arXiv:2601.19196v1 [math.DG] 27 Jan 2026

共形类中环面上拉普拉斯特征值的旋转对称临界度量

EGOR MOROZOV

Abstract. 我们研究环面上的一个共形类中，使第一个拉普拉斯-贝尔特拉米特征值按面积归一化后达到最大值的问题。根据 Nadirashvili、El Soufi 和 Ilias 的一项结果，共形类中第 k 个归一化拉普拉斯-贝尔特拉米特征值泛函 $\bar{\lambda}_k$ 的临界度量对应于映射到球面的调和映射。本文构造了某些 $\mathbb{S}^1$-等变调和映射 $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^3$。对于环面上的每个非菱形共形类，其中一个映射对应于该共形类中拉普拉斯特征值 $\bar{\lambda}_1$的旋转对称临界度量，其 $\bar{\lambda}_1$ 值高于平坦度量的值。这一结果改进了 Karpukhin 最近证明的结果，该结果回答了 El Soufi、Ilias 和 Ros 提出的问题。此外，我们还证明，如果矩形环面上的旋转不变度量在其共形类中使 $\bar{\lambda}_1$ 达到最大值，那么它就是 $\mathbb{S}^1$-等变的，并且与上述度量相同（相差一个标量因子）。最后，我们证明， $\mathbb{S}^3$ 中的一族极小环面，即大槻环面，自然地包含在我们构造的这一族中。这为用椭圆积分显式参数化大槻环面提供了方法。

1. Introduction

1.1. 曲面上归一化拉普拉斯-贝尔特拉米特征值的临界度量。设 (M, g) 是一个闭黎曼曲面，并且

$$0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leqslant \lambda_2(M,g) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(M,g) \leqslant \ldots \nearrow +\infty$$

是 (M, g) 的拉普拉斯–贝尔特拉米特征值。对于每个 $k \geqslant 1$，第 k 个归一化特征值泛函定义为

$$\bar{\lambda}_k(M,g) := \lambda_k(M,g)\operatorname{Area}(M,g).$$

考虑以下量

$$\Lambda_k(M) = \sup_{g' \in \mathcal{R}(M)} \bar{\lambda}_k(M,g'), \qquad \Lambda_k(M,[g]) = \sup_{g' \in [g]} \bar{\lambda}_k(M,g'),$$

其中 $\mathcal{R}(M)$ 是 M 上所有光滑黎曼度量的集合，且 $[g] = \{e^{2\omega} g \mid \omega \in C^\infty(M)\}$ 是 g 的共形类。若度量 $g \in \mathcal{R}(M)$ 对泛函 λ_k 满足 $\lambda_k(M,g) = \Lambda_k(M)$（分别为 $\lambda_k(M,g) = \Lambda_k(M,[g])$），则称其为极大度量（分别称为共形类中的极大度量）。一个较弱的概念是临界（又称极值）度量，由 Nadirashvili [Nad96] 引入，并由 El Soufi 和 Ilias [ESI00, ESI03, ESI08] 加以完善。若对于任意解析变形 $g_t \subset \mathcal{R}(M)$（分别为 $g_t \subset [g]$），度量 $g \in \mathcal{R}(M)$ 满足 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，且 $g_0 = g$，则称其为泛函 λ_k 的临界度量（分别称为共形类中的临界度量）；此时有

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} \bar{\lambda}_k(M,g_t) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0-} \bar{\lambda}_k(M,g_t) \leqslant 0.$$

本文关注 $M = \mathbb{T}^2$ 为环面的情形。对于每个 $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$，令 $g_{a,b}$ 表示由 $\mathbb{R}^2$ 按格 $\Gamma_{a,b} := \mathbb{Z}(1,0) + \mathbb{Z}(a,b)$ 的商所诱导的 $\mathbb{T}^2$ 上的平坦度量。回顾一下， $\mathbb{T}^2$ 上共形类的模空间由 $\{[g_{a,b}] \mid (a,b) \in \mathcal{M}\}$ 给出，其中

$$\mathcal{M} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant a \leqslant 1/2, b > 0, a^2 + b^2 \geqslant 1\}.$$

在 [ESIR97]中，作者证明了

$$\Lambda_1(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}])=\frac{4\pi^2}{b},\qquad (a,b)\in\mathcal{M},\quad a^2+b^2=1,$$

其中，上确界仅在平坦度量处取得。他们还提出，平坦度量是否在其他共形类中也是 ¯泛函 λ_1 的极大值。2014 年，Petrides [Pet14，定理 1] 证明了

$$\Lambda_1(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}])>8\pi,\qquad (a,b)\in\mathcal{M}, \tag{1}$$

这意味着，只要 $b\geqslant\frac{\pi}{2}$，平坦度量 $g_{a,\ b}$ 就不可能是其共形类中的极大值。最后，Karpukhin 最近 [Kar25，定理 1.1] 证明，对于所有满足 $a^2+b^2>1$ 的 $(a,b)\in\mathcal{M}$，度量 $g_{a,\ b}$ 都不是其共形类中的极大值。证明基于将二次变分公式用于 $\bar{\lambda}_1$，并对平坦度量进行某种扰动。特别是，该方法无法显式构造出一个共形类中的临界度量，其 λ_1 值大于平坦度量的 λ_1 值。我们的第一个主要结果是显式构造这样一个临界度量。

定理 1. 对于任意的 $(a,b)\in\mathcal{M}$，使得 $a^2+b^2>1$，存在一个旋转对称临界度量 $g^{1,\ \ 1\ 0\ ,,b}_{\ \ a}=\rho(y)g_{a,\ b}$，它属于共形类 $[g_{a,b}]$，且满足 $\bar{\lambda}_1$

$$\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2,g^{1,1,0}_{a,b})>\max\Big\{\frac{4\pi^2}{b},8\pi\Big\}.$$

我们的第二个主要结果涉及矩形共形类中的极大度量。

定理 2. 设 $b>1$ 和 $g=\rho(x,y)g_{0,\ b}$，其中 ρ: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是一个$\Gamma_{0,\ b}$-周期的正光滑函数¯，且既不依赖于 x，也不依赖于 y。如果 g 在共形类 $[g_{0,b}]$中是泛函 λ_1 的极大度量，那么 $g=cg^{1,\ \ 1\ 0\ ,,}_{\ \ 0\ b}$，其中 $c>0$为某个常数。

注 1.1. 从定理 2 可见，共形类$[g_{a,b}]$中的“旋转对称度量”$(a,b)\in\mathcal{M}$ 是指具有如下形式的度量： $\rho(bx-ay,y)g_{a,\ b}$，其中 ρ 是一个与其某个自变量无关的光滑正函数。请注意，这并不等价于在共形微分同胚的某个 $\mathbb{S}^1$ 作用下保持不变。具有后一性质的度量构成一个更大的类。

我们有理由预期极大度量具有旋转对称性。由于根据定理 1，度量 $g^{1,\ \ 1\ 0\ ,,}_{\ \ 0\ b}$,</style}优于平坦度量，并且与 Petrides不等式 (1) 相符，因此我们提出以下自然猜想。

猜想 1.1. 对每个 $(a,b)\in\mathcal{M}$ 使得 $a^2+b^2>1$，度量 $g^{1,\ \ 1\ 0\ ,,}_{\ \ a\ b}$,</style}在共形类 $[g_{a,b}]$中使泛函 λ_1 达到极大值。

参见 [KM22，关于共形类中第一归一化斯捷克洛夫特征值情形的猜想 1] 。另见 [Kan25]，其中给出了 $\Lambda_1(M,[g_{a,b}])$ 的当前最佳上界。

