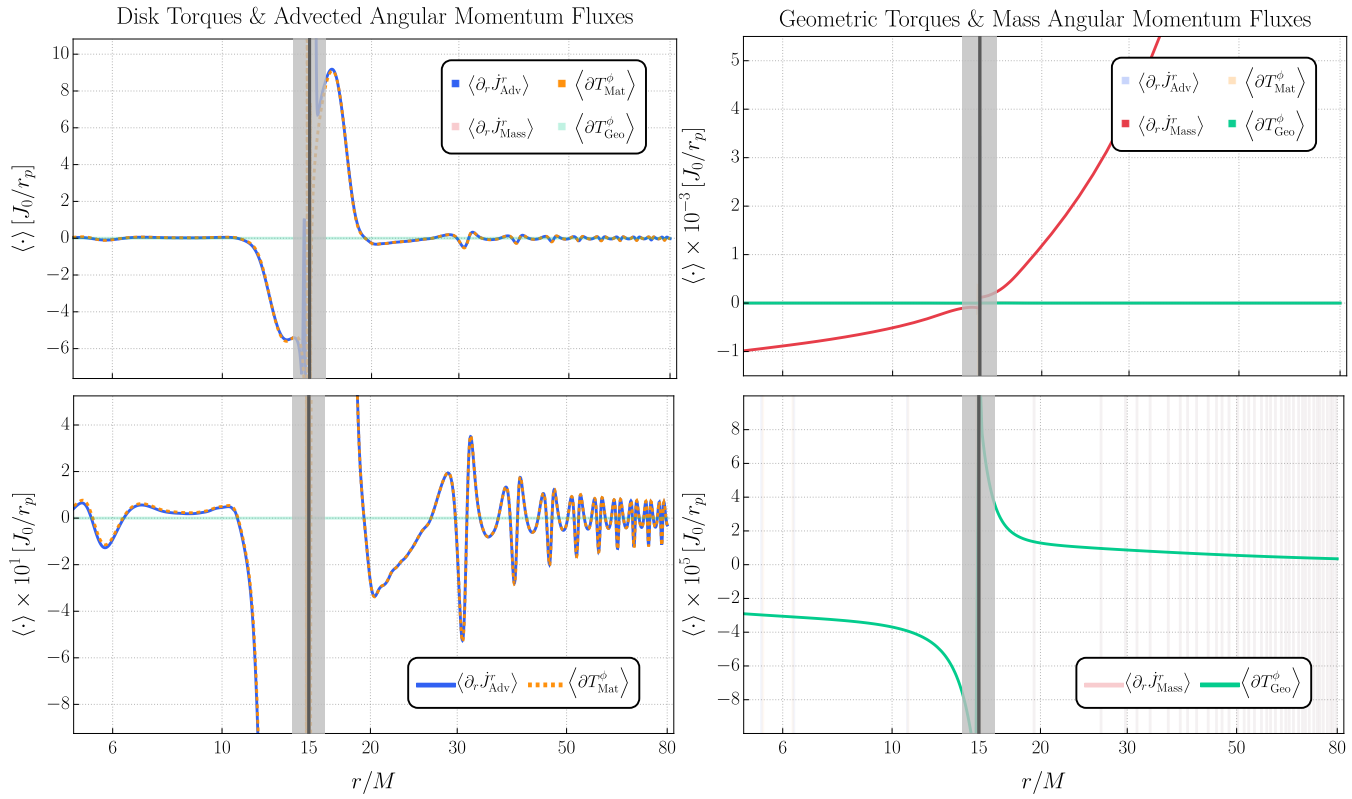

图 8. 基于一阶度规扰动与流体扰动乘积构造的力矩密度平衡方程的不同贡献，适用于基准参数组 $h=0.1$、$a=0.99$ 和 $r_p=15M$，求和至 $m_{\rm max}=15$，归一化为 $[J_0/r_p]$。我们用深黑色线标出轨道半径，周围的灰色阴影区域内，我们的解收敛性较差。**右上：**平流角动量与盘力矩密度之间的整体平衡，显示出共转点两侧各自明显的峰和谷。**右下：**相同量的放大图，展示了二者高度吻合；请注意，接近最内稳定圆轨道时，吻合程度会下降。**左上：**未平衡的 $\dot{J}_{\dot{M}}$ 项，预计将由二阶流体微扰的静态模态平衡。**左下：**占主导地位较弱的几何力矩密度放大图，这些密度源自与点粒子相关的度规扰动二次项。它们不包含流体背景态以外的信息。

进行完整的平衡检验。无论如何，$\partial_r \dot{J}^r_{\rm Adv}$ 与 $\partial T^\phi_{\rm Mat}$ 之间高度一致，这表明在黑洞微扰理论计算中，为相对论盘建立力矩平衡框架有一条明确的途径。

在线性、绝热的牛顿情形中，扰动体在吸积盘中激发的力矩密度完全由平流角动量通量带走。因此，我们可以将渐近角动量通量与激发林德布拉德力矩联系起来[97,117]。在此我们发现，在线性、绝热的相对论情形中也存在类似的匹配关系（图8），这表明我们的角动量通量可作为总相对论林德布拉德力矩的指标。图9给出了一个示例计算，展示了固定 $r_p=8M$时不同自旋值对应的对流通量。$\langle \dot{J}^r_{\rm Adv}\rangle$在最内稳定圆轨道处以及较大 r 时的数值，在图9 中可解释为作用于吸积盘的完整单侧内、外相对论共振林德布拉德力矩。若存在力矩平衡定律，则两者之和的负值即为作用于次级天体的差动力矩。

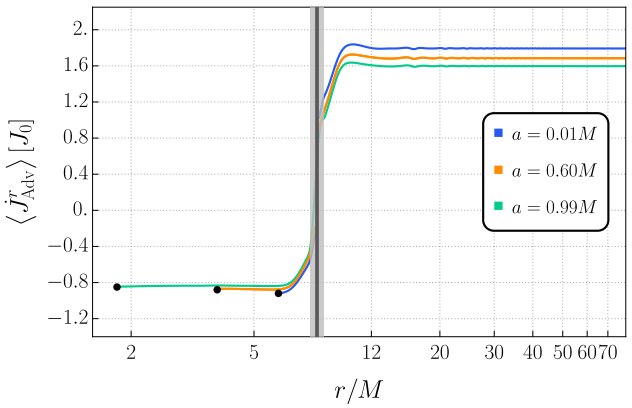

图9. 不同自旋值范围内的总平流角动量，其中 $h=0.1$、$r_p=8M$ 和 $m_{\rm max}=15$。内侧区域的黑点对应不同自旋下的最内稳定圆轨道。

