arXiv:2601.19147v1 [cs.CG] 27 Jan 2026

正交环境中两个方形机器人的最优运动规划

Pankaj K. Agarwal * Mark de Berg † Benjamin Holmgren ‡
Alex Steiger § Martijn Struijs ¶

2026年1月28日

摘要

设 $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2$ 为一个正交多边形环境（即可能带有孔洞的正交多边形），其顶点总数为 n，并设 A、B 为两个机器人，每个机器人均建模为一个轴对齐单位正方形，可在 $\mathcal{W}$ 内沿正交方向移动。目标是计算一个 无碰撞运动规划 $\boldsymbol{\pi}$，即一项运动规划，使 A从 s_A 连续移动到 t_A，并使 B 从 s_B 连续移动到 t_B，同时确保 A 和 B 始终处于 $\mathcal{W}$ 内，且在运动过程中互不碰撞。我们研究了该问题的两个变体，它们还关注 $\boldsymbol{\pi}$ 的最优性，并得出以下结果。

- 最小和：目标是计算一项运动规划，使机器人的路径长度之和最小。我们提出了一种$O(n^4 \log n)$时间算法，用于计算最小和问题的最优解。这是首个能在平面多边形环境的障碍物间计算两个机器人最优无碰撞运动的多项式时间算法。

- 最小最大完成时间：此处机器人最多可以以单位速度移动，目标是计算一个运动规划，使机器人到达其目标位置所需的最大时间最小。我们证明，最小最大完成时间变体是 NP难。

1 引言

自主多机器人系统越来越多地应用于各种任务，例如工业物流、精准农业，以及在狭窄拥挤的

*美国北卡罗来纳州达勒姆市杜克大学计算机科学系，邮编 27708；pankaj@cs.duke.edu, https://orcid.org/0000-0002-9439-181X
†荷兰埃因霍温理工大学数学与计算机科学系；M.T.d.Berg@tue.nl, https://orcid.org/0000-0001-5770-3784
‡美国北卡罗来纳州达勒姆市杜克大学计算机科学系；ben.holmgren@duke.edu, https://orcid.org/0009-0002-7986-7987 §美国北卡罗来纳州达勒姆市杜克大学计算机科学系；asteiger@cs.duke.edu，https://orcid.org/0000-0003-1546-6244
¶荷兰埃因霍温理工大学数学与计算机科学系；M.A.C.Struijs@tue.nl, https://orcid.org/0000-0002-0116-7238 本文稿没有相关数据。

环境中进行探索、搜索与救援行动，以及对目标区域进行视觉检查。这些应用推动了大量研究，致力于为机器人系统设计高效算法，以便在结构化或非结构化环境中计算高质量的运动规划；近期综述见 [7, 47] 。人们提出了多种标准来衡量运动规划的质量，包括机器人路径的总长度、最大完成时间（即机器人完成运动所需的最长时间），或规划的效用（即其执行底层任务的效果）。即便对于两个简单机器人，例如在平面多边形环境中平移的单位正方形或圆盘，关于如何计算最优运动规划，人们所知甚少。虽然已有多项式时间算法可为两个简单机器人计算无碰撞运动规划 [8, 37],，但即使仅要求使两个机器人的路径长度之和（或最大值）最小，目前也尚无已知的多项式时间算法；该问题是否为 NP难问题也尚无定论。本文研究如何为两个简单机器人计算最优运动规划，其中每个机器人均建模为一个单位正方形。

问题陈述。令 $\square := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_\infty \leqslant 1/2\}$ 表示边长为单位长度、中心位于原点的轴对齐正方形，简称单位正方形。设 A 和 B 是两个机器人，每个机器人都建模为一个单位正方形，并且能够在同一个闭合直线多边形环境 $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2$内平移。换言之，共享工作空间 $\mathcal{W}$是一个可能带有孔洞的直线多边形。[1] 令 n 为 $\mathcal{W}$的顶点数。A 的放置（B 的放置亦然）由其中心在工作空间 $\mathcal{W}$中的位置表示。若要使这种放置不与 $\mathcal{W}$的边界 $\partial\mathcal{W}$发生碰撞，则表示该放置的点与 $\partial\mathcal{W}$的 ℓ_∞距离至少应为 1/2。（注意，由于我们将 $\mathscr{F}$ 定义为闭集，因此允许机器人接触障碍物。）我们用 $\mathscr{F} \subset \mathcal{W}$表示单个机器人的自由空间，它是 $\mathcal{W}$ 中所有无碰撞放置构成的子集。A 和 B 的（联合）构型 p 表示为一对 $p = (p_A, p_B) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$，其中 p_A 和 p_B 分别是 A 和 B 的放置。构型空间（简称 C 空间）是所有构型构成的集合，因此表示为$\mathcal{W} \times \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^4$。若构型 $p = (p_A, p_B) \in \mathbb{R}^4$ 满足 p_A、$p_B \in \mathscr{F}$ 且 $||p_A - p_B||_\infty \geqslant 1$，则称其为自由构型。令 F := F($\mathcal{W}$)表示四维自由空间，它由所有自由构型构成。显然，F $\subseteq \mathscr{F} \times \mathscr{F}$。

设 $s = (s_A, s_B)$ 为给定的初始构型，设 $t = (t_A, t_B)$ 为给定的目标构型。(s, t)-规划是一个连续函数 $\boldsymbol{\pi}\colon [0, T] \to \mathcal{W} \times \mathcal{W}$，其中某个 $T \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 满足 $\boldsymbol{\pi}(0) = s$ 且 $\boldsymbol{\pi}(T) = t$。$\boldsymbol{\pi}$ 的像是 C空间中的一条（连续）曲线，称为 (s, t)-路径。略作符号滥用，我们也用 $\boldsymbol{\pi}$ 表示其像。[2] 如果 $\pi \subset F$，我们称 π 是可行的；如果存在可行的 (s, t)-规划，则称二元组 (s, t) 是可达的。对于规划 $\boldsymbol{\pi}\colon [0, T] \to \mathcal{W} \times \mathcal{W}$，令 $\pi_A\colon [0, T] \to \mathcal{W}$ 和 $\pi_B\colon [0, T] \to \mathcal{W}$ 分别为 $\boldsymbol{\pi}$ 在由前两个坐标和后两个坐标张成的二维平面上的投影。函数 π_A 和 π_B 指定了由 $\boldsymbol{\pi}$ 所诱导的 A 和 B 的运动，即，$\boldsymbol{\pi}(\lambda) = (\pi_A(\lambda), \pi_B(\lambda))$，其中

[1]为简便起见，我们假设外多边形及其孔洞均非退化，即不存在悬垂边。稍加处理，我们的算法也能处理退化情形。[2]由于我们不对机器人的运动施加任何运动学与动力学约束（例如最大加速度或最大曲率），给定C空间中的一条($\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{t}$)-路径，便可直接计算出与该路径对应的($\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{t}$)-规划。

全部 $\lambda \in [0,T]$。同样地，略作符号滥用，我们也用 π_A 和 π_B 分别表示 A 和 B 所遵循的路径。我们定义最优运动规划的两个版本。

- 最小和。对于一条路径 γ in $\mathcal{W}$，令 $\|\gamma\|$ 表示其 ℓ_1-长度。我们定义 $\|\boldsymbol{\pi}\|$为一个代价，即$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$-规划 $\boldsymbol{\pi}$的代价，定义为 $\|\boldsymbol{\pi}\| := \|\pi_A\| + \|\pi_B\|$，也就是说，$\|\boldsymbol{\pi}\|$ 是两台机器人的路径长度之和。问题是判断给定的一对$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{F}^2$是否可达；若可达，则计算一个代价最小的可行$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$-规划，称为最小和$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$-规划。（如后文所述，实际上我们可以将关注范围限制在正交路径，因为 $\mathcal{W}$ 是正交的，而且我们以ℓ_1-度量来衡量路径长度。）

- 最小最大完成时间。我们将一个 (s, t)-规划 $\boldsymbol{\pi}\colon [0, \mathrm{T}] \to \mathcal{W} \times \mathcal{W}$的最大完工时间定义为 T，记作 ¢$(\boldsymbol{\pi})$。问题是，对于给定的一对 (s, t) $\in$ F，判断 (s, t) 是否可达；若可达，则计算一个可行的 (s,t)-规划 $\boldsymbol{\pi}^*$(s,t)，使其最大完工时间最小，并满足每个机器人的最大速度不超过 1。（注意，我们不要求 (s,t)-规划是 C^1 连续的，因此 A 或 B 的速度可以瞬间从 0 变为 1，机器人也可以急转弯。）

最优运动规划问题的这两种变体本身都很有意义。第一种旨在最小化机器人完成的总工作量，而第二种旨在最小化两台机器人抵达目的地所需的总时间。

相关工作。 回顾运动规划算法方面的已知成果超出了本文的范围；有关关键相关成果的综述，读者可参阅该主题的最新著作和调查文章 [7, 22, 23, 32, 33, 36]。这里仅介绍少量成果——即与当前问题最密切相关的成果。

当只有一个平移正方形机器人时，或者更一般地说，当只有一个具有常数个顶点的凸多边形平移机器人时，该问题通过构型空间表述等价于在具有$O(n)$ 个顶点的多边形障碍物之间移动一个点机器人，并且可以在$O(n \log n)$ 时间内求解 [14, 25, 46]。在 $\mathbb{R}^3$ 中计算点机器人在多面体障碍物之间的最短路径是 NP-困难的 [13], , 并且已有快速$(1+\varepsilon)$近似算法 [5, 15]。

在多边形环境中，为一组平移运动的单位正方形机器人计算可行（但未必最优）的规划是 PSPACE 困难 [40]；相关的不可解性结果见 [1, 11, 12, 24, 26, 43, 48] 。尽管关于连续和离散场景下多机器人运动规划已有丰富的文献 [17, 36, 38, 44, 45] ——在离散场景中，机器人在图上移动——但对于能够计算具有可证明质量保证的规划的算法，我们所知甚少。Kirkpatrick 和 Liu [29] 提出了一种高效算法，用于计算该场景下单位圆盘的最小和规划，并证明最优方案总是由至多六条直线段和圆弧组成。近期，针对两个单位正方形 [21, 35] 以及两个中心对称凸多边形 [30]的情形，也得出了类似结果。最近，针对无障碍物场景下两个以上机器人的问题，已有一些研究成果：Deligkas等人 [18] 和 Eiben等人 [20] 研究了图上的问题

目标是在离散时间区间内最小化最大完工时间；Kanj等人 [27] 则通过证明最优方案的各种结构性质，最小化机器人“串行”或“并行”移动的次数。

在假设起点和目标位置之间以及它们与障碍物 [3,39,42] 之间存在某个最小间距的条件下，已有用于最小化总路径长度的单位机器人圆盘近似算法。间距假设使问题大大简化：可行规划总是存在，而且可以先独立计算每个机器人的最优路径（忽略其他机器人），再对这些路径进行局部调整，从而确保机器人在移动过程中不会相互碰撞。对于在无障碍物平面中，为一组单位圆盘（或正方形）计算使最大完工时间最小的规划，也有人提出了一个$O(1)$近似算法 [19], ，同样假设存在一定间距。最近，Agarwal 等人 [4] 提出了首个用于两个正方形最小和运动规划问题的多项式时间近似算法，该算法不对工作环境或起点／目标构型作任何假设。他们的算法可在$(1/\varepsilon)^{O(1)} \cdot n^2 \log n$ 时间内计算出一个$(1+\varepsilon)$近似解。他们将这一情形下能否在多项式时间内计算出最优规划留作一个开放问题。

最后，我们简要介绍多机器人运动规划领域的其他几类研究方向。机器人学中最主要且广泛应用的实用运动规划技术，是基于对底层 C空间进行采样的方法；近期综述见 [36]。这种范式也用于多机器人运动规划，但无法据此设计出一种多项式时间近似算法来计算最优方案。有关这一方法的分析结果，见 [16,17,28,38,41]。此外，也有研究探讨该问题的无标签版本：每个机器人最终都可以到达任意一个（集体的）目标位置，只要运动结束时所有目标位置均有机器人占据即可。对于一组无标签单位圆盘，在假设机器人起点和目标位置之间，以及这些位置与障碍物之间具有一定间距的情况下， [42], 给出了总路径长度最小化问题的一个近似解。另见 [2, 9]。最后，另一个关于优化多机器人运动规划的重要研究方向，关注该问题的离散版本，即机器人在图上移动。在这种设定中，机器人通常称为智能体，该问题则称为多智能体路径规划 （MAPF）。关于 MAPF 的研究文献十分丰富，读者可参阅近期综述 [44]。

我们的贡献。 我们的主要结果是：在二维多边形环境中，单位正方形机器人进行平移时，最小和运动规划问题属于 P 类，而相同设定下的最小最大完成时间问题是 NP难，具体如以下两个定理所述。

定理 1.1。 设 $\mathcal{W}$ 是一个具有 n 个顶点的闭合直线多边形环境，A、B 是在 $\mathcal{W}$ 内平移的两个轴平行单位正方形机器人，且 s、t 分别是 A、B 的起始构型和目标构型。我们可以在 ℓ_1 度量下，计算从 s 到 t 的最优最小和运动规划 π；若不存在可行运动，也可以判定这一点。所需时间为 $O(n^4 \log n)$。

定理 1.2。 设 $\mathcal{W}$ 是一个具有 n 个顶点的闭合直线多边形环境，A、B 是在 $\mathcal{W}$ 内平移的两个轴平行单位正方形机器人，s、t 分别是 A、B 的初始构型和目标构型，且 $T_{\max}$ 是给定的最大时间。判定是否存在可行的

$(\boldsymbol{s}、\boldsymbol{t})$规划 $\boldsymbol{\pi}^*$，使得每个机器人的最大速度不超过 $\boldsymbol{1}$，且 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的最大完工时间不超过 $T_{\max}$，是 $\boldsymbol{NP}$ 困难的。

我们通过从 PARTITION 问题归约来证明定理 1.2。该问题要判断给定的整数集合 Y 是否可以划分为子集 Y_1,Y_2，使得$\sum_{p\in Y_1} p = \sum_{q\in Y_2} q$。归约的思路是构造一个由构件 $\mathcal{W}_1$、……、$\mathcal{W}_m$组成的工作空间 $\mathcal{W}$，其中每个构件都对应 Y 中的一个元素，并选择参数$T_{\max} \geqslant 0$，使得两个机器人都必须经过每个构件，且存在最大完工时间不超过 $T_{\max}$ 的规划，当且仅当Y存在有效划分。归约的详细描述见第 5 节。

我们的主要技术贡献是一个用于最小和的多项式时间精确算法，如定理 1.1 所述。设计该算法的关键步骤是证明存在一个最优的 规范网格规划，其中每个机器人所走的路径都位于一个$O(n) \times O(n)$ 非均匀预定义网格上；见定理 2.1。

对于单个机器人，这种规划的存在性众所周知且易于证明 [34]：由于 ℓ_1-度量下的最优路径是正交的，因此可以推动最优路径的各线段，使得每条线段要么与起点或终点位置相邻，要么其一部分包含自由空间 $\mathscr{F}$ 的一条边。重要的是，推动路径时不会增加其长度。因此，存在一条最优路径位于由经过起点和目标位置的水平线与垂直线，以及包含自由空间 $\mathscr{F}$ 边的直线所定义的网格上。

对于一对机器人，在适当定义的网格上存在最优规划似乎也很直观。事实上，考虑一个最优规划 $\boldsymbol{\pi}^*(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$，并设想尝试像单机器人情形那样推动其中一条线段 π_A。我们可能无法将该线段推到网格上，因为机器人 B 挡住了它。我们希望能够继续推动 π_A 的线段，并沿同一方向推动 π_B 的相应线段——本质上是 A 将 B 推开——直到 B 碰到 $\partial\mathcal{W}$。这样，我们就把 π_B 的一条线段推到了包含 $\mathscr{F}$ 一条边的直线上，并把 π_A 的线段推到了与该直线距离为 1 的另一条直线上。不过，要让这一想法行得通并非易事。例如，我们必须选择推动 π_A 特定线段的方向，使得 $\|\pi_A\|$ 不会增加，但这可能迫使我们以一种会使 $\|\pi_B\|$ 增加的方式推动 π_B。因此，我们必须谨慎选择推动方向。情况还因以下事实而变得更复杂：在不同时间点，B 可能位于 π_A 某条线段的不同侧。另一个主要难点是，将一个机器人（的一条线段）推到距离 $\mathscr{F}$ 的一条边为 i 的直线上，可能会导致另一个机器人最终处于距离这条边为 $i+1$ 的直线上。如果不够谨慎，这可能引发级联效应，导致最终网格不具备所需的大小。

为克服这些问题，我们首先证明最优规划的若干结构性质。利用这些性质，我们将局部推移操作与更全局的重新布线操作结合起来，使变换后的路径最终位于距 $\mathscr{F}$ 的边 0、1 或 2 个距离的直线上。这些操作可能会增加其中一条路径的长度，但我们将论证，当这种情况发生时，另一条路径的长度会减少相同的数值。因此，我们最终得到一个大小为 $O(n) \times O(n)$ 的网格上的规划，并且它仍然是最优的。

利用最优规范网格规划的存在性，我们证明可以在 $(\mathscr{V},\mathscr{E})$、具有 $\boldsymbol{s}、\boldsymbol{t} \in \mathscr{V}$ 的图 $\mathscr{G} =$ 构造一个大小为 $O(n^4)$ 的四维加权网格图，并且所需时间为 $\boldsymbol{F}$，使得

在 $\mathscr{G}$ 中，最短的（$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{t}$）路径对应于最小和（$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{t}$）规划。

2 最小和的多项式时间算法 MIN-SUM

本节介绍一种用于最小和问题的多项式时间算法。我们首先在第 2.1 节定义规范网格规划——一种($\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{t}$)规划，其中两个机器人都在预先定义的 $O(n) \times O(n)$ 非均匀网格上移动——并断言，对于任意可达对$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{F}$，都存在一个最优($\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{t}$)规划，且该规划是规范网格规划。第 2.2 节概述这一断言的证明思路：将一个最优规划转换为规范网格规划，使其代价不超过原规划。该断言的详细证明推迟至第 3 节。最后，我们在第 2.3 节介绍算法。

2.1 规范网格规划

正交线段规划与解耦规划。 由于 $\mathcal{W}$ 是直线环境，且A、B 是正方形，因此不难看出$\boldsymbol{F}$ 是一个多面体区域。因此，如果存在可行规划，就存在一个分段线性最优规划，即其像是 $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ [4] 中的一条折线链的最优规划。因此，我们将重点放在分段线性规划上。我们将此类规划的顶点称为断点。对于路径 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_A, \pi_B)$，$\pi_A$ 和 π_B 的断点是 π 的断点的投影。注意，π_A（或 π_B）的一个断点处相邻的两条线段可能共线。

如果在任意给定时刻只有一台机器人移动，则称（$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{t}$）规划 $\boldsymbol{\pi}$ 为解耦 规划；此时，另一台机器人停放在 $\mathscr{F}$ 的某个点。解耦规划可以表示为一系列移动，每次移动都指定一台机器人的停放位置以及另一台机器人的运动。根据断点的定义，A 的每个停车位置（分别地，B 的每个停车位置）都是 π_A（分别地，π_B）的一个断点。Agarwal 等人 [4] 已证明，对于任意一对可达构型$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{t}$，都存在一个解耦的最优（$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{t}$）规划。由于同一时刻只有一台机器人移动，因此在移动过程中，可以将停放的机器人视为障碍物。这样，运动机器人便可在一个带有障碍物（原有障碍物加上停放的机器人）的直线环境中，从一个位置（移动的起点）移动到另一个位置（移动的终点）。这一过程总能以最优方式完成——也就是说，使运动长度最短——且路径为正交的。因此，我们可以确保每台机器人在每次移动中沿 $\mathscr{F}$ 中的直角折线路径行进。我们将此类规划称为正交线段规划。在正交线段规划 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_A, \pi_B)$ 中，π_A 和 π_B 的断点包括A 和B 的停车位置，以及它们在水平线段与垂直线段之间切换的点。由此得出以下结论。

命题 2.1. 对于任意一对可达构型$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{F}$，都存在一个最优($\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{t}$)-规划，它是正交的且解耦的。

规范网格。对于整数 $\mathrm{i} \geqslant 0$，我们将 i 线定义为一条水平线或垂直线 ℓ，它与 ℓ 平行，且距 $\partial\mathscr{F}$ 的某条边为 i；或者距点 s_A、s_B、t_A、t_B 之一为 i。注意，0-线支撑着 $\partial\mathscr{F}$ 的一条边，或经过点 s_A、s_B、t_A、t_B 之一。令 L_i 表示所有 i 线构成的集合，并设 $\mathrm{L}_{\leqslant i} := \bigcup_{\mathrm{j}=0} \mathrm{L}_j$。我们主要关注 $\mathrm{L}_{\leqslant 2}$。$\mathrm{L}_{\leqslant 2}$ 的排列 [6]，记作 $\mathscr{A}(\mathrm{L}_{\leqslant 2})$，是

由 $L_{\leqslant 2}$ 诱导的 $\mathbb{R}^2$ 的细分。由于 $\mathscr{F}$ 的每条边都包含在一条 0-线中，$\leqslant_2(L_{\leqslant 2})$ 的每个面都是一个矩形，它要么包含在 $\mathscr{F}$ 中，要么与 $\mathscr{F}$ 不相交。$\leqslant_2(L_{\leqslant 2})$ 的顶点和边构成一个平面网格图。令 $G = (V, E)$ 表示该图中位于 $\mathscr{F}$ 内的子图，也就是说，V 和 E 分别是 $\leqslant_2(L_{\leqslant 2})$ 中位于 $\mathscr{F}$ 内的顶点和边的集合。注意，$|V| = O(n^2)$ 且 $|E| = O(n^2)$。我们将 G 称为网格，将 V 中的顶点称为网格点，将 E 中的边称为网格边，并将 $L_{\leqslant 2}$ 中的线称为网格线。若正交的、解耦的 (s, t)-规划 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_A, \pi_B)$ 的每个断点都为网格点，则称其为规范网格规划。因此，路径的每条线段都是若干条连续共线网格边的并。根据定义，在规范网格规划中，A 或 B 的每个停车位置都是网格点。我们关于最小和问题的主要技术结果如下定理所述。

定理 2.1。设 $\mathcal{W}$ 是一个具有 n 个顶点的闭合直线多边形环境，A、B 是在 $\mathcal{W}$ 内平移的两个轴平行单位正方形机器人，且 s、t 是 A、B 的源构型和目标构型。存在一个最优 $(s、t)$-规划，该规划是规范网格规划。

2.2 将最优规划转换为规范网格规划

下面我们概述如何将最优 $(s、t)$-规划 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_A、\ \pi_B)$ 转换为同样是规范网格规划的最优 $(s、t)$-规划。根据命题 2.1，我们可以假设 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个正交、解耦的规划。

交替规划。我们可以假设路径 π_A 在垂直线段和水平线段之间交替；换句话说，π_A 的每个断点都与一条水平线段和一条垂直线段相接，因此也是 π_A 的一个顶点。通过在两个相邻线段具有相同方向的断点处添加零长度线段[3]，可以确保 π_A 具有这种交替属性 。我们同样可以假设 π_B 具有交替属性，这意味着 π_A 和 π_B 的所有断点都是各自路径的顶点，因此停车位置也同样是顶点。

现在，我们介绍如何将 $\boldsymbol{\pi}$ 转换为规范网格规划，且不增加其代价。我们分两个阶段完成这一转换：第一阶段修改规划 $\boldsymbol{\pi}$，使得 π_A 和 π_B 的所有水平线段都位于网格线上；第二阶段则对垂直线段进行同样的处理。这里介绍第一阶段；第二阶段的做法类似，只需交换x 和y坐标的角色。

第一阶段。我们将不良水平线段 定义为位于 π_A 或π_B 上、但不在网格线上的水平线段。只要 $\boldsymbol{\pi}$ 中还包含不良水平线段e，我们就将 $\boldsymbol{\pi}$ 修改为新的规划 $\boldsymbol{\pi}^* = (\pi_A^*, \pi_B^*)$，使$e$ 位于网格线上，并满足以下条件：

- (P1) 可行性：新规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是可行的。
- (P2) 最优性：规划的代价不会增加，即 $\|\boldsymbol{\pi}^*\| \leqslant \|\boldsymbol{\pi}\|$。

[3]与零长度线段相关联的时间区间（即线段被 traversed 的时间）为 $[\lambda, \lambda']$，其中 λ 是到达相应停车位置的到达时间，λ' 是出发时间。

- (P3) 进展：规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 至少比 $\boldsymbol{\pi}$少一个不良水平线段。
- (P4) 垂直对齐： π^*_A 的任意垂直线段都与π_A 或π_B的某条垂直线段共线，或者包含在一条垂直网格线中； π^*_B的任意垂直线段也满足同样条件。
- (P5) 交替性： $\boldsymbol{\pi}^*$ 是一个交替的、正交的解耦规划。

进展性质保证，从最优规划 $\boldsymbol{\pi}$开始，通过有限次应用该过程，我们可以得到一个不含不良水平线段的规划。可行性和最优性性质意味着 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是一个最优$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$规划。此外，交替属性意味着 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是一个正交的、解耦的交替规划。因此，一次迭代所得的解满足下一次迭代的前置条件，所以我们确实可以迭代应用该过程。

在第一阶段消除所有不良水平线段后，我们在第二阶段消除不良垂直线段。垂直对齐性质在第二阶段适用于水平线段，它保证水平线段在第二阶段不会移出网格。因此， $\boldsymbol{\pi}^*$ 的所有线段都位于网格线上；又由于 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是交替的，其断点因此位于网格点上。由此，在第二阶段结束时，我们得到一个最优的规范网格规划。

注意：我们通过几个中间步骤，将原始规划 $\boldsymbol{\pi}$ 转换为满足 (P1)–(P5) 的 $\boldsymbol{\pi}^*$ 。在描述这些步骤时，我们通常稍微滥用一下记号，用 $\boldsymbol{\pi}$ 表示当前规划，用 $\boldsymbol{\pi}^*$表示下一步规划。

走廊。为了能够将不良水平线段推到水平网格线上而不产生级联效应，我们将水平网格线分为两类：主网格线，即水平 0-线和 1-线；以及次网格线，即水平 2-线。令 $\mathrm{HOR}(\mathscr{F})$ 表示由主网格线诱导的 $\mathscr{F}$ 细分；见图1。$\mathrm{HOR}(\mathscr{F})$ 的每个面都是矩形，因为 $\mathscr{F}$ 的每个顶点都位于一条水平 0-线上。我们将 $\mathrm{HOR}(\mathscr{F})$ 的面称为走廊。注意，次网格线可能与走廊内部相交。走廊的垂直边包含在 $\mathscr{F}$的垂直边中。

根据定义，每条不良水平线段（的相对内部）都位于 $\mathrm{HOR}(\mathscr{F})$ 中某个走廊的内部。每一步，我们选取一条坏线段e，比如属于 π_A。我们对 π_A 和 π_B 进行手术，使e 与包含e的走廊R的一条水平边对齐，并使所得规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 满足 (P1)–(P5)。

2.3 计算最优规范网格规划

有了定理 2.1，我们现在可以介绍我们的算法了。

构型图。 设$G = (V,E)$ 为第 2.1 节定义的规范网格。我们构造一个带边权的构型图 $\mathscr{G} = (\mathscr{V},\mathscr{E})$，其权重函数为$w$： $\mathscr{E} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，其节点对应于自由构型$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{F}$。更准确地说，

$$\mathscr{V} := \{\boldsymbol{u} = (u_A, u_B) \in V \times V : \|u_A - u_B\| \geqslant 1\}.$$

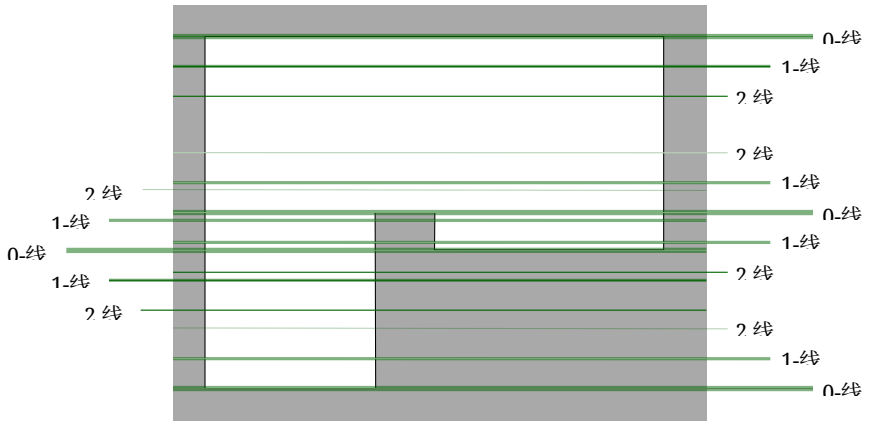


图1。 0-线和1-线定义了 HOR($\mathscr{F}$)，其由十二条走廊组成。深灰色区域是障碍物。为避免图示杂乱，省略了机器人的起点和目标位置以及它们定义的网格线。

通过 nstruction, $s,t \in \mathscr{V}$。构型图的边集合 $\mathscr{E}$定义为 as

$$\mathscr{E} := \Big\{(u,v) \in \mathscr{V} \times \mathscr{V} : (u_A = v_A \text{ and } (u_B, v_B) \in E) \text{ or } (u_B = v_B \text{ and } (u_A, v_A) \in E)\Big\}.$$

边 $((p, u_B), (p, v_B)) \in \mathscr{E}$对应一种移动：机器人 A 停放在 p 处，同时机器人 B 从 u_B 移动到相邻网格点 v_B。类似地，边 $((u_A, q), (v_A, q)) \in \mathscr{E}$对应一种移动：机器人 A 从网格点 u_A 移动到相邻网格点 v_A，同时机器人 B 停放在 q 处。（下文的引理 2.1 指出，这类移动是可行的。）边 $(u, v) \in \mathscr{E}$的权重定义为 $w(u, v) := \|u - v\|_1$，即 u 与 v 之间的 ℓ_1-距离，其中 $\mathbb{R}^4$。

算法。我们首先以标准方式在 O(n log n) 时间内计算 $\mathscr{F}$ [10, 第 13]章。接下来，我们用额外的 O(n) 时间计算 $L_{\leqslant 2}$，然后使用扫描线算法在 $O(n^2 \log n)$ 时间内计算网格图 G。计算出 G 后，我们在 $O(n^4)$ 时间内计算构型图 $\mathscr{G}$。最后，我们使用 Dijkstra算法在 $O(n^4 \log n)$ 时间内计算 $\mathscr{G}$中从 $s \in \mathscr{V}$到 $t \in \mathscr{V}$的最短路径。如果发现从 s 到 t 不存在路径，我们就报告该实例不可行；否则，我们返回 $\mathscr{G}$中与该最短路径对应的 (s, t)-规划。算法的正确性由引理 2.2 得出。总运行时间为 $O(n^4 \log n)$。定理 1.1 的证明至此完成。

2.4 算法的正确性

T算法的正确性源于 $\mathscr{G}$ 的以下关键性质 .