在 [KLO17], 中，作者提供了一种数值计算 $\Lambda_1(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}])$ 值及相应共形因子的方法。根据该论文，最优共形因子具有旋转对称性，但旋转方向不同（也就是说，其中的共形因子具有如下形式：对某个正函数 ˆρ, ˆ$\rho(bx-ay)$）。不过，Osting 教授和高秋燕教授（通过私人通信）确认，论文中使用的代码只需稍作修正，旋转的真实方向便与度量 $g^{1,\ \ 1\ 0\ ,,}_{\ \ a\ b}$,</style}相同。此外，对于 KLO中考察的少数几个测试共形类，数值计算得到的 (,) 与使用下文公式 (14) 数值计算得到的 (,, $\ \ 1\ 0\ ,,}_{\ \ a\ b}$,</style}) 相符（误差在数值误差范围内）。综上，我们可以得出结论：猜想 1.1 有充分的数值证据支持。

考虑到猜想 1.1，研究 $(a,b)\in\mathcal{M}$ 的依赖关系很有意思。

$\Lambda_1(\mathbb{T}^2,g^{1,\ \ 1\ 0\ ,,}_{\ \ a\ b})$ 在 $(a,b)\in\mathcal{M}$ 我们能够证明

定理 3. 对于 $(a,b) \in \mathcal{M}$，$\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g^1_{a\,b}{}^{1\,0}{}_{,}{}^{,})$ 是关于 a 的增函数，关于 b 的减函数。

回顾 [Nad96] 中的结果：等边环面上的平坦度量是 λ_1 的唯一全局最大值。鉴于猜想 1.1 和定理 3，这一事实十分自然，因为等边环面的共形类恰好具有最大的 a 和最小的 b。

度量 $g^1_{a\,b}{}^{1\,0}{}_{,}{}^{,}$ 只是度量族 $g^p_{a\,b}{}^{q\,r}{}_{,}{}^{,}$ 中的一个，其中 p、q、r 是满足某些不等式的整数。为了构造这些度量，我们利用共形类中的临界度量与映射到球面的调和映射之间众所周知的联系。回顾一下，对于黎曼曲面 (M,g)，魏尔计数函数定义为

$$N(\lambda) := \#\{i \mid \lambda_i(M,g) < \lambda\}.$$

定理 4（[ESI08，定理 3.1(ii) 和 4.1(ii)]）。设 $n \geqslant 1$, M 为光滑曲面，且 $\mathbb{S}^n$ 为带有标准圆度量 g_0 的单位球面。

(1) 设 $f\colon M \to \mathbb{S}^n$ 是一个极小映射。那么度量 f^*g_0 是泛函 $\lambda_{N(2)}$ 在 M 上的临界度量。(2) 设 $f\colon (M,g) \to \mathbb{S}^n$ 是一个调和映射。那么度量 $\frac{1}{2}|\mathrm{d}f|^2_g g$ 是共形类 $[g]$ 中泛函 $\lambda_{N(2)}$ 在 M 上的临界度量。

在情形 (2) 中，度量 $\frac{1}{2}|\mathrm{d}f|^2_g g$ 对应的数值 $N(2)$ 也称为 f 的谱指标，记作 $\mathrm{ind}_S f$（见 [Kar21，定义 2.7]）。另见 [Pen13a、Pen19]，了解临界度量与极小映射、调和映射之间联系及相关主题的更多细节。

定理 4 的第 (1) 部分已多次成功用于在环面上显式构造临界度量（甚至极大度量）[Nad96、Lap08、Pen12、Pen13b、Pen15、Kar14]，克莱因瓶上 [Lap08、Pen12、JNP06、ESGJ06、CKM19]，以及亏格为二的可定向曲面上 [JLN+05、NS19]。本文利用定理 4 的第 (2) 部分，在环面的共形类中构造某些临界度量。更确切地说，每个度量 $g^p_{a\,b}{}^{q\,r}{}_{,}{}^{,}$，都来自一个特定的、显式构造的 $\mathbb{S}^1$-不变调和映射 $u^p_{a\,b}{}^{q\,r}{}_{,}{}^{,}$，该映射从 $(\mathbb{T}^2, [g_{a,b}])$ 映到 $\mathbb{S}^3 = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2\colon |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$，其中 $\mathbb{S}^1$ 在 $\mathbb{S}^3$ 和 $(\mathbb{T}^2, [g_{a,b}])$ 上的作用定义如下

$$\alpha \cdot (z_1,z_2) = (z_1, e^{2\pi i\alpha} z_2), \qquad (z_1,z_2) \in \mathbb{S}^3, \tag{2}$$

$$\alpha \cdot (x,y) = (x+\alpha, y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2/\Gamma_{a,b} \cong (\mathbb{T}^2, [g_{a,b}]), \qquad \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1. \tag{3}$$

请注意，式 (2) 中的作用与 Hsiang-Lawson 构造中用于构造大棍环面的作用相同。大棍环面是 $\mathbb{S}^1$ 不变极小环面的一族，最初由大月 [Ots70] 在 $\mathbb{S}^3$ 中研究。Hsiang 和 Lawson [HL71] 对最初的构造进行了简化。后来，Penskoi [Pen13b] 和 Karpukhin [Kar14] 利用这一族环面，为环面上的某些泛函 λ_k 构造了临界度量。我们将在第 6 节证明，大棍环面自然地属于我们所研究的这一族。特别地，这为大棍环面提供了一个显式参数化，其中的函数以椭圆积分表示。

遗憾的是，我们无法计算所有映射 $u^p_{a\,b}{}^{q\,r}{}_{,}{}^{1\,0}{}_{,}{}^{,b} = 1$ 的谱指标（事实上，我们怀疑一般情形下无法得到闭式解）。不过，我们能够给出一个下界，并给出该下界能够取到的充分条件。特别地，我们能够证明 $\inf_S u^1_{a\,b}{}^{1\,0}{}_{,}{}^{,b} = 1$，这足以证明定理 1。

1.2. 主要技术结果。下面给出映射 $u^p_{a\,b}{}^{q\,r}{}_{,}{}^{,}$ 的定义。我们需要以下辅助命题。

命题 1.1. 设 $a,b \in \mathbb{R}, b > 0$. 设 p,q,r 为一组三个整数，且 p,q 为正数，并且

$$\frac{p}{q} \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{r+a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \qquad (r+a)^2 + b^2 > p^2. \tag{4}$$

那么存在唯一一组三个实数 τ_1, τ_2, τ_3 满足

$$0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant 1 \leqslant \tau_3, \qquad \tau_2 < \tau_3 \tag{5}$$

and

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-\tau_1)(\tau_2-t)(\tau_3-t)}} = \frac{2\pi b}{q}, \tag{6}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\sqrt{\tau_1\tau_2\tau_3}\,\mathrm{d}t}{t\sqrt{(t-\tau_1)(\tau_2-t)(\tau_3-t)}} = \frac{2\pi p}{q}, \tag{7}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\sqrt{(1-\tau_1)(1-\tau_2)(\tau_3-1)}\,\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{(t-\tau_1)(\tau_2-t)(\tau_3-t)}} = \left|\frac{2\pi(r+a)}{q}\right|. \tag{8}$$

此外， $\tau_1 = 0$ 当且仅当 $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$；此时，(7) 中的积分视为其在 $\tau_1 \to 0$ 时的极限。类似地， $\tau_2 = 1$ 当且仅当 $\left|\frac{r+a}{q}\right| = \frac{1}{2}$；此时，(8) 中的积分视为其在 $\tau_2 \to 1$ 时的极限。