我们从图9中得出两个关键结果。首先，对于所考虑的所有自旋值，外侧角动量通量都大于内侧通量。将上述类比推广到牛顿情形，并将积分角动量通量视为轨道上的合力矩，这意味着净力矩仍为负，表明次级天体在 $r_p = 8M$处向内迁移。这与近期研究的结果形成对比；那些研究报告称，在较低自旋值下，该半径处会发生力矩反转 [71, 73]。然而，这种反转似乎对吸积盘的内在性质十分敏感。因此，我们的发现并不与以往研究相矛盾，反而凸显了进一步研究的必要性。

其次，与近期的相对论研究结果一致，我们发现黑洞自旋增大时，总力矩会减小。未来的后续研究将探索更广阔的参数空间，以更全面地理解我们的模型与近期其他将吸积盘视为无压粒子集合的相对论处理方法有何不同 [71, 73]。

此外，这一结果为进一步探寻牛顿第三定律式平衡关系的可能性指明了方向；借助这种关系，人们或许能够识别力矩，$T_{\rm secondary} = -T_{\rm Mat}$。如果这种联系确实存在，就有望在微扰物质场双星建模方面取得根本性进展。具体而言，与其通过计算高阶度规微扰来确定作用于小天体、导致其轨道演化的力，不如求解双星系统相应的物质场构型，针对给定的物质场理论构造 ∂T^{ϕ}，并对体积积分以确定双星演化。我们预计，这种平衡关系在示意形式上可写为：

$$\dot{J}_{\rm secondary} \sim -\int \left(\partial T^{\phi}_{\rm Mat} + \partial T^{\phi}_{\rm Geo}\right)\, dV. \qquad (93)$$

这类探索将在未来的研究中至关重要。要在施加于物质场的力与施加于次级天体的力之间建立具体联系，就需要在自力理论中从第一性原理推导力矩平衡。然而，我们预计，即便只是以启发式方式实施这种力矩平衡，也已能显著改进文献中目前采用的近似方法。

VIII. 结论

在这项工作中，我们展示了极端质量比旋近的双星势中首个完全相对论性的流体计算。我们的方法借鉴了多个领域的成果，将为自引力相对论恒星和吸积盘建立的解加以改造，并结合最先进的自力计算，同时参考行星迁移文献中的最新成果来指导计算。利用这些结果，我们推导出一种新的主方程形式，用于描述克尔几何中理想流体的微扰。该方程纳入了由独立度规微扰产生的有效力。虽然有效力的选择具有一般性，但我们将研究范围限定为克尔黑洞中沿圆轨道运行的小型次级黑洞所产生的度规微扰，并考虑绝热指数趋近于 1 的绝热流体。

在基于自力理论构建相对论背景流和极端质量比旋近双星势之后，我们详细介绍了推导高度平均主方程的过程，并重点阐述了计算焓解各个阶段所遇到的细微问题。重建完整的流体解后，我们分析了由此得到的旋臂结构和扩展流型，并展示了克尔与牛顿旋臂结构之间的差异。我们还计算了一系列自旋值对应的扩展剖面，展示了最内稳定圆轨道的收缩，以及内侧旋臂缠绕速率随自旋略微增加的现象。

随后，我们聚焦于角动量平衡，考察流经吸积盘的平流角动量与次级天体势激发的物质力矩之间的相互作用。我们推导出一种全新的、完全相对论性的力矩平衡方程，其结果显示，在整个计算区域内，我们对平流通量密度和物质力矩密度的定义表现出显著的一致性。这项分析还揭示了新的力矩贡献，包括我们所称的几何力矩，以及一些需要计算静态二阶流体扰动的特定项。

我们的力矩平衡方程为理解轨道力学与吸积盘物理之间的相互作用迈出了关键一步。我们的方法不依赖于通过吸积盘计算平流通量的传统方法（黑洞微扰理论中通常采用这种方法），而是将这些效应直接与局域力矩联系起来。未来，这种方法或许能让我们在无需进行复杂的二阶自力类计算的情况下，计算作用于轨道运动体上的力。

这项初步研究有若干可立即开展的后续方向。首先，由于度规扰动的计算模态数量有限，我们计算的解所涵盖的方位角傅里叶模最高为$m_{\rm max} = 15$。尽管这似乎足以捕捉吸积盘形态和力矩平衡的基本特征，未来仍应通过更高阶模态检验其收敛性。其次，我们没有计算 $m = 0$ 模对流体扰动的贡献。为得到进行完整力矩平衡所需的静态二阶方程，必须计算这一项。

这一框架未来的发展还应明确纳入重子数守恒方程，从而适当地将静质量能与内能分离开来。这种分解对于准确追踪系统随时间的热力学演化至关重要，尤其是在纳入额外冷却效应时。

向理想磁流体力学（MHD）的扩展似乎也是可行且前景良好的，无论是在本文所建立框架内的线性阶，还是在数值层面。事实上，未来对线性理论的扩展可以利用完整的非线性流体方程，或其磁流体力学扩展，并与次级天体产生的线性度规微扰相耦合，正如方程（13-15）中所推导的那样。

将黏度等耗散效应纳入考量，可以通过采用Bemfica、Disconzi、Noronha 和 Kovtun（BDNK）提出的因果一阶流体理论 [151–154]，以自洽的方式加以处理。然而，这类模型会涉及背景吸积和径向内流，因此可能需要通过求解完整的耦合流体方程组，而不是借助约化的主方程来处理。尽管如此，近期已有研究在球对称低自旋黏性恒星的背景下，推进了利用 BDNK 计算主方程的工作 [155–158]。

本研究主要聚焦于公式推导和方法论，并提供了若干原理验证计算，以展示这些结果的稳健性和潜力。后续研究将更深入地探讨其底层物理和参数空间，考察相对论效应如何改变动力学，并与文献中已有的大量牛顿力学研究进行比较。这些结果是迈向极端质量比旋近周围完全相对论流体建模的第一步，也为建立更复杂且更符合天体物理实际的活动星系核。