引理 2.1。 对于每条边 $(u,v) \in \mathscr{E}$，线段 uv 均位于 F 中。

证明。不失一般性，假设 $(u, v) = ((p, u_B), (p, v_B))$，且 $u_B v_B$ 是 G 的一条垂直边。注意，$(p, u_B) \in \mathscr{V}$且 $(p, v_B) \in \mathscr{V}$。因此，与 uv 对应的移动不可行的唯一情况是：B 离开 u_B 后、到达 v_B前，与 A（停放在网格点 p）发生冲突。由于 p 与一个

位于 $u_B v_B$ 内部的点冲突，而不与点 u_B 或 v_B 本身冲突，因此经过 p 的水平网格线必与垂直线段 $u_B v_B$ 的内部相交。但这将与 u_B 和 v_B 是相邻网格点这一事实矛盾。因此 $\boldsymbol{uv} \subset \boldsymbol{F}$。

□

引理 2.2. 假设$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{F}$ 均可达，则在 $\mathscr{G}$ 中从$\boldsymbol{s}$ 到$\boldsymbol{t}$ 的最短路径对应于一个最优的规范网格($\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{t}$)-规划。

证明。记构型图 $\mathscr{G}$ 中路径 $\boldsymbol{\pi}$ 的代价为 $\mathrm{w}(\boldsymbol{\pi}) := \sum_{e \in \boldsymbol{\pi}} \mathrm{w}(e)$。设 $\mathscr{G}$ 中从 s 到 t 的最短路径为 $\boldsymbol{\pi}$。根据引理 2.1，我们有 $\boldsymbol{\pi} \subset \mathrm{F}$，因此 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个可行的 (s, t)-规划。此外，根据定义，$\mathrm{w}(\boldsymbol{\pi}) = \|\boldsymbol{\pi}\|$。为界定 $\boldsymbol{\pi}$ 的代价，设 $\boldsymbol{\pi}^* = (\pi_A^*, \pi_B^*)$ 是一个最优 (s, t)-规划。根据定理 2.1，我们可以假设 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是一个解耦的规范网格规划。因此，$\boldsymbol{\pi}^*$ 可以解耦为一系列移动，其中一个机器人停放在网格点上，另一个机器人沿着网格线段移动。假设 A 停放在 p 处，而 B 沿网格线段 $\mathrm{e} = \mathrm{u}_B\mathrm{v}_B$ 移动。那么 $(\mathrm{p}, \mathrm{u}_B)$、$(\mathrm{p}, \mathrm{v}_B) \in \mathscr{V}$，从 $(\mathrm{p}, \mathrm{u}_B)$ 到 $(\mathrm{p}, \mathrm{v}_B)$ 的移动可以表示为序列 $(\mathrm{p}, \mathrm{q}_0)$、$(\mathrm{p}, \mathrm{q}_1)$、…、$(\mathrm{p}, \mathrm{q}_k)$，其中 $\mathrm{q}_0 = \mathrm{u}_B$ 且 $\mathrm{q}_k = \mathrm{v}_B$，并且每个 $\mathrm{q}_i\mathrm{q}_{i+1}$ 都是 G 的一条边。因此，从 $(\mathrm{p}, \mathrm{u}_B)$ 到 $(\mathrm{p}, \mathrm{v}_B)$ 的移动可以表示为 $\mathscr{G}$ 中从 $(\mathrm{p}, \mathrm{u}_B)$ 到 $(\mathrm{p}, \mathrm{v}_B)$ 的一条路径。对 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的所有移动重复上述论证可知，整个规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 都可以表示为 $\mathscr{G}$ 中的一条路径。由此得出，$\boldsymbol{\pi}$（即 $\mathscr{G}$ 中的最短路径）不会长于 $\boldsymbol{\pi}^*$。因此，$\boldsymbol{\pi}$ 是一个最优的 (s, t)-规划。

□

3 最优规范网格规划的存在性

设 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个包含不良水平线段 e 的最优规划，且 e 属于 π_A。设 $\mathrm{R} = \mathrm{I}_x \times \mathrm{I}_y$，其中 $\mathrm{I}_x = [\mathrm{x}_R^-, \mathrm{x}_R^+]$，且 $\mathrm{I}_y = [\mathrm{y}_R^-, \mathrm{y}_R^+]$，为包含 e 的走廊。本节将说明如何修改 $\boldsymbol{\pi}$，使 e 与一条网格线对齐，并使所得规划满足 (P1)–(P5)。我们先引入一些记号。对于轴对齐矩形 $\rho = \delta_x \times \delta_y$，令 $\mathrm{top}(\rho)$ 和 $\mathrm{bot}(\rho)$ 分别表示 ρ 的上边和下边，并令 $\mathrm{ht}(\rho) := |\delta_y|$ 表示其高度。对于 $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2$，令 $\boldsymbol{\pi}[\mu_1, \mu_2]$ 表示 $\boldsymbol{\pi}$（或其像）在闭区间 $[\mu_1, \mu_2]$ 内的子规划，并令 $\boldsymbol{\pi}(\mu_1, \mu_2)$ 表示其在开区间 (μ_1, μ_2) 内的子规划。我们以相同方式定义 $\pi_A[\mu_1, \mu_2]$ 和 $\pi_A(\mu_1, \mu_2)$（以及 $\pi_B[\mu_1, \mu_2]$ 和 $\pi_B(\mu_1, \mu_2)$）。对于水平线段 g，令 $\mathrm{y}(\mathrm{g})$ 表示其 y 坐标。

令 $[\lambda', \lambda'']$ 为与e相关联的时间区间，即$e = \pi_A[\lambda', \lambda'']$。我们定义与坏线段$e$相关的两个临界时间值。

- $\lambda_1 = \max\{\lambda < \lambda' \mid \pi_A(\lambda) \in \mathsf{top}(R) \cup \mathsf{bot}(R)\}$
- $\lambda_2 = \min\{\lambda > \lambda'' \mid \pi_A(\lambda) \in \mathsf{top}(R) \cup \mathsf{bot}(R)\}$

因此，$\pi_A(\lambda_1)$（分别为 $\pi_A(\lambda_2)$）是 π_A 上 A 位于 R 的水平边上且在 e 之前（分别之后）的最后一个（分别第一个）点。注意，$\mathrm{e} \subseteq \pi_A(\lambda_1, \lambda_2) \subseteq \mathrm{R} \setminus (\mathrm{top(R)} \cup \mathrm{bot(R)})$，且 $\pi_A(\lambda_1, \lambda_2)$ 可能与 R 的垂直边接触。我们进行这种手术的目标是将 $\pi_A[\lambda_1, \lambda_2]$ 推至 top(R) 或 bot(R)，使其与网格线对齐。这可能会与 $\pi_B[\lambda_1, \lambda_2]$发生碰撞，因此我们必须谨慎进行。有时我们会将 $\pi_A[\lambda_1, \lambda_2]$ 的一部分推至 top(R)，另一部分推至 bot(R)，在一种情形下，我们甚至会修改区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$之外的路径。在所有情形下，我们都会通过将 B 推开来消除碰撞，同时不增加路径的总长度。

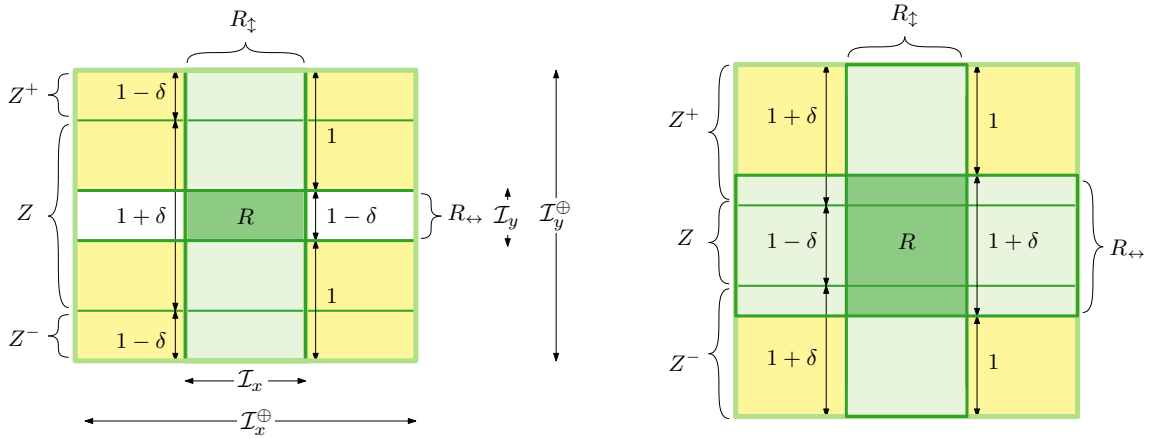


图2。 $R_{\square}$ 内部各个区域的概览（并非按比例绘制）。区域$R_{\leftrightarrow}^{-}$,$R_{\leftrightarrow}$,$R_{\leftrightarrow}^{+}$ 划分$R_{\square}$，区域$R_{\updownarrow}^{-}$,$R_{\updownarrow}$,$R_{\updownarrow}^{+}$ 也同样如此。角方块为黄色。（左）R 的高度小于 1，因此区域Z^{-}, Z^{+} 与R不相交。（右）R 的高度至少为 1，因此区域Z^{-},Z^{+} 与R重叠。

我们首先在第3.1节中定义 R 的一个邻域，称为 影响区域 R，记作 $\mathscr{I}(R)$，并证明 $\mathscr{I}(R)$ 的若干关键性质。接着，在第3.2节中，我们定义 不安全 和 交换 时间区间——即对 $\boldsymbol{\pi}$ 进行手术时需要更加谨慎的 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 子区间——并证明最优方案在这些区间内的若干结构性质。利用这些性质，我们在第3.3节中描述对$\boldsymbol{\pi}$ 进行的手术，并在第 4 节中证明所得规划满足 (P1)–(P5)。我们先陈述一个简单但重要的 $\mathscr{F}$ 性质，后文将反复用到。

观察3.1。 对于任意轴对齐直线 ℓ，$\ell \setminus \mathscr{F}$ 的每个连通分支的长度都大于1。因此，对于任意长度至多为1 的轴对齐线段 pq，若 $p, q \in \mathscr{F}$，则 $pq \subseteq \mathscr{F}$。

3.1 影响区域

缓冲区域及其划分。令 $\square$ 为第 1 节中定义的单位正方形。$R_{\square} := R \oplus 2\square$ 为 R 周围的缓冲区域。因此，$R_{\square} = I_x^{\oplus} \times I_y^{\oplus}$，其中 $I_x^{\oplus} := [x_R^- - 1, x_R^+ + 1]$ 且 $I_y^{\oplus} := [y_R^- - 1, y_R^+ + 1]$；见图2。对于任意一对 $p, q \in \mathbb{R}^2$，若 $p \in R$ 且 $(p + \square) \cap (q + \square) \neq \emptyset$，则 $q \in R_{\square}$。

接下来，我们定义 $R_{\square}$ 的三种不同划分，其中每一种都会在我们的分析中发挥作用。令 $R_{\leftrightarrow} := I_x^{\oplus} \times I_y$，也就是说，$R_{\leftrightarrow}$ 是将 R 向左和向右各延伸一个单位长度得到的区域。类似地，令 $R_{\updownarrow} := I_x \times I_y^{\oplus}$，它是将 R 沿向上和向下方向各延伸一个单位长度得到的区域。令 $R_{\leftrightarrow}^{-} := I_x^{\oplus} \times [y_R^- - 1, y_R^-)$，以及 $R_{\leftrightarrow}^{+} := I_x^{\oplus} \times (y_R^+, y_R^+ + 1]$。因此，$R_{\leftrightarrow}^{-}$ 和 $R_{\leftrightarrow}^{+}$ 是紧邻 $R_{\leftrightarrow}$ 上方和下方的高度为单位长度的矩形。注意，$R_{\leftrightarrow}^{-}$ 不包含其上边，而 $R_{\leftrightarrow}^{-}$ 不包含其下边，因此 $R_{\leftrightarrow}^{-}$、$R_{\leftrightarrow}$、$R_{\leftrightarrow}^{+}$ 构成 $R_{\square}$ 的一个划分。我们还定义 $R_{\updownarrow}^{-} := [x_R^- - 1, x_R^-) \times I_y^{\oplus}$ 和 $R_{\updownarrow}^{+} := (x_R^+, x_R^+ + 1] \times I_y^{\oplus}$，将其作为 $R_{\updownarrow}$ 左侧和右侧的单位宽度矩形，并注意到 $R_{\updownarrow}^{-}$、$R_{\updownarrow}$、$R_{\updownarrow}^{+}$ 也构成 $R_{\square}$ 的一个划分。注意，$R_{\square} \setminus (R_{\updownarrow} \cup R_{\leftrightarrow})$ 由四个半开单位正方形组成，我们将其称为 $R_{\square}$ 的角方块。最后，我们定义——

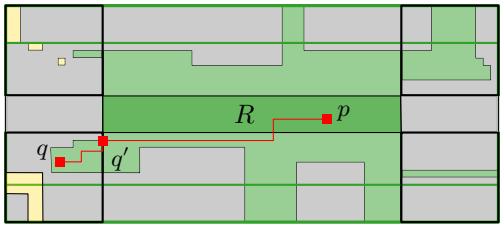


图3. 走廊$_{\square}$ 内影响区域的一个示例（未按比例绘制），其中巨型连通分量 γ(走廊) 以绿色绘出，角方块中的微小分量以黄色绘出。红色部分示意引理 3.1 中的pq-路径。

定义 $Z = I_x^{\oplus} \times [y_R^+ - 1,\ y_R^- + 1]$，$Z^- = I_x^{\oplus} \times [y_R^- - 1,\ y_R^+ - 1)$ 和 $Z^+ = I_x^{\oplus} \times (y_R^- + 1,\ y_R^+ + 1]$。$Z^-$ 和 Z^+ 的闭包分别是沿 y-方向平移距离 1 后得到的 R。由于 $L_{\leqslant 1}$ 的主网格线均不与 int(R) 相交，区域 Z^+ 和 Z^- 不包含 $\mathscr{F}$ 的任何顶点。根据观察3.1，$Z^+ \cap \mathscr{F}$ 和 $Z^- \cap \mathscr{F}$ 的连通分量是矩形，并且 $R_{\updownarrow} \cap \mathscr{F}$ 是一个 x-单调直角多边形。

影响区域与阻塞对。我们将走廊 R 的影响区域定义为 $\mathscr{I}(R) := \mathscr{F} \cap R_{\square}$。如果 $ht(R) \geqslant 1$，那么 $\mathscr{I}(R) = R^{\updownarrow} = I_x \times I_y^{\oplus}$，因为当 $ht(R) \geqslant 1$ 时，$\mathscr{F}$ 中没有顶点与 R 的距离小于 1。然而，如果 $ht(R) < 1$，那么 $\mathscr{I}(R)$ 可能由多个连通分量组成——一个包含 R 的巨型连通分量 $\gamma(R)$，以及若干微小分量，它们各自位于 $R_{\square}$的一个角方块内。根据观察3.1，$\mathscr{I}(R)$ 的每个微小分量都是 xy-单调的。巨型连通分量可能与某个角方块相交。具体而言，设 ρ 是一个位于 $R_{\updownarrow}^-$ 中的角方块。根据观察3.1，ρ（它包含在 $R^{\updownarrow}$的左边内）的右边缘至多与 $\rho \cap \mathscr{F}$ 的一个连通分量 ϕ 相邻。如果这样的连通分量 ϕ 存在，那么 $\phi = \rho \cap \gamma(R)$，并且与微小分量一样，$\phi$ 是 xy-单调的。$\rho \cap \mathscr{F}$ 的其他连通分量是 $\mathscr{I}(R)$ 的微小分量。设 ρ' 是 $R_{\updownarrow}^-$ 中的另一个角方块。如果 $\rho \cap \mathscr{F}$ 和 $\rho' \cap \mathscr{F}$ 都存在与 R 左边相邻的非空连通分量，分别记为 ϕ 和 ϕ'，那么我们将 $\phi \times \phi'$ 中的点对称为阻塞对。

$\mathscr{I}$（走廊）的一个关键性质（我们将在下面的引理中证明）是：对于位于 $\mathscr{I}$（走廊）同一连通分支中的点p和q，它们之间的任意最短路径是x 单调的，当且仅当（p,q）不是阻塞对。注意，任意xy-单调路径显然都是其端点之间的最短路径。

引理 3.1. 设 $p \in$ 走廊，且 $q \in \gamma$（走廊）。那么，从 p 到 q 的任意最短路径在 $\mathscr{F}$ 中都是 xy 单调的。

证明。回忆一下，走廊的上边界和下边界都是 x 单调链。因此，当 $q \in \gamma$(走廊) $\cap$ 走廊$^{\updownarrow}$ 时，存在一条 L 形 pq-路径。接下来，假设 q 位于某个角方块 ρ 内，例如走廊 $_{\square}$ 的左下角方格。由于 $q \in \gamma$(走廊)，我们知道 q 位于 $\mathscr{F} \cap \rho$ 中与走廊左边相邻的连通分支 ϕ 内，且该连通分支是 xy 单调的；见上文。因此，存在一条从 q 到 ϕ 的右上角 q' 的 xy 单调路径，并且可将其延伸为一条通往 p 的 xy 单调路径，因为 q' 位于 γ(走廊)$\cap$ 走廊$^{\updownarrow}$ 中。见图 3(ii)$_{\square}$

引理 3.2。 设 p，$q \in \mathscr{F}$，且 $h \subset \mathscr{F}$ 为一条水平线段。设 p' 为 h 上与 p 的欧几里得距离最小的点，并对 q 类似地定义 q'。假设以下条件成立。

(i) $|p_y - y(h)| \leqslant 1$ 且 $|q_y - y(h)| \leqslant 1$。（*ii*）从 p 到 p' 的任意最短路径都是 xy-单调的，从 q 到 q' 的任意最短路径都是 xy-单调的。（*iii*）点 p 和 q 不位于垂直带 $[x_1(h), x_2(h)] \times [-\infty, +\infty]$的同一侧，其中 $x_1(h)$ 和 $x_2(h)$ 分别表示 h 的最小和最大 x 坐标。换言之，$max(p_x, q_x) \geqslant x_1(h)$ 且 $min(p_x, q_x) \leqslant x_2(h)$。

那么，在 $\mathscr{F}$ 中，从 p 到 q 的任意最短路径都是 x 单调的。

证明。设 $\pi(\mathrm{p}, \mathrm{p}')$ 和 $\pi(\mathrm{q}', \mathrm{q})$ 分别为从 p 到 p′ 以及从 q′ 到 q 的最短路径。注意，若 $\mathrm{p}_x \in [\mathrm{x}_1(\mathrm{h}), \mathrm{x}_2(\mathrm{h})]$，则由条件 (i) 和观察3.1可知，$\pi(\mathrm{p}, \mathrm{p}')$ 是一条垂直线段；$\pi(\mathrm{q}, \mathrm{q}')$ 也有类似结论。因此，引理的条件 (ii) 和 (iii) 合起来意味着，$\pi' := \pi(\mathrm{p}, \mathrm{p}') \circ \mathrm{p}'\mathrm{q}' \circ \pi(\mathrm{q}', \mathrm{q})$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一条 pq-路径，且它是 x 单调的。为了证明该引理，我们将说明，任何非 x 单调的 pq-路径都比 π' 长。

令 $\ell(h)$ 为包含 h 的水平线。若 p 和 q 位于 $\ell(h)$ 的异侧，或者其中一点位于 $\ell(h)$ 上，则 π' 是 xy 单调的，因此任意最短 pq-路径也必定是xy 单调的。剩下只需证明引理适用于 p 和 q 位于 $\ell(h)$ 同侧的情形，不妨设它们在上方。

对于路径 π，定义 $\|\pi\|_x$ 和 $\|\pi\|_y$ 分别为 π 中水平和垂直线段的总长度。注意，$\|\pi\| = \|\pi\|_x + \|\pi\|_y$。由于我们假设$p$ 和q 都位于 $\ell(h)$上方，因此有

$$\|\pi'\|_y = 2 \cdot \max\{p_y - y(h), q_y - y(h)\} - |p_y - q_y| \leqslant 2 - |p_y - q_y|.$$

现在考虑一条最短 pq-路径 π，并反设 π 不是关于 x 单调的。稍微滥用一下记号，我们也将 π 视为一个函数 $\pi\colon [0,\mathrm{T}] \to \mathscr{F}$，它是路径 π 的参数化。设 $\lambda, \mu \in [0, \mathrm{T}]$ 满足 $\pi(\lambda)_x = \pi(\mu)_x$，并且存在一个时间 $\lambda' \in [\lambda, \mu]$，使得 $\pi(\lambda')_x \neq \pi(\lambda)_x$。若垂直线段$\pi(\lambda)\pi(\mu)$ 包含在 $\mathscr{F}$ 中，那么我们就可以用捷径缩短 π，这与 π 是一条最短路径相矛盾。因此，$\pi(\lambda)\pi(\mu) \not\subset \mathscr{F}$，于是根据观察3.1，$|\pi(\lambda)_y - \pi(\mu)_y| > 1$。我们断言 $\|\pi\|_y > 2 - |\mathrm{p}_y - \mathrm{q}_y|$。这将意味着 $\|\pi'\|_y < \|\pi\|_y$；由于 π' 关于 x 单调意味着 $\|\pi'\|_x \leqslant \|\pi\|_x$，因此这就得到了所需的矛盾。

为证明该论断，令π 为一条连接p 与q 的 L 形路径（它不一定完全位于自由空间 $\mathscr{F}$内）。显然，$\|\pi\|_y = |p_y - q_y|$。于是，$\pi \circ \pi$是一个经过 $\pi(\overline{\lambda})$ 和 $\pi(\mu)$的环（不一定是简单环）。因此

$$\|\pi \circ \overline{\pi}\|_y \geqslant 2|\pi(\lambda)_y - \pi(\mu)_y| > 2.$$

另一方面，

$$\|\pi \circ \overline{\pi}\|_y = \|\pi_y\| + \|\overline{\pi}_y\| = \|\pi\|_y + |p_y - q_y|,$$

因此该论断得证。 □

引理 3.3. 设 p,q $\in \gamma$(走廊)，且 p,q 均位于 $R^+_{\leftrightarrow}$，或均位于 $R^-_{\leftrightarrow}$。那么，从 p 到 q 的任意最短路径在 $\mathscr{F}$ 中都是 x 单调的。

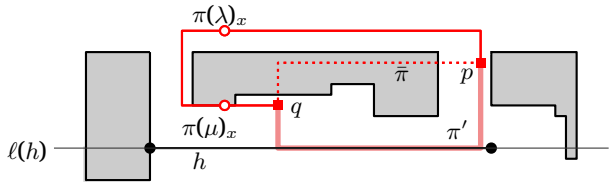


图4. 引理 3.2 的证明示意图，使用 π 和 π'，其中 $h \subset \mathscr{F}$ 是黑点之间的水平线段。将h = 设为(走廊)的上边界即可得出引理 3.3。

证明。 不失一般性，设 p,$q \in$ 走廊$^{+}_{\leftrightarrow}$。

如果p 和q 位于走廊$^{+}_{\leftrightarrow}$ 的同一个角方块 ρ内，那么结论立即成立。事实上，$\rho \cap$ 走廊$^{+}_{\leftrightarrow}$ 是xy-单调的，这意味着任意最短的pq-路径都必须是xy-单调的。

另一方面，如果p 和q 不在同一个角方块内，那么h 满足引理 3.2 的条件：= 设(走廊)的上边界，我们也就得证了。事实上，条件 (i) 得以满足，因为p、$q \in$ 走廊$^{+}_{\leftrightarrow}$；条件 (ii) 得以满足，因为走廊$^{+}_{\leftrightarrow} \cap \mathscr{F}$的性质；条件 (iii) 得以满足，因为$p$ 和q 不在同一个角方块内。 □

现在我们可以证明影响区域的主要性质了。

引理3.4。 对于位于 $\mathscr{I}$(走廊)同一连通分支中的一对点 p，q，从 p 到 q 的任意最短路径 $\mathscr{F}$ 是 x 单调的，当且仅当$(p,\ q)$ 不是阻塞对。

证明。 若$(p,\ q)$ 是位于走廊$^{-}_{\updownarrow}$ 中的阻塞对，那么从p 到q 的任意路径都必须离开走廊$^{-}_{\updownarrow}$，因为走廊$^{-}_{\updownarrow} \cap \mathscr{F}$的每个连通分支都位于走廊$^{-}_{\updownarrow}$ 的上角方块或下角方块中，而这样的路径都不是x单调的。

接下来，假设$(p,\ q)$ 不是阻塞对，并令 π 为从p 到q的一条最短路径。我们要证明 π 是x 单调的。若p、q 位于 $\mathscr{I}$(走廊)的一个微小连通分量中，那么 π 显然是xy单调的，因为如上所述， $\mathscr{I}$(走廊) 的每个微小连通分量都是xy单调的。因此我们可以假设p、$q \in \gamma$(走廊)。

如果 p、q 中至少有一个点位于 R 中，那么由引理 3.1 可得结论。因此，假设 p 和 q 都不在 R 中。如果 p 和 q 都位于 $R^{+}_{\leftrightarrow}$，或者都位于 $R^{-}_{\leftrightarrow}$，那么由引理 3.3 可得结论。现在不失一般性地假设 p $\in R^{+}_{\leftrightarrow}$，且 q $\in R^{-}_{\leftrightarrow}$。由于 (p, q) 不是阻塞对，p 和 q 不可能都位于 $R^{-}_{\updownarrow}$，也不可能都位于 $R^{+}_{\updownarrow}$。因此，p 和 q 位于 γ(R) 的相对象限中。设 r 是 R 中任意一点，并令 π(p, r) 和 π(r, q) 分别为从 p 到 r 和从 r 到 q 的最短路径。根据引理 3.1， π(p, r) 和 π(r, q) 都是 xy-单调路径，因此 π(p, r) $\cup \pi$(r, q) 是一条从 p 到 q 的 xy-单调路径。因此，如果 π 不是 xy-单调路径，那么它就不是最短路径。引理得证。

□

3.2 不安全的交换区间

回顾一下，R 是一个包含 π_A 的不良水平线段e 的走廊， $\pi_A(\lambda_1)$ 是e 之前位于 π_A 上且落在上边界(R) 或下边界(R)上的最后一个点，而 $\pi_A(\lambda_2)$ 是e 之后位于 π_A 上且落在上边界(R) 或下边界(R)上的第一个点。现在，我们定义时间区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 中的一些临界子区间，在这些区间内，对 $\boldsymbol{\pi}$ 进行手术时需要更加谨慎；随后证明 在这些区间内的一些

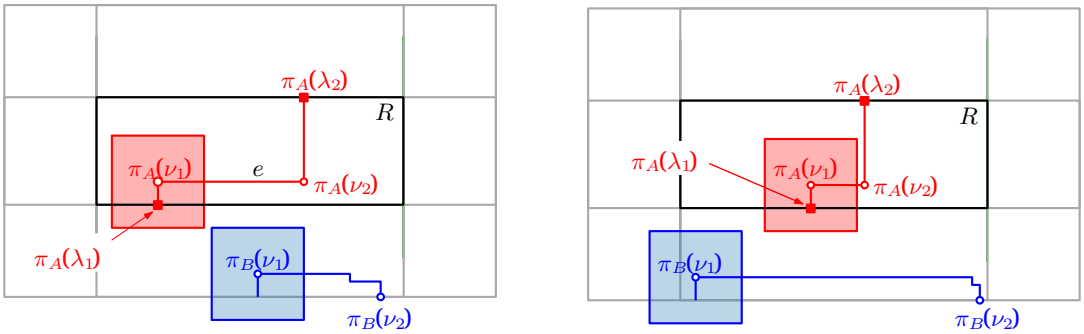


图5。（左）一个不安全交换区间 $[\nu_1,\nu_2]\subseteq[\lambda_1,\lambda_2]$ 由于A的垂直移动，机器人在时间 ν_1 变得y-分离。在时间 ν_2，机器人B 离开了 $\mathscr{I}(R)$。（右）一个交换区间，它是不安全区间，且在其两个端点处具有不同的x-顺序。

结构性质。同样，我们先给出几个定义。若构型 $\mathrm{p}=(\mathrm{p}_A,\mathrm{p}_B)$ 满足 $|(\mathrm{p}_A)_x-(\mathrm{p}_B)_x|\geqslant 1$，则称其为 x-分离；若满足$|(\mathrm{p}_A)_y-(\mathrm{p}_B)_y|\geqslant 1$，则称其为 y-分离。若两个 x-分离构型 p、q 满足 $\mathrm{sign}((\mathrm{p}_A)_x-(\mathrm{p}_B)_x)=\mathrm{sign}((\mathrm{q}_A)_x-(\mathrm{q}_B)_x)$，则称它们具有相同的 x 顺序；否则，称 x 顺序发生了交换。若区间$[\nu_1,\nu_2]$ 满足 $\boldsymbol{\pi}(\nu_1)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\nu_2)$ 均为 x-分离配置，则称其为 x-分离；注意，对于所有 $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$，$\boldsymbol{\pi}(\nu)$ 不一定都是 x-分离配置。

定义 1。如果区间 $[\nu_1,\nu_2]\subseteq[\lambda_1,\lambda_2]$ 满足以下条件，则称其为不安全：

（i）$[\nu_1,\nu_2]$ 是满足以下条件的极大区间：对于所有$\nu\in[\nu_1,\nu_2]$，$\pi_B(\nu)\in\mathscr{I}(R)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\nu)$ 均y-分离；并且

（ii）存在时间 $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$，使得 $\boldsymbol{\pi}(\nu)$ 并不x-分离。

注意，对于任意不安全区间 $[\nu_1,\nu_2]$，机器人B 要么在整个区间内都位于A 上方——也就是说，对于所有 $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$，$\pi_B(\nu)_y\geqslant\pi_A(\nu)_y$——要么$B$ 在整个区间内都位于A 下方。事实上，我们可以作出如下更强的观察。

引理 3.5. 如果 $[\nu_1,\nu_2]$ 是一个不安全区间，那么 $\pi_B[\nu_1,\nu_2]$ 位于 $Z^+\cap\mathscr{F}$ 的某个连通分支中，或者位于 $Z^-\cap\mathscr{F}$ 的某个连通分支中。

证明。由于机器人在 $[\nu_1,\nu_2]$ 和 $\pi_B[\nu_1,\nu_2]\subset\mathscr{I}(\mathrm{R})$ 期间必须保持 y-分离，因此它们不能改变 y 顺序。现在不失一般性地假设，对于所有 $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$，$\pi_B(\nu)_y\leqslant\pi_A(\nu)_y-1$。如果 $\pi_A(\nu)\notin\mathrm{top}(\mathrm{R})$，那么这立即意味着 $\pi_B(\nu)\in\mathrm{Z}^-$。因此，$\pi_B(\nu)$ 不属于 Z^- 的唯一可能情形是 $\nu=\nu_1=\lambda_1$ 或 $\nu=\nu_2=\lambda_2$。根据 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 的定义，我们知道对于任意 $\nu\in(\lambda_1,\lambda_2)$，$\pi_A(\nu)\notin\mathrm{top}(\mathrm{R})$。由于规划是解耦的，机器人 B 在时间 λ_1 之后立即停放，并在时间 λ_2 之前一直停放，因此在时间 $\nu=\nu_1=\lambda_1$ 和 $\nu=\nu_2=\lambda_2$，$\pi_B(\nu)$ 也必须位于 Z^- 中。□