逆命题也成立：若 τ_1、τ_2、τ_3 满足 (5)，且 p、$q > 0$、r 是满足 (6)–(8) 的整数，则 p、q、r 必满足 (4)。

设 a、b、p、q、r、τ_1、τ_2、τ_3 如命题 1.1 所述。令

$$m := \frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_3-\tau_1}, \quad n_0 := -\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_1}, \quad n_1 := \frac{\tau_2-\tau_1}{1-\tau_1}. \tag{9}$$

考虑映射

$$\tilde{u}^{p,q,r}_{a,b} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3, \qquad \tilde{u}^{p,q,r}_{a,b}(x,y) = (\cos\varphi(y)e^{i\theta(y)}, \sin\varphi(y)e^{i(2\pi x+\alpha(y))}),$$

其中 $\varphi(y)$ 由下式给出

$$\varphi(y) = \begin{cases} \arccos\sqrt{(\tau_2-\tau_1)\,\mathrm{sn}^2(2\pi\sqrt{\tau_3-\tau_1}y \mid m) + \tau_1}, & \frac{p}{q} > \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{r+a}{q}\right| < \frac{1}{2}, \quad \text{(10a)} \\ \arccos(\sqrt{\tau_2}\,\mathrm{sn}(2\pi\sqrt{\tau_3}y \mid m)), & \frac{p}{q} = \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{r+a}{q}\right| < \frac{1}{2}, \quad \text{(10b)} \\ \arcsin(\sqrt{1-\tau_1}\,\mathrm{cn}(2\pi\sqrt{\tau_3-\tau_1}y \mid m)), & \frac{p}{q} > \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{r+a}{q}\right| = \frac{1}{2}, \quad \text{(10c)} \\ \frac{\pi}{2} - \mathrm{am}(2\pi\sqrt{\tau_3}y \mid m), & \frac{p}{q} = \left|\frac{r+a}{q}\right| = \frac{1}{2}, \quad \text{(10d)} \end{cases}$$

$\theta(y)$ 由下式给出

$$\theta(y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\tau_2\tau_3}{\tau_1(\tau_3-\tau_1)}}\,\Pi(n_0; \mathrm{am}(2\pi\sqrt{\tau_3-\tau_1}y \mid m) \mid m), & \frac{p}{q} > \frac{1}{2}, \\ \text{const}, & \frac{p}{q} = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{11}$$

并且 $\alpha(y)$ 由下式给出

$$\alpha(y) = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(r+a)\sqrt{\dfrac{(1-\tau_2)(\tau_3-1)}{(1-\tau_1)(\tau_3-\tau_1)}}\,\Pi(n_1; \mathrm{am}(2\pi\sqrt{\tau_3-\tau_1}y \mid m) \mid m), & \left|\frac{r+a}{q}\right| < \frac{1}{2}, \\ \text{const}, & \left|\frac{r+a}{q}\right| = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{12}$$

现在可以陈述本文的关键技术结果了。

定理 5. 映射 $\tilde{u}^{p,q,r}_{a,b}$下降为调和映射 $u^{p,q,r}_{a,b}$：$(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}]) \to \mathbb{S}^3$ 其能量密度为

$$e(u^{p,q,r}_{a,b}) = \rho(y) := 2\pi^2(-\cos 2\varphi + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - 1).$$

度量 $g^{p,q,r}_{a,b} := \rho(y) g_{a,b}$ 的数值 $N(2)$ 满足

$$N(2) \geqslant 2p - 1 + \delta_{2p,q} + 2(\lceil 2|r+a| - 1\rceil + \delta_{r+a,0}), \tag{13}$$

相应泛函的值为

$$\bar{\lambda}_{N(2)}(\mathbb{T}^2, g^{p,q,r}_{a,b}) = 4\pi^2 b(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3) + 8\pi q\sqrt{\tau_3 - \tau_1}E(m). \tag{14}$$

当.....时，不等式 (13) 取等号

$$\tau_2 + \tau_3 - \tau_1 \leqslant 4. \tag{15}$$

当.....时，该条件成立

$$either \quad \frac{p}{q} > \frac{1}{\sqrt{3}} \quad or \quad \left|\frac{r+a}{q}\right| < \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{16}$$

此外，对于 $p = q = 1$， $r = 0$ 有

$$\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g^{1,1,0}_{a,b}) > \max\Big\{\frac{4\pi^2}{b}, 8\pi\Big\} \geqslant \bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g_{a,b}). \tag{17}$$

$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ 和 $\left|\frac{r+a}{q}\right| = \frac{1}{2}$ 这两种情形分别称为第一种和第二种极限情形。第三种极限情形，即式 (4) 中第三个不等式取等号时的情况，在第 8 节中讨论。定理 1 可由定理 5 结合 $p = q = 1$、 $r = 0$直接推出。注意，对于 $a = \frac{1}{2}$，这对应于第二种极限情形。

以下是关于命题 1.1 和定理 5 的一些要点，有助于理解其中的情况。

- 尽管我们不假设 $(a,b) \in \mathcal{M}$，但由于式 (4)，在 $p = q = 1, r = 0$ 的情形下总是如此。
- 在第一种极限情形下，映射 $u^{p,q,r}_{a,b}$ 不是满射，即其像包含于某个赤道 $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ 中。
- 在第二种极限情形中，要么 $a \in \mathbb{Z}$，且 q 为偶数；要么 $a \notin \mathbb{Z}$，且 $2a \in \mathbb{Z}$ 和 q 为奇数。
- “混合”极限情形 $\frac{p}{q} = \left|\frac{r+a}{q}\right| = \frac{1}{2}$ 仅当 $a \in \mathbb{Z}$时才可能。映射 $u^{1,2,1}_{0,b}$ 与德洛内节点面和德洛内波纹面的高斯映射相同，参见 [Eel87，第 4],[Smi72 节，定理 4.3。2]。当$b \to +\infty$ （等价地， τ_3， $m \to 1$）时，映射 $u^{1,2,1}_{0,b}$ 收敛到悬链面的高斯映射。
- 不等式 (13) 可以是严格的，参见注 4.1。

令 a， $b \in \mathbb{R}$， $b > 0$，并令 $p > 0$， r 为满足以下条件的整数

$$(r+a)^2 + b^2 = p^2. \tag{18}$$

那么对于每个 $\varphi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$，该映射

$$\tilde{u}^{p,r;\varphi_0}_{a,b} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3, \qquad \tilde{u}^{p,r;\varphi_0}_{a,b}(x,y) := (\cos\varphi_0\, e^{\frac{2\pi i}{b}py}, \sin\varphi_0\, e^{\frac{2\pi i}{b}(bx-(r+a)y)})$$

下降为调和映射 $u^{p,r;\varphi_0}_{a,b}$：$(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}]) \to \mathbb{S}^3$。我们的分类结果如下。

定理 6. 设 $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$和 u: $(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}]) \to \mathbb{S}^3$ 是一个关于作用 (2,3) 具有 $\mathbb{S}^1$-等变性的调和映射。那么，存在一个 $\mathbb{S}^1$-等变的共形自同构 γ_1: $(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}]) \to (\mathbb{T}^2,[g_{a,b}])$，以及一个 $\mathbb{S}^1$-等变的等距变换 γ_2: $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$，使得以下两种情况之一成立： $u = \gamma_2 \circ u^{p,q,r}_{a,b} \circ \gamma_1$，其中某个整数 $p, q > 0$和 r 满足 (4)；或者 $u = \gamma_2 \circ u^{r;\varphi_0}_{a,b} \circ \gamma_1$，其中某个整数 $p > 0, r$ 满足 (18)，且 $\varphi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$。