致谢

CD 和 DJD 感谢 Callum Fairbairn 在研究过程中为我们指出了宝贵的参考文献，并提供了有益的说明。DJD 感谢 Roman Rafikov 进行有益的讨论，并在令人惊叹的远距离处发现了初步图表中的多条螺旋臂。CD 感谢 Francisco Duque、Philip Kirkeberg、Maarten van de Meent、David O'Neil、Adam Pound、J aime Redondo-Yuste、Laura Sberna、Andrew Spiers 和 Chris Tiede 在开展这项研究期间进行的宝贵讨论。CD 感谢 Scott Hughes 和麻省理工学院卡夫利研究所在本研究早期阶段给予的热情接待。本研究还使用了 Sam Dolan 开发的 Kerr-Lorenz-Circ `Mathematica` 代码的一个修改版本 [125, 126]。本研究使用了黑洞微扰工具包 [159] 以及 xAct代码库中的 xPert 子包 [160]。本研究使用了位于哥本哈根大学 SCIENCE高性能计算中心的 Tycho超级计算机。Center of Gravity 是由丹麦国家研究基金会通过第 184 号资助项目支持的卓越中心。CD 感谢 VILLUM基金会（资助编号 VIL37766 和 VIL53101）以及丹麦国家研究基金会的 DNRF主席计划（资助编号 DNRF162）提供的支持。DJD 感谢丹麦独立研究基金通过 Sapere Aude启动基金第 121587 号以及 STScI主任酌情基金提供的支持。

[1] B. P. Abbott 等（LIGO科学合作组、Virgo），观测到来自双黑洞并合的引力波，《物理评论快报》 **116**, 061102 2016 1602 03837 ( ), [ ] arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学。[2] A. G. Abac 等（LIGO科学合作组、VIRGO、KAGRA），GWTC-4.0：利用第四次LIGO-Virgo-KAGRA观测运行第一阶段的观测结果更新引力波瞬变目录，arXiv 电子预印本，arXiv:2508.18082（2025），arXiv:2508.18082 [广义相对论与量子宇宙学]。[3] B. P. Abbott 等（LIGO科学合作组、Virgo），GWTC-1：LIGO 和 Virgo 在第一次和第二次观测运行期间观测到的致密双星并合引力波瞬变目录，《物理评论X》9，031040 2019 1811（），arXiv: .12907 [天体物理学.高能]。[4] R. Abbott 等（LIGO科学合作组、Virgo），GWTC-2：LIGO 和 Virgo 在第三次观测运行前半段观测到的致密双星并合，《物理评论X》 **11**, 021053 2021 2010 14527 ( ), [ ] arXiv: . 广义相对论与量子宇宙学。[5] R. Abbott 等（KAGRA、VIRGO、LIGO科学合作组），GWTC-3：LIGO 和 Virgo 在第三次观测运行第二阶段观测到的致密双星并合，《物理评论X》13，041039（2023），arXiv:2111.03606 [广义相对论与量子宇宙学].

[6] M. Maggiore 等，爱因斯坦望远镜的科学论证，JCAP 2020，050（2020），arXiv:1912.02622 [astro- ph.CO]。[7] M. Evans 等，《Cos mic Explorer：科学、观测台与社群的视界研究》，arXiv 电子预印本，arXiv: 2109 09882 2021 2109 09882 。（），[ ] arXiv: . astro-ph.IM 。[8] M. Colpi 等，《LISA定义研究报告》，arXiv 电子预印本，arXiv: 2402 07571 2024 2402 07571 。（），[ ] arXiv: . astro-ph.CO 。[9] J. Mei 等（天琴），《天琴项目：科学与技术的当前进展》，PTEP 2021，05A107（2021），arXiv:2008.10332 [gr-qc]。[10] E.-K. Li 等，《利用天琴开展引力波天文学》，Reports on Progress in Physics 88，056901（2025），arXiv:2409.19665 [astro-ph.GA]。[11] X. Gong、S. Xu、S. Gui、S. Huang 和 Y.-K. Lau，《太极任务的任务设计与早期宇宙中的结构形成》，载于《引力波天文学手册》，C. Bambi、S. Katsanevas 和 K. D. Kokkotas 编（2021），第24页。[12] P. A. Seoane 等（LISA），《利用激光干涉仪空间天线开展天体物理学研究》，Living Rev. Rel. 26，2