引理 3.6. 设 $[\nu_1,\nu_2]$ 为一个不安全区间。对于 $X\in\{A,B\}$ 以及 $i\in\{1,2\}$，点 $\pi_X(\nu_i)$ 位于 π_X 的一条垂直线段（长度可能为零）上，或位于一条垂直*1*-线上。

证明。令$i=1$；对于$i=2$ 的论证是对称的。要使 ν_1 成为不安全区间的端点，有三种情形。

第一种情况是，π_B 在时间 ν_1进入 $\mathscr{I}$(走廊) 。如果它是通过 $\mathscr{I}$(走廊) 的一条水平边进入的，那么显然 $\pi_B(\nu_1)$ 位于 π_B的一条垂直线段上；如果 π_B 是通过 $\mathscr{I}$(走廊) 的一条垂直边进入的，那么 $\pi_B(\nu_1)$ 位于一条垂直1-线上。此外，由于规划 $\boldsymbol{\pi}$ 是解耦的，当π_B 进入 $\mathscr{I}$(走廊) 时，A 处于停放状态。由于 $\boldsymbol{\pi}$ 是交替的，这意味着$\pi_A(\nu_1)$ 位于 π_A的一条垂直线段上。

第二种情况是 $\nu_1 = \lambda_1$。那么，机器人A 在时间 ν_1之后必须立即垂直移动，我们可以应用上述同样的论证。

第三种情况是A 和B 在时间 ν_1变为y方向分离。那么，这两个机器人中的一个（设为A）必须在时间 ν_1之前立即垂直移动。因此，$\pi_A(\nu_1)$ 位于 π_A的一条垂直线段上。此时，另一个机器人B必须在时间 ν_1处于停放状态，这同样意味着它位于其路径的一条垂直线段上。

□

考虑一个不安全区间 $[\nu_1, \nu_2]$。如果 $\nu_1 \neq \lambda_1$ 和 $\nu_2 \neq \lambda_2$，并且B 没有在时间 ν_1 进入 $\mathscr{I}(R)$，也没有在时间 ν_2离开 $\mathscr{I}(R)$ ，那么根据极大性条件，$\boldsymbol{\pi}(\nu_1)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\nu_2)$ 是沿x方向分离的构型——这是因为，不沿y方向分离的构型必定沿x方向分离。接下来将定义一种重要的不安全区间类型，即所谓的交换区间。

定义2。 交换区间 是一个x-分离的不安全区间，且在$\boldsymbol{\pi}(\nu_1)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\nu_2)$ 处的x顺序不同。

粗略地说，不安全区间的作用如下。如果时间 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$不属于不安全区间，那么在走廊 (λ) 内垂直平移 π_A不会导致该点与 $\pi_B(\lambda)$ 发生冲突，因为 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 是x-分离的。如果某个不安全区间不是x-分离的，事实证明，我们可以修改 π_B ，使 $\pi_A(\lambda)$垂直平移后避免冲突，同时不增加 π_B的长度。如果交换区间I 是x-分离的，且两个端点具有相同的x顺序，那么我们将在引理 3.8 中证明，可以对规划重新参数化，使I 不再是不安全区间，从而可以像上文那样进行手术。因此，具有挑战性的情形是I 为交换区间时。在这种情形下，手术要复杂得多，但我们将通过证明不安全区间和交换区间的一些理想性质来控制局面。为了证明存在具有这些性质的最优规划，我们将以受控的方式修改给定的最优规划，具体定义如下。

定义 3. 考虑一个区间 $[\lambda, \mu]$。如果满足可行性（P1）、最优性（P2）、垂直对齐（P4）和交替（P5）性质，并且满足以下无倒退性质： $\boldsymbol{\pi}^*$ 的每条坏线段已存在于 $\boldsymbol{\pi}$ 中，或是 $\pi_A^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 的一条线段，则称 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda, \mu]$ 是 $\boldsymbol{\pi}[\lambda, \mu]$ 的合规修改 。

合规修改具有无倒退性质而非进展性质，这并不成问题，因为在处理修改后的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的坏线段 e 时，我们实际上会消除 $\pi_A^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 的所有坏线段。

一种特殊的合规修改是合规重新参数化。这里，$\boldsymbol{\pi}^*[\lambda, \mu]$是对 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda, \mu]$的重新参数化，也就是说，$A$ 和B 所经过的路径保持不变，但 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的参数化与 $\boldsymbol{\pi}$ 不同，因此 $\boldsymbol{\pi}^*$ 中的断点和停车位可能会改变。请注意，重新参数化绝不会导致机器人与障碍物发生碰撞。因此，要检查可行性属性，我们只需



图 6. 情况 I：A 和 B 朝相反方向移动。由于$\boldsymbol{p}$ 和$\boldsymbol{q}$ 的x顺序相同，因此它们的移动不会相互干扰。情形 II：A 和B 朝同一方向移动。由于$\boldsymbol{p}$ 和$\boldsymbol{q}$ 的x顺序相同，并且我们假设$(q_A)_x \geqslant (p_A)_x > (p_B)_x$，因此可以先移动机器人$A$，再移动$B$。

确保机器人之间不会发生碰撞。另请注意，重新参数化会自动满足最优性。我们可以在必要时于断点处添加零长度线段，以确保交替属性。只有当这些零长度线段未对齐时，才会违反其余两项性质：垂直对齐和无倒退。为确认不会发生此类违反，只需证明合规重新参数化 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda,\mu]$ 中的停车位属于以下类型之一：

（T1）：网格点，

（T2）：$\pi_A[\lambda,\mu]$ 或 $\pi_B[\lambda,\mu]$的顶点，或者

（T3）：水平（相应地，垂直）网格线与 $\pi_A[\lambda,\mu]$ 或 $\pi_B[\lambda,\mu]$的垂直（相应地，水-平）线段的交点。

注意，符合条件的修改具有可组合性：如果 $\boldsymbol{\pi}'$ 是对 $\boldsymbol{\pi}$的符合条件的修改，且 $\boldsymbol{\pi}''$ 是对 $\boldsymbol{\pi}'$的符合条件的修改，那么 $\boldsymbol{\pi}''$ 就是对 $\boldsymbol{\pi}$的符合条件的修改。因此，我们可以反复应用符合条件的修改，同时保持相对于原始路径所需的性质。

在引理 3.9 中，我们对 $\boldsymbol{\pi}$ 执行一系列符合条件的修改，以确保所得规划中的不安全交换区间具有某些理想性质。我们首先给出下面的技术引理，后文将反复使用它。

引理 3.7。设 $\boldsymbol{p} = (p_A,\ p_B) \in \boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{q} = (q_A,\ q_B) \in \boldsymbol{F}$ 是两个具有相同 x 顺序的 x-分离构型。若存在一条从 p_A 到 q_A 的 x 单调路径 $\varphi_A \subset \mathscr{F}$，以及一条从 p_B 到 q_B的 x 单调路径 $\varphi_B \subset \mathscr{F}$，则存在一个解耦的可行规划 φ：$[0,1] \to \boldsymbol{F}$，其中 A 先沿着 φ_A 移动，然后 B 沿着 φ_B移动，或反之。此外，对于规划中的所有 $\lambda \in [0,1]$，$\varphi(\lambda)$ 均为 x-分离构型。若将 x-方向替换为 y-方向，该结论同样成立。

证明。 我们证明该引理在 x 方向上的情形；y 方向上的情形是对称的。不失一般性，假设 $(q_A)_x \geqslant (p_A)_x$。如图 6 所示，有两种情形。

情况 I：$(q_B)_x < (p_B)_x$。由于 p 和 q 的 x 顺序相同，$p, q \in F$，且二者 x-分离，因此很容易看出，x-区间 $[(p_A)_x、(q_A)_x]$ 和 $[(q_B)_x、(p_B)_x]$ 彼此不相交，且距离至少为 1。因此，我们可以先让 A 沿 φ_A 从 p_A 移动到 q_A，再让 B 沿 φ_B 从 p_B 移动到 q_B。由于两个区间之间的距离至少为 1，所得规划 φ 是可行的，并且对于所有 $\lambda \in [0,1]$，$\varphi(\lambda)$ 都是 x-分离的。

情形 II: $(q_B)_x \geqslant (p_B)_x$. 不失一般性，假设 $(p_A)_x > (p_B)_x$；否则，我们可以互换 A 和 B 的角色。我们先让 A 沿着 φ_A 移动，然后让 B 沿着 φ_B移动。注意，对于任意点 $z \in \varphi_A$，都有 $z_x - (p_B)_x \geqslant (p_A)_x - (p_B)_x \geqslant 1$。类似地，对于任意点

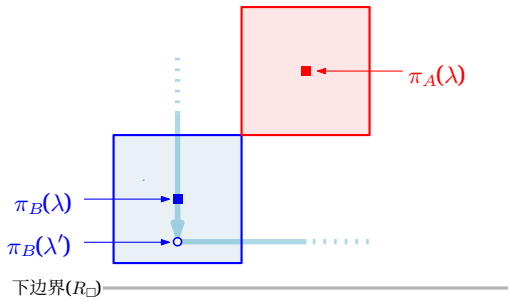


图7. 引理 3.8 中 λ' 定义的一个示例。由于 π_B 在时间 λ 和 $\lambda \neq \lambda_1$ 时均未进入或离开 $\mathscr{I}$(走廊)，我们取在时间 λ 移动的机器人 X（此处：$X = B$），并将 λ' 设为 λ 之后 π_B 首次到达某个顶点或网格线的时间（此处 $\pi_B(\lambda')$ 是 π_B 的一个顶点）。

$z \in \varphi_B$，都有 $(q_A)_x - z_x \geqslant (q_A)_x - (q_B)_x \geqslant 1$。因此，所得规划 φ 是可行的，并且 $\varphi(\lambda)$ 对于所有 $\lambda \in [0,1]$ 都是 x-分离的。 □

引理 3.8. 设 $\lambda, \mu \in [\lambda_1, \lambda_2]$ 是 x 分离的不安全区间的端点，不一定是同一个不安全区间的端点，且 $\lambda < \mu$ 与 $\boldsymbol{\pi}(\lambda), \boldsymbol{\pi}(\mu)$ 具有相同的 x 顺序。若 $\pi_B(\lambda)$、$\pi_B(\mu)$ 位于 $\mathscr{I}$(走廊) 的同一个连通分支中，且二者不是阻塞对，则存在 $\boldsymbol{\pi}[\lambda, \mu]$ 的一个合规重新参数化 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda, \mu]$，使得对所有 $\nu \in [\lambda, \mu]$，构型 $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 均为 x-分离。

证明。 将引理 3.7 应用于点 $\boldsymbol{p} := \boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 和 $\boldsymbol{q} := \boldsymbol{\pi}(\mu)$，以获得一个始终保持$x$-分离的规划 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda, \mu]$，会在时间实例 λ 和 μ于 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda, \mu]$ 中产生新的停车位置。这些停车位置可能不符合合规重新参数化的性质：根据定义，它们是 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda, \mu]$的断点，但不一定是 $\boldsymbol{\pi}[\lambda, \mu]$ 的断点，因此可能不位于网格线上，也可能未与 $\pi_A \cup \pi_B$的垂直线段对齐。因此，我们在精心选择的时间实例 λ' 和 μ'应用引理 3.7，具体定义如下。

- 如果 πB 在时间 λ 或 $\lambda = \lambda_1$进入或离开 $\mathscr{I}$(走廊)，则令 $\lambda' := \lambda$。否则， $\boldsymbol{\pi}$会在时间 λ开始或停止处于 y-分离状态。令 X $\in$ {A、B} 为在时间 λ移动、从而导致机器人开始或停止处于 y-分离状态的机器人；πX(λ) 位于 πX 的一条垂直线段上。现在令 λ' 为晚于 λ 的第一个时间，使得 πX(λ') 是 πX 的一个顶点，或 πX(λ') 位于一条水平网格线上。见图7。由于 $\mathscr{I}$(走廊)的上边和下边是水平网格线，因此可得 πX(λ') $\in$ $\mathscr{I}$(走廊)，πX(λ)πX(λ') 是一条垂直线段，并且 $\pi(\lambda)$ 和 $\pi(\lambda')$ 具有相同的 x 顺序。

- 时间 $\mu' \in [\lambda, \mu]$ 的定义是对称的。更准确地说，如果 πB 在时间 μ 或 $\mu = \lambda_2$进入或离开$\mathscr{I}$(R)，那么我们令 $\mu' := \mu$。否则，令 X $\in$ {A、B} 为在时间 μ移动、导致机器人开始或停止 y-分离的机器人。我们将 μ' 设为早于 μ 的最后一个时间，使得 πX(μ') 是 πX 的一个顶点，或者 πX(μ') 位于一条水平网格线上。同样，我们可以证明 πx(μ') $\in$ $\mathscr{I}$(R)，πx(μ)πx(μ') 是一条垂直线段，并且 $\boldsymbol{\pi}(\mu)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 具有相同的 x 顺序。

注意，如果 $\lambda' > \mu'$，那么 $\boldsymbol{\pi}[\lambda, \mu]$ 是一个规划，其中一台机器人沿垂直线段移动，而另一台机器人停放；令 $\boldsymbol{\pi}^* := \boldsymbol{\pi}$ 即可证明该结论。因此，在证明的其余部分中，假设$\lambda' \leqslant \mu'$。

注意到 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$和 $\boldsymbol{\pi}(\lambda')$具有相同的 x 顺序， $\boldsymbol{\pi}(\mu)$和$\boldsymbol{\pi}(\mu')$也同样如此。这意味着 $\boldsymbol{\pi}(\lambda')$和 $\boldsymbol{\pi}(\mu')$具有相同的 x 顺序。由于 λ'、 $\mu' \in [\lambda_1, \lambda_2]$ 和$\pi_A[\lambda_1, \lambda_2] \subset$ R，因此 $\pi_A(\lambda')$、 $\pi_A(\mu') \in$ R。于是，显然存在一条从 $\pi_A(\lambda')$到 $\pi_A(\mu')$的 x 单调路径 $\varphi_A \subset \mathscr{F}$。根据构造，如上所述， $\pi_B(\lambda')\pi_B(\lambda)$和$\pi_B(\mu')\pi_B(\mu)$是 $\mathscr{I}$(R)中的（可能长度为零的）垂直线段。因此， $\pi_B(\lambda')$和$\pi_B(\mu')$位于 $\mathscr{I}$(R)的同一个连通分支中，且不是阻塞对，因为根据假设，这些性质对 λ 和 μ 成立。因此，根据引理3.4，从 $\pi_B(\lambda')$到$\pi_B(\mu')$的任意最短路径都是 x 单调的。由此我们可以对 p := $\boldsymbol{\pi}(\lambda')$ 和 q := $\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 应用引理 3.7。由此得到一个 (p, q)-规划 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda', \mu']$，其中 A 仅停在 $\pi_A(\lambda')$ 或 $\pi_A(\mu')$，而 B 仅停在 $\pi_B(\lambda')$ 或 $\pi_B(\mu')$。[4] 我们将 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的定义域扩展为 $[\lambda, \mu]$，方法是令 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda, \lambda'] := \boldsymbol{\pi}[\lambda, \lambda']$且 $\boldsymbol{\pi}^*[\mu', \mu] := \boldsymbol{\pi}[\mu', \mu]$。注意，对所有 $\nu \in [\lambda, \mu]$, $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$都是 x-分离的。最后，我们论证 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda, \mu]$ 的停车位属于类型 (T1)–(T3)。我们针对时间 λ'可能出现的停车位进行论证；对 μ' 的论证类似。我们考虑三种情形。

- 如果 π_B 在时间 λ进入或离开 $\mathscr{I}(R)$，那么 $\lambda' = \lambda$。因此，$\pi_A(\lambda')$ 是一个停车位置（这是允许的），而 $\pi_B(\lambda')$ 是 π_B 的一条线段与 $\mathscr{I}(R)$的一条边的交点。由于 $\mathscr{I}(R)$ 的边都包含在网格线中，我们可以得出，潜在停车位置 $\pi_B(\lambda')$ 也是允许的。

- 其次，可能出现 $\lambda' = \lambda = \lambda_1$。由于 π_A 在时间 λ_1进入 R，点 $\pi_A(\lambda_1)$位于 π_A 的一条垂直线段和一条水平网格线上。此外，由于A 在时间 λ_1正在移动，点 $\pi_B(\lambda_1)$ 是 π_B的一个断点，因此是允许的。

- 最后，假设 π_B 在时间 λ 没有进入或离开 $\mathscr{I}(R)$，并且 $\lambda \neq \lambda_1$。那么，$\boldsymbol{\pi}$ 由于机器人 $X \in \{A,B\}$ 的移动，在时间 λ 开始或停止处于 y- 分离状态。因此，另一台机器人在时间 λ'位于 $\boldsymbol{\pi}$ 的一个断点处。此外，根据构造，$\pi_X(\lambda')$ 位于 π_X的一个顶点上，或位于 π_X 的一条垂直线段与一条水平网格线的交点上。因此，在这种情形下，时间 λ' 的停车位也是允许的。

至此，引理的证明完成。 □

反复应用引理 3.8，我们得到以下引理。

引理 3.9。 *存在一种 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 的合规重新参数化，使得任何 x-分离的不安全区间都是交换区间。*

证明。 令 $[\mu_0, \mu_1]$ 为一个 x-分离的不安全区间，其中 $\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_1)$ 具有相同的x-顺序。点 $\pi_B(\mu_0)$、 $\pi_B(\mu_1)$ 位于 $\mathscr{I}$(走廊)的同一个连通分支中，因为 $\pi_B[\mu_0, \mu_1] \subset$

[4]此规划不一定是重新参数化。不过，由于存在一个从 $\boldsymbol{\pi}(\lambda')$ 到$\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 的有效方案，且该方案在 $\mathscr{F}$中使用最短路径，因此路径 $\pi_A[\lambda', \mu']$和 $\pi_B[\lambda', \mu']$必定是 $\mathscr{F}$中的最短路径，因为 $\boldsymbol{\pi}$是最优的。这意味着 $\pi_A[\lambda', \mu']$是xy-单调的，并且根据引理 3.7，路径 $\pi_B[\lambda', \mu']$是x-单调的。因此，我们将这些路径用于引理 3.7，得到一个具有所需性质的规划，该规划同时也是 $\boldsymbol{\pi}$的重新参数化。

$\mathcal{I}$(走廊)。此外，$\boldsymbol{\pi}$ 在 $[\mu_0, \mu_1]$ 期间是 y-分离的，因此 B 在 $[\mu_0, \mu_1]$ 期间无法完全穿过走廊。这意味着 $(\pi_B(\mu_0), \pi_B(\mu_1))$ 不是一个阻塞对。因此，根据引理 3.8，存在一个对 $\boldsymbol{\pi}[\mu_0, \mu_1]$ 进行的合规重新参数化 $\boldsymbol{\pi}^*[\mu_0, \mu_1]$，使得 $\boldsymbol{\pi}^*[\mu_0, \mu_1]$ 在所有时间都 x-分离。现在，我们通过将 $\boldsymbol{\pi}[\mu_0, \mu_1]$ 替换为 $\boldsymbol{\pi}^*[\mu_0, \mu_1]$ 来修改 $\boldsymbol{\pi}$。由于 $\boldsymbol{\pi}^*[\mu_0, \mu_1]$ 是 x-分离的，区间 $[\mu_0, \mu_1]$ 不再是不安全的。我们对每个端点处构型具有相同x-顺序的不安全区间重复此过程。完成后，任何x-分离的不安全区间都是一个交换区间。 □

在本节余下部分中，我们假设已对 $\boldsymbol{\pi}$应用引理 3.9 中的合规重新参数化。现在，我们终于来证明交换区间的主要性质。回想一下，在不安全区间内，机器人始终在 y 方向上彼此分离。因此，在整个不安全区间内，要么 A 始终位于 B 上方，要么反之。

引理 3.10. 存在对 $\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$ 的合规重新参数化 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$，使得 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$至多有一个 B 位于 A 上方的交换区间，且至多有一个 A 位于 B 上方的交换区间。

证明。 假设 $\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$ 有多个 A 位于 B 上方的交换区间。令 $[\mu_0, \mu_1]$ 和$[\mu_2, \mu_3]$ 分别为第一个和最后一个这样的区间。在这两个交换区间内，π_B 都位于 γ(走廊) 的巨型连通分量 $\mathcal{I}$(走廊)中。事实上，如果 $\pi_B[\mu_0, \mu_1]$ 包含在$\mathcal{I}$(走廊)的某个微小连通分量中，那么 $\pi_B[\mu_0, \mu_1]$ 要么完全位于走廊左侧，要么完全位于其右侧，并且 $\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_1)$ 的x次序相同，这与 $[\mu_0, \mu_1]$ 是交换区间相矛盾。对 $[\mu_2, \mu_3]$也可作类似论证。

由于 $[\mu_2, \mu_3]$ 是一个交换区间，因此存在一个$i \in \{2, 3\}$，使得 $\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_i)$具有相同的x顺序。此外，在两个交换区间中，B 都位于A 下方，因此$(\pi_B(\mu_0), \pi_B(\mu_i))$ 不是阻塞对。根据引理 3.8，存在对 $\boldsymbol{\pi}[\mu_0, \mu_i]$ 进行合规重新参数化的方式$\boldsymbol{\pi}^*[\mu_0, \mu_i]$，使得 $\boldsymbol{\pi}^*[\mu_0, \mu_i]$ 在所有时间都保持x分离，因此在 $[\mu_0, \mu_i]$期间不存在不安全区间。因此，$\boldsymbol{\pi}^*$ 至多包含一个 A 位于B上方的交换区间。（回想一下，$[\mu_2, \mu_3]$ 被定义为A 位于B上方的最后一个区间。）类似地可得，存在一种合规重新参数化方式 $\boldsymbol{\pi}^*$，除了至多包含一个A 位于B上方的交换区间外，还至多包含一个A位于B下方的交换区间。

□

接下来，我们证明，如果 $\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$ 有两个交换区间，那么我们可以消除其中至少一个，或者 $\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$ 具有额外的结构，这将有助于进行手术并证明其正确性。

引理 3.11. 假设 $[\lambda_1, \lambda_2]$中恰有两个交换区间 $[\mu_0, \mu_1]$ 和 $[\mu_2, \mu_3]$。如果$\boldsymbol{\pi}(\mu_1)$ 与 $\boldsymbol{\pi}(\mu_2)$ 具有相同 x-顺序，并且$(\pi_B(\mu_1), \pi_B(\mu_2))$ 不是阻塞对，那么存在一个合规修改 $\boldsymbol{\pi}^*$，使得 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 没有交换区间。

证明。注意，$\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_3)$ 具有相同的 x 顺序，并且 $\pi_B(\mu_1), \ldots, \pi_B(\mu_3)$ 都位于 $\mathcal{I}$(R) 的巨型连通分量中，因为只有当 B 位于巨型连通分量中时才可能发生交换区间。如果 ($\pi_B(\mu_0), \pi_B(\mu_3)$) 不是阻塞对，那么我们可以对 μ_0, μ_3 应用引理 3.8，得到一个不含交换区间的合规修改 $\boldsymbol{\pi}^*$，因此从现在起我们假设 $(\pi_B(\mu_0), \pi_B(\mu_3))$ 是一个阻塞对。进一步，不失一般性地假设 $\pi_B(\mu_0)$ 位于 $\mathrm{R}_{\square}$ 的左下角方格中，而 $\pi_B(\mu_3)$ 位于左上角方格中。我们定义五个时间点 $\mu', \xi_1, \xi_2, \nu_1, \nu_2$，使得

$$\mu_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \nu_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu' \leqslant \mu_2 \leqslant \nu_2 \leqslant \xi_2 \leqslant \mu_3$$

并且我们通过对 $\boldsymbol{\pi}[\xi_1, \xi_2]$ 进行合规修改来构造一个新的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$，使得对于所有 $\mu \in [\mu_0, \mu_3]$，$\boldsymbol{\pi}^*(\mu)$ 都是 x-分离的，从而表明 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 不存在任何交换区间。

- 我们首先定义 μ'。注意，πB(μ_0) 位于左下角方格，意味着 πB(μ_1) $\in$ 走廊$^{-}_{\leftrightarrow}$，因为 $[\mu_0, \mu_1]$ 是不安全区间，因此 πB$[\mu_0, \mu_1]$ 无法穿过走廊。类似地，πB(μ_3) 位于左上角方格，意味着 πB(μ_2) $\in$走廊$^{+}_{\leftrightarrow}$。由于 πB(μ_1) 和 πB(μ_2) 分别位于 πA(μ_1) 和 πA(μ_2) 的右侧——这是因为 $\boldsymbol{\pi}(\mu_1)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_2)$ 的 x-次序分别与 $\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_3)$ 不同——因此我们有 πB(μ_1) $\not\in$ 走廊$^{-}_{\updownarrow}$，且 πB(μ_2) $\notin$ 走廊$^{-}_{\updownarrow}$。由于 (πB(μ_1),πB(μ_2)) 不是阻塞对，因此存在一个 $\mu' \in \{\mu_1, \mu_2\}$，使得 πB(μ') $\notin$ 走廊$^{+}_{\updownarrow}$。因此，πB(μ') $\in$ 走廊$^{\updownarrow}$。

- 接下来，我们定义 ξ_1、ξ_2。令V^* 表示水平线段$\pi_A \cup \pi_B$ 或水平网格线与垂直线段$\pi_A \cup \pi_B$ 或垂直网格线的交点。于是，

$$\xi_1 := \min\{\xi \in [\mu_0, \mu_1] : \{\pi_A(\xi), \pi_B(\xi)\} \subset V^*\}.$$

  注意到 ξ_1 是定义良好的。事实上，设其中一个机器人（记为 X）在 μ_0 之后立即移动，而另一个机器人处于停放状态；根据定义，停车位置是 V*中的一个点。根据引理 3.6，$\pi_X(\mu_0)$位于 π_X 的垂直边上或垂直1-线上。如果 $\pi_X(\mu_0)$位于 π_X的水平线段上，那么 $\pi_X(\mu_0)$ $\in$ V* （因为它是 π_X 的水平线段与垂直网格线的交点），并且 $\xi_1 = \mu_0$。否则，X 在 μ_0 之后立即沿垂直线段 g 移动，而时间 ξ_1 是 X 到达 V* 中位于 g 上的一个点的最早时间。注意，由于机器人在 X 沿 g 移动时始终保持 x-分离，因此 $\xi_1 \leqslant \mu_1$；而根据不安全区间的定义，$\boldsymbol{\pi}[\mu_0, \mu_1]$必须包含一个不满足 x-分离的构型。因此，我们得出 $\xi_1 = \mu_0$ 或 $\boldsymbol{\pi}[\mu_0, \xi_1]$ 由一个沿垂直线段移动的机器人 X 和另一个停放在 V*中某个位置的机器人组成。类似地，令

$$\xi_2 := \max\{\xi \in [\mu_2, \mu_3] : \{\pi_A(\xi), \pi_B(\xi)\} \subset V^*\}$$

  并注意，$\xi_2 = \mu_3$ 或 $\boldsymbol{\pi}[\xi_2, \mu_3]$ 由一个机器人沿垂直线段移动，而另一个机器人停放在V^*中的某个点上。

- 最后，我们定义 ν_1 ν_2 ψ $\updownarrow$ $\nu_1 = \{\nu \in$ ，。令 表示 $[\xi_1, \mu_1]$ π ν $\in \psi\}$ $\nu_2 = \{\nu \in [\mu_2, \xi_2]$ π ν $\in \psi\}$ R的左边，并定义：min：$_{B()}$ 以及：max：$_{B()}$；这是定义良好的，因为 $\pi_B[\xi_1, \mu_1]$ 和 $\pi_B[\mu_2, \xi_2]$ 必定穿过 ψ。

现在我们说明如何构造新的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$。令$q := (\pi_B(\mu')_x, \pi_A(\xi_1)_y)$，并注意$q \in R$。此外，$q$ 到 ψ 的距离至少为 1，因为 $\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 是x-分离的，其中$\pi_B(\mu')$ 位于 $\pi_A(\mu')$的右侧。我们通过将 $\boldsymbol{\pi}[\xi_1, \xi_2]$ 替换为由以下三次移动组成的$\boldsymbol{\pi}^*[\xi_1, \xi_2]$，从 $\boldsymbol{\pi}$ 构造 $\boldsymbol{\pi}^*$。另见图 8。

M1. 将A 从 $\pi_A(\xi_1)$ 水平移动到q。

M2. 我们先让 B 沿着子路径 $\pi_B[\xi_1, \nu_1]$移动，然后让 B 沿着 ψ移动到 $\pi_B(\nu_2)$，最后让 B 沿着 $\pi_B[\nu_2, \xi_2]$移动。

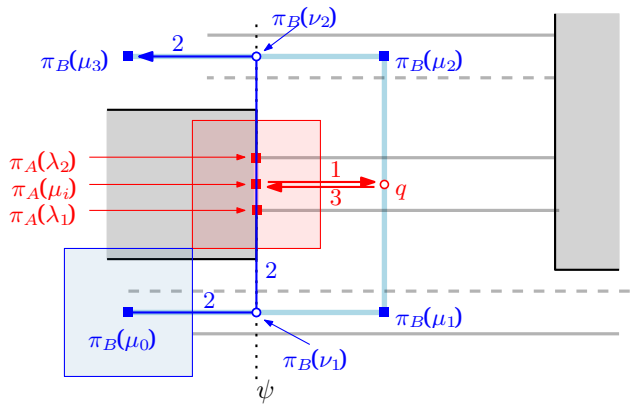


图 8. 引理 3.11 的证明中，当$(\pi_B(\mu_0), \pi_B(\mu_3))$ 是一个阻塞对时所做的修改 $\boldsymbol{\pi}^*$。在此例中，我们有 $\xi_1 = \mu_0$、$\xi_2 = \mu_3$ 和 $\pi_A(\mu_0) = \pi_A(\mu_3)$（记作 $\pi_A(\mu_i)$）。新的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 以深色标示，移动旁标有其编号；原规划 $\boldsymbol{\pi}$ 的轨迹则以浅色标示。

M3. 将 A 从 q 水平移动到 $(\pi_A(\xi_2)_x, q_y)$，然后垂直移动到 $\pi_A(\xi_2)$。

注意，对于所有 $\mu \in [\mu_0, \mu_3]$，$\boldsymbol{\pi}^*(\mu)$ 都是 x-分离的；对于 $\boldsymbol{\pi}^*[\mu_0, \xi_1]$，这是因为$\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$ 是 x-分离的；对于 $\boldsymbol{\pi}^*[\xi_1, \xi_2]$，这是因为 q 到 ψ 的距离至少为 1；对于 $\boldsymbol{\pi}^*[\xi_2, \mu_3]$，这是因为 $\boldsymbol{\pi}(\mu_3)$ 是 x-分离的。因此，$\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 中不再有交换区间。接下来只需证明该修改是合规的。