1.3. 论文结构。本文结构如下。命题 1.1 和定理 6 分别在第 2 节和第 3 节中证明。映射 $u^{p}{}_{,a}{}^{q\ r}_{\ b\ \ ,,}$的调和性是证明过程中的一个副产品。在第 4 节中，我们证明界 (13) 以及充分条件 (15)、(16)。在第 5 节中，我们证明不等式 (14)（由此完成定理 5 的证明）和定理 2。在第 6 节中，我们说明大椭环面如何纳入我们的框架，并在第 7 节中证明定理 3。第 8 节研究第三种极限情形。最后，在第 9 节中，我们讨论证明猜想 1.1 的困难，并概述未来研究可能的方向。

致谢。作者感谢 Mikhail Karpukhin 和 Iosif Polterovich 阅读手稿的早期版本，并提出许多改进建议。特别感谢 Mikhail Karpukhin 提供命题 7.1。作者也感谢 Braxton Osting、Chiu-Yen Kao 和 Alexei V. Penskoi 进行有益的讨论。本研究部分由 ISM 研究生奖学金资助。

2. Existence of τ_1、τ_2、τ_3

本节证明命题 1.1。关于椭圆积分的一切内容，读者可参阅 [BF71、Car25、WR25]。本文此处及第 5 节均借助 Wolfram Mathematica 进行符号计算。尽管手动验证所有计算会十分繁琐，但原则上是可行的。

根据 [BF71，233.00 和 233.02]，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-\tau_1)(\tau_2-t)(\tau_3-t)}} &= \frac{2}{\sqrt{\tau_3-\tau_1}}K\left(\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_3-\tau_1}\right),\\
\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\sqrt{\tau_1\tau_2\tau_3}\,\mathrm{d}t}{t\sqrt{(t-\tau_1)(\tau_2-t)(\tau_3-t)}} &= 2\sqrt{\frac{\tau_2\tau_3}{\tau_1(\tau_3-\tau_1)}}\Pi\left(-\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_1}\,\middle|\,\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_3-\tau_1}\right),\\
\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\sqrt{(1-\tau_1)(1-\tau_2)(\tau_3-1)}\,\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{(t-\tau_1)(\tau_2-t)(\tau_3-t)}} &= 2\sqrt{\frac{(1-\tau_2)(\tau_3-1)}{(1-\tau_1)(\tau_3-\tau_1)}}\Pi\left(\frac{\tau_2-\tau_1}{1-\tau_1}\,\middle|\,\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_3-\tau_1}\right).
\end{aligned}\tag{19}$$

因此，可以用 (9) 将 (6)–(8) 改写为

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_0}\right)m}K(m)=\frac{\pi b}{q},\quad \sqrt{\frac{(1-n_0)(n_0-m)}{n_0}}\Pi(n_0\mid m)=\frac{\pi p}{q},\\
&\sqrt{\frac{(1-n_1)(n_1-m)}{n_1}}\Pi(n_1\mid m)=\left|\frac{\pi(r+a)}{q}\right|.
\end{aligned}\tag{20}$$

引入函数

$$\Phi(n\mid m):=\sqrt{\frac{(1-n)(n-m)}{n}}\Pi(n\mid m).\tag{21}$$

我们有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}(n\mid m)=\frac{nE(m)+(m-n)K(m)}{2n^2}\sqrt{\frac{n}{(1-n)(n-m)}}.$$

由于

$$E(m)<K(m)<\frac{1}{1-m}E(m),\qquad m\in(0,1),\tag{22}$$

很容易看出

$$nE(m)+(m-n)K(m)>0,\qquad m\in(0,1),\quad n\in(-\infty,0)\cup(m,1),\tag{23}$$

因此，对于固定的 $m \in (0,1)$，$\Phi(n \mid m)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(m, 1)$ 上是关于 n 的增函数。此外，我们有

$$\begin{aligned} \Pi(n \mid m) &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{-n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{-n}}\right), && n \to -\infty, \\ \Pi(n \mid m) &= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{(1-n)(n-m)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{1-n}}\right), && n \to 1, \end{aligned} \tag{24}$$

因此

$$\lim_{n\to-\infty} \Phi(n \mid m) = \lim_{n\to 1} \Phi(n \mid m) = \frac{\pi}{2}.$$

由于

$$\lim_{n\to 0-} \Phi(n \mid m) = +\infty, \qquad \Phi(m \mid m) = 0,$$

我们得出　　对于每个 $m \in (0,1)$，都存在唯一的一对 $n_0 \in [-\infty, 0)$ 和 $n_1 \in [m, 1]$，使得　　t

$$\Phi(n_0 \mid m) = \frac{\pi p}{q}, \qquad \Phi(n_1 \mid m) = \left|\frac{\pi(r+a)}{q}\right|. \tag{25}$$

特别地，我们看到，$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ 当且仅当 $n_0 = -\infty$ 且 $\tau_1 = 0$。类似地，$\left|\frac{r+a}{q}\right| = \frac{1}{2}$ 当且仅当$n_1 = 1$ 且 $\tau_2 = 1$。将 n_0、n_1 视为由 (25) 隐式定义的 m 中的函数，并引入函数

$$\Psi(m) := \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0}\right) mK(m)^2. \tag{26}$$

由隐函数定理可得

$$n_i' = -\frac{\partial\Phi}{\partial m}(n_i \mid m)\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial n}(n_i \mid m) = \frac{n_i(n_i-1)E(m)}{(m-1)(n_iE(m) + (m-n_i)K(m))}, \qquad i = 0, 1, \tag{27}$$

and

$$\Psi'(m) = \frac{KE(K-E)((m-1)K+E)}{1-m}\frac{n_1-n_0}{(n_0E + (m-n_0)K)(n_1E + (m-n_1)K)} > 0,$$

其中我们 省略了 m 在 $K(m)$ $E(m)$ 中的自变量，并在后一个不等式中使用 (22)、(23)。由于

$$\Pi(n \mid 0) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-n}},$$

容易看出

$$\lim_{m\to 0}\frac{m}{n_0} = 1 - \frac{4p^2}{q^2}, \qquad \lim_{m\to 0}\frac{m}{n_1} = 1 - \frac{4(r+a)^2}{q^2}, \qquad \lim_{m\to 0}\Psi(m) = \frac{\pi^2}{q^2}(p^2 - (r+a)^2), \tag{28}$$

又由于

$$\Pi(n \mid m) = -\frac{1}{2(1-n)}\ln(1-m) + o(\ln(1-m)), \qquad m \to 1,$$

容易看出

$$\lim_{m\to 1} n_0 = -\infty, \qquad \lim_{m\to 1} n_1 = 1, \qquad \lim_{m\to 1}\Psi(m) = +\infty. \tag{29}$$

由于 $(r+a)^2 + b^2 > p^2$，存在唯一的 $m \in (0,1)$，使得 $\Psi(m) = \frac{\pi^2 b^2}{q^2}$，由此完成证明。反过来的结论只需将上述论证反向进行即可证明。□

3. $\mathbb{S}^1$-equivariant harmonic tori in $\mathbb{S}^3$

本节将对关于作用 (2,3) 的 $\mathbb{S}^1$-等变调和环面在 $\mathbb{S}^3$ 中进行分类。作为推论，我们得到映射 $u^{p,a}_{b}{}^{q\ r}_{,,}$ 是调和的。

该作用（2）的轨道空间可识别为

$$\mathbb{S}^2_{\geqslant 0} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \colon x_3 \geqslant 0\}.$$