（2023），arXiv:2203.06016 [gr-qc]。[13] P. Auclair 等（LISA宇宙学工作组），《利用激光干涉仪空间天线开展宇宙学研究》，Living Rev. Rel. 26，5（2023），arXiv:2204.05434 [astro- ph.CO]。[14] K. G. Arun 等（LISA），《利用LISA探索基础物理的新视界》，Living Rev. Rel. 25，4（2022），arXiv:2205.01597 [gr-qc]。[15] N. Afshordi 等（LISA联盟波形工作组），《激光干涉仪空间天线的波形建模》，arXiv 电子预印本，arXiv:2311.01300（2023），arXiv:2311.01300 [gr-qc]。[16] L. Barack 和 A. Pound，《广义相对论中的自力与辐射反作用》，Rept. Prog. Phys. 82，016904（2019），arXiv:1805.10385 [gr-qc]。[17] B. Wardell、A. Pound、N. Warburton、J. Miller、L. Durkan 和 A. Le Tiec，《基于二阶自力理论的致密双星引力波形》，《物理评论快报》 **130**, 241402 2023 2112 12265 （），[ ] arXiv：. gr-qc 。[18] A. J. K. Chua、M. L. Katz、N. Warburton 和 S. A. Hughes，《为LISA数据分析快速生成完全相对论的极端质量比旋近波形模板》，《物理评论快报》126，051102（2021），arXiv:2008.06071 [gr-qc]。[19] M. L. Katz、A. J. K. Chua、L. Speri、N. Warburton 和 S. A. Hughes，《快速极端质量比旋近波形：毫赫兹引力波数据分析的新工具》，《物理评论D》104，064047（2021），arXiv:2104.04582 [gr-qc]。[20] S. A. Hughes、N. Warburton、G. Khanna、A. J. K. Chua 和 M. L. Katz，《通过时域和频域中的多音分解获得极端质量比旋近的绝热波形》，《物理评论D》103，104014（2021），[勘误：Phys.Rev.D 107，089901（2023）], arXiv:2102.02713 [gr-qc]。[21] N. I. Shakura 和 R. A. Sunyaev，《双星系统中的黑洞：观测外观》，Astronomy and Astrophysics 24，337（1973）。[22] I. D. Novikov 和 K. S. Thorne，《天体物理学与黑洞》，载于Les Houches理论物理暑期学校：黑洞（1973），第343–550页。[23] H. Tanaka、T. Takeuchi 和 W. R. Ward，《行星与等温气体吸积盘之间的三维相互作用。I. 共转、林德布拉德力矩与行星迁移》，ApJ 565，1257（2002）。[24] E. Barausse 和 L. Rezzolla，《吸积环流体动力学阻力对极端质量比旋近的影响》，《物理评论D》77，104027（2008），arXiv:0711.4558 [gr-qc]。[25] M. A. Abramowicz 和 P. C. Fragile，《黑洞吸积盘理论基础》，Living Rev. Rel. 16，1 2013 1104（），arXiv：.5499 [astro-ph.HE]。[26] N. Yunes、B. Kocsis、A. Loeb 和 Z. Haiman，《吸积盘诱导迁移在极端质量比旋近引力波中的印记》，《物理评论快报》 **107**, 171103 2011 1103 4609 （），[ ] arXiv：. astro-ph.CO 。[27] B. Kocsis、N. Yunes 和 A. Loeb，《嵌入薄吸积盘中的极端质量比旋近黑洞双星的可观测特征》，PRD 84，024032（2011），arXiv:1104.2322 [astro-ph.GA]。[28] E. Barausse、V. Cardoso 和 P. Pani，《环境效应会破坏精密引力波天体物理学吗？》《物理评论D》89, 104059 (2014), arXiv:1404.7149 [广义相对论与量子宇宙学]. [29] A. M. Derdzinski、D. D'Orazio、P. Duffell、Z. Haiman 和 A. MacFadyen，《利用 LISA 探测气体盘物理：吸积盘中中等质量比旋近的模拟》，《皇家天文学会月报》486, 2754 2019( ), [489, 勘误：《皇家天文学会月报》– ( )], arXiv: .03623 [astro-ph.HE]. [30] P. C. Duffell、D. D'Orazio、A. Derdzinski、Z. Haiman、A. MacFadyen、A. L. Rosen 和 J. Zrake，《环双星盘：吸积和力矩随质量比及盘黏度的变化》，《天体物理学杂志》901, 25 (2020), arXiv:1911.05506 [astro-ph.SR]. [31] A. Derdzinski、D. D'Orazio、P. Duffell、Z. Haiman 和 A. MacFadyen，《气体盘嵌入式中等质量比旋近在 $LISA$ 波段的演化》，《皇家天文学会月报》 **501**, 3540 2021 2005 11333 ( ), arXiv: . [ ] astro-ph.HE . [32] H. Tagawa、B. Kocsis、Z. Haiman、I. Bartos、K. Omukai 和 J. Samsing，《活动星系核中的质量间隙并合》，《天体物理学杂志》 **908**, 194 2021 2012 00011 ( ), arXiv: . [ ] astro-ph.HE . [33] Z. Pan 和 H. Yang，《活动星系核中极端质量比旋近的形成率》，《物理评论D》103, 103018 (2021), arXiv:2101.09146 [astro-ph.HE]. [34] Z. Pan、Z. Lyu 和 H. Yang，《湿式极端质量比旋近可能更常见于空间引力波探测》，《物理评论D》104, 063007 (2021), arXiv:2104.01208 [astro-ph.HE]. [35] L. Zwick、A. Derdzinski、M. Garg、P. R. Capelo 和 L. Mayer，《脏波形：嵌入气体中的引力波源的多频带谐波成分》，《皇家天文学会月报》 **511**, 6143 2022 2110 09097 ( ), arXiv: . [ ] astro-ph.HE . [36] A. Derdzinski 和 L. Mayer，《通过薄而引力不稳定的活动星系核盘中恒星的亚秒差距形成与迁移，实现原位极端质量比旋近》，《皇家天文学会月报》 **521**, 4522 2023 2205 10382 ( ), arXiv: . [ ] astro-ph.GA . [37] P. S. Cole、G. Bertone、A. Coogan、D. Gaggero、T. Karydas、B. J. Kavanagh、T. F. M. Spieksma 和 G. M. Tomaselli，《区分对双黑洞引力波形的环境效应》，《自然·天文学》7, 943 (2023), arXiv:2211.01362 [广义相对论与量子宇宙学]. [38] L. Speri、A. Antonelli、L. Sberna、S. Babak、E. Barausse、J. R. Gair 和 M. L. Katz，《利用引力波探测吸积物理》，《物理评论X》13, 021035 (2023), arXiv:2207.10086 [广义相对论与量子宇宙学]. [39] M. Garg、A. Derdzinski、L. Zwick、P. R. Capelo 和 L. Mayer，《气体在来自 LISA 中等质量黑洞双星的引力波上留下的印记》，《皇家天文学会月报》 **517**, 1339 2022 2206 05292 ( ), arXiv: . [ ] astro-ph.GA . [40] S. L. Morton、S. Rinaldi、A. Torres-Orjuela、A. Derdzinski、M. P. Vaccaro 和 W. Del Pozzo，《GW190521：活动星系核内部的一次双黑洞并合？》，《物理评论D》108, 123039 (2023), arXiv:2310.16025 [广义相对论与量子宇宙学]. [41] C. Tiede、D. J. D'Orazio、L. Zwick 和 P. C. Duffell，《盘诱导的双星进动：对黑洞双星动力学和多信使观测的启示》，《天体物理学杂志》 **964**, 46 2024 2312 01805 ( ), [ ] arXiv: . astro-ph.HE . [42] L. Zwick、C. Tiede、A. A. Trani、A. Derdzinski、Z. Haiman、D. J. D'Orazio 和 J. Samsing，《新型猫类