- $\boldsymbol{\pi}^*[\xi_1, \xi_2]$ 的三次移动显然位于 $\mathscr{F}$中，并且由于$\boldsymbol{\pi}^*[\xi_1, \xi_2]$ 始终保持x分离，因此不存在冲突。因此，$\boldsymbol{\pi}^*$ 是可行的。
- 注意到 $\xi_1 \leqslant \mu' \leqslant \xi_2$。因此，对$\pi$A的修改至多使其长度增加$2 \cdot |\pi\mathrm{A}(\mu')\mathrm{x} - \mathrm{qx}| = 2 \cdot |\pi\mathrm{A}(\mu')\mathrm{x} - \pi\mathrm{B}(\mu')\mathrm{x}|$。另一方面，对$\pi$B的修改至少使其长度减少 $2(\pi\mathrm{B}(\mu')\mathrm{x} - \mathrm{x}(\psi))$，因为 B 不再需要从 ψ 移动到πB(μ')再返回。由于 $\mathrm{x}(\psi) \leqslant \pi\mathrm{A}(\mu')\mathrm{x} < \pi\mathrm{B}(\mu')\mathrm{x}$，因此 $\boldsymbol{\pi}^*$ 仍然是最优的。
- $\pi^*_A[\xi_1, \xi_2]$ 的每个顶点要么是V^*中的一个点，要么是π_A的一个顶点，要么是点q。后者位于一条经过π_B某个顶点的垂直线上，因此 π^*_A具有垂直对齐性质。此外，π^*_B 唯一新增的线段位于 ψ上，这表明 π^*_B具有垂直对齐性质。
- 根据构造，A 和B 的停车位置都是V^* 中的点。我们可以添加长度为零的线段，使 $\boldsymbol{\pi}^*$ 交替，同时仍满足对齐要求。

最后，显然，$\boldsymbol{\pi}^*$ 的所有坏线段要么存在于 $\boldsymbol{\pi}$ 中，要么是$\pi_A[\lambda_1, \lambda_2]$的一条线段。由此我们得出，$\boldsymbol{\pi}^*$ 是对 $\boldsymbol{\pi}$的合规修改。 □

引理 3.12. 如果 $\mathscr{I}$(走廊) 有一个微小连通分量，则存在一种对 $\boldsymbol{\pi}$ 的合规修改 $\boldsymbol{\pi}^*$，使其至多有一个交换区间。

证明。如果 $\boldsymbol{\pi}$ 已经只有一个交换区间，那么结论成立。否则，不失一般性，我们可以假设 $\boldsymbol{\pi}$ 有两个交换区间 $[\mu_0, \mu_1]$ 和 $[\mu_2, \mu_3]$，它们具有引理 3.10 的性质，且在 $[\mu_0, \mu_1]$期间 B 位于 A 下方。

令 τ 为 $\mathscr{I}$(走廊) 的一个微小连通分量。不失一般性，我们可以假设它位于 $\mathscr{I}$(走廊) 的右下角方格中。子路径 $\pi_B[\mu_0, \mu_1]$ 位于 Z^* 的一个连通分支内，而该连通分支是一个矩形。我们声称 $Z^* \cap \text{走廊}^{+}_{\updownarrow} = \emptyset$。反设此结论不成立。那么，$\text{走廊}_{\updownarrow} \cap \text{走廊}^{-}_{\leftrightarrow}$ 的右边缘 η 位于 $\mathscr{F}$ 中。（事实上，Z^* 与 η 相交，而 $\mathscr{F} \cap \text{走廊}^{\updownarrow}$ 是一个 x 单调多边形，并且 η 的上端点位于 $\partial\mathscr{F} \cap \text{走廊}^{\updownarrow}$ 上。）但是，根据观察3.1，我们可以用一条位于 $\mathscr{F}$ 中的水平线段连接 τ 和 η，这与 τ 是微小连通分量矛盾。

取 $\mathrm{i} \in \{0, 1\}$ 使得 $\pi_B(\mu_i)_x > \pi_A(\mu_i)_x$；这样的 i 存在，因为 $[\mu_0, \mu_1]$ 是一个交换区间。因此，$\pi_B(\mu_i)_x \not\in \text{走廊}^{-}_{\updownarrow}$。由于 $Z^* \cap \text{走廊}^{+}_{\updownarrow} = \emptyset$ 且 $\pi_B(\mu_i) \in Z^*$，我们知道 $\pi_B(\mu_i) \in \text{走廊}^{\updownarrow}$。因此，$\pi_B(\mu_i)$ 不可能属于阻塞对。现在取 $\mathrm{j} \in \{2, 3\}$ 使得 $\boldsymbol{\pi}(\mu_i)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_j)$ 具有相同的 x 顺序。如果 $\mathrm{j} - \mathrm{i} > 1$，那么将引理 3.8 应用于$\mu_i$、$\mu_j$，即可得到一个至多含有一个交换区间的合规重新参数化。（我们可以应用引理 3.8，因为 $(\pi_B(\mu_i), \pi_B(\mu_j))$ 不是阻塞对，并且在交换区间期间 π_B 位于巨型连通分支中。）否则，$\mathrm{j} - \mathrm{i} = 1$，因此 $\boldsymbol{\pi}(\mu_1)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_2)$ 具有相同的 x 顺序，且 $(\pi_B(\mu_1), \pi_B(\mu_2))$ 不是阻塞对。因此，引理 3.11 给出一个不含交换区间的合规修改。

□

现在我们可以证明最优规划的一项主要结构性质：其中 $\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$有两个交换区间。

引理 3.13. 如果 $\boldsymbol{\pi}$ 有两个交换区间 $[\mu_0, \mu_1]$ 和 $[\mu_2, \mu_3]$，且 $\pi_B[\mu_0, \mu_3]$ 没有离开$\mathscr{I}$(走廊)，那么 $\pi_B(\mu_1) \in \text{走廊}^{\updownarrow}$。

证明。不失一般性地假设，在 $[\mu_0, \mu_1]$ 期间B 位于A 下方，在 $[\mu_2, \mu_3]$期间则位于A 上方。为导出矛盾，假设 $\pi_B(\mu_1) \not\in \text{走廊}^{\updownarrow}$，并不失一般性地假设 $\pi_B(\mu_1) \in \text{走廊}^{+}_{\updownarrow}$。令$Z^*$ 为$Z^- \cap \mathscr{F}$中包含 $\pi_B[\mu_0, \mu_1]$的矩形。由于 $\pi_B[\mu_0, \mu_3]$ 没有离开 $\mathscr{I}$(走廊)，子路径 $\pi_B[\mu_1, \mu_2]$ 会经过走廊。因此我们可以定义

$$\mu' := \min\{\mu \in [\mu_1, \mu_2] : \pi_B(\mu) \in R_{\updownarrow} \text{ and } \pi_B(\mu)_y \geqslant y(\mathsf{top}(Z^-))\}.$$

现在，我们给出一个从 $\boldsymbol{\pi}'(\mu_0)$ 到 $\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 的可行规划，并证明 $\|\boldsymbol{\pi}'[\mu_0, \mu']\| < \|\boldsymbol{\pi}[\mu_0, \mu']\|$，从而与 $\boldsymbol{\pi}$ 的最优性相矛盾。新的子规划 $\boldsymbol{\pi}'[\mu_0, \mu']$ 如下。另见图 9。

M1. 将 B 从 $\pi_B(\mu_0)$ 水平移动到 $(\pi_B(\mu')_x, \pi_B(\mu_0)_y)$。M2. 将 A 从 $\pi_A(\mu_0)$ 水平移动到 $(\pi_A(\mu')_x, \pi_A(\mu_0)_y)$，然后将 A 垂直移动到 $\pi_A(\mu')$。M3. 将 B 垂直移动到 $\pi_B(\mu')$。

由于Z^* 与$R^{+}_{\updownarrow}$ 相交，且 $\mu_0 \in Z^*$，我们得出结论：从 $\pi_B(\mu_0)$到$(\pi_B(\mu')_x, \pi_B(\mu_0)_y)$ 的水平线段位于Z^*中。因此，移动 M1 位于$Z^* \subset \mathscr{F}$中。此外，移动 M3 位于 $\mathscr{F}$ 中，因为$R_{\updownarrow} \cap \mathscr{F}$ 是x-单调的。最后，A 的移动不会离开R，因此它们位于

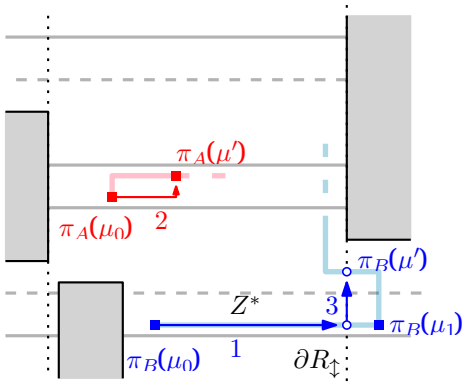


图 9。 引理 3.13 中对 $[\mu_0, \mu']$ 的修改 $\boldsymbol{\pi}'$。在此示例中， $\pi_B[\mu_0, \mu']$ 通过 走廊↕ 的右边缘进入 $Z \cap$ 走廊↕。

$\mathscr{F}$ 中。M1 和 M2 中的水平移动不会发生冲突，因为 $\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$ 是y-分离的。此外，M2 和 M3 中的垂直移动不会发生冲突，因为$\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 是x-分离的。（ $\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 是x-分离这一事实，可由 $\pi_B(\mu') \in Z$ </style}以及推出（因此(μ') $\notin$ 的上边界为(R)）。因此， $\boldsymbol{\pi}'$ 是一个有效的 $\boldsymbol{\pi}(\mu_0)\boldsymbol{\pi}(\mu')$-规划。

注意， π'_A 和 π'_B 是xy-单调的，而 $\pi_B[\mu_0, \mu']$ 不是；事实上， $\pi_B(\mu_0), \pi_B(\mu')$ $\notin$走廊↕，而在时间 μ_1， $\pi_B[\mu_0, \mu']$ 位于走廊↕ 中，因此 $\pi_B[\mu_0, \mu']$ 至少两次穿过走廊↕ 的右边缘。所以，我们得到一个捷径方案，这与 $\boldsymbol{\pi}$的最优性矛盾。 □

引理 3.14。 若 $\boldsymbol{\pi}$ 有两个交换区间 $[\mu_0, \mu_1]$ 和 $[\mu_2, \mu_3]$，且 $\pi_B[\mu_0, \mu_3]$ 不离开$\mathscr{I}$(走廊)，则存在一个合规修改 $\boldsymbol{\pi}^*$，其交换区间至多有一个。

证明。 若存在两个交换区间，则根据引理 3.10，我们不妨设在 $[\mu_0, \mu_1]$ 中A 位于B 上方，而在 $[\mu_2, \mu_3]$中B 位于A 上方。根据引理 3.13， $\pi_B(\mu_1)$ $\in$ 走廊↕，因此点$\pi_B(\mu_1)$ 不属于任何阻塞对。若 $\boldsymbol{\pi}(\mu_1)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_3)$ 的x次序相同，则由引理 3.8 可知，存在一种合规重新参数化，使得 $\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$ 至多有一个交换区间。否则， $\boldsymbol{\pi}(\mu_1)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_2)$ 的x次序相同。于是，根据引理 3.11，存在一种没有交换区间的合规修改。 □

以下引理总结了最优规划中交换区间的主要性质，这些性质已在引理 3.9–3.14 中证明。

引理3.15。 设 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个最优$(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$规划，$\boldsymbol{e}$ 是 π_A 上的一条不良水平线段，且 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 如式 *(3)* 所定义。则存在对 $\boldsymbol{\pi}$ 的合规修改 $\boldsymbol{\pi}^*$，使得任何不安全的x-分离区间都是交换区间，并具有以下性质。

(i) 规划 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 至多有一个 B 在 A 上方的交换区间，且至多有一个 B 在 A 下方的交换区间。*(ii)* 如果 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 有两个交换区间 $[\mu_0, \mu_1]$ 和 $[\mu_2, \mu_3]$，那么 $\mathscr{I}(R)$ 没有微小连通分量， $\pi^*_B[\lambda_1, \lambda_2]$ 包含一个阻塞对，并且 $\boldsymbol{\pi}^*_B[\mu_0, \mu_3]$ 离开 $\mathscr{I}(R)$。

以下关于具有两个交换区间的最优规划的性质，将有助于证明稍后所述手术所得规划的最优性。

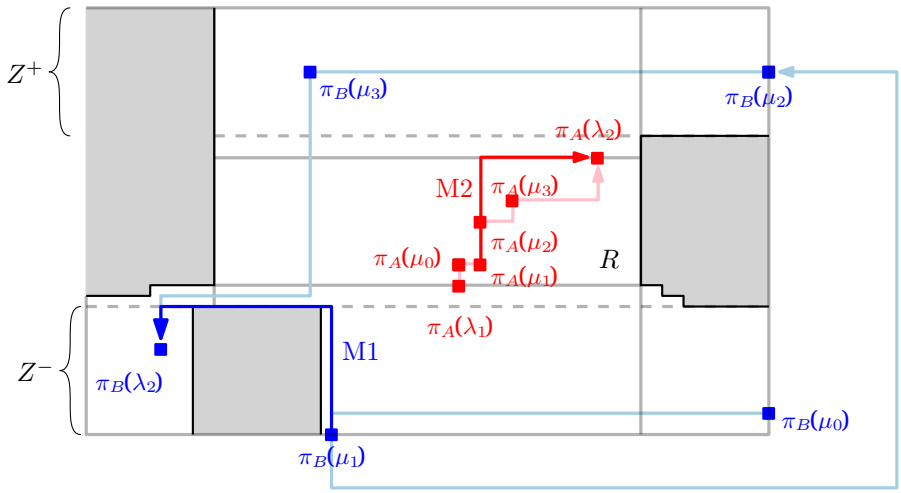


图10. 引理 3.16 的证明示意图，使用由 M1 和 M2 定义的捷径 .

引理 3.16. 假设 $\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$ 有一个交换区间 $[\mu_0, \mu_1]$，其中 B 位于 A 下方；还有一个交换区间 $[\mu_2, \mu_3]$，其中 B 位于 A 上方，且 $\mu_1 < \mu_2$。如果 λ_1 是不安全区间的端点，那么 $\pi_B(\lambda_1)_y < \pi_A(\lambda_1)_y$；如果 λ_2 是不安全区间的端点，那么 $\pi_B(\lambda_2)_y > \pi_A(\lambda_2)_y$。

证明。 我们对 λ_2 证明该引理；对 λ_1 的证明类似。反设 λ_2 是某个不安全区间的端点，且 $\pi_B(\lambda_2)_y \leqslant \pi_A(\lambda_2)_y$。注意，$\boldsymbol{\pi}(\lambda_2)$ 是y-分离的，且 $\pi_B(\lambda_2) \in Z^-$。我们将证明，存在一个从 $[\mu_0, \mu_1]$ 中某个时间到 λ_2 的捷径方案，其中 π_B 避免经过走廊$^{+}_{\leftrightarrow}$。

如果 $\pi_B(\lambda_2)$ 位于 $\mathrm{Z}^- \cap \mathscr{F}$ 中与 $\pi_B[\mu_0, \mu_1]$ 相同的矩形内，那么在 $\mathscr{F}$ 中存在从 $\pi_B(\mu_0)$ 到 $\pi_B(\lambda_2)$ 以及从 $\pi_A(\mu_0)$ 到 $\pi_A(\lambda_2)$ 的 xy- 单调路径。注意，$\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_2)$ 都是具有相同 y 顺序的 y-分离构型。因此，引理 3.7 蕴含存在一个从构型 $\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$ 到构型 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_2)$ 的有效方案，其中 A 和 B 使用 xy-单调路径。该方案严格短于 $\boldsymbol{\pi}[\mu_0, \lambda_2]$，因为 $\pi_B[\mu_0, \lambda_2]$ 经过 Z^+。

否则，$\pi_B(\lambda_2)$ 位于 $\mathrm{Z}^- \cap \mathscr{F}$ 中与 $\pi_B[\mu_0, \mu_1]$ 不同的矩形内。不失一般性地，假设 $\pi_B(\lambda_2)$ 所在的矩形位于 $\pi_B[\mu_0, \mu_1]$ 的左侧，因此有 $\pi_B(\lambda_2)_x < \pi_B(\mu_0)_x$ 且 $\pi_B(\lambda_2)_x < \pi_B(\mu_1)_x$。令 i $\in \{0, 1\}$ 满足 $\pi_B(\mu_i)_x < \pi_A(\mu_i)_x$。根据引理3.4，存在一条从 $\pi_B(\mu_i)$ 到 $\pi_B(\lambda_2)$ 的 x 单调路径 φ_B，它在 $\mathscr{F}$ 中是最短的。现在考虑从 $\boldsymbol{\pi}(\mu_i)$ 到 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_2)$ 的以下规划 $\boldsymbol{\pi}'$，如图10所示。

M1. 沿着 φ_B 将 B 从 $\pi_B(\mu_i)$ 移动到 $\pi_B(\lambda_2)$。

M2. 移动 e 从 $\pi_A(\mu_i)$ 到 $\pi_A(\lambda_2)$，沿着第一段为垂直方向的 L 形路径。

规划 $\boldsymbol{\pi}'$ 显然位于 $\mathscr{F}$ 中。移动 M1 不会发生冲突，因为构型保持x分离，这是由于 φ_B 是x单调的。移动 M2 不会发生冲突，因为垂直移动期间构型是x分离的，而水平移动期间构型是y分离的。因此，$\boldsymbol{\pi}'$ 是一个有效方案，其中的路径是 $\mathscr{F}$ 中的最短路径。不过，规划 $\boldsymbol{\pi}$ 并非由两条最短路径组成，因为 $\pi_B[\mu_i, \lambda_2]$ 经过了Z^+。

因此，在两种情形下我们都能得到一条捷径，这与 $\boldsymbol{\pi}$的最优性矛盾。因此，如果 λ_2 位于不安全区间内，那么 $\pi_B(\lambda_2)_y > \pi_A(\lambda_2)^y$。 □

接下来，我们证明两个引理，以缩小A 在时间 λ_1 之前可能出现的位置范围。如果我们在 π_B 的 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 外部进行手术，这些引理将有助于证明修改后的规划的可行性。由于稍后会说明的技术原因，我们不仅需要处理 HOR($\mathscr{F}$)，还需要处理 HOR0($\mathscr{F}$)，即由 $\mathscr{F}$ 的水平线L_0 诱导的矩形细分。（回顾一下，这些水平线包含 $\mathscr{F}$ 的水平边，以及包含点 s_A、s_B、t_A、t_B 的水平线。）

引理 *3.17*。假设 $\pi_A(\lambda_1) \in R$ 的底部，且 $\pi_A(\lambda_2) \in R$ 的上边界，存在一个交换区间$[\mu_0, \mu_1]$，其中 *B* 位于 *A* 下方，并且对于包含 $\pi_B(\mu_1)$ 的 *HOR0($\mathscr{F}$)* 矩形 *Q*，有 *y(bot(R)) ⩾y(top(Q))*。令 $\nu_0 < \lambda_1$ 为满足 $\pi_B[\nu_0, \mu_1] \subset Q$ 的第一个时间。则对于任意 $\nu \in [\nu_0, \lambda_1]$，都有 $\pi_A(\nu) \not\in R$ 的内部 $\cup$ *($R^{+}_{\leftrightarrow} \cap \gamma$ (R))*。

证明。为导出矛盾，假设存在一个时间 $\nu \in [\nu_0, \lambda_1]$，使得 $\pi_A(\nu) \in$int(R) $\cup$ ($R^{+}_{\leftrightarrow} \cap \gamma$(R))。令 $\mu^- \in [\mu_0, \mu_1]$ 为一个时间，使得 $\pi_A(\mu^-)_x = \pi_B(\mu^-)_x$ 且$\pi_B(\mu^-) \in R_{\updownarrow} \cap Z^-$；这样的时间必定存在，因为 $[\mu_0, \mu_1]$ 是一个交换区间，其中 B 位于 A 下方，且 $\pi_A[\mu_1, \mu_2] \subset$ R。注意，$\lambda_1 \leqslant \mu_0 < \mu^- < \mu_1$；事实上，由于 $\boldsymbol{\pi}(\mu_0)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\mu_1)$ 是 x-分离的，因此 $\mu^- = \mu_0$ 和 $\mu^- = \mu_1$不可能成立。

现在我们说明如何构造一条 $\boldsymbol{\pi}'$ 捷径，从而得到所需的矛盾。注意，$\pi_A(\nu)_y >$ y(R 的底部)，因为 $\pi_A(\nu) \in$ int(R) $\cup$ $R^{+}_{\leftrightarrow}$。此外，$\pi_A(\mu^-)_y >$ y(R 的底部)，因为 $\lambda_1 < \mu^- < \lambda_2$。由于 $\nu < \lambda_1 < \mu^-$ 且 $\pi_A(\lambda_1) \in$ R 的底部，路径 $\pi_A[\nu, \mu^-]$ 不是 xy-单调的。因此，只需证明存在一个可行的（$\boldsymbol{\pi}(\nu)$，$\boldsymbol{\pi}(\mu^-)$）-规划 $\boldsymbol{\pi}' = (\pi'_A, \pi'_B)$，使得 π'_A 和 π'_B 都为 xy-单调；见图 11。令 $p_A = (\pi_A(\nu)_x, \pi(\mu^-)^y)$ 和 $p_B = (\pi_B(\nu)_x, \pi_B(\mu^-)^y)$。分两种情形讨论。

- 如果 $\pi_A(\nu)_y \geqslant \pi_A(\mu^-)_y$，那么 $\boldsymbol{\pi}'$ 由以下移动组成：

  M1. 将B 沿一条 L 形路径从 $\pi_B(\nu)$ 经由p_B 移动到 $\pi_B(\mu^-)$。
  M2. 将A 沿一条xy-单调路径从 $\pi_A(\nu)$ 移动到 $\pi_A(\mu^-)$。

- 否则 也就是说，如果 $\pi_A(\nu)^y < \pi_A(\mu^-)^y$，那么 $\boldsymbol{\pi}'$ 由以下移动组成 es:

  M1. 将A 沿一条垂直线段从 $\pi_A(\nu)$ 移动到p_A。M2. 将B 沿一条 L 形路径从 $\pi_B(\nu)$ 经由p_B 移动到 $\pi_B(\mu^-)$。M3. 将A 沿一条水平线段从 p_A 移动到 $\pi_A(\mu^-)$。

我们首先说明，新路径 π'_B 和 π'_A 位于 $\mathscr{F}$中。注意，π'_B 在两种情况下都相同，并且它位于 Q 中，而 Q 包含于 $\mathscr{F}$中。现在我们考虑 π'_A。根据引理 3.1，在 $\mathscr{F}$中存在一条 xy-单调的 $(\pi_A(\nu), \pi_A(\mu^-))$-路径，因此我们可以确保在第一种情况下 $\pi'_A \subset \mathscr{F}$。此外，如果 $\pi_A(\nu)^y < \pi_A(\mu^-)^y$，那么 $\pi_A(\nu) \in$ 走廊，因此在第二种情况下也有 $\pi'_A \subset \mathscr{F}$。由此，$\pi'_A$和 π'_B 都位于 $\mathscr{F}$中。根据构造，π'_A 和 π'_B 都是 xy-单调的。

还需证明两台机器人在 $\boldsymbol{\pi}'$ 中不会发生碰撞。回顾一下，$\boldsymbol{\pi}(\mu^-)$ 是 y-分离的。如果一台机器人在某个时间 λ 沿 $\boldsymbol{\pi}'$ 中的水平线段移动，那么我们

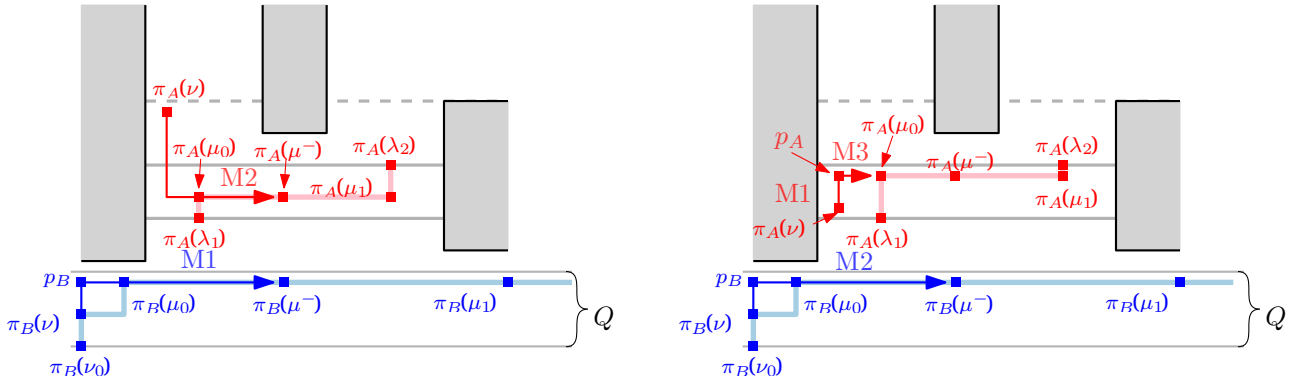


图 11. 引理 3.17 中从 $\boldsymbol{\pi}(\nu)$ 到 $\boldsymbol{\pi}(\mu^-)$ 的捷径方案，其中 $\pi_A(\nu)_y \geqslant \pi_A(\mu^-)^y$（左图），以及 $\pi_A(\nu)^y < \pi_A(\mu^-)^y$（右图）。

总有 $\pi_A(\lambda)_y \geqslant \pi_A(\mu^-)^y$ 和 $\pi_B(\lambda)_y \leqslant \pi_B(\mu^-)^y$，这意味着 $\boldsymbol{\pi}'(\lambda)$ 是 y-分离的。因此，$\boldsymbol{\pi}'$ 的水平运动不会发生冲突。如果一台机器人在 $\boldsymbol{\pi}'$ 中的某个时间 λ 沿垂直线段移动，那么这台机器人要么正在远离另一台机器人，要么由于两台机器人在垂直移动结束时保持 y-分离，它们沿该线段始终保持 y-分离。因此，垂直移动也不会发生冲突。由此，两台机器人在 $\boldsymbol{\pi}'$ 中不会发生碰撞。引理得证。 □

引理*3.18*。假设 $\pi_A(\lambda_1) \in R$ 的底部，且 $\pi_A(\lambda_2) \in R$ 的上边界；存在一个交换区间$[\mu_0, \mu_1]$，其中 B 位于 A 下方；对于包含 $\pi_B(\mu_1)$ 的 *HOR0*($\mathscr{F}$) 矩形 Q，$y(bot(R)) \geqslant y(top(Q))$。令 Q^+ 为一个闭矩形，其下边为 *top*(Q)，高度为 *1*。假设存在一个时间 $\nu < \lambda_1$，此时 $\pi_B[\nu, \mu_1] \subset Q$ 且 $\pi_A(\nu) \in Q \cup Q^+ \cup \gamma(R)$，并且 $\boldsymbol{\pi}(\nu)$ 是 x-分离的。那么存在对 $\boldsymbol{\pi}[0, \mu_1]$ 的合规修改 $\boldsymbol{\pi}^*[0, \mu_1]$，使得对于所有 $\nu' \in [\nu, \mu_0]$，$\boldsymbol{\pi}^*(\nu')$ 都是 x-分离的。

证明。我们将为合适的 $\nu^+ \geqslant \nu$ 和某个 $i \in \{0,1\}$ 构造 $\boldsymbol{\pi}^*[\nu^+, \mu_i]$ 对 $\boldsymbol{\pi}[\nu^+, \mu_i]$的合规重新参数化，使得 $\boldsymbol{\pi}^*(\nu')$ 对所有 $\nu' \in [\nu, \mu_i]$都是 x-分离的。取 $\boldsymbol{\pi}^*[0, \nu^+] = \boldsymbol{\pi}[0, \nu^+]$ 和 $\boldsymbol{\pi}^*[\mu_i, \mu_1] = \boldsymbol{\pi}[\mu_i, \mu_1]$ 后，我们将得到 $\boldsymbol{\pi}[0, \mu_1]$所需的重新参数化。我们首先定义 ν^+，对此有两种情形。

- 如果 π_B 在时间 ν 进入 Q，或者 π_A 在时间 ν 进入 $Q \cup Q^+ \cup \gamma$(走廊)，则令 $\nu^+ := \nu$。
- 否则，$\boldsymbol{\pi}$ 在时间 ν 是 x-分离的。如果 $\boldsymbol{\pi}(\nu)$ 是 $\boldsymbol{\pi}$ 的断点（即，$\pi_A(\nu)$ 和 $\pi_B(\nu)$ 分别是 π_A、π_B 的顶点），则令 $\nu^+ := \nu$。否则，令在时间 ν 正在移动的机器人为 X，并令

$$\nu^+ := \min\{\nu' \in [\nu, \mu_0] : \pi_X(\nu') \text{ lies on a vertical grid line or is a vertex of } \pi_X\}.$$

注意，引理中关于 ν 的三个假设对于 ν^+也成立。当 $\nu^+ = \nu$时，这显然成立。在另一种情形下，我们显然有 $\pi_B[\nu^+, \mu_1] \subset Q$，因为 $\nu^+ \geqslant \nu$。我们还有 $\pi_A(\nu^+) \in Q \cup Q^+ \cup \gamma$(走廊)。事实上，如果 X = 下边界（也就是说，下边界是运动机器人），这显然成立；而如果$X = A$，那么A 正在水平移动，并且不会穿过网格

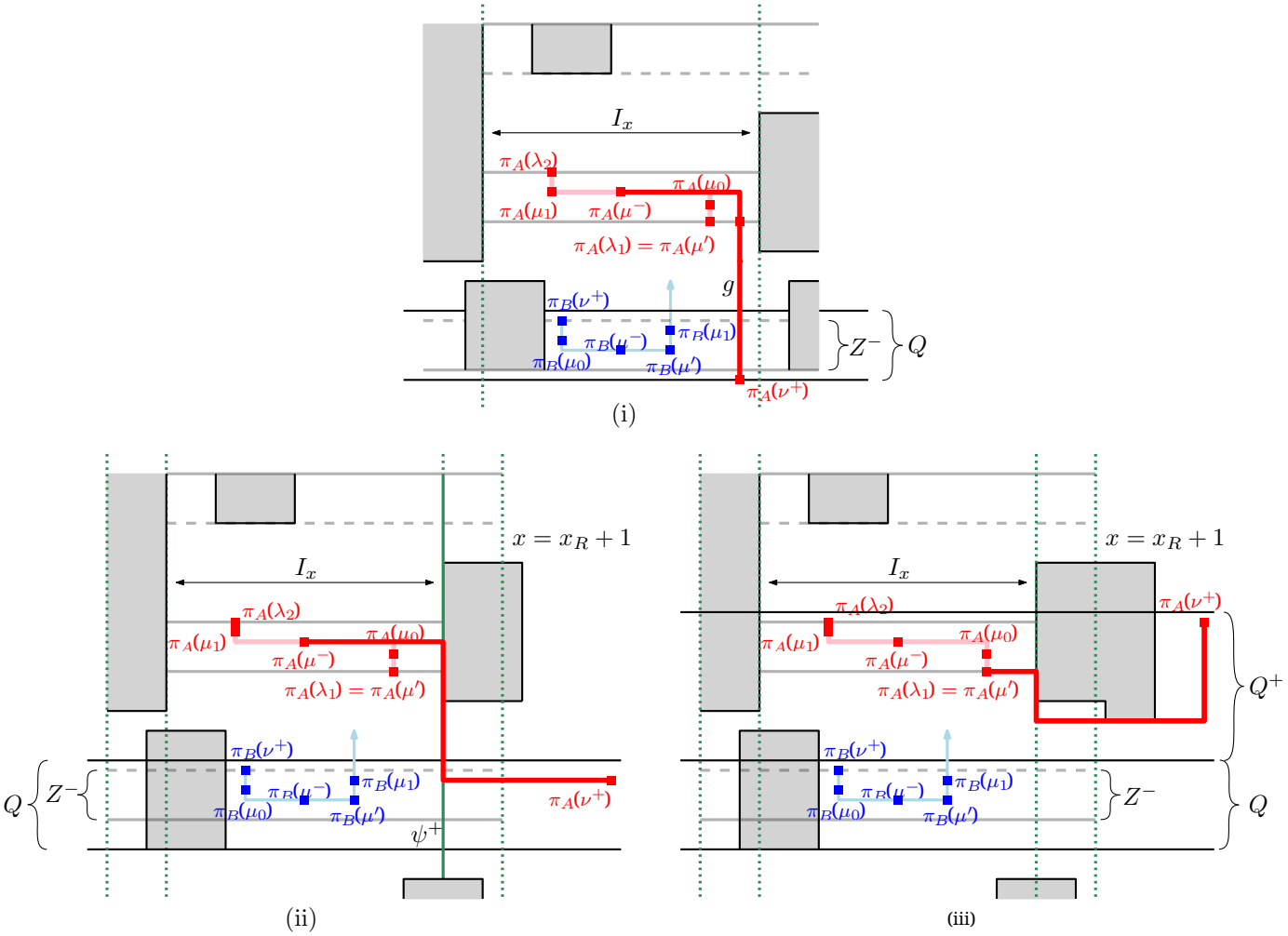


图12. 引理3.18证明的示意图。为便于阅读，原始路径 $\pi_A[\nu^+, \lambda_1]$ 未显示，水平轴也经过压缩。虚线支撑着走廊 和走廊$_\square$的垂直边。**(i)** $\pi_A(\nu^+)_x \in Ix$;**(ii)** $\pi_A(\nu^+)_x \not\in Ix$;**(iii)** $\pi_A(\nu^+) \in Q^+$.