该识别由下式给出

$$\mathbb{S}^2_{\geqslant 0} \cong \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1, \qquad (x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \{(x_1 + ix_2, e^{2\pi i\alpha} x_3) \in \mathbb{S}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}.$$

边界 $\partial\mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$ 上的点（即满足 $x_3 = 0$ 的点）对应于零维轨道，也就是 $\mathbb{S}^1$ 作用的不动点。这些被称为异常轨道。$\mathbb{S}^2_{>0} := \mathbb{S}^2_{\geqslant 0} \setminus \partial\mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$ 中的点对应于一维轨道。这些是一般型轨道。

定理 6 的证明。由于作用（3）的轨道空间可识别为 $\mathbb{R}/b\mathbb{Z}$，映射 u 下降为映射 $u_*\colon \mathbb{R}/b\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$ 在 $u_*^{-1}(\mathbb{S}^2_{>0})$ 上光滑。该映射的像是轨道空间中的一条曲线 γ_u。下文中，我们处理提升后的映射 $\tilde{u}_*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$。在 $\mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$ 上引入球坐标，

$$\mathbb{S}^2_{\geqslant 0} = \{(\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi) \mid \varphi \in [0, \pi/2], \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

注意，θ 在 N 处并非唯一：$= (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$。暂且假设 $N \notin \gamma_u$ 和 $\gamma_u \cap \partial\mathbb{S}^2_{\geqslant 0} = \varnothing$（我们很快会看到，这些假设意味着我们讨论的不是极限情形）。那么，$\tilde{u}_*$ 用球坐标表示为光滑函数 $\varphi\colon \mathbb{R} \to (0, \pi/2)$和 $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。由于 γ_u是闭的，函数$\varphi(y)$是 b-周期的，而函数 $\theta(y)$满足

$$\theta(y + b) \equiv \theta(y) + 2\pi p \tag{30}$$

对于某个 $p \in \mathbb{Z}$（这一性质有时称为拟周期性）。

这里我们遇到了 [HL71] 的极小情形与调和情形之间的一个关键区别。等变极小曲面完全由其在轨道空间中的像所确定。然而，在调和情形中并非如此，因为调和性在定义域的重新参数化下并不保持不变。因此，映射 u 的完整表达式必须包含一个额外参数，用来控制轨道中的坐标。也就是说，提升映射 $\tilde{u}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3$ 具有如下形式

$$\tilde{u}(x, y) = (\cos\varphi(y) e^{i\theta(y)}, \sin\varphi(y) e^{i(2\pi x + \alpha(y))})$$

对于某个光滑函数 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。同样，由于 γ_u 是闭的，函数 $\alpha(y)$ 满足

$$\alpha(y + b) \equiv \alpha(y) - 2\pi(r + a) \tag{31}$$

对于某个 $r \in \mathbb{Z}$。下文中，我们常省略 $\varphi(y)$ $\theta(y)$ $\alpha(y)$ 中的参数 y。现在我们使用以下结果

定理 7（[Smi72，定理 1.3.2]）。设 G 是作用于黎曼流形 M、N上的李群。等变映射 $f\colon M \to N$ 是 G-等变的，当且仅当其能量在所有紧支集等变变分下是驻定的。

u 的加倍能量密度为

$$2e(u) = |\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2 = (\varphi')^2 + (\theta')^2\cos^2\varphi + ((\alpha')^2 + 4\pi^2)\sin^2\varphi, \tag{32}$$

而 φ、θ、α 中能量的首次等变变分为

$$\delta_\varphi E(u) = -\varphi'' - (\theta')^2\sin\varphi\cos\varphi + ((\alpha')^2 + 4\pi^2)\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\delta_\theta E(u) = -(\theta'\cos^2\varphi)', \qquad \delta_\alpha E(u) = -(\alpha'\sin^2\varphi)'.$$

由定理 7 可得

$$-\varphi'' - c^2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} + d^2\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} + 4\pi^2\sin\varphi\cos\varphi = 0, \tag{33}$$

$$\theta' = \frac{c}{\cos^2\varphi}, \qquad \alpha' = \frac{d}{\sin^2\varphi}. \tag{34}$$

对于某些常数 c、$d\in\mathbb{R}$，将 (33) 乘以 φ' 并积分，得到

$$\varphi' = \pm\sqrt{-\frac{c^2}{\cos^2\varphi} - \frac{d^2}{\sin^2\varphi} - 4\pi^2\cos^2\varphi + A},$$

其中 $A\in\mathbb{R}$ 是另一个常数。最后，经过变量替换 $\tau := \cos^2\varphi$，得到

$$\tau' = \mp 4\pi\sqrt{P(\tau)}, \tag{35}$$

其中

$$4\pi^2 P(t) = 4\pi^2 t^3 - (A+4\pi^2)t^2 + (c^2 - d^2 + A)t - c^2. \tag{36}$$

设 τ_1、$\tau_2\in(0,1)$ 分别为 τ 的最小值和最大值。注意，平移 $(x,y)\mapsto(x+x_0,y+y_0)$ $x_0,y_0\in\mathbb{R}$ 诱导了 $(\mathbb{T}^2, [g_{a,b}])$ 上的 $\mathbb{S}^1$-等变共形微分同胚。将 u 替换为与适当的这类共形微分同胚复合后的映射，我们可以假设 $\varphi(0) = \tau_1$ 且 $\alpha(0) = 0$。类似地，轨道空间 $\mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$ 的旋转 $(\varphi,\theta)\mapsto(\varphi,\theta+\theta_0)$ $\theta_0\in\mathbb{R}$ 以及镜像对称 $(\varphi,\theta)\mapsto(\varphi,-\theta)$ 诱导了 $\mathbb{S}^3$ 上的 $\mathbb{S}^1$- 等变等距变换。将 u 替换为与适当的这类等距变换复合后的映射，我们可以假设 $\theta(0) = 0$ 且 $c\geqslant 0$ （特别是，$p\geqslant 0$）。经过这些修改后，我们的目标仅是证明以下结论之一：$u = u^{p,q}_{a,b,r}$，，，其中 $q\in\mathbb{N}$ 且 p,q,r 满足 (4)；或者 $u = u^{p,r;\varphi_0}_{a,b}$，，其中 $\varphi_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 且 p,r 满足 (18)。

假设 $\tau_1 = \tau_2$，即 $\tau\equiv$ 为常数。于是利用 (34) 和 $\theta(0) = \alpha(0) = 0$，可得 $\theta(y) = \frac{c}{\tau_1}y$ 且$\alpha(y) = \frac{d}{1-\tau_1}y$。由 (30) 和 (31) 可知 $\frac{c}{\tau_1} = \frac{2\pi p}{b}$ 且 $\frac{d}{1-\tau_1} = -\frac{2\pi(r+a)}{b}$。我们有 $u = u^{p,\,r;\varphi_0}_{a,\,b,\,,}$，，其中 $\varphi_0 = \arccos\sqrt{\tau_1}$，如所求。

现在假设 $\tau_1\neq\tau_2$。那么 τ_1,τ_2 是三次多项式 $P(t)$ 的根。由于这两个根都是实数，第三个根 τ_3 也必为实数。由于

$$\tau_1\tau_2\tau_3 = -P(0) = \frac{c^2}{4\pi^2}\geqslant 0, \qquad (1-\tau_1)(1-\tau_2)(1-\tau_3) = P(1) = -\frac{d^2}{4\pi^2}\leqslant 0, \tag{37}$$