别：周期性力扰动双星所产生引力波的环境效应》，《物理评论D》110, 103005 (2024), arXiv:2405.05698 [广义相对论与量子宇宙学]. [43] M. Garg、A. Derdzinski、S. Tiwari、J. Gair 和 L. Mayer，《通过 LISA 大质量黑洞双星的引力波测量偏心率和气体诱导的扰动》，《皇家天文学会月报》532, 4060 (2024), arXiv:2402.14058 [astro-ph.GA]. [44] M. Garg、C. Tiede 和 D. J. D'Orazio，《吸积介导的 LISA 大质量黑洞双星自旋—偏心率相关性》，《皇家天文学会月报》534, 3705 2024 2405 ( ), arXiv: .04411 [astro-ph.HE]. [45] M. Garg、A. Franchini、A. Lupi、M. Bonetti 和 L. Mayer，《气体诱导的微扰对活动后牛顿 LISA 大质量黑洞双星引力波旋近的影响》，ApJ 993, 145 (2025年), arXiv:2410.17305 [astro-ph.HE]. [46] H. Khalvati、A. Santini、F. Duque、L. Speri、J. Gair、H. Yang 和 R. Brito，《相对论波形对 LISA 极端质量比旋近科学目标的影响》，PRD **111**, 082010 2025 2410 17310 ( ), [ ] arXiv: . gr-qc . [47] F. Duque 、 S. Kejriwal 、 L. Sberna 、 L. Speri 和 J. Gair，《利用偏心极端质量比旋近的引力波约束吸积物理》，PRD 111, 084006 2025 2411 ( ), arXiv: .03436 [广义相对论与量子宇宙学]. [48] T. F. M. Spieksma 和 E. Cannizzaro，《受盘牵制：拖曳伴星穿越活动星系核》，arXiv 电子预印本 , arXiv: 2504 08033 2025 2504 08033 . [ ] ( ), arXiv: . astro-ph.GA . [49] L. Zwick、K. Hendriks、D. O' Neill、J. Takátsy、P. Kirkeberg、C. Tiede、J. Stegmann、J. Samsing 和 D. J. D'Orazio，《剖析偏心引力波源的环境效应》，PRD 112, 063005 (2025年), arXiv:2506.09140 [astro-ph.HE]. [50] L. Zwick，《现实环境下 LISA 大质量黑洞双星源真空模板减除的局限》，arXiv 电子预印本 , arXiv:2601.06684 (2026年), arXiv:2601.06684 [广义相对论与量子宇宙学]. [51] L. Zwick、P. R. Capelo 和 L. Mayer，《未来空间探测器引力波形的优先事项：真空精度还是环境效应？》，《皇家天文学会月报》521, 4645 (2023), arXiv:2209.04060 [广义相对论与量子宇宙学]. [52] M. Garg、L. Sberna、L. Speri、F. Duque 和 J. Gair，《利用 LISA 大质量黑洞双星检验广义相对论的系统误差》，皇家天文学会月刊 **535**, 3283 2024 2410 02910 ( ), [ ] arXiv: . astro-ph.GA . [53] C. E. A. Chapman-Bird 等，《进入快速自旋黑洞的非对称质量偏心赤道旋近的高效波形》，《物理评论D》112, 104023 (2025年), arXiv:2506.09470 [广义相对论与量子宇宙学]. [54] L. Speri、M. L. Katz、A. J. K. Chua、S. A. Hughes、N. Warburton、J. E. Thompson、C. E. A. Chapman-Bird 和 J. R. Gair，《快速傅里叶变换：频域中的极端质量比旋近波形》，arXiv 电子预印本 , arXiv:2307.12585 (2023), arXiv:2307.12585 [广义相对论与量子宇宙学]. [55] A. Pound，《非线性引力自力：二阶运动方程》，《物理评论D》95, 104056 (2017), arXiv:1703.02836 [广义相对论与量子宇宙学]. [56] M. van de Meent，《克尔时空中一般束缚测地线上的引力自力》，《物理评论D》97, 104033 (2018)

[57] P. Lynch、V. Witzany、M. van de Meent 和 N. Warburton，《快速内旋与轨道共振的处理》，《经典与量子引力》41，225002（2024年），arXiv:2405.21072 [gr-qc]。[58] S. D. Upton，《高度正则规范下的二阶引力自力：协变与坐标穿孔》，《物理评论D》109，044021（2024年），arXiv:2309.03778 [gr-qc]。[59] P. Lynch、M. van de Meent 和 N. Warburton，《旋转黑洞中的偏心自力驱动内旋》，《经典与量子引力》39，145004（2022年），arXiv:2112.05651 [gr- qc]。[60] B. Leather，《采用双曲面切片和谱方法计算引力自力》，《广义相对论与引力》57，112（2025年），arXiv:2411.14976 [gr-qc]。[61] P. Bourg、B. Leather、M. Casals、A. Pound 和 B. Wardell，《用于引力自力计算的 Green-Hollands-Zimmerman-Teukolsky 穿孔方案的实现》，《物理评论D》110，044007（2024年），arXiv:2403.12634 [gr-qc]。[62] A. Pound，《非线性引力自力 I：小天体外部场》，《物理评论D》86，084019（2012年），arXiv:1206.6538 [gr-qc]。[63] J. Miller 和 A. Pound，《极端质量比旋近的双时间尺度演化：史瓦西时空中准圆轨道的波形生成方案》，《物理评论D》 **103**, 064048 2021 2006 11263 ( ), [ ] arXiv: . gr-qc .[64] Z. Nasipak，《致密天体旋近至旋转大质量黑洞时的绝热引力波形模型》，《物理评论D》109，044020（2024年），arXiv:2310.19706 [gr-qc]。[65] R. Vicente、T. K. Karydas 和 G. Bertone，《无碰撞环境中极端质量比旋近的全相对论处理》，《物理评论快报》135，211401（2025年），arXiv:2505.09715 [gr-qc]。[66] R. Brito、V. Cardoso 和 P. Pani，《黑洞作为粒子探测器：超辐射不稳定性的演化》，《经典与量子引力》32，134001（2015年），arXiv:1411.0686 [gr-qc]。[67] M. Rahman 和 T. Takahashi，《暗物质存在时极端质量比旋近产生的后绝热波形》，arXiv 电子预印本，arXiv:2507.06923（2025年），arXiv:2507.06923 [gr-qc]。[68] D. Li、C. Weller、P. Bourg、M. LaHaye、N. Yunes 和 H. Yang，《超轻标量云中的极端质量比旋近：标量辐射》，《物理评论D》112，084057（2025年），arXiv:2507.02045 [gr-qc]。[69] C. Dyson、T. F. M. Spieksma、R. Brito、M. van de Meent 和 S. Dolan，《极端质量比旋近中的环境效应：克尔时空中的环境扰动》，《物理评论快报》134，211403（2025年），arXiv:2501.09806 [gr-qc]。[70] L. Polcar 和 V. Witzany，《迈向被物质环绕的黑洞中的相对论内旋》，《物理评论D》112，104003（2025年），arXiv:2507.15720 [gr-qc]。[71] F. Duque、L. Sberna、A. Spiers 和 R. Vicente，《相对论吸积盘中的极端质量比旋近》，arXiv 电子预印本，arXiv:2510.02433（2025年），arXiv:2510.02433 [gr- qc]。[72] F. Duque、C. F. B. Macedo、R. Vicente 和 V. Cardoso，《超轻暗物质中的极端质量比旋近》，《物理评论快报》 **133**, 121404 2024 2312 06767 ( ), [ ] arXiv: . gr-qc .