线在 $[\nu,\nu^+)$期间，因此它无法移出 $Q \cup Q^+ \cup \gamma$(走廊)。最后， $\boldsymbol{\pi}(\nu^+)$ 是 x-分离的，因为机器人在时间 ν 时变为 x-分离；因此，X 在时间 ν 水平移动，并且X 在 $[\nu,\nu^+]$ 期间继续远离另一个机器人，因为根据定义，该时间区间不包含 π_X 的顶点。注意，这个论证实际上表明，$\boldsymbol{\pi}[\nu,\nu^+]$ 在任何时刻都是 x-分离的。

由于 $[\mu_0,\mu_1]$ 是一个交换区间，构型 $\boldsymbol{\pi}(\nu^+)$ 与某个 $i \in \{0,1\}$ 对应的 $\boldsymbol{\pi}(\mu_i)$ 具有相同的 x-顺序。接下来，我们将按照下文所述，针对该值 i 对 $\boldsymbol{\pi}[\nu^+,\mu_i]$ 重新参数化。

按照引理 3.8 中相同的方式定义 μ'，如下所示：如果 π_B 在时间 μ_i进入或离开 $\mathscr{I}$(走廊)，或者在时间 $\mu_i = \lambda_2$，则令 $\mu' := \mu_i$。否则，令在时间 μ_i 移动、从而使机器人开始或停止处于 y-分离状态的机器人 $X \in \{A,B\}$。我们将 μ' 设为早于 μ_i 的最后一个时刻，使得 $\pi_X(\mu')$ 是 π_X 的一个顶点，或者 $\pi_X(\mu')$ 位于一条水平网格线上。

现在，我们构造一个 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的合规重新参数化 $\boldsymbol{\pi}[\nu^+,\mu_i]$，使得对于所有 $\nu' \in [\nu^+,\mu_i]$，$\boldsymbol{\pi}^*(\nu')$ 都是 x- 分离的。正如上文所观察到的，$\boldsymbol{\pi}[\nu,\nu^+]$ 在任何时刻都是 x- 分离的，因此这就完成了证明。我们采用的方法与引理 3.8 的证明类似。我们希望使用引理 3.7，得到一个 $(\boldsymbol{\pi}(\nu^+),\boldsymbol{\pi}(\mu'))$-规划 $\boldsymbol{\pi}^*[\nu^+,\mu']$，其中 A 只在 $\pi_A(\nu^+)$ 或 $\pi_A(\mu')$ 停驻，而 B 只在 $\pi_B(\nu^+)$ 或 $\pi_B(\mu')$ 停驻。为了能够应用引理 3.7，我们首先注意到，$\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 与 $\boldsymbol{\pi}(\mu_i)$ 具有相同的 x 顺序，因为两个机器人在这些时刻的 x 坐标相同。因此，$\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 与 $\boldsymbol{\pi}(\nu^+)$ 具有相同的 x 顺序。接下来，我们注意到，在 $\mathscr{F}$ 中存在一条 xy-单调的 $(\pi_B(\nu^+),\pi_B(\mu'))$-路径 φ_B，因为 $\pi_B[\nu,\mu_1] \subseteq$ Q。下面的断言表明，在 $\mathscr{F}$ 中也存在一条较短的 x 单调 $(\pi_A(\nu^+),\pi_A(\mu'))$-路径。

断言 3.1。存在一条 x 单调的$(\pi_A(\nu^+),\ \pi_A(\mu'))$路径 φ_A，位于 $\mathscr{F}$ 中，且满足 $\|\varphi_A\| \leqslant \|\pi_A[\nu^+,\mu']\|$。

证明。若 $\pi_A(\nu^+) \in \gamma$(走廊)，则结论由引理 3.1 得出。现在假设 $\pi_A(\nu^+) \in$ (Q ∪Q$^+$) $\setminus\ \gamma$(走廊)。令 $\mu^- \in [\mu_0,\mu_1]$ 为满足 $\pi_B(\mu^-)_x = \pi_A(\mu^-)_x$的时间；这样的时间存在，因为$[\mu_0,\mu_1]$ 是一个交换区间。注意，$\pi_B(\mu^-) \in$ 走廊$_\updownarrow \cap$ Q $\cap$ Z$^-$。事实上，由引理 3.5以及 B 位于 A 下方这一假设，可得 $\pi_B(\mu^-) \in$ Z$^-$；又因为 $\pi_B(\mu^-)_x = \pi_A(\mu^-)_x$且 $\pi_A(\mu^-) \in$ 走廊，可得 $\pi_B(\mu^-) \in$ 走廊$^\updownarrow$；并且由于 $\pi_B[\nu,\mu_1] \subset$ Q，可得 $\pi_B(\mu^-) \in$ Q。

我们区 分两种情形，具体取决于 $\pi_A(\nu^+)$ 是否位于I_x内，即R的x范围内。

- $\pi_A(\nu^+)_x \in I_x$.
  在这种情形下，$\pi_A(\nu^+)_x$ 必须位于矩形 Z* 的 x 范围内，其中 Z* 是包含 $\pi_B(\mu^-)$ 的 Z$^- \cap \mathscr{F}$ 的连通分支。为证明这一点，考虑 $\pi_A(\nu^+)$ 和 $\pi_B(\mu^-)$ 的包围盒 $\mathscr{B}$。注意，如果 $\pi_A(\nu^+)_x \in$ I$_x$ 且 $\pi_A(\nu^+) \in$ Q$^+$，那么$\pi_A(\nu^+) \in$ R$^\updownarrow$（因为 y(top(Q)) $\leqslant$ y(bot(R))），因此 $\pi_A(\nu^+) \in \gamma$(R)。由于我们假设 $\pi_A(\nu^+) \notin \gamma$(R)，因此必有 $\pi_A(\nu^+) \in$ Q。于是，$\pi_A(\nu^+) \in$ Q 且 $\pi_B(\mu^-) \in$ Q，因此 $\mathscr{B} \subset$ Q。因此，$\pi_A(\nu^+)_x$ 必须位于 Z* 的 x 范围内，否则其内部将与 Z* 的一条垂直边相交 $\mathscr{B}$，从而与 $\mathscr{B} \subset$ Q $\subset \mathscr{F}$ 矛盾。这意味着，从 $\pi_A(\nu^+)$ 到 R 的底部的垂直线段 g 位于 $\mathscr{I}$(R) $\subset \mathscr{F}$ 内。见图12(i)。因此，先沿 g，再从 g 的上端点沿一条 L 形路径到 $\pi_A(\mu')$，便得到一条位于 $\mathscr{F}$ 内的 xy 单调 $(\pi_A(\nu^+),\pi_A(\mu'))$ 路径；这就是所需的 x 单调最短路径 φ_A。

- $\pi_A(\nu^+)x \notin Ix$.

然后，$(\pi_A(\nu^+)_x, \pi_B(\mu^-)_y)$ 与 $\pi_B(\mu^-)$ 之间的水平线段穿过了 ψ R↕ 的一条垂直边；这是因为 $\pi_B(\mu^-) \in$ R↕，而 $\pi_A(\nu^+) \not\in$ R↕。令 $\psi' \supset \psi$ 表示 $\mathscr{F}$ 中包含 ψ 的极大竖直线段。根据 $\pi_A(\nu^+)$ 位于 Q 中还是位于 Q^+ 中，我们区分两种子情况。

- $\pi_A(\nu^+) \in$ Q。注意，ψ' 可通过 $\mathscr{F}$ 中的一条水平线段从 $\pi_A(\nu^+)$ 到达，因为点 $(x(\psi), \pi_B(\mu^-)_y)$ 位于 ψ 上，且该点与 $(x(\psi), \pi_A(\nu^+)_y)$ 之间的垂直线段位于 Q 内。（这是因为 $\pi_A(\nu^+) \in$ Q 且$\pi_B(\mu^-) \in$ Q；参见当前命题证明的第一段。）因此，水平线段 $\pi_A(\nu^+)(x(\psi), \pi_A(\nu^+)_y)$ 位于 Q 内，进而位于 $\mathscr{F}$ 内。线段 ψ' 也可通过一条水平线从 $\pi_A(\mu')$ 到达，因为 $\pi_A(\mu') \in$R。因此，存在一条 xy-单调的 $(\pi_A(\nu^+), \pi_A(\mu'))$- 路径 $\varphi_A \subset \mathscr{F}$，它由这两条水平线段以及 ψ' 的相应部分组成（见图 12(ii)）。

- $\pi_A(\nu^+) \in Q^+$.
  我们将构造一条x 单调路径 φ_A，从 $\pi_A(\nu^+)$ 到 $\pi_A(\mu')$，且满足 $\|\varphi_A\| \leqslant \|\pi_A[\nu^+, \mu']\|$。
  设 p := $\pi_A(\nu^+)$，h := Q 的上边界，且 q := $(\pi_A(\mu')_x$, y(R 的底部)) 是 $\pi_A(\mu')$ 在 R 的底部上的垂直投影。那么三元组 p、q、h 满足引理 3.2 的条件。为此，首先注意到，根据定义，p、q、h 都位于 $\mathscr{F}$ 中。此外，条件 (i) 得到满足：因为 p $\in Q^+$，所以有 $|p_y$ − y(Q 的上边界)$| \leqslant 1$；又因为我们假设 y(Q 的上边界) $\leqslant$ y(R 的底部)，且 y(Q 的上边界) $\geqslant$ y($R_\square$) = y(R 的底部) − 1，所以有 $|q_y$ − y(Q 的上边界)$|$ = | y(R 的底部) − y(Q 的上边界)$| \leqslant 1$。（后者成立是因为 $R_\square \cap Q \neq \emptyset$，这是真的，因为 $\pi_B(\mu_1) \in R_\square \cap Q$。）接下来证明条件 (ii) 得到满足。注意，点 p′ 是 p 在 Q 的上边界上的垂直投影，因为 p $\in Q^+$。因此，pp′ 是 $\mathscr{F}$ 中的一条垂直线段。此外，存在一条从 q 到 q′ 的 xy-单调路径：先沿 R 的底部从 q 水平移动到 (q'_x, q_y)——若 q 位于 Q 的上边界的 x 范围内，则这一步为空——然后垂直移动到 q′。因此，条件 (ii) 得到满足。此外，由于 p 位于 Q 的上边界的 x 范围内，条件 (iii) 也得到满足。由引理 3.2 可知，$\mathscr{F}$ 中所有最短 pq 路径都是 x 单调的。取这样一条 x 单调路径 φ'_A，并从 q 向上延伸一条垂直线段至 $\pi_A(\mu')$（见图12(iii)）。令 φ_A 为所得的 $(\pi_A(\nu^+), \pi_A(\mu'))$-路径。显然，$\varphi_A$ 是 x 单调的，因为 φ'_A 是 x 单调的。

  接下来，我们论证 $\|\varphi_A\| \leqslant \|\pi_A[\nu^+, \mu']\|$。由于 $\lambda_1 \in [\nu, \mu']$，且 A 在 $[\nu, \nu^+$ 期间不会竖直移动，因此路径 $\pi_A[\nu^+, \mu']$ 会在某个时刻$\nu' \in [\nu^+, \mu']$经过 R 的底部。令 φ''_A 为通过将从 $\pi_A(\nu')$ 经 q 到 $\pi_A(\mu')$ 的 L 形路径连接到 $\pi_A[\nu^+, \nu']$ 后得到的 $(\pi_A(\nu^+), \pi_A(\mu'))$-路径。由此可得$\|\varphi_A\| \leqslant \|\varphi''_A\| \leqslant \|\pi_A[\nu^+, \mu']\|$。事实上，第一个不等式成立是因为 φ_A 和φ''_A 是经过 q 的 $(\pi_A(\nu^+), \pi_A(\mu'))$-路径，而根据构造，$\varphi_A$ 是此类路径中最短的；第二个不等式成立是因为，直到到达 $\pi_A(\nu')$ 为止，φ'' 与 $\pi_A[\nu^+, \mu']$相同，而之后通往 $\pi_A(\mu')$ 的路径是一条 L 形路径。

因此，在这两种情形下，我们都有一条长度为 at 的 $\mathscr{F}$ 中的 x-单调 $(\pi_A(\nu^+), \pi_A(\mu'))$-路径。

大多数 $\|\pi_A[\nu^+, \mu']\|$，这证明了该论断。 ◁

由此可知，引理 3.7 的条件均已满足，因此得到一个（$\boldsymbol{\pi}$（ν^+），$\boldsymbol{\pi}$（μ'））-规划 $\boldsymbol{\pi}^*[\nu^+, \mu']$，其中 A 只停在 π_A（ν^+）或 π_A（μ'），而 B 只停在 π_B（ν^+）或π_B（μ'）。[5] 我们将 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的定义域扩展至 $[\nu^+, \mu_i]$，方法是令 $\boldsymbol{\pi}^*[\mu', \mu_i] := \boldsymbol{\pi}[\mu', \mu_i]$。注意，对所有 $\nu' \in [\nu^+, \mu_i]$，$\boldsymbol{\pi}^*$（ν'）都是 x-分离的，因此只需论证时间 ν^+ 和 μ' 对应的潜在停车位置处于有效位置。

注意，在 $\nu^+ = \nu$ 的情形下，时间 ν 是机器人移至网格线或离开网格线的时刻，因此运动机器人 X 位于网格线与 π_X 的一条边的交点处，该处是有效的停车位置。在剩余情形下，根据构造，$\boldsymbol{\pi}^*(\nu^+)$ 的位置是有效的停车位置。对于 μ'，论证类似：如果 π_B 在时间 μ_i 进入或离开，运动机器人 B 位于 π_B 的一条边与网格线的正交交点处。如果 $\lambda_2 = \mu_i$，那么 A 是运动机器人，且位于 π_A 的一条边与上边界(R)的正交交点处。剩下的情形是，μ_i 是 $\boldsymbol{\pi}$ 停止或变为 y- 分离的时刻。在这种情形下，根据构造，$\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 的两个位置都是有效的停车位置。

□

3.3 对路径进行手术

现在我们可以描述如何对 π_A 和 π_B 进行手术，从而将 π_A 的一条给定的不良水平线段 e 与网格线对齐。必要时进行符合条件的修改后，我们可以假设最优方案 $\boldsymbol{\pi}$ 满足引理 3.15–3.18 的条件。理想情况下，我们希望将手术限制在区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$内，但在某些情形下必须在此区间之外进行手术。手术由一个或多个 PUSH 操作组成，这些操作会将 π_A 或 π_B 的一部分推到网格线上。我们先介绍 PUSH 程序，再说明在可能出现的各种情形下所执行的一系列推操作。我们用 $\boldsymbol{\pi}^*$ 表示手术后的（修改后）规划。

PUSH 程序。一次 PUSH 操作需要三个参数：一个机器人 $X \in \{A、B\}$，一个时间区间 $I = [\mu_1, \mu_2]$，以及一条水平网格线的 y 坐标 y^* ——回忆一下，网格线是集合 $L_{\leqslant 2}$中的一条直线——该操作会将子路径 $\pi_X[I]$ 推到网格线 $\ell: y = y^*$。更正式地说，操作 PUSH(X、I、y^*) 得到的新规划 $\boldsymbol{\pi}^*_X$ 通过设定

$$\pi^*_X(\mu)_x := \pi_X(\mu)_x \text{ for all } \mu \quad \text{and} \quad \pi^*_X(\mu)_y := \begin{cases} y^* & \text{if } \mu \in I, \\ \pi_X(\mu)_y & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

因此，PUSH 操作只会改变子路径 $\pi_X[I]$ 上的 y 坐标。我们执行的 PUSH 操作中，手术的具体方式——参数 X、I、y^* 的取值——取决于 $\pi_A(\lambda_1)$ 的位置、$[\lambda_1, \lambda_2]$ 期间不安全区间和交换区间的集合，以及交换区间期间 B 的位置，后文将对此作出解释。

一次 PUSH 操作可能产生需要处理的副作用。首先，PUSH(X、I、y^*)可能会在 μ_1 或 μ_2 处引入不连续点，即I的端点。换言之，对于 $\mu \in$

[5]与引理 3.8 中一样，该规划不一定是重新参数化。不过，由于我们有一个从 $\boldsymbol{\pi}(\nu^+)$ 到 $\boldsymbol{\pi}(\mu')$ 的有效方案，且该方案在 $\mathscr{F}$ 中使用了 xy-单调路径，因此路径 $\pi_A[\nu^+, \mu']$ 和 $\pi_B[\nu^+, \mu']$ 也必定是 xy-单调的，因为 $\boldsymbol{\pi}$ 是最优的。因此，我们可以对这些路径应用引理 3.7，得到一个具有所需性质、同时也是 $\boldsymbol{\pi}$ 的重新参数化的规划。

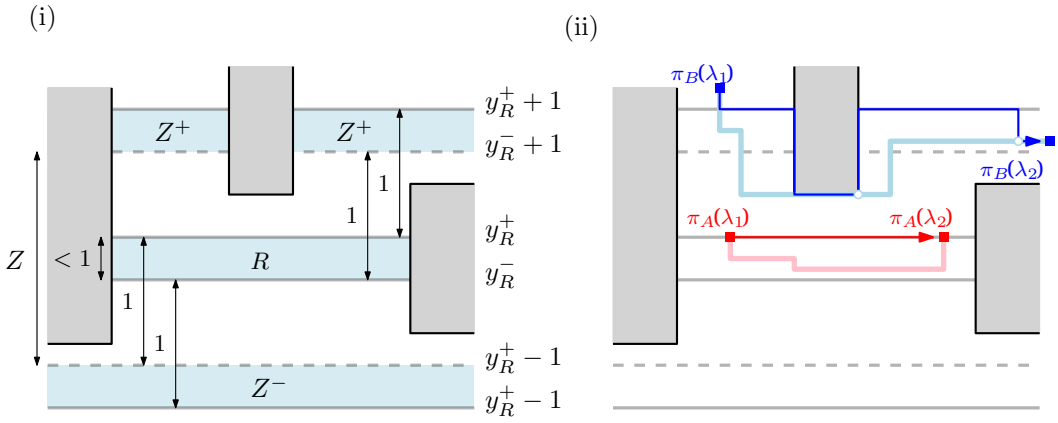


图13. (i) 走廊R的示例，其中包括R + 2□内的周围线条和区域。(ii) 情况 I 中的修改。原始路径以粉色和浅蓝色显示。浅蓝色圆盘标示了 π_B 上交换区间的端点。

$\{\mu_1, \mu_2\}$我们可能有 $\mathrm{p}_X^-(\mu) \neq \mathrm{p}_X^+(\mu)$，其中 $\mathrm{p}_X^-(\mu) := \lim_{\lambda \uparrow \mu} \pi_X^*(\lambda)$，且 $\mathrm{p}_X^+(\mu) := \lim_{\lambda \downarrow \mu} \pi_X^*(\lambda)$。当 $\pi_X(\mu) \neq \pi_X^*(\mu)$ 时，就会发生这种情况。回忆一下，对于所有 λ，$\pi_X^*(\lambda)_x = \pi_X(\lambda)_x$，因此 $\mathrm{p}_X^-(\mu)_x = \mathrm{p}_X^+(\mu)_x$。因此，我们可以通过将垂直线段 $\mathrm{g}_X(\mu) = \mathrm{p}_X^-(\mu)\mathrm{p}_X^+(\mu)$（称为幽灵线段）添加到 π_X^* 中来消除不连续点，从而使路径连续。我们还必须重新参数化 $\boldsymbol{\pi}^*$，以纳入该幽灵线段，同时满足性质 (P1)–(P5)。由于 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是解耦的，只需描述 A 和 B 在 μ 邻域内的“移动”即可；我们将在描述手术之后进行说明。

将 $\pi_X[I]$ 推送到 $\pi_X^*[I]$ 的第二个副作用是，在区间I内，X 可能会与另一台机器人发生碰撞。这只会在$X = A$ 且处于不安全区间 $[\nu_1, \nu_2] \subset I$ 时发生。在这些区间内，我们随后执行一组次级推移。正如下文将会看到的，次级推移总是在 π_B 上执行，也就是说，由初级推移在 π_A 上造成的碰撞总是通过让机器人A 将B 推开来解决。更准确地说，令 $\nu \in I$ 为一个时间点，使得当ν 位于不安全区间 $[\nu_1, \nu_2]$ 时，$\pi_B(\nu)$ 与 $\pi_A^*(\nu)$ 发生冲突。我们执行 PUSH$(B, (\nu_1, \nu_2), y^*)$，其中

$$y^* := \begin{cases} y(\mathsf{top}(R)) + 1 & \text{if } \pi_B(\nu)_y > \pi_A(\nu)_y, \\ y(\mathsf{bot}(R)) - 1 & \text{if } \pi_B(\nu)_y < \pi_A(\nu)_y. \end{cases} \tag{2}$$

注意，这一定义明确，因为根据不安全区间的定义，在整个区间内，B 要么始终位于A上方，要么B 始终位于A 下方。次级推送操作也可能在时间 ν_1 和 ν_2处产生不连续点。

第三个副作用是，PUSH 操作可能会将 $\boldsymbol{\pi}$ 的一条垂直线段压缩为长度为 0 的垂直线段。只要保留这条长度为 0 的线段，使交替性质得以维持，就不会有问题。

整体手术。不失一般性，假设 $\pi_A(\lambda_2) \in$ 上边界(走廊)。 $\boldsymbol{\pi}$ 的整体手术取决于 $\pi_A(\lambda_1)$的位置、 $[\lambda_1, \lambda_2]$期间交换区间的数量（根据引理3.15，至多为两个），以及 B 在交换区间中的位置。我们将 π_A 修改为 π_A^* 的过程分为三种主要情形。

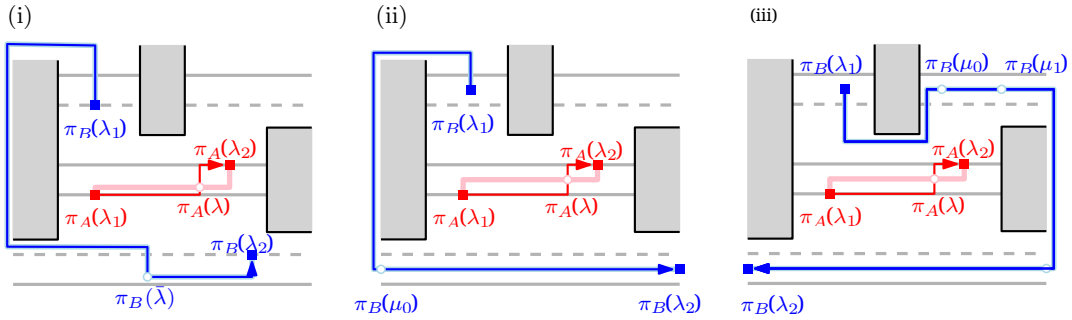


图 14. 情形 II 各子情况中的修改。原始路径以粉色和浅蓝色显示。在所有情形中，$\boldsymbol{\pi}^{*A}$ 都会在合适的时间 $\bar{\lambda}$ 跳到上边界(走廊)。(i) 情形 II(a) 中的修改。$\bar{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{\pi}$ 进入最后一个y分隔区间的时刻。(ii) 情形 II(b) 中的修改。$\lambda = \mu_1$ 是 $\boldsymbol{\pi}$ 进入B 位于A下方时的交换区间的时刻。(iii) 情形 II(c) 中的修改。$\lambda = \mu_2$ 是 $\boldsymbol{\pi}$ 离开B 位于A上方时的交换区间的时刻。

- 情况 I：$\pi_A(\lambda_1) \in$ 上边界(走廊)。我们执行一次 PUSH 操作：PUSH(A, $[\lambda_1, \lambda_2]$, y(上边界(走廊)))；参见图13(ii)。

- 情形 II：$\pi A(\lambda_1) \in$ 下边界(走廊)。此外，交换区间至多有一个；或者有两个交换区间，并且在第一个交换区间期间，πB 位于 πA 上方。
  在这种情形下，我们选择一个合适的时间值 $\bar{\lambda} \in [\lambda_1, \lambda_2]$ 并执行两次推操作：PUSH(A, $[\lambda_1, \bar{\lambda}]$, y(下边界(走廊))) 和 PUSH(A, $[\bar{\lambda}, \lambda_2]$, y(上边界(走廊)))。因此，机器人A 在时间 λ_1 到 $\bar{\lambda}$期间沿下边界(走廊) 移动，然后切换为沿上边界(走廊)移动，直至时间 λ_2。对于 λ 的选择，我们有三种子情况，如图 14 所示。

  – 情形 *II(a)*：不存在交换区间。如果 $\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$ 中的所有构型都满足y分离，那么在整个区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 内，B 要么位于A 下方，要么位于A上方。若B 在 $[\lambda_1, \lambda_2]$期间位于A 下方（分别为上方），则设定 $\lambda = \lambda_1$ （分别为 $\lambda = \lambda_2$）。否则，$\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$ 中存在一个不满足y分离条件的构型。于是我们设定

$$\bar{\lambda} := \sup\{\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] : \boldsymbol{\pi}(\lambda) \text{ is not } y\text{-separated}\}.$$

  因此，对于所有 $\lambda \in [\bar{\lambda}, \lambda_2]$，$\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 都满足y分离条件。

  – 情形 *II(b)*：存在一个交换区间，且 B 在此交换区间内位于 A 下方。令$[\mu_0, \mu_1]$ 为该交换区间。设定 $\bar{\lambda} := \mu_0$。– 情形 *II(c)*：至少存在一个交换区间，且 B 在第一个交换区间内位于 A 上方。令 $[\mu_0, \mu_1]$ 为该交换区间。设定 $\bar{\lambda} := \mu_1$。

  注意，我们可以在 λ 处使 π_A 不连续，因此在 $\pi_A(\bar{\lambda})$ 处添加一条幽灵线段。利用引理 3.6，可以验证这条幽灵线段与网格线或 π_A 或 π_B 的垂直线段对齐。此外，如果 $\bar{\lambda} \neq \{\lambda_1, \lambda_2\}$，那么 $\boldsymbol{\pi}(\bar{\lambda})$ 在 x 和 y 方向上均相互分离。

- 情形 III：$\pi A(\lambda_1) \in$ 下边界(走廊)，且恰有两个交换区间，并且在第一个交换区间内，πB 位于 πA 下方。

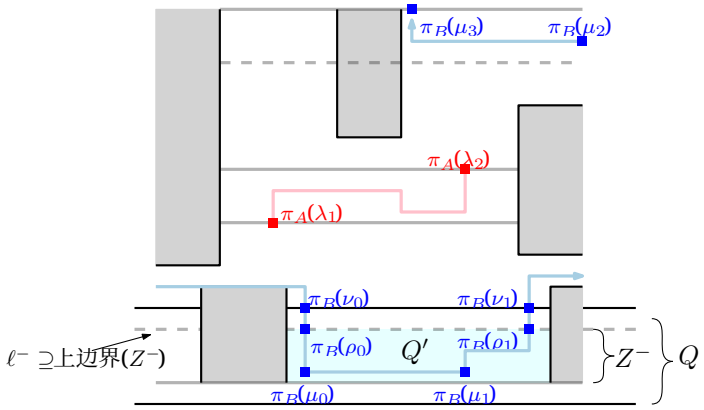


图15。情形 III 的设置。Z^-、矩形Q 和Q'，以及时间实例 ν_0、 ν_1、 ρ_0、 ρ_1。

设 $[\mu_0, \mu_1]$ 和 $[\mu_2, \mu_3]$ 是两个交换区间。不失一般性，假设 $\mu_1 < \mu_2$，也就是说，$[\mu_0, \mu_1]$ 是第一个交换区间。由于 $\boldsymbol{\pi}[\mu_0, \mu_1]$ 中的所有构型都是y-分离的，并且在 $[\mu_0, \mu_1]$期间，B 位于A 下方，因此我们得出， $\pi_B[\mu_0, \mu_1]$ 位于 $\mathscr{F} \cap Z^-$ 的一个连通分支中，该连通分支是一个矩形Q'。L_0，中没有一条直线（即支撑 $\partial\mathscr{F}$ 各边的直线集合）与 Z^- 的内部相交，因为若如此，一条水平主网格线就会与R的内部相交，而这与细分 HOR($\mathscr{F}$) 的构造矛盾。

根据上述讨论， $\pi_B[\mu_0, \mu_1]$ 包含在矩形 Q $\supseteq$ Q′ 中，该矩形是由 L_0 的水平线诱导的 $\mathscr{F}$ 的 HOR0($\mathscr{F}$) 细分。令 $[\nu_0, \nu_1]$ 为包含 $[\mu_0, \mu_1]$ 的极大区间，使得 $\pi_B(\nu_0, \nu_1) \subset$ 位于 int(Q) 中。注意， $\pi_B(\nu_0)$ 和 $\pi_B(\nu_1)$ 中至多有一个位于 Q 的底部，否则将 $\pi_B[\nu_0, \nu_1]$ 推至 Q 的底部会得到一条更短的规划。事实上，原路径 π_B 进入了 $\mathscr{I}$(R) 的影响区域，因而进入了 $\pi_B[\nu_0, \nu_1] \not\subset$ Q 的底部；因此，将 $\pi_B[\nu_0, \nu_1]$ 推到 Q 的底部会得到一条更短的路径。

令 $[\rho_0, \rho_1] \supseteq [\mu_0, \mu_1]$ 为满足以下条件的极大区间： $\pi_B[\rho_0, \rho_1]$ 位于或低于水平线 $\ell^- := y = y($上边界$(R)) - 1$，且该区间包含上边界(Z^-)。注意， $\rho_1 < \lambda_2$，因为存在一个交换区间，其 B 位于 A 上方。此外，我们可能有 $\rho_0 < \lambda_1$；如果 $\pi_B(\nu_0)$ 和 $\pi_B(\nu_1)$ 都位于 ℓ^- 上方或其上，那么我们有 $[\rho_0, \rho_1] \subseteq [\nu_0, \nu_1]$。