由此可得 $\tau_3\geqslant 1$。显然，函数 $\varphi(0)$ 从 $y=0$ 处的值 τ_1 开始递增，直到在某个 $y=b_0$处达到值 τ_2，随后递减，直到在 $y=2b_0$ 处达到值 τ_1，依此类推。由于 φ 和 τ 是b-周期的，因此对某个 $q\in\mathbb{N}$ 有 $b_0 = \frac{b}{2q}$，且 $\frac{b}{q}$ 是 φ的最小周期。对 (35) 分离变量并应用 [BF71, 233.00]，，可得

$$y = \int_{\tau_1}^{\tau(y)}\frac{\mathrm{d}t}{4\pi\sqrt{P(t)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_3-\tau_1}}\,\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\tau-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}}\,\middle|\,\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_3-\tau_1}\right), \qquad \tau\in[\tau_1,\tau_2],\quad y\in[0,b_0],$$

由此可得 φ 由（10a）给出。代入 $y=b_0$，得到（6）。利用（34）、（37）和 $\theta'\geqslant 0$，我们得到

$$\theta(y) = \int_{\tau_1}^{\tau(y)}\frac{\sqrt{\tau_1\tau_2\tau_3}\,\mathrm{d}t}{2t\sqrt{P(t)}}, \quad \alpha(y) = -\operatorname{sgn}(r+a)\int_{\tau_1}^{\tau(y)}\frac{\sqrt{(1-\tau_1)(1-\tau_2)(\tau_3-1)}\,\mathrm{d}t}{2(1-t)\sqrt{P(t)}}.$$

应用 [BF71, 233.02]，我们得到 θ 和 α 分别由 (11) 和 (12) 给出，代入 $y=b_0$ 后，得到 (7)、(8)。因此 $u = u^{p,\,q\,r}_{a\,b}$、，，其中 p、q、r 根据命题 1.1 的第二部分满足 (4)。

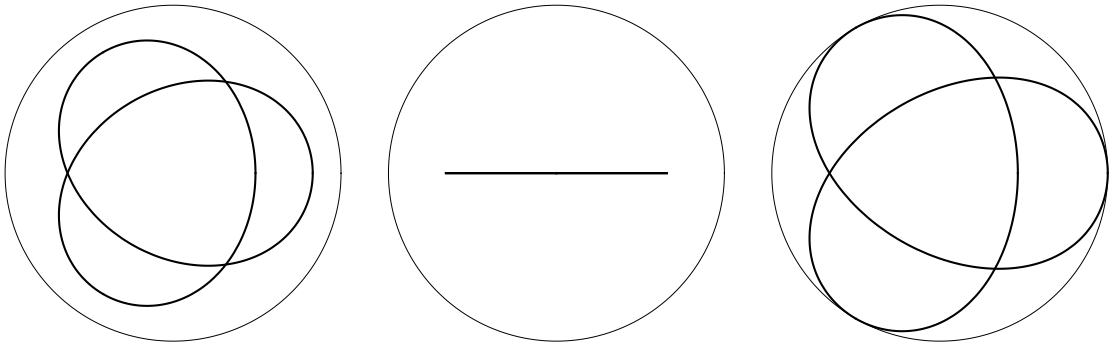

FIGURE 1. 轨道空间“俯视图”的示例 $\mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$ 以及曲线 γ_u。左：非极限情形 $a = 0.25, b = 2.1$, $p = 2, q = 3, r = 0$；中：第一个极限情形$a = 0.25, b = 1.25, p = 1, q = 2, r = 0$；右：第二个极限情形 $a = 0.5, b = 2, p = 23, q =$

现在假设 $N \in \gamma_u$，但仍有 $\gamma_u \cap \partial\mathbb{S}^2_{\geqslant 0} = \varnothing$。容易看出，在这种情况下，我们在系统 (33,34) 中有 $c = 0$，且对于 N 处的任意解分支，都有 $\theta(y) \equiv \theta_0$，其中 $\theta_0 \in \mathbb{R}$ 完全刻画了该分支。此外，为使映射 $\tilde{u}$ 光滑，当且仅当 $\theta_0 - \theta_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ 时，才能将对应于 θ_0、$\theta_1 \in \mathbb{R}$ 的分支拼接起来。每当 γ_u 经过 N 时进行这样的拼接，我们便可将结果表示为一个单独的解，其中 $\theta \equiv$ 为常数，且 φ 取值于 $(0, \pi)$，而非 $(0$、$\frac{\pi}{2})$。注意，在这种情况下： τ_1 是多项式 $P(t)$ 的一个根。若 τ_2、τ_3、q、r 如前一段所述，则同样的论证表明（可能需要先将 u 与适当的共形微分同胚进行前复合和后复合，并分别与 $\mathbb{S}^1$-等变等距变换进行复合）， φ、α 分别由 (10b) 和 (12) 给出，且 (6)、(8) 成立。对于 (7)，利用 (19) 和 (24)，我们有

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{\tau}^{\tau_2}\frac{\sqrt{\tau\tau_2\tau_3}\,\mathrm{d}t}{t\sqrt{(t-\tau)(\tau_2-t)(\tau_3-t)}} = \lim_{\tau\to 0} 2\sqrt{\frac{\tau_2\tau_3}{\tau(\tau_3-\tau)}}\Pi\left(-\frac{\tau_2-\tau}{\tau}\,\middle|\,\frac{\tau_2-\tau}{\tau_3-\tau}\right) = \lim_{\tau\to 0}\sqrt{\frac{\tau_2\tau_3}{\tau(\tau_3-\tau)}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\tau_2-\tau}{\tau}}} = \pi, \tag{38}$$

这证明了带有 $p := \frac{q}{2}$ 的式（7）：$= \frac{q}{2}$（注意，我们对 φ 作了修改，使其现在是 $\frac{b}{q}$-反周期的，并且在此情形下 q 总是偶数）。由此可得 $u = u^{p,\ {}^{q\ r}_{a\ b}}$，其中 p、q、r 根据命题 1.1 的第二部分满足式（4）。

情形 $\gamma_u \cap \partial\mathbb{S}^2_{\geqslant 0} \neq \varnothing, N \notin \gamma_u$ 类似，但 α 扮演 θ 的角色。任取一点 $M \in \partial\mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$。我们有 $d = 0$ 满足系统 (33,34)，对于 M 处的任意解分支，都有 $\alpha(y) \equiv \alpha_0$，其中 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ 完全刻画了该分支。此外，要使映射 $\tilde{u}$ 光滑，当且仅当 $\alpha_0 - \alpha_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ 时，对应于 $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ 的解分支可以拼接。在每当 γ_u 与 $\partial\mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$ 相交时进行这种拼接，我们便可将结果表示为单个解，其中 $\alpha \equiv$ 为常数，且 φ 取值于 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，而非 $(0, \frac{\pi}{2})$。注意，在此情形下， $1 =: \tau_2$ 是多项式 $P(t)$ 的一个根。如果 τ_1, τ_3, p, q 与非极限情形中的情况相同，那么同样的论证表明（同样地，可能需要将 u 替换为其与适当的共形微分同胚及 $\mathbb{S}^1$-等变等距变换分别进行前后复合）， φ, θ 分别由 (10c) 和 (11) 给出，并且 (6),(7) 成立。对于 (8)，我们先注意到， $\tilde{u}$ 和 $\alpha \equiv$ 为常数的 (a, b)-周期性意味着，若 q 为偶数，则 $a \in \mathbb{Z}$；若 q 为奇数，则 $a \notin \mathbb{Z}, 2a \in \mathbb{Z}$。然后，带有 $r := \pm\frac{q}{2} - a$ 的 (8) 可

可以用与 (38) 相同的方法证明。由此可得 $u = u^{p,\ a\ b^{\ q\ r}}_{,\ ,}$，其中 p,q,r 根据命题 1.1 的第二部分满足 (4)。