’ arXiv:1711.09607 [广义相对论与量子宇宙学].

[73] A. Hegade K. R.、C. F. Gammie 和 N. Yunes，《无自旋黑洞周围极端质量比旋近的吸积盘扭矩相对论处理》，《物理评论D》112，124012（2025年），arXiv:2509.20457 [gr-qc]。[74] A. Hegade K. R.、C. F. Gammie 和 N. Yunes，《自旋黑洞周围极端质量比旋近的吸积盘扭矩相对论处理》，《物理评论D》112，124068（2025年），arXiv:2510.03564 [gr-qc]。[75] S. Chandrasekhar，《动力摩擦 II：恒星从星团逃逸的逃逸率及动力摩擦作用的证据》，《天体物理学杂志》97，263（1943年）。[76] E. C. Ostriker，《气体介质中的动力摩擦》，《天体物理学杂志》513，252（1999年）。[77] D. O'Neill、C. Tiede、D. J. D'Orazio、Z. Haiman 和 A. MacFadyen，《逆行环双星盘中的引力波解耦》，《天体物理学杂志》993，206（2025年）。[78] W.-T. Kim，《气体介质中圆轨道扰动体的非线性动力摩擦》，ApJ 725，1069（2010年），arXiv:1010.1995 [astro-ph.GA]。[79] E. Barausse，《碰撞流体中的相对论性动力摩擦》，《皇家天文学会月报》382，826（2007年），arXiv:0709.0211 [astro-ph]。[80] R. Vicente 和 V. Cardoso，《超轻暗物质中的黑洞动力摩擦》，《物理评论D》105，083008（2022年），arXiv:2201.08854 [gr-qc]。[81] D. Traykova、K. Clough、T. Helfer、E. Berti、P. G. Ferreira 和 L. Hui，《相对论区间内标量暗物质产生的动力摩擦》，《物理评论D》104，103014 2021 2106 ( )，arXiv: .08280 [gr-qc]。[82] D. Traykova、R. Vicente、K. Clough、T. Helfer、E. Berti、P. G. Ferreira 和 L. Hui，《各种尺度的标量暗物质云对黑洞产生的相对论性阻力》，《物理评论D》 **108**，121502 2023 2305 10492 L ( )，[ ] arXiv: . gr-qc .[83] C. Dyson 和 M. van de Meent，《克尔时空：全速潜入深渊——克尔时空中俯冲测地线的解析解》，《经典与量子引力》 **40**, 195026 2023 2302 03704 ( )，[ ] arXiv: . gr-qc .[84] Z. Wang、T. Helfer、D. Traykova、K. Clough 和 E. Berti，《标量暗物质产生的引力马格努斯效应》，《物理评论D》110，024009（2024年）。[85] V. Cardoso、K. Destounis、F. Duque、R. Panosso Macedo 和 A. Maselli，《天体物理环境中的极端质量比系统产生的引力波》，《物理评论快报》129，241103（2022年），arXiv:2210.01133 [gr-qc]。[86] D. N. C. Lin 和 J. Papaloizou，《极端质量比双星系统中吸积盘上的潮汐扭矩》，《皇家天文学会月报》186，799（1979年）。[87] P. Goldreich 和 S. Tremaine，《外部势在林德布拉德共振和共转共振处激发密度波》，ApJ 233，857（1979年）。[88] P. Goldreich 和 S. Tremaine，《盘-卫星相互作用》，ApJ 241，425（1980年）。[89] W. R. Ward，《太阳星云中的密度波：微分林德布拉德扭矩》，Icarus 67，164（1986年）。[90] N. Meyer-Vernet 和 B. Sicardy，《关于共振盘-卫星相互作用的物理机制》，Icarus 69，157（1987年）。[91] S. H. Lubow，《流体盘中潮汐驱动偏心不稳定性的模型》，ApJ 381，259（1991年）。[92] P. Artymowicz 和 S. H. Lubow，《双星-吸积盘相互作用的动力学 I：共振与盘隙大小》，ApJ 421，651 (1994)。

[93] W. R. Ward，《星云潮汐引发的原行星迁移》，Icarus 126, 261 (1997)。[94] H. Tanaka、T. Takeuchi 和 W. R. Ward，《行星与等温气体盘之间的三维相互作用：I. 共转力矩、林德布拉德力矩与行星迁移》，ApJ 565, 1257 (2002)。[95] H. Tanaka 和 W. R. Ward，《行星与等温气体盘之间的三维相互作用：II. 偏心率波与弯曲波》，ApJ 602, 388 2004( )。[96] D. Tsang，《非正压盘中的线性共转力矩》，ApJ 782, 112 (2014)，arXiv:1310.8626 [astro- ph.EP]。[97] R. Miranda 和 R. R. Rafikov，《冷却盘中的行星—盘相互作用：基础理论》，ApJ 892, 65 (2020)，arXiv:1911.01428 [astro-ph.EP]。[98] C. W. Fairbairn 和 R. R. Rafikov，《偏心行星激发的原行星盘密度波：线性理论》，《皇家天文学会月报》 **517**，2121 2022 2207 14637 ( )，[ ] arXiv: . astro-ph.EP .[99] H. Tanaka 和 K. Okada，《行星与等温气体盘之间的三维相互作用：III. 局部等温情形》，ApJ 968, 28 (2024年)，arXiv:2404.12521 [astro-ph.EP]。[100] C. W. Fairbairn 和 A. J. Dittmann，《突破行星—盘相互作用中偏心率的极限》，《皇家天文学会月报》543, 565 2025年 2506 ( )，arXiv: .19917 [astro-ph.EP]。[101] W. Kley 和 R. P. Nelson，《行星—盘相互作用与轨道演化》，《天文学与天体物理学年评》50, 211 (2012)，arXiv:1203.1184 [astro-ph.EP]。[102] L. Copparoni、E. Barausse、L. Speri、L. Sberna 和 A. Derdzinski，《随机气体力矩对LISA频段非对称双星系统的影响》，《物理评论D》111, 104079 2025年 2502 ( )，arXiv: .10087 [gr-qc]。[103] C. M. Hirata，《相对论盘中的林德布拉德共振力矩——I. 基本方程》，《皇家天文学会月报》414, 3198 (2011)，arXiv:1010.0758 [astro-ph.HE]。[104] C. M. Hirata，《相对论盘中的林德布拉德共振力矩：II. 共振强度的计算》，《皇家天文学会月报》 **414**，3212 2011 1010 0759 ( )，[ ] arXiv: . astro-ph.HE .[105] R. Brito 和 S. Shah，《被标量云包围的黑洞中的极端质量比旋近》，《物理评论D》108, 084019 (2023)，arXiv:2307.16093 [gr-qc]。[106] S. Datta 和 A. Maselli，《天体物理环境中非对称双星系统演化的多参数展开》，arXiv 电子预印本，arXiv:2507.04471 (2025年)，arXiv:2507.04471 [gr-qc]。[107] J. R. Ipser 和 L. Lindblom，《吸积盘与旋转恒星的绝热脉动》，ApJ 379, 285 (1991)。[108] J. R. Ipser 和 L. Lindblom，《相对论吸积盘与旋转恒星的脉动：考林近似》，ApJ 389, 392 (1992)。[109] J. Goodman 和 R. R. Rafikov，《行星力矩作为原行星盘的黏度》，《天体物理学杂志》552, 793 (2001)。[110] J. M. Stewart 和 M. Walker，《广义相对论中的时空微扰》，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》341, 49 (1974)。[111] J. M. Stone、P. D. Mullen、D. Fielding、P. Grete、M. Guo、P. Kempski、E. R. Most、C. J. White 和 G. N. Wong，《AthenaK：Athena++AMR 框架的高性能可移植版本》，arXiv 电子预印本