如图16所示，根据 $\pi_B(\nu_0)$和 $\pi_B(\nu_1)$ 中哪些位于下边界(Q)上，共有三种子情况。确实，所有子情况都包括在内，因为如上所述， $\pi_B(\nu_0)$ 和 $\pi_B(\nu_1)$ 不可能同时位于下边界(Q)上。在每种子情况下，我们执行两次推操作：

– 情形 III(a)： $\pi_B(\nu_0) \in$ Q 的底部，且 $\pi_B(\nu_1) \in$ Q 的上边界。见图16 (i)。我们执行 PUSH(A, $[\lambda_1, \lambda_2]$, y(R 的底部)) 和 PUSH(B, $[\nu_0, \mu_1]$, y(Q 的底部))。– 情形 III(b)： $\pi_B($ $\nu_0) \in$ Q 的上边界，且 $\pi_B(\nu_1) \in$ Q 的底部。见图16 (ii)。我们执行 PUSH(A, $[\lambda_1, \lambda_2]$, y(R 的底部)) 和 PUSH(B, $[\mu_0, \nu_1]$, y(Q 的底部))。– 情形 III(c)： $\pi_B(\nu_0) \in$ Q 的上边界，且 $\pi_B(\nu_1) \in$ Q 的上边界。见图16 (iii)。我们执行 PUSH(A, $[\lambda_1, \lambda_2]$, y(top(R))) 和 PUSH(B, $[\rho_0, \rho_1]$, y(top(R)) $- 1$)。请注意，与

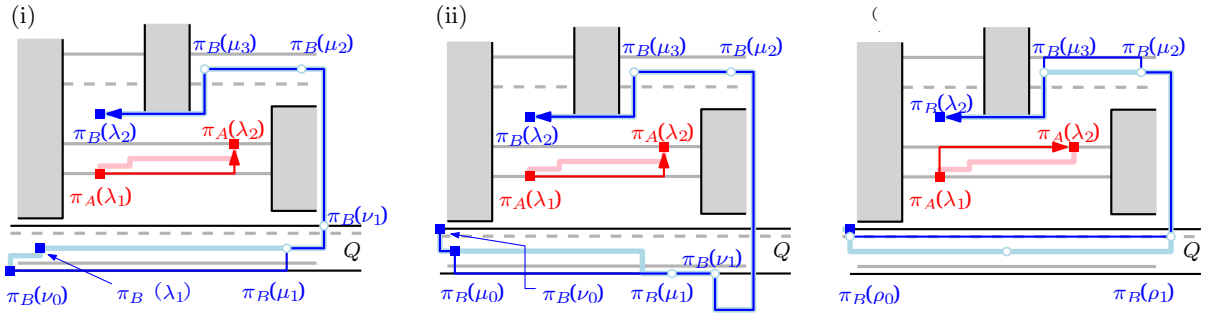


图16. 情形 III 的各个子情况中的修改。原始路径以粉色和浅蓝色表示。(i) 在情形 III(a) 中，我们将 $\pi_A[\lambda_1,\lambda_2]$ 推到下边界(走廊)上，并将 $\pi_B[\nu_0,\mu_1]$ 推到y(下边界(Q))上。(ii) 在情形 III(b) 中，我们也将 $\pi_A[\lambda_1,\lambda_2]$ 推到下边界(走廊)上，并将 $\pi_B[\lambda_1,\nu_1]$ 推到 y(下边界 (Q))上。在此示例中，我们有 $\mu_0=\lambda_1$。(iii) 在情形 III(c) 中，我们将 $\pi_A[\lambda_1,\lambda_2]$ 推到上边界(走廊)上，并将 $\pi_B[\rho_0,\rho_1]$ 推到上边界(走廊) -1上。我们还有一次次级推送，即将 $\pi_B[\mu_2,\mu_3]$ 推到上边界(走廊) $+1$上。

前两个子情况不同，我们将A 推至(R) 上边界，而不是推至(R) 底部；并将B 推至(Z^-) 上边界，而不是推至(Q)底部。

这些推操作可能会在时间 λ_1 或 λ_2使 $\boldsymbol{\pi}_A^*$ 产生不连续点。此外，在情形 III(a) 中，我们可能会在时间 μ_1使 $\boldsymbol{\pi}_B^*$ 产生不连续点；在情形 III(b) 中，也可能在时间 μ_0产生不连续点。在情形 III(c) 中，由于$\pi_B(\rho_0)_y = \pi_B(\rho_1)_y = y$(上边界(走廊)) -1，我们不会在 ρ_0 或 ρ_1 处引入不连续点。同样可以验证，为消除不连续点而添加的所有幽灵线段，都与某条垂直网格线或 π_A 或 π_B的一条垂直线段对齐。

主要手术过程的描述到此完成。回想一下，每当对A 执行主要推送操作导致 π_A^* 与 π_B^* 发生冲突时，我们都会按照上述说明对B 执行次级推送操作。现在，我们将说明如何消除推操作引入的不连续点。

消除不连续点。 现在，我们将说明如何重新参数化 $\boldsymbol{\pi}^*$，以描述沿着为消除不连续点而添加的幽灵线段的运动，从而使所得规划保持可行。我们首先证明创建幽灵线段的时间点所具有的几个关键性质。对于 $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$，如果 $\boldsymbol{\pi}$ 在 λ处从y-分离状态转变为非y-分离状态，或反之，我们称 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ y-半分离。换言之，如果 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 满足 $|\pi_A(\lambda)_y - \pi_B(\lambda)_y| = 1$，并且存在某个 $\delta>0$，使得 $\boldsymbol{\pi}$在 $[\lambda-\delta,\lambda)$ 期间或在$(\lambda,\lambda+\delta]$期间不满足y-分离，则称其为y-半分离。

引理 3.19。 设 λ 是一个时间点，在该时间点，$\boldsymbol{\pi}$ 的手术过程中执行主要或次要 PUSH 操作所创建了一条幽灵线段。则以下性质成立。

(i) $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$。

(ii) 如果 $\lambda\notin\{\lambda_1,\lambda_2\}$ 和 $\pi_B(\lambda)\notin\partial\mathscr{I}$(走廊)，那么 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 是 y-半分离的。

(iii) 如果 $\pi_B(\lambda)\in$上边界（走廊$_\square$）$\cup$下边界（走廊$_\square$），那么 π_B^*可能仅在情形 *III(a,b)* 中于时间 λ 出现不连续点，这是由于对 B 执行了主要推送操作；而幽灵线段 $g_B(\lambda) = p_B^-(\lambda)\,p_B^+(\lambda)$ 位于走廊$_\square$的内部下方。

证明。 由上述讨论可知——见情形 II 和 III——主推送仅在区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 内产生不连续点。另一方面，如果 λ 处的不连续点是由次级推送产生的，那么 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 就是一个不安全区间的端点。根据不安全区间的定义，可得 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$。因此，(i) 成立。

为证明 (ii)，假设在 $\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$ 处出现不连续点。如果这种情况发生在情形 II(a) 中，则 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 是y-半分离的。在情形 II(b,c) 和 III 中，以及对于次级推送，我们知道 λ 是某个不安全区间的端点。如果 $\pi_B(\lambda) \notin \partial\mathscr{I}(R)$ 且 $\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$，那么不安全区间的极大性条件意味着 $\boldsymbol{\pi}$ 在时间 λ 从y-分离转变为非y-分离，或反之，因此 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 是y-半分离的。由此可得 (ii) 成立。

最后，假设 $\pi_B(\lambda) \in$ 上边界($\mathrm{R}_\square$) $\cup$下边界($\mathrm{R}_\square$)。注意，只有当 λ 是不安全区间 I 的端点时，$\pi_B^*(\lambda)$ 中才可能出现不连续点。如果在区间 I 期间对 B 执行了次级推送，且 $\pi_B(\lambda) \in$ 上边界($\mathrm{R}_\square$)（分别地，$\pi_B(\lambda) \in$ 下边界($\mathrm{R}_\square$)），那么次级 PUSH 会将 $\pi_B^*(\lambda)$ 设为上边界($\mathrm{R}_\square$)（分别地，下边界($\mathrm{R}_\square$)），因此 π_B^* 在 λ 处没有不连续点。因此，该不连续点是由情形 III(a) 或情形 III(b) 中的主推送引起的，这意味着 $\pi_B(\lambda)$ 是幽灵线段 $\mathrm{g}_B(\lambda)$ 的上端点。在情形 II(a,b) 中，B 在区间 $[\mu_0, \mu_1]$ 期间位于 A 下方，而由 B 的主推送引起的不连续点出现在 μ_0 或 μ_1 处，因此 $\pi_B(\lambda) \in$ 下边界($\mathrm{R}_\square$)，从而 $\mathrm{g}_B(\lambda)$ 位于 $\mathrm{R}_\square$ 的内部下方。引理得证。

□

现在我们描述如何在 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$的邻域内重新参数化规划：如果 $\boldsymbol{\pi}^*(\lambda)$ 有一个不连续点，并且生成了一条幽灵线段$g := g_X(\lambda)$，其中$X \in \{A、B\}$。令$Y \neq X$ 为另一台机器人。注意，π_Y^* 也可能在 λ 处有一个不连续点。

如果 $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$，那么我们在 $\pi_A(\lambda)$ 上插入一个断点。（如果 $\pi_A^*(\lambda)$ 有一个不连续点，那么这个断点对应于 $\mathrm{p}^-\mathrm{A}(\lambda)$。）类似地，如果 $\pi_B(\lambda) \in \partial\mathscr{I}(\mathrm{R})$，我们就在 $\pi_B(\lambda)$ 处插入一个断点。很容易看出，插入这些断点是对规划的合规修改。令 $\boldsymbol{\pi}[\lambda^-, \lambda^+]$ 为$\boldsymbol{\pi}$ 中包含 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 的线段（位于两个相邻断点之间）；如果 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 的一个断点，那么 $\lambda^- = \lambda^+ = \lambda$。在这种情形下，我们首先在 λ处添加一个很短的时间区间 I_λ，对所有 $\lambda' \in \mathrm{I}_\lambda$，令 $\boldsymbol{\pi}(\lambda') = \boldsymbol{\pi}(\lambda)$，并在 I_λ 期间重新参数化规划，使得 $\pi_X^*[\mathrm{I}_\lambda] = \mathrm{g}$。

由于 $\boldsymbol{\pi}$ 是解耦的，其中一个机器人在时间 λ 处于停放状态，另一个则在区间 $[\lambda^-, \lambda^+]$内沿着线段移动。我们通过描述所执行的移动序列，来说明 $\boldsymbol{\pi}^*$在区间 $[\lambda^-, \lambda^+]$ 内的重新参数化。首先，假设 π_Y^* 在 λ处没有不连续点。需要考虑三种情形：

(i) 在时间 λ，Y 停放在其停放位置 $\pi_Y^*(\lambda)$。先沿 $\pi_X^*[\lambda^-, \lambda)$ 移动 X，再沿幽灵线段 g 移动，最后沿 $\pi_X^*(\lambda, \lambda^+]$ 移动。(ii) $\pi_Y^*(\lambda)$ 是一个断点。在这种情形下，$\lambda^- = \lambda^+ = \lambda$。将 Y 停放在 $\pi_Y^*(\lambda)$，并沿幽灵线段 g 移动 X。（回想一下，我们已将 λ 替换为一个很小的区间 I_λ，以参数化 X 沿 g 的移动。）(iii) $\pi_Y^*(\lambda)$ 位于 π_Y^* 的线段 $\mathrm{e}_Y := \pi_Y(\lambda^-)\pi_Y(\lambda^+)$ 的相对内部。由于 $\pi_Y^*(\lambda)$ 不是断点，$\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$ 和 $\pi_B(\lambda)$ 都不 $\notin \partial\mathscr{I}$(走廊)。根据引理 3.19，$\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 是一个 y-半分离配置。y-半分离配置的定义表明，$\pi_Y(\lambda)$ 是 x-分离的，并且 e_Y 是一条垂直线段。由于 $\boldsymbol{\pi}$ 是解耦的，且 Y 在时间 λ 正在移动，因此 X 在时间 λ 停放于 $\mathrm{p}_X^-(\lambda)$。我们在时间 λ^- 将 Y 停放（位于

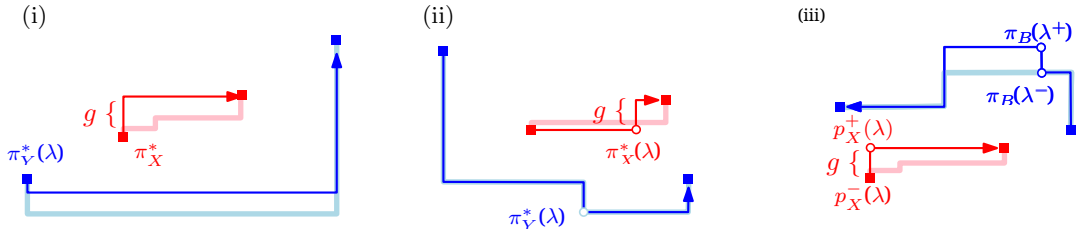


图17. 在时间 λ 处消除不连续点的各种情形。在情形 (i) 中，我们沿着 g 直接移动 X。在情形 (ii) 中，我们将 Y 停放在断点处，并直接移动 X。在情形 (iii) 中，我们将 Y 停放在 $\pi^*_Y(\lambda^-)$ 处，沿着 g 移动 X，将 Y 移动到 $\pi^*_Y(\lambda^+)$，然后继续进行 $\boldsymbol{\pi}^*$。

位置 $\pi^*_Y(\lambda^-)$），沿幽灵线段 g 移动 X，将 X 停放在 $p^+_X(\lambda)$，沿线段 $\pi^*_Y(\lambda^-)$ $\pi^*_Y(\lambda^+)$ 移动 Y。

如果 π^*_A 和 π^*_B 在 λ 处都有不连续点，那么我们将 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda^-,\lambda^+]$ 重新参数化如下：首先沿着 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda^-,\lambda^+)$ 行进，将 A 停放在 $\mathrm{p}^-\,\mathrm{A}(\lambda)$ 处，并沿幽灵线段 $\mathrm{p}^-_B(\lambda)\mathrm{p}^+_B(\lambda)$ 移动 B；将 B 停放在 $\mathrm{p}^+_B(\lambda)$ 处，并沿幽灵线段 $\mathrm{p}^-\,\mathrm{A}(\lambda)\mathrm{p}^+\,\mathrm{A}(\lambda)$ 移动 A；最后沿着 $\boldsymbol{\pi}^*(\lambda,\lambda^+]$ 行进。

至此完成了对 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda^-,\lambda^+]$ 重新参数化的描述。第 4 节中的引理 4.2 证明了重新参数化后 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda^-,\lambda^+]$ 的可行性。

4 正确性证明

现在我们证明，由上述手术得到的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 保持性质 (P1)–(P5)。根据构造，所得规划是解耦且交替的，因此满足 (P5)。此外，选定的坏线段 e 被推至一条网格线，并且没有引入新的水平不良线段，因此满足 (P3)。重新参数化过程在断点处引入的幽灵线段和零长度线段，是 $\boldsymbol{\pi}^*$ 中唯一新增的垂直线段。这些断点引入于网格线与 $\boldsymbol{\pi}$ 的线段的交点处，因此它们位于垂直网格线上，或与 $\boldsymbol{\pi}$ 的垂直线段对齐。手术程序中的讨论表明，由主要推送操作产生的幽灵线段也满足这一性质。最后，由次级推移在 π^*_B 上引入的幽灵线段位于不安全区间的一个端点上，因此根据引理 3.6，它们也具有所需的性质。因此，手术同样保持了 (P4)。在本节的其余部分，我们将重点证明 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的可行性 (P1) 和最优性 (P2)。

4.1 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的可行性

我们通过证明 π^*_A 和 π^*_B 均位于 $\mathscr{F}$ 内，且对于任意 λ，$\pi^*_A(\lambda)$与 $\pi^*_B(\lambda)$ 之间不存在冲突，来证明 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的可行性。机器人 A 的规划仅在时间区间 $[\lambda_1,\lambda_2]$内修改，并且这些修改使得 $\pi^*_A[\lambda_1,\lambda_2]$（包括添加到 π_A的幽灵线段）均位于走廊 $R \subset \mathscr{F}$内。同样，由主要推送操作（发生在情形 III 中）引起的 π_B 中的修改（包括幽灵线段）均位于矩形 $Q \subset \mathscr{F}$内。因此，接下来只需证明，由于 π_B 中的修改

次级推送操作始终位于自由空间 $\mathscr{F}$ 内，且 π_B^* 与 π_A^* 不存在冲突（围绕幽灵线段重新参数化规划后）。为此，我们首先证明，在添加幽灵线段之前，我们的次级推送操作能够解决不安全区间内的冲突。

引理 4.1。 如果对 $\pi_B[\nu_1, \nu_2]$ 执行次级推送，那么新的子路径 $\pi_B^*[\nu_1, \nu_2]$（包括其幽灵线段）都位于 $\mathscr{F}$ 中。此外，在添加幽灵线段之前， $\pi_A^*[\nu_1, \nu_2]$ 和 $\pi_B^*[\nu_1, \nu_2]$ 不会发生冲突。

证明。次级推送的形式为 PUSH(B, (ν_1, ν_2), y*)，其中 y* = y(top(R)) + 1 或 y* = y(bot(R)) − 1。由于对于所有 $\nu \in (\nu_1, \nu_2)$，y(bot(R)) $\leqslant \pi_A^*(\nu)_y \leqslant$ y(top(R))，因此这立即说明，在添加幽灵线段之前， $\pi_B^*[\nu_1, \nu_2]$ 和 $\pi_A^*[\nu_1, \nu_2]$ 不会发生冲突。

为证明 $\pi_B^*[\nu_1, \nu_2] \subset \mathscr{F}$，我们首先注意到，根据不安全区间的定义，对于所有 $\nu \in (\nu_1, \nu_2)$， $\pi_B(\nu)$ 必须与 $\pi_A(\nu)$在 y 方向上分离。假设在 $[\nu_1, \nu_2]$期间，<style id='B '>B 位于 A 下方 ——<style id='B '>B 位于 A 上方的情形与此对称 —— 那么 $\pi_B[\nu_1, \nu_2] \subset Z^-$。回想一下，$Z^- \cap \mathscr{I}(R)$ 的每个连通分支都是一个矩形。因此， $\pi_B[\nu_1, \nu_2]$ 及其幽灵线段都包含在这样一个矩形内，而次级推送会使路径保持在该矩形内，因而也保持在 $\mathscr{F}$ 内。 □

注意，对于任意 λ，如果 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 在 x 方向上分离，那么 $\pi_A^*(\lambda)$ 和 $\pi_B^*(\lambda)$ 也不会发生冲突，因为我们没有改变路径上任何点的 x 坐标。任何满足 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 未在 x 方向上分离的 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$，都必须位于某个不安全区间内。因此，引理 4.1 意味着，在应用完所有次级推送、但尚未添加幽灵线段时，构型 $\pi_A^*(\lambda)$ 和 $\pi_B^*(\lambda)$ 不会发生冲突。下面的引理证明，即使添加幽灵线段并对规划重新参数化之后， $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 仍然可行。

引理 4.2。 假设在添加幽灵线段之前， $\boldsymbol{\pi}^*$ 在时间 λ 处存在一个不连续点，且 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 位于线段 $\boldsymbol{\pi}[\lambda^-, \lambda^+]$上。那么，在区间 $[\lambda^-, \lambda^+]$内对 $\boldsymbol{\pi}^*$ 重新参数化，可确保 A 和 B 在区间 $[\lambda^-, \lambda^+]$内不会发生冲突。

证明。 我们区分三种情形。

- 首先，假设 $\lambda \neq \{\lambda_1, \lambda_2\}$ 和 $\pi_B(\lambda) \notin \partial\mathscr{I}$(走廊)。那么，引理 3.19 (ii) 表明 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 是 y-半分离的。假设X 在时间 λ 处停放，且Y 沿垂直线段 $\pi_Y[\lambda^-, \lambda^+]$移动。由于 $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ 是 x-分离的，在对 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda^-, \lambda^+]$重新参数化后，$A$ 和B 在 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda^-, \lambda^+]$ 期间不会发生冲突。

- 接下来，假设 πB(λ) $\in \partial\mathscr{I}$(R)。在这种情形下， $\lambda^- = \lambda^+ = \lambda$。首先，假设 π^*B 在 λ 处有一个不连续点，并添加了幽灵线段 gB(λ)。如果 πB(λ) $\in$ top($R_\square$) ∪bot($R_\square$)，那么根据引理 3.19(iii)，gB(λ) 位于 $R_\square$ 之外。另一方面，如果 πB(λ) 位于 $R_\square$ 的左边缘或右边缘，那么 gB(λ) 位于 $\partial R_\square$上。无论哪种情形，在 $[\lambda^-, \lambda^+]$期间 A 位于 R 内部时，gB(λ) 都不会与 $R_\square$ 的内部相交。如果 π^*B 在 λ处没有不连续点，那么当 A 在 R 内沿其幽灵线段移动时，B 停放在 $\partial\mathscr{I}$(R)。因此，在 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda^-, \lambda^+]$ 重新参数化之后，A 和 B 不会发生冲突。

• 最后，假设 $\lambda = \lambda_1$。（$\lambda = \lambda_2$ 的情形是对称的。）此时，B 停放在$\pi_B(\lambda_1)$ 处的 $\boldsymbol{\pi}$，A 沿一条垂直线段移动，并且由于我们在 $\pi_A(\lambda)$处引入了一个断点，$\lambda^- = \lambda^+ = \lambda$。如果 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_1)$ 在x方向上分离，那么沿各自的幽灵线段移动A 和/或B 不会导致冲突。因此，假设 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_1)$ 在x方向上未分离。那么 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_1)$ 在y方向上分离，并且 λ_1 是不安全区间I的一个端点，且该区间不是交换区间。

断言 4.1。 $\pi_B(\lambda_1) \in \mathit{top}(R_\square) \cup R$ 的底部$(R_\square)$ 并且 π_B^* 在 λ_1处没有不连续点。

证明。首先注意，在这种情形下，$\pi_B^*(\lambda_1)$ 处的不连续点只能由次级推送引起。（事实上，由主推送导致的 π_B^* 不连续点——这种情况可能出现在情形 III 中——总是发生在交换区间的端点处。）因此，根据引理 3.19，只需证明 $\pi_B(\lambda) \in \mathrm{top}(\mathrm{R}_\square) \cup \mathrm{R}$ 的底部$(\mathrm{R}_\square)$。在情形 I 中，只有当 B 位于 A 上方时，才会对 B 执行次级推送。由于 $\pi_A(\lambda_1) \in \mathrm{top}(\mathrm{R})$，我们有$\pi_B(\lambda_1) \in \mathrm{top}(\mathrm{R}_\square)$，如所述。在情形 III 中，根据引理 3.16，在时间 λ_1，B 位于 A 下方。由于 $\pi_A(\lambda_1) \in \mathrm{R}$ 的底部(R)，我们有 $\pi_B(\lambda_1) \in \mathrm{R}$ 的底部$(\mathrm{R}_\square)$，如所述。最后，在情形 II 中，若 B^-在 λ_1 时位于 A 上方，则意味着 λ 的值大于[6] I_λ 的右端点，并且由于 $\pi_A^*[\lambda, \bar{\lambda}] \subset \mathrm{R}$ 的底部，不会对 I_λ 执行次级推送。但这样一来，π_A^* 和 π_B^* 在 λ_1处都没有不连续点，这就产生了矛盾。因此，在 λ_1时，B 位于 A 下方。由于 $\pi_A(\lambda_1) \in \mathrm{R}$ 的底部(R)，我们有 $\pi_B(\lambda_1) \in \mathrm{R}$ 的底部$(\mathrm{R}_\square)$，如所述。◁

如果 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_1)$ 不是 x-分离的，并且只有 $\pi_A^*(\lambda_1)$ 存在不连续点，那么我们处于手术的情形 II 或 III。结合断言 4.1 可知，$\pi_B(\lambda_1) \in \mathrm{Q}$ 的底部（走廊$_\square$），因此我们的冲突消解程序会将 B 停放在 $\pi_B(\lambda_1)$，同时 A 沿着幽灵线段 $p^-{}_A(\lambda_1)\, p^+{}_A(\lambda_1)$ 移动，从而确保在对 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda^-, \lambda^+]$ 重新参数化后，A 和 B 不会发生冲突。引理得证。

□

我们得出 $\boldsymbol{\pi}^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 是可行的，这就证明了手术在情形 I、II 和 III(b) 中的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是可行的，因为在这些情形下，规划仅在 $[\lambda_1, \lambda_2]$期间被修改。这也基本上说明了情形 III(a) 和 III(c) 下的可行性，唯一的例外是手术可能会在区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$之外修改 $\boldsymbol{\pi}$。特别地，在情形 III 中可能出现 $\nu_0 < \lambda_1$。于是，在情形 III(a) 中，我们将 $\pi_B(\nu_0, \mu_1)$ 推至 Q 的底部，或在情形 III(c) 中将 $\pi_B(\rho_0, \rho_1)$ 推至 $\mathrm{top}(\mathrm{Z}^-)$ 时，可能会发生这样的情况：对于某个 $\nu \in (\nu_0, \lambda_1)$，$\pi_B^*(\nu)$ 与 $\pi_A(\nu)$ 发生冲突。我们将论证，事实上这种情况不可能发生：如果存在这样的 ν，那么我们可以对 $\boldsymbol{\pi}$采取捷径，从而与 $\boldsymbol{\pi}$的最优性矛盾；或者证明 $\boldsymbol{\pi}[\nu_0, \lambda_1]$ 可以由另一个规划π' 替代，使我们仍处于情形 III，但修改后的规划中的手术不会造成冲突。

我们先介绍 $\boldsymbol{\pi}$ 的一些定义和性质。

以下假设 $\boldsymbol{\pi}^*$ 在 $[\nu_0, \lambda_1]$ 中的某个时刻发生了冲突，这是由情形 III(a) 或 III(c) 中的手术造成的。令

$$\bar{\nu} = \inf\{\nu \in [\nu_0, \lambda_1) : \boldsymbol{\pi}^*(\nu) \text{ has a conflict}\}. \tag{3}$$

[6]请回想，I_λ 是我们在 $\lambda^- = \lambda^+ = \lambda$ 时添加的极小区间；参见第 36 页。

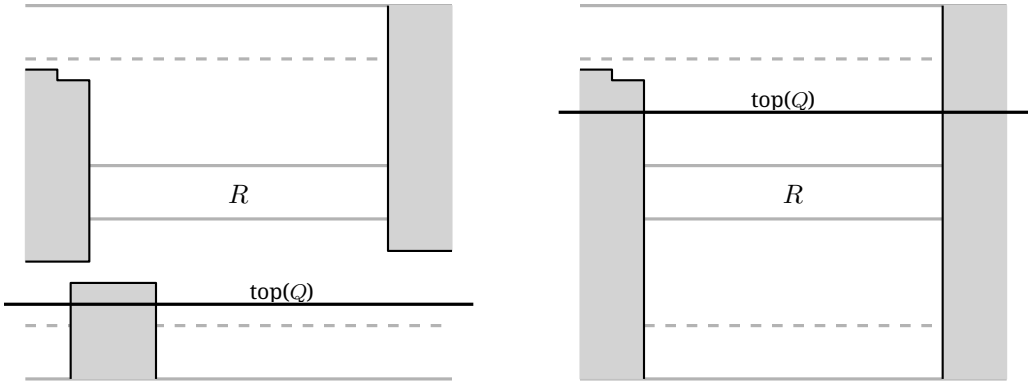


图18。（左）Q 位于R下方；（右）top(Q) 位于 top(R)上方。

从现在起，我们假设 ν 存在；否则便无事可证。令Q 为手术的情形 III 中定义的 HOR0($\mathscr{F}$) 矩形。现在我们证明 $\boldsymbol{\pi}$的一些性质。

引理 4.3。 考虑手术的情形 *III*。则矩形 Q 位于 $bot(R)$下方，即 $y(top(Q)) \leqslant y(bot(R))$。

证明。没有水平网格线可以与 R 的内部相交。因此，y(top(Q)) $>$ y(bot(R)) 将意味着 y(top(Q)) $\geqslant$ y(top(R))。此外，手术的情形 III 中的论证意味着 y(bot(Q)) $\leqslant$ y(bot(Z^-)) $=$ y(bot($R_\square$))。由于 $\mathscr{F}$ 的顶点均不能位于范围 (y(bot(Q)), y(top(Q))) 内，因此 $\mathscr{F}$ 没有顶点的 y 坐标位于（开）区间 (y(bot($R_\square$)), y(top(R))) 内。因此，包含 R 左边缘和右边缘的垂直边的底端点位于 bot($R_\square$) 上或其下方，并且 $\mathscr{I}$(R) 不与底角方块或 $R_\square$ 相交（见图 18（左））。所以， $\mathscr{I}$(R) 不存在任何阻塞对，因此根据引理3.15， $\boldsymbol{\pi}$ 至多有一个交换区间，这意味着情形 III 不会发生，导致矛盾。我们得出 y(top(Q)) $\leqslant$ y(bot(R))。

□

引理4.4. 考虑情形 *III(c)*。若 $\pi_A(v) \notin \mathscr{I}$(走廊) $\cup Q$，则 $\pi_A^*(v)_y \geqslant \pi_B^*(v)_y$。

证明。为导出矛盾，假设 $\pi_A^*(v) \in \mathscr{I}$(走廊) $\cup$ Q 且 $\pi_A^*(v)_y < \pi_B^*(v)_y$。回忆一下， $\pi_A^*(v) = \pi_A(v)$，并且在情形 III(c) 中， $\pi_B[\rho_0, \rho_1]$ 被推到 top(Z^-)。由于 π_A在 v之后立即与 π_B^* 发生冲突，但不与 π_B冲突，因此我们有 $\pi_A(v)_y \geqslant \pi_B(v)_y + 1 >$y(Q 的底部)。由于

$$y(\mathsf{bot}(Q)) < \pi_A(\overline{v})_y = \pi_A^*(\overline{v})_y < \pi_B^*(\overline{v})_y = y(\mathsf{top}(Z^-)) \leqslant y(\mathsf{top}(Q))$$

并且 $\pi_A(v) \in$ Q， $\mathscr{F}$ 中有一条垂直边位于 $\pi_A(v)$ 与 Q 之间，因此从 $\pi_A(v)$ 到 Q 中任意一点的 x 距离都严格大于 1。这与 $\pi_A^*(v) + \square$接触 $\pi_B(v) + \square$ (即 $|\pi_A^*(v)_x - \pi_B^*(v)_x| \leqslant 1$) 相矛盾，因为 $\pi_B^*(v) \in$ Q。 □

回顾一下， $[\mu_0, \mu_1]$ 和 $[\mu_2, \mu_3]$ 分别是我们在情形 III 中遇到的第一个和第二个交换区间。定义 $\mu^+ \in [\mu_2, \mu_3]$ 为满足 $\pi_A(\mu^+)_x = \pi_B(\mu^+)_x$ 的一个时间； μ^+ 存在，因为在交换区间内x序会发生变化： A 与B 的顺序会改变。定义$p^+ :=(\pi_B(\mu^+)_x, y($上边界(走廊)$))$。