最后，“混合”情形 $\gamma_u \cap \partial\mathbb{S}^2_{\geqslant 0} \neq \varnothing, N \in \gamma_u$ 与上述情形类似。细节留给读者。我们只需指出，在这种情形下，我们无法将解的分支拼接起来，使 φ 成为周期函数，但可以使其成为准周期函数，见 (10d)。□

4. The spectral index of $u^{p,q,r}_{a,b}$

由 (36) 可得

$$A = 4\pi^2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - 1). \tag{39}$$

利用这一结果以及 (32)–(34)、(37)，可将映射 $u^{p,\ a\ b^{\ q\ r}}_{,\ ,}$ 的能量密度改写为

$$e(u^{p,q,r}_{a,b}) = \frac{1}{2}((\varphi')^2 + ((\alpha')^2 + 4\pi^2)\sin^2\varphi + (\theta')^2\cos^2\varphi) = 2\pi^2(-\cos 2\varphi + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - 1) =: \rho(y).$$

本节中，我们给出度量 $g^{p,\ a\ b^{\ q\ r}}_{,\ ,}$ 的数量 N(2) 的下界 (13)，并证明使该下界取到时的充分条件 (15) 和 (16)。

度量 $g^{p,\ a\ b^{\ q\ r}}_{,\ ,}$ 的拉普拉斯特征值问题为

$$-(\partial_x^2 + \partial_y^2)f = \lambda\rho f, \tag{40}$$

此处不妨假设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2/\Gamma_{a,b}$ 上的复值光滑函数。以下命题可由标准的变量分离法证明。

命题 4.1. 问题 (40) 的（复） λ-特征空间有一组基，其元素由以下形式的函数构成

$$h(y;l)e^{2\pi i l x}, \qquad l = 0, 1, \dots, \tag{41}$$

其中 $h(y;l)$ 满足以下斯图姆–刘维尔拟周期问题

$$-h''(y) + 4\pi^2 l^2 h(y) = \lambda\rho(y)h(y), \tag{42}$$

$$h(y+b) \equiv e^{-2\pi i l a}h(y). \quad \square \tag{43}$$

一般而言，问题 (42,43) 的特征值构成一个序列

$$\lambda_0(l) \leqslant \lambda_1(l) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_j(l) \leqslant \ldots \nearrow +\infty.$$

然而，若已知 l，则可以更精确地描述其谱。在以下命题中，对应于特征值 $\lambda_j(l)$ $j \geqslant 0$ 的特征函数记作 h_j。

命题 n 4.2. (i) 假设 $la \in \mathbb{Z}$，即 (43) 是周期边界条件。那么

$$\lambda_0(l) < \lambda_1(l) \leqslant \lambda_2(l) < \lambda_3(l) \leqslant \lambda_4(l) < \ldots < \lambda_{2i-1}(l) \leqslant \lambda_{2i}(l) < \ldots \nearrow +\infty.$$

此外，所有特征函数 h_j、$j \geqslant 0$ 都可以取为实值函数，特征函数 h_0 在 $[0, b$ 上不为零，并且对每个 $i > 0$，特征函数 h_{2i-1} 和 h_{2i} 在 $[0, b$ 上恰有 $2i$ 个零点。

(ii) 假设 $la \notin \mathbb{Z}$、$2la \in \mathbb{Z}$，即 (43) 是反周期边界条件。那么

$$\lambda_0(l) \leqslant \lambda_1(l) < \lambda_2(l) \leqslant \lambda_3(l) < \ldots < \lambda_{2i}(l) \leqslant \lambda_{2i+1}(l) < \ldots \nearrow +\infty.$$

此外，所有特征函数 h_j、$j \geqslant 0$ 都可以取为实值，并且对于每个 $i \geqslant 0$，特征函数 h_{2i} 和 h_{2i+1} 在 $[0, b$ 上恰有 $2i+1$ 个零点）。

（iii）假设 $2la \notin \mathbb{Z}$。那么

$$\lambda_0(l) < \lambda_1(l) < \ldots < \lambda_j(l) < \ldots \nearrow +\infty.$$

此外，对于每个 $j \geqslant 0$ 和 $y_0 \in \mathbb{R}$，特征函数 h_j的实部和虚部在（y_0，$y_0 + b$）上分别恰好有 j 或 $j+1$ 个零点。

证明。部分 (i) 和 (ii) 是斯图姆-刘维尔振荡定理的不同表述，且众所周知（例如参见 [CL55，第 8] 章，以及 [Eas73，定理 3.1.2]）。关于 (iii)，考虑区间（y_0，$y_0 + b$）上的狄利克雷特征值问题

$$-h''(y) + 4\pi^2 l^2 h(y) = \mu\rho(y)h(y), \qquad h(y_0) = h(y_0 + b) = 0 \tag{44}$$

其特征值为

$$\mu_0(l) < \mu_1(l) < \ldots < \mu_j(l) < \ldots \nearrow +\infty.$$

随后，[Eas73，第 3.1] 节1] 证明了

$$\lambda_0(l) < \mu_0(l) < \lambda_1(l) < \mu_1(l) < \ldots < \mu_{j-1}(l) < \lambda_j(l) < \mu_j(l) < \ldots.$$

（更一般的表述亦可参见 [EKWZ99] 。）取某个 $j \geqslant 0$。由于方程 (42) 的系数为实数，Re h_j 和 Im h_j 都是满足 (42) 且具有 $\lambda = \lambda_j(l)$ 的实值函数（当然，Re h_j 和 Im h_j 不满足边界条件 (43)，但这在此处并不重要）。根据经典斯图姆振荡定理，(44) 中特征值为 $\mu_j(l)$ 的特征函数在（y_0，$y_0 + b$）上恰好有 j 个零点。结论现由斯图姆分离定理得到。□

命题 4.3. 当 $\frac{p}{q} \neq \frac{1}{2}$ 时，有 $\lambda_{2p-1}(0) = \lambda_{2p}(0) = 2$；否则 $\lambda_{2p-1}(0) < \lambda_{2p}(0) = 2$。

证明。先考虑非极限情形 $\frac{p}{q} \neq \frac{1}{2}$。回忆一下，映射 u^p、$_a{}^q b^r$、、的各个分量都是拉普拉斯算子的特征值为 2 的特征函数。于是，函数 $\cos\varphi\cos\theta$ 和 $\cos\varphi\sin\theta$ 是满足 $l = 0$ 和 $\lambda = 2$ 的问题 (42,43) 的解。容易看出，这两个函数在 $[0, b)$ 上恰好有 $2p$ 个零点。由命题 4.2(i)，我们有 $\lambda_{2p-1}(0) = \lambda_{2p}(0) = 2$。