，arXiv:2409.16053（2024年），arXiv:2409.16053 [astro- ph.IM]。[112] C. W. Fairbairn，《层流与湍流吸积盘中的线性弯曲波传播》，ApJ 979，156（2025年），arXiv:2412.06955 [astro-ph.SR]。[113] G. I. Ogilvie，《偏心吸积盘的非线性流体动力学》，《皇家天文学会月报》 **325**, 231 2001 0102245 ( ), [ ] arXiv:astro-ph/ astro-ph 。[114] G. I. Ogilvie 和 S. H. Lubow，《论行星在吸积盘中产生的尾迹》，《皇家天文学会月报》330，950（2002），arXiv:astro- ph/0111265 [astro-ph]。[115] R. Miranda 和 R. R. Rafikov，《原行星盘中的多个螺旋臂：线性理论》，ApJ 875，37（2019），arXiv:1811.09628 [astro-ph.EP]。[116] H. Zhang 和 D. Lai，《外部势激发三维吸积盘中的波》，《皇家天文学会月报》368，917 2006( )，arXiv:astro-ph/0510069 [astro-ph]。[117] R. Miranda 和 R. R. Rafikov，《ALMA观测到的原行星盘中多个间隙和环的行星解释》，ApJL 878，L9（2019），arXiv:1905.08259 [astro-ph.EP]。[118] C. W. Fairbairn 和 R. R. Rafikov，《偏心行星激发的原行星盘密度波：线性理论》，《皇家天文学会月报》 **517**, 2121 2022 2207 14637 ( ), [ ] arXiv: . astro-ph.EP 。[119] W. J. Potter，《完整的相对论薄盘——下落区的物理及最内稳定圆轨道处的应力值》，皇家天文学会月刊 503，5025–5045（2021）。[120] R. Miranda 和 R. R. Rafikov，《具有冷却的吸积盘中的行星—盘相互作用：基本理论》，ApJ 892，65（2020），arXiv:1911.01428 [astro-ph.EP]。[121] D. Tsang，《非正压吸积盘中的线性共转力矩》，ApJ 782，112（2014），arXiv:1310.8626 [astro-ph.EP]。[122] Y. Mino、M. Sasaki 和 T. Tanaka，《粒子运动的引力辐射反作用》，Physical Review D 55，3457–3476（1997）。[123] A. Pound 和 B. Wardell，《黑洞微扰理论与引力自力》，载于《引力波天文学手册》（Springer Singapore，2021），第1–119页。[124] V. Toomani、P. Zimmerman、A. Spiers、S. Hollands、A. Pound 和 S. R. Green，《用于引力自力计算的新度规重构方案》，《经典与量子引力》39，015019（2022），arXiv:2108.04273 [gr- qc]。[125] S. R. Dolan、C. Kavanagh 和 B. Wardell，《洛伦兹规范下旋转黑洞的引力微扰》，Physical Review Letters 128，10.1103/phys- revlett.128.151101（2022）。[126] S. R. Dolan、L. Durkan、C. Kavanagh 和 B. Wardell，《洛伦兹规范下克尔时空的度规微扰：圆形赤道轨道》，《经典与量子引力》41，10.1088/1361-6382/ad52e3（2024）。[127] B. Wardell、C. Kavanagh 和 S. R. Dolan，《洛伦兹规范下克尔时空的有源度规微扰》，《经典与量子引力》42，205007（2025年）。[128] S. A. Teukolsky，《旋转黑洞的微扰。I. 引力、电磁和中微子场微扰的基本方程》，ApJ 185，635（1973）。[129] M. V. Berndtson，《史瓦西度规的调和规范微扰》（2009），arXiv:0904.0033 [gr-qc]。