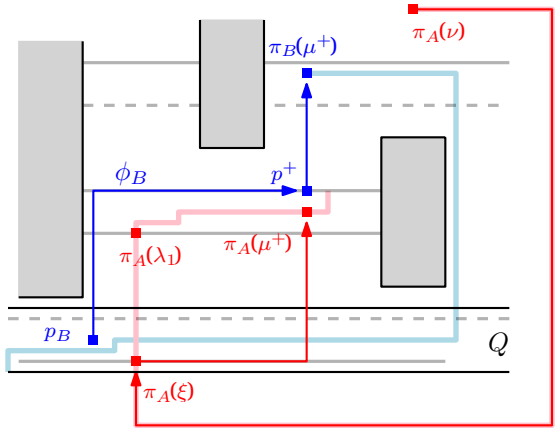


图19. 引理 4.5 的证明示意图。原始路径以粉色和浅蓝色显示。请注意，图形并未按比例绘制；为便于可视化，水平轴经过压缩。 π_A 首次进入走廊$_{\leftrightarrow}^{-}$ 的时间为 ξ。此情形下的动作M1–M4以蓝色和红色实线路径表示。

引理 4.5。 考虑带有 $\nu_0 < \lambda_1$ 的情形 *III*。设 p_B 是 Q 中的一个点，并设 $\nu \in [\nu_0, \lambda_1]$。如果 $\mathscr{F}$ 中存在一条 *xy*-单调的 $p_B p^+$-路径，且该路径与 $\pi_A(\nu)$ 不冲突，那么存在一个可行的$((\pi_A(\nu), p_B), \boldsymbol{\pi}(\mu^+))$-规划 $\boldsymbol{\pi}'$，使得$\|\pi'_A\| \leqslant \|\pi_A[\nu, \mu^+]\|$，且 π'_B 是 *xy*-单调的。

证明。设 ϕ_B 是 $\mathscr{F}$ 中不与 $\pi_A(\nu)$ 发生冲突的 xy-单调 $\mathrm{p}_B\mathrm{p}^+$-路径。令 $\xi := \min\{\xi' \in [\nu, \lambda_1] : \pi_A(\xi') \in \mathrm{R}_{\leftrightarrow}^{-}\}$；由于 A 通过 R 的底部进入 R，因此这样的时间存在。注意，对于所有 $\xi' \in [\nu, \xi)$，$\pi_A(\xi') \notin \mathrm{R}_{\leftrightarrow}^{-}$。我们定义 $((\pi_A(\nu), \mathrm{p}_B), \boldsymbol{\pi}(\mu^+))$-规划 $\boldsymbol{\pi}'$ 由以下四个动作组成：

> M1. 将 B 从 p_B 沿 ϕ_B移动到 p^+。M2. 将 A 沿 $\pi_A[\nu, \xi]$移动。M3. 将 B 沿一条垂直线段从 p^+ 移动到 $\pi_B(\mu^+)$。M4. 将 A 沿一条 *xy*-单调路径从 $\pi_A(\xi)$ 移动到 $\pi_A(\mu^+) \in R$。

见图19。由于 $\pi_A(\xi) \in \mathscr{I}(\mathrm{R})$，移动 M4 存在——这是因为根据引理 3.15(ii)，情形 III 中不存在微小分量——所以我们可以应用引理 3.1。根据构造，动作M1–M4 全部位于自由空间中。现在我们证明这些移动不会导致冲突。根据假设，机器人 B 在动作 M1 期间不会与 A 发生冲突。根据引理 3.17，$\pi_A[\nu_0, \lambda_1)$ 不会进入 $\mathrm{R} \cup \mathrm{R}_{\leftrightarrow}^{+}$，根据 ξ 的定义，我们知道 $\pi_A[\nu, \xi)$ 不会进入 $\mathrm{R}_{\leftrightarrow}^{-}$，因此，$\pi_A(\nu, \xi)$ 不会进入 $\mathrm{R}_{\square}$ 的内部。由于 $\mathrm{p}^+ \in \mathrm{top(R)}$，我们有 $\mathrm{p}^+ + 2\square \subset \mathrm{R}_{\square}$，因此 M2 不会与 B 发生冲突。B 从 p^+ 到 $\pi_B(\mu^+)$ 的垂直移动 M3 是可行的，因为 B 向上移动，而 A 停放在 $\pi_A(\xi)$ 处，不会与 p^+ 发生冲突，并且我们有 $\pi_A(\xi)_y \leqslant \mathrm{y(bot(R))} \leqslant \mathrm{p}_y^+$；因此，B 正在远离 A。最后，动作 M4 不会与 $\pi_B(\mu^+)$ 发生冲突，因为 $\pi_A(\xi)_y \leqslant \pi_B(\mu^+)_y - 1$，并且 $\pi_A(\mu^+)_y \leqslant \pi_B(\mu^+)_y - 1$。

因此，规划 $\boldsymbol{\pi}'$ 是可行的。注意，ϕ_B 是*xy*-单调的，并且在 M3 期间，B 与 ϕ_B 沿相同的垂直方向移动——后者成立是因为$p_B \in Q$，且根据引理 4.3，Q 位于R下方。因此，π'_B 是*xy*-单调的。在 M2 期间，A 沿 $\pi_A[\nu, \xi]$移动，而在 M4 期间则以*xy*-单调的方式移动。所以，我们确实有 $\|\pi'_A\| \leqslant \|\pi_A[\nu, \mu^+]\|$。 □

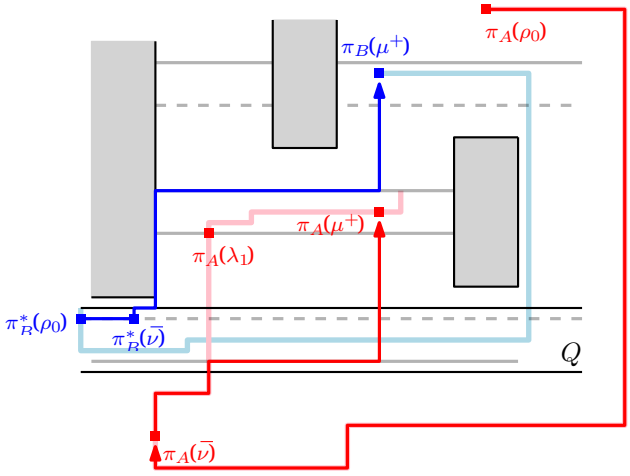


图 20。 引理 4.6 的证明示意图，描绘了情形 III(c) 中的一种假设情况：将 $\pi_B(\nu)$ 向上推至 $\pi^*{}_B(\nu)$ 会导致冲突（此处，向上移动时 A 会与B 发生碰撞）。$\boldsymbol{\pi}''$ 的路径以实线蓝色和红色表示，原始路径以粉色和浅蓝色表示。请注意，为便于可视化，水平轴进行了压缩。

上述引理足以在情形 III(a) 中为 $\boldsymbol{\pi}$ 使用捷径，但对于情形 III(c)，我们需要以下引理的一个变体。

引理 4.6。 *考虑情形 III(c)。如果在 $\mathscr{F}$ 中存在一条与 $\pi_A(\nu)$不发生冲突的 xy-单调 $\pi_B^*(\nu)$ p^+-路径，则 $\boldsymbol{\pi}$ 不是最优的。*

证明。 将引理 4.5 应用于 $p_B := \pi_B^*(\nu)$ 和 $\nu := \bar{\nu}$，可得到一个 $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)\boldsymbol{\pi}(\mu^+)$-规划 $\boldsymbol{\pi}'$，其是可行的，并且 $\|\pi'_A\| \leqslant \|\pi_A[\nu,\mu^+]\|$ 和 π'_B 是xy-单调的。

设 $\boldsymbol{\pi}'' = \boldsymbol{\pi}^*[\rho_0,\nu] \circ \boldsymbol{\pi}'$，这是一个可行的 $\boldsymbol{\pi}(\rho_0)\boldsymbol{\pi}(\mu^+)$-规划，其中

$$\|\pi''_A[\rho_0,\mu^+]\| = \|\pi_A[\rho_0,\bar{\nu}]\| + \|\pi'_A\| \leqslant \|\pi_A[\rho_0,\mu^+]\| \quad \text{and} \quad \|\pi''_B[\rho_0,\bar{\nu}]\| \leqslant \|\pi_B[\rho_0,\bar{\nu}]\|.$$

见图 20。注意，$\pi''_B[\nu,\mu^+]$ 与 $\overleftarrow{\pi'_B}[\nu,\mu^+]$ 相同，是 xy-单调的。另一方面，$\pi_B[\nu,\mu^+]$ 不是 y-单调的，因为根据引理 3.15(ii)，$\pi_B[\mu_1,\mu_2]$ 不是 xy-单调的，并且 $[\mu_1,\mu_2] \subset [\nu,\mu^+]$。因此，$\|\pi''_B[\nu,\mu^+]\| < \|\pi_B[\nu,\mu^+]\|$。这意味着 $\boldsymbol{\pi}''$ 是一条捷径，与 $\boldsymbol{\pi}$ 的最优性矛盾。 □

现在我们准备证明 $\boldsymbol{\pi}^*$ 在情形 III(a) 和 (c) 中的可行性。

引理 4.7。 *考虑 $\nu_0 < \lambda_1$ 的情形 III(a)。则对于任意 $\nu \in [\nu_0,\lambda_1]$，修改后的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 都不存在冲突。*

证明。 假设情况 III(a) 中得到的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 在某个时间 $\nu \in [\nu_0,\lambda_1]$ 发生冲突，以此导出矛盾。令 ν 为 $\boldsymbol{\pi}^*$ 中首次发生冲突的点，其定义见 (3)。

由于 $\pi_B[\nu_0,\mu_1]$ 被向下推至 bot(Q)，只有在 $\pi_B(\nu)_y \geqslant \pi_A(\nu)_y + 1$ 时，才会在 ν 之后立即发生冲突。由于 $\pi_B(\nu) \in$ Q，根据引理 4.3，Q 位于走廊 R 下方；且在 $\boldsymbol{\pi}(\nu)$处，A 位于 B 下方，因此存在一条从 $\pi_B(\nu)$到 p^+ 的 xy-单调路径，不会与$\pi_A(\nu)$发生冲突。见图 21。因此，根据引理 4.5，存在一个$(\boldsymbol{\pi}(\nu), \boldsymbol{\pi}(\mu^+))$-规划 $\boldsymbol{\pi}'$，使得$\|\pi'_A\| \leqslant \|\pi_A[\nu,\mu^+]\|$ 且 $\|\pi'_B\| = \|\pi_B(\nu) - \pi_B(\mu^+)\|_1$。另一方面，$\|\pi_B[\nu,\mu^+]\| >$

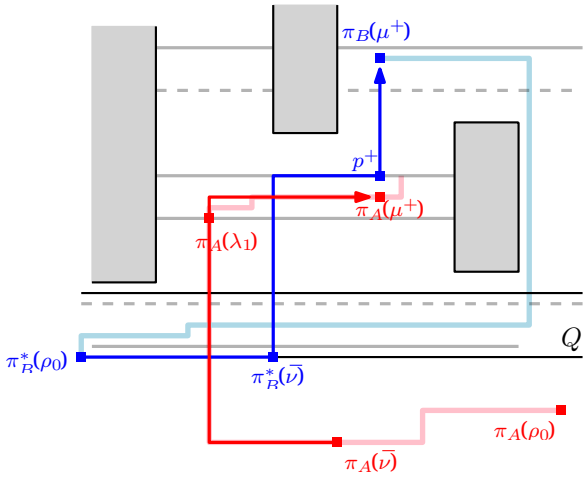


图 21. 引理 4.6 的证明示意图，描绘了情形 III(a) 中的假设情形：将 $\pi_B(\nu)$ 向下推至 $\pi^*{}_B(\nu)$ 会导致冲突（此处，向右移动时B 与A 发生碰撞）。 $\boldsymbol{\pi}'$ 的路径以蓝色和红色实线表示，原始路径以粉色和浅蓝色表示。请注意，为便于可视化，水平轴经过了压缩。

$\|\pi_B(\nu) - \pi_B(\mu^+)\|_1$ 因为 $\pi_B[\nu, \mu^+]$ 离开了 $\mathscr{I}$（走廊），根据引理3.15 (iii)，这与 $\boldsymbol{\pi}$的最优性相矛盾。 □

引理 4.8. 考虑含有 $\nu_0 < \lambda_1$ 的情形 *III(c)*。对于任意 $\nu \in [\nu_0, \lambda_1]$，修改后的方案 $\boldsymbol{\pi}^*$ 均不会发生冲突。

证明。 设 ρ_0、ρ_1 如情形 III 的手术中所定义。情形 III(c) 中只有 $\boldsymbol{\pi}[\rho_0, \rho_1]$ 被修改，因此若 $\rho_0 \geqslant \lambda_1$，引理便立即成立。现在假设 $\rho_0 < \lambda_1$，且 $\boldsymbol{\pi}^*[\rho_0, \lambda_1]$ 中存在冲突。设 ν 为首次发生冲突的时刻，如式 (3) 所定义。注意， $\pi_B^*(\nu)_y = y(\text{上边界}(Z^-)) = y(\text{上边界}(\text{走廊})) - 1$。分两种情形讨论。

情形 *1*： $\pi_A^*(\nu) \in \mathscr{I}(R) \cup Q$。

根据引理3.18， $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$是x-分离的，这意味着对于所有 $\nu' \in [\nu, \mu_0]$， $\boldsymbol{\pi}(\nu')$ 都是x-分离的，也就是说 $\boldsymbol{\pi}^*[\nu, \lambda_1]$ 没有冲突，这与我们的假设矛盾。因此， $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 不是x-分离的，因而是y-分离的。此外，这两个机器人彼此接触，因为它们即将发生冲突。

如果 A 位于 B 上方，那么 $\pi_A^*(\nu)_y = \pi_B^*(\nu)_y + 1 = y(\text{top}(R))$。因此， $\pi_A^*(\nu)$ 必须位于 $\text{bot}(R^+_\leftrightarrow)$ 上，因为根据引理 4.3， $\pi_A^*(\nu) \in \mathscr{I}(R) \cup Q$，且 Q 位于 bot(R) 下方。但这与假设矛盾：对于所有 $\xi \in [\nu_0, \lambda_1]$， $\pi_A(\xi)$ 不在 $R^+_\leftrightarrow$ 的闭包中（见引理 3.17）。另一方面，如果 A 在 $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 中位于 B 下方，那么点 $\pi_A(\nu)$ 不会与任何 xy-单调的 $\pi_B(\nu)p^+$-路径发生冲突（且确实存在这样的路径）。见图 22(i)。因此，根据引理 4.6，我们得到 $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ 是最优的这一结论与假设矛盾。

Case 2: $\pi_A^*(\bar{\nu}) \notin \mathscr{I}(R) \cup Q$.

根据引理4.4以及 $\boldsymbol{\pi}$ 在 ν 之后立即发生冲突这一事实，我们有 $|\pi_A^*(\nu)_y - \pi_B^*(\nu)_y| \leqslant 1$，因此

$$y(\text{top}(R)) - 1 = \pi_B^*(\bar{\nu})_y \leqslant \pi_A^*(\bar{\nu})_y \leqslant \pi_B^*(\bar{\nu})_y + 1 = y(\text{top}(R)).$$

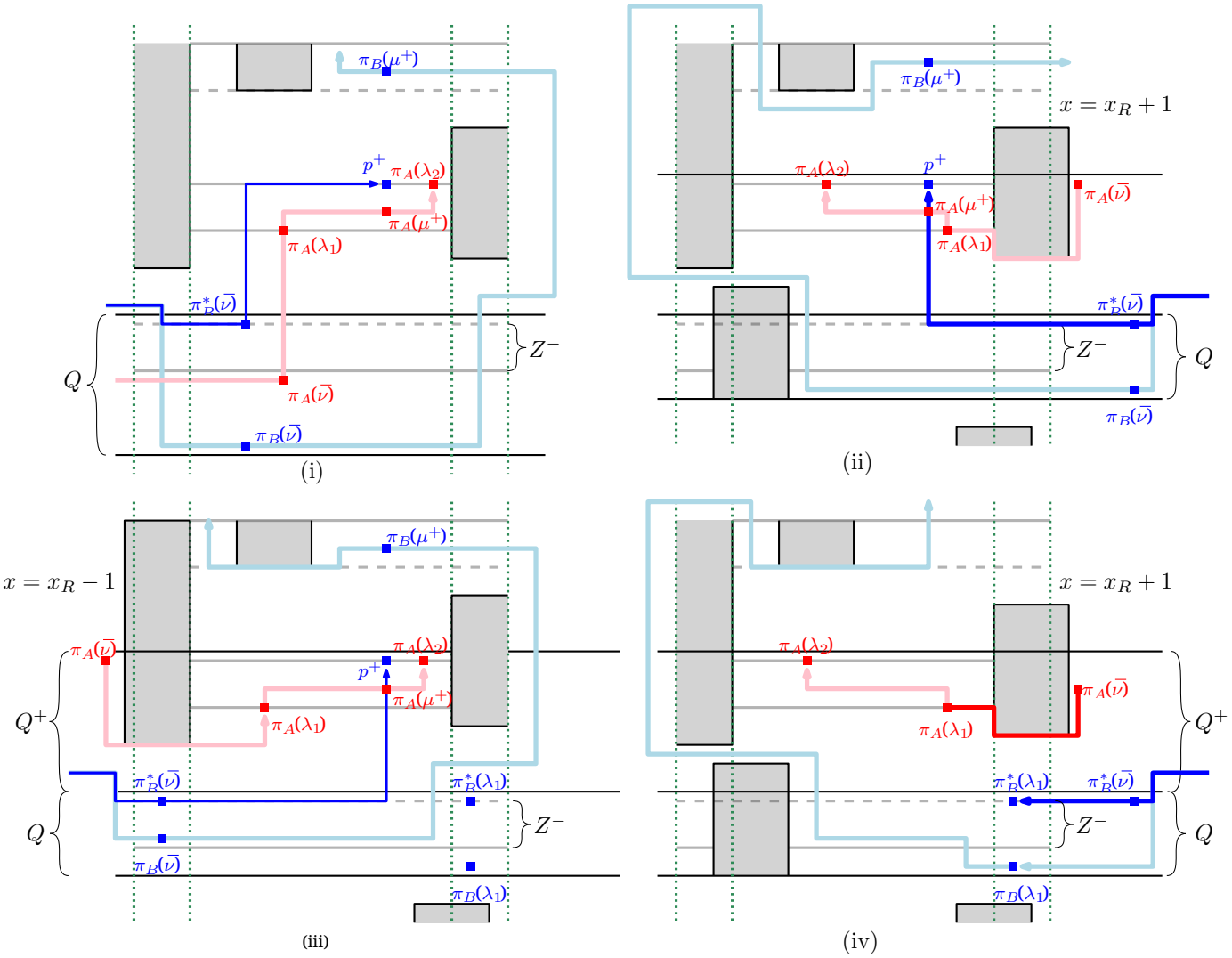


图 22. 引理 4.8 的证明示意图。所有图中，水平方向均经过压缩；在 (i) 中，Q 的高度未按比例绘制（要使 $\boldsymbol{\pi}(\nu), \boldsymbol{\pi}^*(\underline{\nu})$ 成为自由构型，其高度必须至少为三）。(i) $\pi^*\mathrm{A}(\nu) \in \mathscr{I}$(走廊) $\cup$ Q；(ii) $\pi^*\mathrm{A}(\nu) \notin \mathscr{I}$(走廊) $\cup$ Q，且 $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 是 x-分离的；(iii) $\pi^*\mathrm{A}(\nu) \notin \mathscr{I}$(走廊) $\cup$ Q，且 $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 是 y-分离的，其中 A 位于 B 左侧且位于走廊左侧$_{\square}$；(iv) $\pi^*\mathrm{A}(\nu) \notin \mathscr{I}$(走廊) $\cup$ Q，且 $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 是 y-分离的，其中 A 位于 B 左侧且位于走廊右侧$_{\square}$。

现在我们有两个子情况。

- 首先，假设 $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 是 y-分离的。在这种情形下，$\pi^*\mathrm{A}(\nu)\mathrm{y} = \bar{\mathrm{y}}(\mathrm{top}(\mathrm{R}))$。但是$\pi^*\mathrm{A}(\nu) \notin \mathscr{I}(\mathrm{R})$，因此我们得出 $\pi^*\mathrm{A}(\nu)\mathrm{x} \notin \mathrm{I}^{\oplus}\mathrm{x}$，由此 $\pi^*\mathrm{A}(\nu)$ 与 R 中的每个点都是 x-分离的。这意味着，以下 xy-单调的 $\pi^*\mathrm{B}(\nu)\mathrm{p}^+$- 路径不会与 $\pi\mathrm{A}(\nu)$ 发生冲突：

  – 首先，在 Q 内将 B 从 $\pi^*_B(\nu)$ 水平移动到 R 的 x-范围内，即移动到包含 R 左边（或右边）边的垂直线处；若 $\pi^*_B(\nu)_x < x^-_R$（相应地，若 $\pi^*_B(\nu)_x > x^-_R$）。注意，若 $\pi^*_B(\nu)_x \in I^{\oplus}_x$，则此移动为空。– 然后，将 B 垂直移动至下边界(R)。– 最后，沿一条 L 形路径将 B 移动到 p^+。

  参见图 22(ii)。第一次移动不会产生冲突，因为B 仍与 $\pi^*_A(\nu)$保持y-分离；第二次和第三次移动不会产生冲突，因为在这些移动期间B 位于R中，因此与 $\pi^*_A(\nu)$保持x-分离。因此，根据引理 4.6，$\boldsymbol{\pi}$ 不是最优的，这与假设矛盾。

- 接下来，假设 $\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 不满足 y-分离。因此，$\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 满足 x-分离。不失一般性，假设 $\pi^*\mathrm{A}(\nu)\mathrm{x} = \pi^*\mathrm{B}(\nu)\mathrm{x}^- - 1$，于是 A 位于 B 的左侧；A 位于 B 右侧的情形可对称处理。由于 $\pi^*\mathrm{A}(\nu)\mathrm{y} \in \mathrm{I}^{\oplus}\mathrm{y}$ 且 $\pi^*\mathrm{A}(\nu) \notin \mathscr{I}(\mathrm{R}) \cup \mathrm{Q}$，我们得出 $\pi^*\mathrm{A}(\nu)\mathrm{x} \notin \mathrm{I}^{\oplus}\mathrm{x}$。

  如果 $\pi^*_A(\nu)_x < \mathrm{x}^-_R - 1$，那么 $\pi^*_B(\nu)_x = \pi^*_A(\nu)_x + 1 < \mathrm{x}^-_R$。此外，$\mathrm{p}^+_x \geqslant \mathrm{x}^-_R$。这意味着，与前一种情形一样，存在一条 xy-单调的 $\pi^*_B(\nu)\mathrm{p}^+$-路径，位于$\mathscr{I}$ 中且不与 $\pi^*_A(\nu)$ 产生冲突：先将 B 水平移动到 R 的 x 范围，然后垂直移动到 R 的底部，最后沿一条 L 形路径移动到 p^+。（第一次移动不会产生冲突，因为 $\pi_A(\nu)_x + 1 = \pi_B(\nu)_x < \mathrm{p}^+_x$。）参见图22(iii)。因此，根据引理 4.6，$\boldsymbol{\pi}$ 不是最优的。

  否则，$\pi^*_A(\nu)_x > \mathrm{x}^+_R + 1$。令 Q^+ 为高度为 1 的矩形，其下边是 top(Q)。回想一下，我们当前处于这样的情形：$\pi_A(\nu) \notin \mathrm{Q}$，且 $\pi_B(\nu) \in \mathrm{Q}$，并且 $\boldsymbol{\pi}(\nu)$ 不是 y-分离的。见图 22(iv)。由于 $\pi_A(\nu) \notin \mathrm{Q}$ 且 $\pi_A(\nu) \notin \mathscr{I}(\mathrm{R})$——后者成立是因为 $\pi_A(\nu)_x = \pi^*_A(\nu)_x > \mathrm{x}^+_R + 1$——根据引理4.4，我们知道 $\pi^*_A(\nu)$ 位于 $\pi^*_B(\nu)$ 上方。因此我们有

$$y(\mathsf{top}(Q)) < \pi_A(\overline{\nu})_y \leqslant y(\mathsf{top}(Q)) + 1.$$

  我们还有

$$\pi_B(\mu_0)_x \leqslant x^+_R + 1 < \pi_A(\overline{\nu})_x < \pi_B(\overline{\nu})_x.$$

  由于 $[\pi_B(\mu_0)_x, \pi_B(\nu)_x] \times [\mathrm{y}(\mathrm{top}(\mathrm{Q})),$ 且 $\mathrm{y}(\mathrm{top}(\mathrm{Q})) + 1] \subset \mathrm{Q}^+$，可知 $\pi_A(\nu) \in \mathrm{Q}^+$。因此，根据引理3.18，$\boldsymbol{\pi}^*(\nu)$ 是 x-分离的这一事实意味着，对于所有 $\nu' \in [\nu, \mu_0]$，$\boldsymbol{\pi}(\nu')$ 都是 x-分离的。因此，$\boldsymbol{\pi}^*[\nu, \lambda_1]$ 没有冲突，这与我们的假设矛盾。

□

综合第 4.1 节的所有内容，我们得到以下引理。

引理 4.9. 修改后的方案 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是可行的。

4.2 π^*的最优性

现在我们将证明 $\boldsymbol{\pi}^*$的最优性。由于手术不会改变任何 λ的x坐标，因此， $\boldsymbol{\pi}^*$ 的代价可能增加的唯一原因，是为消除推操作所产生的不连续点而添加的幽灵线段。粗略地说，我们将证明情况总是属于以下三种情形之一。

- PUSH(X、I、y) 不会在 $\boldsymbol{\pi}^*{}_X[I]$ 的任一端点处产生不连续点，因此不会添加幽灵线段；或者
- PUSH(X、I、y) 不会增加 $\boldsymbol{\pi}^*[I]$, 的代价，也就是说， $\|\boldsymbol{\pi}^*[I]\| \leqslant \|\boldsymbol{\pi}[I]\|$ （其中计入了幽灵线段的长度）；或者
- PUSH(X、I、y) 增加了 $\boldsymbol{\pi}^*[I]$, 的代价，但 $\|\boldsymbol{\pi}^*[I]\| - \|\boldsymbol{\pi}[I]\|$ （即代价增加量）会被另一次 PUSH 操作所带来的代价减少所抵消。

我们需要以下关于 PUSH 操作的基本性质。

引理 *4.10*。考虑操作 *PUSH(X,* $[\nu_1, \nu_2]$, y^**)*。若存在某个时间 $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ 使得$\pi_X(\nu)^y = y^*$, 则 $\pi^*_X[\nu_1, \nu_2]$的总长度（包括幽灵线段 $g(\nu_1) := p^-_X(\nu_1)p^+_X(\nu_1)$ 和 $g(\nu_2) := p^-_X(\nu_2)p^+_X(\nu_2)$ 的长度）至多为 $\|\pi_X[\nu_1, \nu_2]\|$。

证明。 $\pi_X[\nu_1, \nu_2]$ 和 $\pi^*_X[\nu_1, \nu_2]$ 经过的水平距离相同，因为一次 PUSH 不会改变路径上各点的x坐标。 $\pi^*_X[\nu_1, \nu_2]$ 经过的垂直距离等于幽灵线段的总长度，即 $|\pi_X(\nu_1)^y - y^*| + |\pi_X(\nu_2)^y - y^*|$。由于 $\pi_X[\nu_1, \nu_2]$ 经过一个y坐标为y^*的点， $\pi_X[\nu_1, \nu_2]$ 经过的垂直距离至少为此值。

□

引理 4.10 立即表明，在A 和B上执行的主要推送操作——后者仅发生在情形 III 中——不会增加规划的代价。（事实上，正如我们将在下文看到的，代价有时会下降，例如在情形 I 和 III(c) 中，这可以抵消次级推送操作带来的成本增加。）因此，我们重点关注次级推送操作，这些操作仅在不安全区间内对B 执行。[7]

引理 4.11. 设 $I = [\nu_1, \nu_2]$ 是一个非 x-分离的不安全区间。若执行了某个 y^* 对应的次级推送PUSH(B, I, y^*)，则 $\|\boldsymbol{\pi}^*[I]\| \leqslant \|\boldsymbol{\pi}[I]\|$。

证明。正如上文所述， $\|\pi^*_A[\mathrm{I}]\| \leqslant \|\pi_A[\mathrm{I}]\|$, 因此我们需要说明 $\|\pi^*_B[\mathrm{I}]| \leqslant \|\pi_B[\mathrm{I}]\|$。由于 I 是一个非 x-分离的不安全区间， $\boldsymbol{\pi}[\mathrm{I}]$, 的一个端点（不失一般性，假设为 $\boldsymbol{\pi}(\nu_1)$）不是 x-分离的。因此 $\boldsymbol{\pi}(\nu_1)$ 是 y-分离的，并且要么 $\pi_B(\nu_1) \in \mathrm{top}(\mathrm{R}_\square) \cup \mathrm{bot}(\mathrm{R}_\square)$，要么 $\nu_1 = \lambda_1$。

若 $\pi_B(\nu_1) \in$ 上边界(走廊$_\square$) ，则 $y^* = y$(上边界(走廊$_\square$))；由引理 4.10 可知 $\|\pi^*_B[I]| \leqslant \|\pi_B[I]\|$。对于 $\pi_B(\nu_1) \in$ 下边界(走廊$_\square$))，论证类似。

还需考虑情形 $\nu_1 = \lambda_1$。在情况 I 中，我们有 $\pi_A(\lambda_1) \in \mathrm{R}(R)$ 的上边界。由于$\boldsymbol{\pi}(\lambda_1) = \boldsymbol{\pi}(\nu_1)$ 是 yy- 分离的，并且在 I 期间执行了次级推送，因此我们有 $\pi_B(\nu_1) \in \mathrm{R}(R_\square)$ 的上边界，且次级推送操作将B 推至 $\mathrm{R}(R_\square)$ 的上边界。在情形 III 中，

[7]为简化起见，如果在区间 I 内执行 PUSH 操作，我们用 $\boldsymbol{\pi}^*[I]$ 表示该子规划其中包括沿 $\boldsymbol{\pi}[I]$ 端点处幽灵线段运动的参数化。

由引理 3.16 可知，A 位于 B 下方；又由于 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_1)$ 是 y-分离的，因此 $\pi_B(\nu_1) \in \mathrm{R}_{\square})$ 的底部，且次级推送操作将 B 推至 $\mathrm{R}_{\square})$ 的底部。最后，在情况 II 中，A 在区间 $[\lambda_1, \bar{\lambda}]$ 期间被推至 R 的底部，因此，在从 λ_1 开始的不安全区间上执行次级推送，意味着 B 在 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_1)$ 中位于 A 下方。由于 $\pi_A(\lambda_1) \in \mathrm{R}$ 的底部，且 $\boldsymbol{\pi}(\lambda_1)$ 是 y-分离的，我们可知 $\pi_B(\nu_1) \in \mathrm{R}_{\square})$ 的底部。因此，同样根据引理 4.10，$\|\pi_B^*[\mathrm{I}]| \leqslant \|\pi_B[\mathrm{I}]\|$ 在所有情形下均成立。引理证明完毕。□