[130] E. Cannizzaro、M. Palleschi、L. Sberna、R. Brito 和 S. Green，《玻色子云激发标量准正规模》，arXiv 电子预印本，arXiv:2512.15878（2025），arXiv:2512.15878 [广义相对论与量子宇宙学]。[131] P. Bourg、A. Pound、S. D. Upton 和 R. Panosso Macedo，《一种简单高效的高阶 Detweiler-Whiting奇异场计算方法》，《物理评论D》110，084007（2024），arXiv:2404.10082 [广义相对论与量子宇宙学]。[132] S. D. Upton、B. Wardell、A. Pound、N. Warburton 和 L. Barack，《二阶自力计算的有效源：史瓦西时空中的准圆轨道》，arXiv 电子预印本，arXiv:2508.00087（2025），arXiv:2508.00087 [广义相对论与量子宇宙学]。[133] G. Torok 和 Z. Stuchlik，《克尔裸奇点引力场中开普勒运动的径向与垂向回旋频率——与黑洞情形的比较及裸奇点吸积盘可能存在的不稳定性》，Astron. Astrophys. 437，775（2005），arXiv:astro-ph/0502127。[134] P. Artymowicz，《外部势激发的林德布拉德共振的波激发及广义力矩公式》，ApJ 419，155（1993）。[135] W. R. Ward，《星云潮汐引起的原行星迁移》，Icarus 126，261（1997）。[136] D. Tsang，《非正压盘中的线性共转力矩》，《天体物理学杂志》782，112（2014）。[137] C. W. Fairbairn，《层流盘与湍流盘中的线性弯曲波传播》，《天体物理学杂志》979，156（2025）。[138] L. Blanchet 和 G. Faye，《Hadamard正则化》，Jour-nal of Mathematical Physics 41，7675–7714（2000）。[139] R. R. Rafikov，《行星产生的潮汐波的非线性传播》，ApJ 569，997（2002），arXiv:astro-ph/0110496 [astro-ph]。[140] V. Cardoso、K. Destounis、F. Duque、R. P. Macedo 和 A. Maselli，《星系中的黑洞：环境对引力波产生与传播的影响》，《物理评论D》 **105**, 061501 2022 2109 00005 L （），[ ] arXiv: . gr-qc .[141] M. Rahman、S. Kumar 和 A. Bhattacharyya，《利用偏心极端质量比旋近双星探测天体物理环境》，JCAP 01，035，arXiv:2306.14971 [广义相对论与量子宇宙学]。[142] A. Derdzinski、A. J. Dittmann、A. Franchini、A. Lupi、N. Brucy、P. R. Capelo、F. S. Masset、R. Mignon-Risse、M. Rizzo Smith、E. Santiago-Leandro、M. Toscani、D. A. Velasco-Romero、R. Wissing、M. Garg、L. Mayer、R. Ser-afinelli、L. Souvaitzis、D. J. D'Orazio 和 J. Menu，《LISA天体物理学"盘-IMRI"代码比较项目：活动星系核类吸积盘中的中等质量比双星》，arXiv 电子预印本，arXiv:2512.10893（2025），arXiv:2512.10893 [astro-ph.HE]。[143] T. Andrade、L. Salo、J. Aurrekoetxea、J. Bamber、K. Clough、R. Croft、E. de Jong、A. Drew、A. Duran、P. Ferreira、P. Figueras、H. Finkel、T. França、B.-X. Ge、C. Gu、T. Helfer、J. Jäykkä、C. Joana、M. Kunesch、K. Kornet、E. Lim、F. Muia、Z. Nazari、M. Radia、J. Rip-ley、P. Shellard、U. Sperhake、D. Traykova、S. Tunya-suvunakool、Z. Wang、J. Widdicombe 和 K. Wong，《GRChombo：一种适用于基础物理学的自适应数值相对论代码》，The Journal of Open Source Software 6，3703（2021），arXiv:2201.03458 [广义相对论与量子宇宙学]。[144] K. Clough，《一般物质的连续性方程：在数值相对论中的应用》，《经典与量子引力》

38，167001（2021），arXiv:2104.13420 [广义相对论与量子宇宙学]。[145] R. Miranda、D. J. Muñoz 和 D. Lai，《环双星吸积盘的黏性流体动力学模拟：变异性、准稳态及角动量传递》，皇家天文学会月刊 466，1170–1191（2016）。[146] J. Mathews 和 A. Pound，《非对称进动双星的后绝热波形生成框架》，《物理评论D》112，104078（2025），arXiv:2501.01413 [广义相对论与量子宇宙学]。[147] S. H. Lubow，《非黏性、非自引力流体盘中的质量输运》，ApJ 362，395（1990）。[148] T. Muto、T. K. Suzuki 和 S.-i. Inutsuka，《原行星盘中行星尾迹传播及间隙形成迹象的二维研究》，ApJ **724**, 448 2010 1009 4963 （），[ ] arXiv: . astro-ph.EP .[149] R. R. Rafikov、N. P. Cimerman、C. W. Fairbairn 和 A. J. Dittmann，《盘-行星相互作用中的间接力》（2025），arXiv:2511.10745 [astro-ph.EP]。[150] N. P. Cimerman、R. R. Rafikov 和 R. Miranda，《力矩振荡——全球盘-行星相互作用中的稳健特征》，《皇家天文学会月报》**529**, 425 2024 2306 07341 （），[ ] arXiv: . astro-ph.EP .[151] F. S. Bemfica、M. M. Disconzi 和 J. Noronha，《一阶广义相对论黏性流体动力学》，《物理《X评论》12, 021044（2022）。[152] P. Kovtun，《一阶相对论流体动力学是稳定的》，JHEP 10, 034, arXiv:1907.08191 [hep-th]。[153] F. S. Bemfica、M. M. Disconzi 和 J. Noronha，《引力作用下相对论黏性流体动力学的因果性与解的存在性》，《物理评论D》98, 104064（2018）。[154] F. S. Bemfica、M. M. Disconzi 和 J. Noronha，《一般一阶相对论黏性流体动力学的非线性因果性》，《物理评论D》100, 104020（2019）。[155] V. Boyanov、V. Cardoso、K. D. Kokkotas 和 J. Redondo-Yuste，《黏性天体对引力波的动力学响应》，《物理评论快报》135, 151402 2025 2411（），arXiv:。16861 [广义相对论与量子宇宙学]。[156] J. Redondo-Yuste，《相对论耗散恒星的微扰》，《经典与量子引力》42, 075012（2025），arXiv:2411.16841 [广义相对论与量子宇宙学]。[157] J. Redondo-Yuste 和 V. Cardoso，《旋转黏性致密天体的超辐射放大》，《物理评论D》112, L061501（2025），arXiv:2506.13850 [广义相对论与量子宇宙学]。[158] D. A. Caballero 和 N. Yunes，《因果黏性相对论流体中的中子星径向微扰》，《物理评论D》112, 063050（2025），arXiv:2506.09149 [广义相对论与量子宇宙学]。[159] 黑洞微扰工具包，（bhptoolkit.org）。[160] D. Brizuela、J. M. Martin-Garcia 和 G. A. Mena Maru-gan，《xPert：度规微扰理论的计算机代数》，《广义相对论与引力》**41**, 2415 2009 0807 0824 （），[ ] arXiv:。广义相对论与量子宇宙学。