引理 4.11 表明，只有对一个 x-分离的不安全区间执行次级推送，才可能增加规划的代价。根据引理 3.9，$\boldsymbol{\pi}$ 中的任何 x-分离的不安全区间都是交换区间。因此，只需逐一考察在交换区间上执行的次级推送操作。

引理 4.12。 情况 *I* 中的修改得到的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是最优的。

证明。设 $\mathrm{I} = [\nu_1, \nu_2]$ 是 $\boldsymbol{\pi}[\lambda_1, \lambda_2]$ 中的一个交换区间，并且在该区间执行了次级推送 PUSH(B, I, y^*)。由于在 $[\lambda_1, \lambda_2]$期间 A 被推送至 top(R)，因此在 I 期间 B 位于 A 上方，并且 $\mathrm{y}^* = \mathrm{y}_R^+ + 1$。根据引理 3.10，至多存在一个 B 位于 A 上方的交换区间，因此至多存在一个会执行次级推送的交换区间 I。在 I 期间将 B 推送至 $\mathrm{top}(\mathrm{R}_{\square})$，使 $\|\pi_B^*\|$ 增加的量至多为幽灵线段 $\mathrm{g}_B(\nu_1)$ 和 $\mathrm{g}_B(\nu_2)$ 的总长度，即 $2\mathrm{y}_R^+ + 2 - \pi_B(\nu_1)_y - \pi_B(\nu_2)_y$。在 $[\lambda_1, \lambda_2]$期间将 A 推送至 top(R)，使其路径长度至少减少 $2\mathrm{y}_R^+ - \pi_A(\nu_1)_y - \pi_A(\nu_2)_y$。根据定义，对于 $\mathrm{i} = 1、2$，构型 $\boldsymbol{\pi}(\nu_i)$ 是 y-分离的，因此 $\pi_B(\nu_i)_y - \pi_A(\nu_i)_y \geqslant 1$。因此，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\pi}\| - \|\boldsymbol{\pi}^*\| &\geqslant \left(2y_R^+ - \pi_A(\nu_1)_y - \pi_A(\nu_2)_y\right) - \left(2y_R^+ + 2 - \pi_B(\nu_1)_y - \pi_B(\nu_2)_y\right) \\
&= \left(\pi_B(\nu_1)_y - \pi_A(\nu_1)_y - 1\right) + \left(\pi_B(\nu_2)_y - \pi_A(\nu_2)_y - 1\right) \\
&\geqslant 2 \cdot (1 - 1) = 0.
\end{aligned}$$

因此，我们得出结论：$\boldsymbol{\pi}^*$ 是最优的。 □

引理 4.13。 情形 *II* 中的修改得到的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是最优的。

证明。设 $\mathrm{I} = [\nu_1, \nu_2]$ 是一个交换区间。我们断言，$\pi_B[\nu_1, \nu_2]$ 不会被修改。事实上，如果 $[\nu_1, \nu_2]$ 是一个交换区间，则情形 II(b) 或情形 II(c) 会出现。在情形 II(b) 中，我们有 $[\nu_1, \nu_2] = [\mu_1, \mu_2]$，并且 π_B 在 $[\nu_1, \nu_2]$期间位于 π_A 下方。由于在此情形下 $\bar{\lambda} = \mu_1$，且 A 在区间 $[\bar{\lambda}, \lambda_2]$期间被推至走廊 R 的上边界，修改 π_A后，B 在 $[\nu_1, \nu_2]$期间不会与 A 发生冲突。在情形 II(c) 中，可能有两个交换区间。如果 $[\nu_1, \nu_2]$ 是第一个交换区间，$[\mu_1, \mu_2]$，那么 B 在 $[\nu_1, \nu_2]$期间位于 A 上方。由于在此情形下 $\bar{\lambda} = \mu_2$，π_A在 $[\lambda_1, \bar{\lambda}] \supseteq [\nu_1, \nu_2]$期间被推至 R 的底部，因此远离 B，并且 π_B 在 $[\nu_1, \nu_2]$期间不会被修改。另一方面，如果 $[\nu_1, \nu_2]$ 是第二个交换区间，那么 $\nu_1 > \mu_2 = \bar{\lambda}$，并且根据引理 3.9，B 位于 A 下方。由于 π_A 在 $[\bar{\lambda}, \lambda_2] \supseteq [\nu_1, \nu_2]$期间被推至走廊 R 的上边界，从而远离 B，因此路径 π_B 在 $[\nu_1, \nu_2]$期间不会被修改。

我们得出结论：如果 $[\nu_1, \nu_2]$ 是交换区间，那么在 $[\nu_1, \nu_2]$ 期间不会修改 π_B，如所述。因此，$\|\pi_B^*[\nu_1, \nu_2]\| = \|\pi_B[\nu_1, \nu_2]\|$。结合引理 4.11（针对情形 II(a)），我们得出结论：$\|\boldsymbol{\pi}^*\| \leqslant \|\boldsymbol{\pi}\|$ 对情形 II 成立。 □

引理 4.14。 情况 *III* 中的修改产生了一个 $\boldsymbol{\pi}^*$ 最优的规划。

证明。 首先考虑情形 III(a,b)。由于在这些情形中， $\pi_A[\lambda_1, \lambda_2]$ 被推送至下边界(走廊)，因此只有当B 在区间I 期间位于A 下方时，交换区间I 内才可能发生次级推送。回忆一下，在情形 III 中， $[\mu_0, \mu_1]$ 是唯一一个B 位于A 下方的交换区间。然而，情形 II(a,b) 中对 π_B 的主推送具有如下形式：PUSH(B, J,y(下边界(Q)))，其中$J \supset [\mu_0, \mu_1]$为某个区间，因此在对B 执行主推送后， $\boldsymbol{\pi}^*[\mu_0, \mu_1]$ 中不存在冲突。因此，在情形 III(a,b) 中，交换区间期间不会发生次级推送，从而修改后的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是最优的。

接下来考虑情形 III(c)。由于在情形 III(c) 中， $\pi_A[\lambda_1, \lambda_2]$ 被推到上边界(走廊)，因此只有当B 在整个交换区间I 内位于A 上方时，才可能在该区间进行次级推送。回想一下，在情形 III 中，只有交换区间 $[\mu_2, \mu_3]$ 内B 位于A 下方。因此$I = [\mu_2, \mu_3]$，手术程序执行 PUSH(B, $[\mu_2, \mu_3]$,$y_R^+ + 1$)。现在我们说明，尽管次级推送可能会增加B 的路径长度，整体方案的代价却不会增加。

由于 $[\mu_0, \mu_1] \subseteq [\rho_0, \rho_1]$，存在一个时间 $\mu' \in [\rho_0, \rho_1]$，使得 $\pi_A(\mu')_y - \pi_B(\mu')_y \geqslant 1$。此外，存在一个时间 $\mu'' \in [\mu_2, \mu_3]$，使得 $\pi_B(\mu'')_y - \pi_A(\mu'')_y \geqslant 1$。（事实上，这对所有 $\mu'' \in [\mu_2, \mu_3]$ 都成立，因为在该区间内机器人彼此保持y分离。）由于 $\pi_A^*[\lambda_1, \lambda_2]$ 是xy-单调的，且 $\mu'' > \mu'$，我们有

$$\|\pi_A[\lambda_1, \lambda_2]\| - \|\pi_A^*[\lambda_1, \lambda_2]\| \geqslant \max\left\{0,\ 2 \cdot \left(\pi_A(\mu')_y - \pi_A(\mu'')_y\right)\right\}.$$

现在考虑B的长度差异。在 $[\rho_1, \rho_2]$ 期间对B进行的主要推送使B 的路径至少缩短了 $2 \cdot (y(\text{R的上边界})) - 1 - \pi_B(\mu')_y)$，而 $[\mu_2, \mu_3]$ 期间的次级推送使B 的路径长度最多增加 $2 \cdot (y(\text{R的上边界})) + 1 - \pi_B(\mu'')_y)$；后一个结论成立，是因为我们已经论证过只有一次次级推送会增加长度。综合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\pi}\| - \|\boldsymbol{\pi}^*\| \\
&\quad \geqslant 2 \cdot \Big(\left((\pi_A(\mu')_y - \pi_A(\mu'')_y) \right) + \left(y(\mathsf{top}(R)) - 1 - \pi_B(\mu')_y \right) - \left((y(\mathsf{top}(R)) + 1 - \pi_B(\mu'')_y \right) \Big) \\
&\quad = 2 \cdot \Big(\pi_A(\mu')_y - \pi_B(\mu')_y - 1 + \pi_B(\mu'')_y - \pi_A(\mu'')_y - 1) \Big) \\
&\quad \geqslant 2 \cdot \Big(1 - 1 + 1 - 1 \Big) \ = \ 0.
\end{aligned}$$

因此， $\boldsymbol{\pi}^*$ 仍然是最优的。 □

结合引理 4.12–4.14，我们得到以下结果。

引理 4.15。 修改后的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是最优的。

结合引理 4.9 和引理 4.15 以及本节开头的讨论，我们得到以下结果。

命题 4.1。 设 $\boldsymbol{\pi}$ 是一个正交、解耦、交替的(s,t)-规划，且包含一条不良水平线段。那么存在一个满足 *(P1)–(P5)* 的规划 $\boldsymbol{\pi}^*$。

5 最小最大完工时间的困难性

本节证明定理 1.2。该定理指出，当目标是最小化最大完工时间而非路径长度之和时，两个方形机器人的运动规划问题将变得困难。

定理 1.2。设 $\mathcal{W}$ 是一个具有 n 个顶点的闭合直线多边形环境，A，B 是在 $\mathcal{W}$ 内平移的两个轴平行单位正方形机器人，设$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{t}$ 是 A，B 的初始构型和目标构型，且 $T_{\max}$ 是给定的最大时间。判定是否存在可行的（$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{t}$）规划 $\boldsymbol{\pi}^*$，使得每个机器人的最大速度不超过 1，且 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的最大完工时间不超过 $T_{\max}$，是NP困难的。

我们的归约来自划分问题——给定一个包含$X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ 的m 个整数的集合，判断是否可以将X 划分为不相交的子集X_A 和X_B，使得 $\sum_{x_i \in X_A} x_i = \sum_{x_i \in X_B} x_i$——该归约与 Kobayashi 和 Sommer [31, 关于最短边不相交路径问题的定理 14] 类似。

将给定实例进行缩放，使输入元素之和为 1，这样处理会比较方便；虽然不进行缩放也可以，但这样能简化表述。因此，我们定义$Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ 其中$y_i := x_i / (\sum_{i=1}^{m} x_i)$，并提出问题：是否存在一个划分，将$Y$ 划分为不相交的子集Y_A 和Y_B，使得 $\sum_{y_i \in Y_A} y_i = \sum_{y_i \in Y_B} y_i = \frac{1}{2}$？我们称这样的划分为有效划分。

归约的思路是构造一个工作空间 $\mathcal{W}$，其中包含构件 $\mathcal{W}_1$、…、$\mathcal{W}_m$，每个构件分别对应Y 中的一个元素，并选择一个参数$T_{\max} \geqslant 0$，使得两个机器人都必须通过每个构件，并且当且仅当Y存在有效划分时，才存在最大完工时间不超过$T_{\max}$ 的规划。图 23 展示了与元素$y_i \in Y$对应的构件[8] $\mathcal{W}_i$。点s_A^i 和s_B^i 分别是A 和B 进入构件的点，而t_A^i 和t_B^i 分别是A 和B 离开构件的点。注意，该构件有两条长度为 $1 - 2y_i$ 的竖直障碍线段，分别连接在两个正方形障碍物的右下角和右上角。连接这两条障碍线段的线段称为该构件的门——门不是障碍物，记为g_i。门的长度为 $2 - y_i$，因此两个机器人无法同时通过该门。以下观察很容易验证。

观察 5.1。

(i) π_A^i 是从 s_A^i 到 t_A^i的最短路径，π_B^i 是从 s_B^i 到 t_B^i的最短路径，且这些路径的长度为 $11 - y_i$。

(ii) 从 s_A^i 到 t_A^i 的替代路径π_A^i 以及从 s_B^i 到 t_B^i 的替代路径 π_B^i 的长度为11。

(iii) π_A^i 上的任意点都不会与 π_B^i上的任何点发生冲突，且 π_A^i 上的任意点都不会与 π_B^i上的任何点发生冲突。

整个工作空间 $\mathcal{W}$通过拼接构件 $\mathcal{W}_1$、…、$\mathcal{W}_m$得到，使得对于所有 $1 \leqslant i < m$，$s^{i+1}{}_A$和s_B^{i+1}分别与t_A^i和t_B^i重合，如图24所示。通过设置$\boldsymbol{s} := (s_A^1, s_B^1)$和$\boldsymbol{t} := (t_A^m, t_B^m)$，即可完成最小最大完成时间问题的实例。

[8] 对于单纯形而言，我们使用了零宽障碍物——即线段——以及宽度恰好为 1 的通道进行构造，但也可以避免这类退化情形。

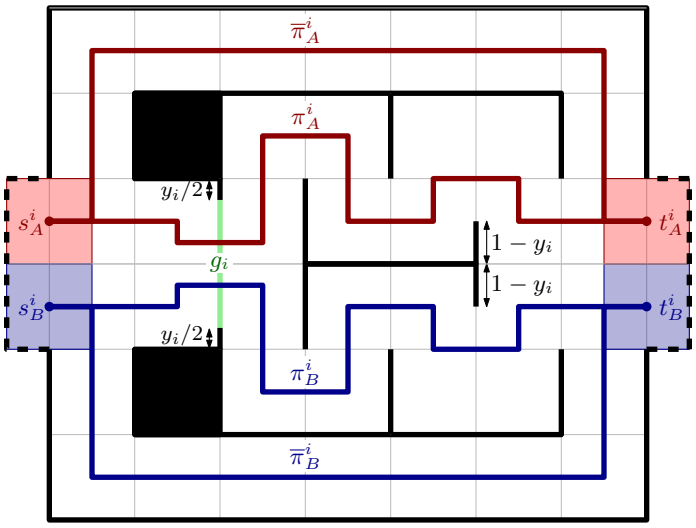


图 23。 元素 y $\mathcal{W}_i$ 的构件 $Y_i \in$ 。粗黑线段和黑色正方形是障碍物。构成单位网格的细灰线不是障碍物——绘制这些线是为了展示构造中各个部分的尺寸。如果 $i = 1$，则构件的左侧将被封闭；如果 $i = m$ </style}，则右侧将被封闭，如虚线段所示。的门 g $\mathcal{W}_i$ 以浅绿色显示。

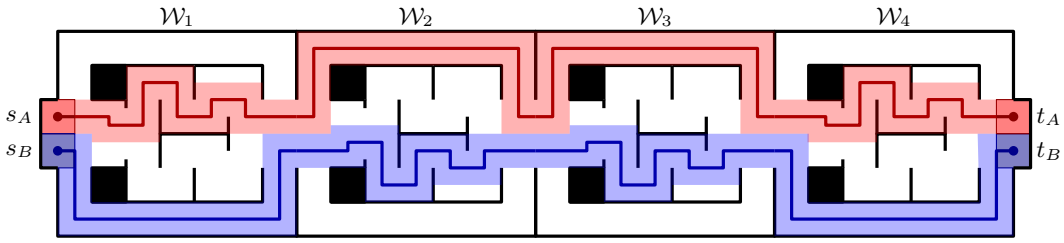


图24。 我们为集合 $Y = \{y_1,\ldots, y_4\}$构造的工作空间。为两个机器人显示的路径对应于划分 $Y_A = \{y_1,y_4\}$ 和 $Y_B = \{y_2,y_3\}$。黑色区域是障碍物，红色/蓝色区域是两个机器人扫过的区域。

$\mathcal{W}$ 的构造显然可以在线性时间内完成。下一个引理将证明该归约的正确性，从而完成定理 1.2 的证明。

引理 5.1。 设 $\boldsymbol{\pi}^*$ 是为所构造的实例 $\mathcal{W}$找到的最小最大完工时间规划。那么 $¢(\boldsymbol{\pi}^*) \leqslant 11m - \frac{1}{2}$当且仅当 P划分 的对应实例 Y 是有效的。

证明。 $\Longleftarrow$: 设 Y_A,Y_B 是 Y 的一个有效划分。设 π_A^* 为从 s_A^1 到 t_A^m 的路径；当$y_i \in$ 属于Y_A 时，该路径使用π_A^i，否则使用 $\pi_{\overline{A}}^i$。类似地，设 π_B^* 为从 s_B^1 到 t_B^m 的路径；当$y_i \in$ 属于Y_B 时，该路径使用π_B^i，否则使用$\pi_{\overline{B}}^i$；示例见图24。根据观察 5.1(i) 和 (ii)，并且由于Y_A,Y_B 是一个有效划分，我们有

$$\|\pi_A^*\| = \sum_{y_i \in Y_A} (11 - y_i) + \sum_{y_i \in Y_B} 11 = 11m - \tfrac{1}{2} = \sum_{y_i \in Y_A} 11 + \sum_{y_i \in Y_B} (11 - y_i) = \|\pi_B^*\|.$$

此外，根据观察 5.1(iii)，A 和B 可以分别以速度 1 沿着路径 π_A^* 和 π_B^* 行进，且彼此不会碰撞。因此，$¢(\boldsymbol{\pi}^*) \leqslant 11m - \frac{1}{2}$。

$\Longrightarrow$: 假设Y 没有有效划分。我们必须证明，这意味着对于任意可行规划 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_A, \pi_B)$，$¢(\boldsymbol{\pi}) > 11m - \frac{1}{2}$。定义$G_A$为 π_A经过的门的集合。更确切地说，G_A 是满足以下条件的门 g_i 的集合：在某个时刻，A 的左边位于g_i内。类似地定义G_B。注意，若$g_i \notin G_A$，则A 经过 $\mathcal{W}_i$ 的最短路径是经由 $\pi_{\overline{A}}^i$；B也有类似结论。现在我们区分两种情形。

- 情况 I：$GA \cap GB = \emptyset$。
  不失一般性，假设 $\sum_{g_i \in G_A} y_i \leqslant \sum_{g_i \in G_B} y_i$。于是

$$\sum_{g_i \in G_A} y_i \leqslant \tfrac{1}{2} \cdot \left(\sum_{g_i \in G_A} y_i + \sum_{g_i \in G_B} y_i \right) \leqslant \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{m} y_i = \tfrac{1}{2}.$$

  此外，不可能有 $\sum_{g_i \in G_A} y_i = \frac{1}{2}$，否则 $Y_A := \{y_i : g_i \in G_A\}$ 和$Y_B := Y \setminus Y_A$ 将构成有效划分。因此，$\sum_{g_i \in G_A} y_i < \frac{1}{2}$。鉴于$A$只通过$G_A$中的门，$A$到达$t_A^m$ 的最快方式是使用 $\pi_{\overline{A}}^i$，若$g_i \in G_A$ 则如此，否则使用 π_A^i。因此，

$$¢(\boldsymbol{\pi}) \geqslant \sum_{g_i \in G_A} (11 - y_i) + \sum_{g_i \notin G_A} 11 = 11m - \sum_{g_i \in G_A} y_i > 11m - \tfrac{1}{2}.$$

- 情形 II：$GA \cap GB \neq \emptyset$。
  令g_i 为一扇门，使得$g_i \in G_A \cap G_B$，并不失一般性地假设A 先于g_i 穿过B。令t^* 为A 的左边包含在g_i中的最早时间。A 到达该位置的最快方式是沿着路径 $\pi^j{}_A$ 走过所有$j < i$，然后从s_A^i 径直向右，直到穿过g_i。因此，

$$t^* \geqslant \sum_{j=1}^{i-1} (11 - y_j) + 2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} y_i.$$

B 完全穿过g_i 的最早时间为$t^* + 1$。（如果在t^*时g_i 包含B 的右边缘，则B 能够做到这一点。）B 首次穿过g_i 后，仍需到达t_B^m。最快的方式是先沿着 π_B^i 中穿过g_i 后剩余的部分前进——这假设B完全穿过g_i时位于 π_B^i 上，这对B而言是可能的最短路径——然后沿着路径 $\pi^j{}_B$ 走过所有$j > i$。这条路径的总长度为$8\frac{1}{2} - \frac{3}{2}y_i + \sum_{j=i+1}^{m}(11 - y^j)$。因此，

$$\text{¢}(B) \geqslant t^* + 1 + 8\tfrac{1}{2} - y_i + \sum_{j=i+1}^{m}(11 - y_j) \geqslant 11m + 1 - \sum_{j1}^{m} y_j = 11m.$$

我们得出结论，在两种情形下，$\text{¢}(\boldsymbol{\pi}) > 11m - \frac{1}{2}$ in 均成立，从而完成了证明。 □

6 结论

我们提出了一种$O(n^4 \log n)$时间算法，用于计算正交环境中两个单位正方形的最小总长度规划；这是首个用于多边形环境中双机器人最优运动规划的多项式时间算法。与此相反，我们证明了，在相同设置下最小化最大完工时间是弱 NP 难的。最后，我们提出一些开放问题：

- 我们的最小和问题算法的运行时间能否改进为$O(n^2 \log n)$？能否将我们的算法扩展到k 个单位正方形，使其运行时间为$n^{O(k)}$？
- 一般多边形环境中两个单位正方形（或圆盘）的最小和问题是否属于 P 类?
- 对于在正交环境中平移的两个单位正方形的最小最大完成时间问题，是否存在伪多项式时间算法？近似算法又如何?

参考文献

[1] M. Abrahamsen、K. Buchin、M. Buchin、L. Kleist、M. L¨offler、L. Schlipf、A. Schulz 和 J. Stade。单位正方形和圆盘的重构：简单设置下的 PSPACE 难。在第*41*届年度国际计算几何研讨会（*SoCG*）论文集中，第 1:1–1:18 页，2025年。[2] A. Adler、M. de Berg、D. Halperin 和 K. Solovey。简单多边形中无标签圆盘的高效多机器人运动规划。*IEEE* 自动化科学与工程汇刊，12(4):1309–1317，2015年。[3] P. K. Agarwal、T. Geft、D. Halperin 和 E. Taylor。具有旋转区域的单位圆盘的多机器人运动规划。计算几何，114:102019，2023年。

[4] P. K. Agarwal、D. Halperin、M. Sharir 和 A. Steiger。多边形环境中两个方形机器人的近最优最小和运动规划。在*2024*年 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会（*SODA*）论文集中，第 4942–4962 页，2024年。[5] P. K. Agarwal、R. Sharathkumar 和 H. Yu。凸障碍物之间的近似欧几里得最短路径。在*2009*年 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会（*SODA*）论文集中，第 283–292 页，2009年。[6] P. K. Agarwal 和 M. Sharir。排列及其应用。在 J.-R. Sack 和 J. Urrutia 编，《计算几何手册》中，第 49–119 页。North-Holland，2000年。[7] L. Antonyshyn、J. Silveira、S. Givigi 和 J. A. Marshall。多移动机器人任务与运动规划：综述。*ACM*计算调查，55(10):213:1–213:35，2023年。[8] B. Aronov、M. de Berg、A. F. van der Stappen、P. Svestka 和 J. Vleugels。多机器人运动规划。离散与计算几何，22(4):505–525，1999年。[9] B. Banyassady、M. de Berg、K. Bringmann、K. Buchin、H. Fernau、D. Halperin、I. Kos-titsyna、Y. Okamoto 和 S. Slot。具有更紧间距界的无标签多机器人运动规划。在第*38*届国际计算几何研讨会（*SoCG*）论文集中，第 12:1–12:16 页，2022年。[10] M. d. Berg、O. Cheong、M. v. Kreveld 和 M. Overmars。《计算几何：算法与应用》（第*3*版）。Springer-Verlag，2008年。[11] T. Brocken、G. W. van der Heijden、I. Kostitsyna、L. E. Lo-Wong 和 R. J. A. Surtel。*k*色圆盘的多机器人运动规划是 PSPACE 困难的。在第*10*届趣味算法国际会议（*FUN*）论文集中，LIPIcs 第157卷，第 15:1–15:16 页，2021年。[12] J. Brunner、L. Chung、E. D. Demaine、D. H. Hendrickson、A. Hesterberg、A. Suhl 和 A. Zeff。1×1 带固定障碍块的《Rush Hour》是 PSPACE完全的。在第*10*届趣味算法国际会议（*FUN*）论文集中，LIPIcs 第157卷，第 7:1–7:14 页，2021年。[13] J. Canny 和 J. Reif。机器人运动规划问题的新下界技术。在第*28*届 *IEEE* 计算机科学基础研讨会（*FOCS*）论文集中，第 49–60 页，1987年。[14] D. Z. Chen 和 H. Wang。计算平面中曲线障碍物之间的最短路径。*ACM*算法汇刊，11(4):1–46，2015年。[15] K. L. Clarkson。最短路径运动规划的近似算法。在第*19*届 *ACM* 计算理论研讨会（*STOC*）论文集中，第 56–65 页，1987年。[16] D. Dayan、K. Solovey、M. Pavone 和 D. Halperin。采用有限采样的近最优多机器人运动规划。在*2021*年 *IEEE* 机器人与自动化国际会议（*ICRA*）论文集中，第 9190–9196 页，2021年。

[17] D. Dayan、K. Solovey、M. Pavone 和 D. Halperin。采用有限采样的近似最优多机器人运动规划。*IEEE*机器人学汇刊，39(5):3422–3436，2023.[18] A. Deligkas、E. Eiben、R. Ganian、I. Kanj 和 M. S. Ramanujan。协同运动规划的参数化算法：能量最小化。载于第*51*届国际自动机、语言与编程研讨会（*ICALP*）论文集，第297卷*LIPIcs*，第53:1–53:18页，2024.[19] E. D. Demaine、S. P. Fekete、P. Keldenich、H. Meijer 和 C. Scheffer。协同运动规划：以有界伸长重新配置一群带标签机器人。*SIAM*计算杂志，48(6):1727–1762，2019.[20] E. Eiben、R. Ganian 和 I. Kanj。协同运动规划的参数化复杂性。载于第*39*届国际计算几何研讨会（*SoCG*）论文集，第258卷*LIPIcs*，第28:1–28:16页，2023.[21] G. Esteban、D. Halperin、V. Ru´íz、V. Sacrist´án 和 R. I. Silveira。方形机器人的最短协同运动。载于第*18*届算法与数据结构国际研讨会（*WADS*）论文集，第14079卷计算机科学讲义，第430–443页，2023.[22] D. Halperin、L. Kavraki 和 K. Solovey。机器人学。载于 J. E. Goodman、J. O'Rourke 和 C. T´oth 编，《离散与计算几何手册》，第51章，第1343–1376页。Chapman & Hall/CRC，第3版，2018.[23] D. Halperin、M. Sharir 和 O. Salzman。算法运动规划。载于 J. E. Good- man、J. O' Rourke 和 C. T´oth 编，《离散与计算几何手册》，第50章，第1311–1342页。Chapman & Hall/CRC，第3版，2018.[24] R. A. Hearn 和 E. D. Demaine。通过非确定性约束逻辑计算模型证明滑块拼图及其他问题的PSPACE完全性。理论计算机科学，343(1-2):72–96，2005.[25] J. Hershberger 和 S. Suri。平面上欧几里得最短路径的最优算法。*SIAM*计算杂志，28(6):2215–2256，1999.[26] J. E. Hopcroft、J. T. Schwartz 和 M. Sharir。多个独立物体运动规划的复杂性：“仓库管理员问题”的PSPACE困难性。国际机器人研究杂志，3(4):76–88，1984.[27] I. Kanj 和 S. Parsa。正方形机器人运动规划的参数化复杂性。载于第*40*届国际计算几何研讨会（*SoCG*）论文集，第293卷*LIPIcs*，第65:1–65:15页，2024.[28] S. Karaman 和 E. Frazzoli。最优运动规划的基于采样的算法。国际机器人研究杂志，30(7):846–894，2011.[29] D. G. Kirkpatrick 和 P. Liu。刻画两个圆盘的最短协同运动。载于第*28*届加拿大计算几何会议论文集，第252–259页，2016。

[30] D. G. Kirkpatrick 和 P. Liu。两个中心对称凸机器人的最短协同运动。*CoRR*，abs/2503.02010，2025.[31] Y. Kobayashi 和 C. Sommer。平面图中的最短不相交路径。离散优化，7(4):234–245，2010.[32] S. M. LaValle。《规划算法》。剑桥大学出版社，2006.[33] J. S. Mitchell。最短路径与网络。载于 J. E. Goodman、J. O'Rourke 和 C. T´oth 编，《离散与计算几何手册》，第51章，第811–848页。Chapman & Hall/CRC，第3版，2018.[34] P. J. Rezende、D.-T. Lee 和 Y.-F. Wu。存在矩形障碍物时的直角线段最短路径。离散计算几何，4(1):41–53，1989.[35] V. Ru´íz Herrero。两个方形机器人的最优协同运动。硕士论文，加泰罗尼亚理工大学，2019.[36] O. Salzman。基于采样的机器人运动规划。*ACM*通讯，62(10):54–63，2019.[37] M. Sharir 和 S. Sifrony。两个独立机器人的协同运动规划。数学与人工智能年刊，3(1):107–130，1991.[38] R. Shome、K. Solovey、A. Dobson、D. Halperin 和 K. E. Bekris。dRRT*：可扩展且具备渐近最优性的多机器人运动规划。《自主机器人》，44(3-4):443–467，2020.[39] I. Solomon 和 D. Halperin。平面 $\mathbb{R}^d$中多个单位球机器人运动规划。载于第*13*届机器人算法基础研讨会（*WAFR*）论文集，第799–816页，2018.[40] K. Solovey 和 D. Halperin。无标签多机器人运动规划的困难性。国际机器人研究杂志，35(14):1750–1759，2016.[41] K. Solovey、L. Janson、E. Schmerling、E. Frazzoli 和 M. Pavone。重新审视RRT*的渐近最优性。载于*2020*年*IEEE*国际机器人与自动化会议（*ICRA*）论文集，第2189–2195页，2020.[42] K. Solovey、J. Yu、O. Zamir 和 D. Halperin。具备最优性保证的无标签圆盘运动规划。载于机器人：科学与系统，2015.[43] P. G. Spirakis 和 C.-K. Yap。移动多个圆盘的强NP困难性。信息处理快报，19(1):55–59，1984.[44] R. Stern、N. R. Sturtevant、A. Felner、S. Koenig、H. Ma、T. T. Walker、J. Li、D. Atzmon、L. Cohen、T. K. S. Kumar、R. Bart´ak 和 E. Boyarski。多智能体寻路：定义、变体与基准测试。载于第*12*届国际组合搜索研讨会论文集，第151–159页，2019。

[45] M. Turpin、K. Mohta、N. Michael 和 V. Kumar。可互换机器人大型团队的目标分配与轨迹规划。《自主机器人》，37(4):401–415，2014。[46] H. Wang。平面上欧几里得最短路径的一种新算法。载于第 *53* 届计算理论研讨会（*STOC*）论文集，第 975–988 页，2021。[47] Z. Yan、N. Jouandeau 和 A. A. Cherif。多机器人协调综述与分析。《国际先进机器人系统期刊》，10(12):399，2013。[48] J. Yu 和 S. M. LaValle。图上最优多机器人路径规划的结构与难解性。载于第 *27* 届人工智能会议论文集，2013。