极限情形 $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ 更为微妙。问题在于，我们现在只有一个特征函数 $\cos\varphi$，而不再是两个特征函数 $\cos\varphi\cos\theta$ 和 $\cos\varphi\sin\theta$。由于这个函数在 $[0, b)$ 上恰好有 $2p$ 个零点，根据命题 4.2(i)，我们有 $\lambda_{2p-1}(0) = 2$ 或 $\lambda_{2p-1}(0) < \lambda_{2p}(0) = 2$。为证明实际上是第二种情况，我们采用与 [Kar14 第 3 节3] 相同的思路，并结合 [Mor24 证明命题 3.12] 中使用的技巧。考虑以下反周期斯图姆-刘维尔问题

$$-h''(y) = \lambda\rho(y)h(y), \qquad h(y + 2b_0) \equiv -h(y), \tag{45}$$

其中 $b_0 := \frac{b}{2q}$。设 $\lambda_0' \leqslant \lambda_1'$ 为问题 (45) 的前两个特征值。函数 $\eta(y) := \cos\varphi(y)$ 是该问题的一个解，满足 $\lambda = 2$，且在 $[0, 2b_0)$ 上恰有一个零点 $y = 0$。由反周期版本的斯图姆振荡定理可知，$\lambda_0' = 2$ 或 $\lambda_1' = 2$。注意，$\eta(y)$ 在 $[0, b_0]$ 上递增，而 $\rho(y)$ 在同一区间上递减。此外，这两个函数在变换 $y \mapsto 2b_0 - y$ 下均保持不变。将 $\eta(y + b_0)$ 作为 λ_0'的试验函数，我们得到

$$\lambda_0' \leqslant \frac{\int_0^{b_0} \eta'(y + b_0)^2 \mathrm{d}y}{\int_0^{b_0} \rho(y)\eta(y + b_0)^2 \mathrm{d}y} = \frac{\int_0^{b_0} \eta'(y)^2 \mathrm{d}y}{\int_0^{b_0} \rho(y)\eta(y + b_0)^2 \mathrm{d}y} < \frac{\int_0^{b_0} \eta'(y)^2 \mathrm{d}y}{\int_0^{b_0} \rho(y)\eta(y)^2 \mathrm{d}y} = 2,$$

其中第二个不等式来自重排不等式的连续类比，参见 [Mor24，断言 3.13]。因此，$\lambda_0' < 2$；并且，与 [Kar14，命题 11] 及 [Mor24，命题 3.15] 中的论证相同，可得 $\lambda_0' = \lambda_{2p-1}(0)$ $\lambda_1' = \lambda_{2p}(0)$，由此完成了 $\lambda_{2p-1}(0) < \lambda_{2p}(0) = 2$的证明。□

命题 4.4. 设 $j := \#\{j' \geqslant 0 \mid \lambda_{j'}(1) < 2\}$. 则 $j = \lceil 2|r + a| - 1\rceil + \delta_{r+a,0}$.

证明. 再次，我们从非极限情形 $\left|\frac{r+a}{q}\right| \neq \frac{1}{2}$ 开始。与命题 4.3 的证明类似，函数 $\sin\varphi\, e^{i\alpha}$ 满足问题 (42,43)，其中 $l=1$ 和 $\lambda=2$。注意，$\sin\varphi$ 在 $[0,b)$ 上不为零，并且 α 是一个单调函数，满足

$$\alpha(0)=0, \qquad \alpha(b)=-2\pi(r+a).$$

特别地，函数的零点个数

$$h_{re}(y):=\sin\varphi\cos\alpha=\mathrm{Re}(\sin\varphi\, e^{i\alpha}) \qquad (\text{respectively,}\quad h_{im}(y):=\sin\varphi\sin\alpha=\mathrm{Im}(\sin\varphi\, e^{i\alpha}))$$

在 $[0,b$ 上）与函数 $\cos z$（分别为 $\sin\ z$）在 $[0,2\pi|r+a|$ 上）的零点个数相同。考虑以下情形。

- 情形 1：$a\in\mathbb{Z}$。在这种情况下，(43) 是周期边界条件，函数 h_{re}、h_{im} 都是问题 (42,43) 的解。我们有以下子情形 – 子情形 1.1：$r+a\neq 0$。此时，两个函数 h_{re}、h_{im} 在 $[0,b$ 上都各有 $2|r+a|$ 个零点，由命题 4.2(i) 可得 $j=2|r+a|-1$。– 子情形 1.2：$r+a=0$。此时 $\alpha\equiv 0$、$h_{im}\equiv 0$，且 $h_{re}=\sin\varphi$ 在 $[0,b$ 上不为零。由命题 4.2(i) 可得 $j=0$。

- 情形 2：$a\notin\mathbb{Z}$，$2a\in\mathbb{Z}$。在此情形下，(43) 是反周期边界条件，而函数 h_{re}、h_{im} 都是问题 (42,43) 的解。函数 h_{re}、h_{im} 在 $[0,b)$ 上都有 $2|r+a|$ 个零点，由命题 4.2(ii) 可得 $j=2|r+a|-1$。

- 情形 3：$2a\notin\mathbb{Z}$。于是，对每个 y_0，函数 h_{re}、h_{im} 在 (y_0,y_0+b) 上或者都有 $[2|r+a|]$ 个零点，或者都有 $[2|r+a|]-1$ 个零点，由命题 4.2(iii) 可得 $j=[2|r+a|]$。

综上所述，我们得到了非极限情形下的结果。

转到极限情形 $\left|\frac{r+a}{q}\right|=\frac{1}{2}$。在此情形下，$\alpha\equiv$为常数，且 $\sin\varphi$在 $[0,b)$ 上有 q 个零点。由于 $2a\in\mathbb{Z}$，(43) 是周期边界条件或反周期边界条件。根据命题 4.2(i)、(ii)，我们有 $\lambda_{q-1}(1)<\lambda_q(1)=2$，或 $\lambda_{q-1}(1)=\lambda_q(1)=2$。再次考虑一个辅助反周期斯图姆-刘维尔问题

$$-h''(y)+4\pi^2 h(y)=\lambda\rho(y)h(y), \qquad h(y+2b_0)\equiv -h(y), \tag{46}$$

其中 $b_0:=\frac{b}{2q}$。令 $\lambda_0'\leqslant\lambda_1'$ 为该问题的前两个特征值。函数 $\sin\varphi(y)$ 是该问题的解，满足 $\lambda=2$，且在 $[0,2b_0)$ 上恰有一个零点。根据斯图姆振荡定理的反周期版本，$\lambda_0'=2$ 或 $\lambda_0'<\lambda_1'=2$。然而，现在 $\sin\varphi(y)$ 和 $\rho(y)$ 都在$[0,b_0]$上递减，这意味着我们无法使用命题 4.3 证明中的同一技巧。事实上，我们将证明现在第一种可能性成立。为此，我们注意到问题 (46) 可改写为

$$-h''(z)+\lambda m\,\mathrm{sn}^2(z\mid m)h(z)=\left(\frac{\lambda}{2}\left(1+\frac{1}{\tau_3-\tau_1}\right)-\frac{1}{\tau_3-\tau_1}\right)h(z), \qquad h(z+2K(m))\equiv -h(z), \tag{47}$$

其中 $z:=2\pi\sqrt{\tau_3-\tau_1}\,y$。这就是所谓的 Lam´é 方程，参见例如 [第 25] 卷。现在假设 $\lambda_0'<\lambda_1'=2$。由于 $\sin\varphi(y)$ 是奇函数，对应于特征值 λ_0' 的特征函数是偶函数。因此，(47) 的对应解与 Lam´é 函数 $\mathrm{Ec}_\nu^1(z\mid m)$（相差一个标量因子），其中 $\nu>0$ 满足 $\nu(\nu+1)=\lambda_0'$。由于 $\lambda_0'<2$，我们有 $\nu<1$。

我们现在需 要以下事实。尽管这似乎是众所周知的，但我们找不到相关参考文献 e.

断言 4.1. 设 $\nu\in[0,1]$ 和 $m\in(0,1)$。那么函数 $\mathrm{Ec}_\nu^1(z\mid m)$ 在 $[0,K(m)]$ 上递增。

证明。由于这是一个独立的论断，我们在此采用了与论文其余部分不一致、但在斯图姆–刘维尔理论中常见的记号。固定 $\nu\in[0,1]$ 并考虑方程

$$-y''(t)+q(t)y(t)=\lambda y(t), \qquad q(t):=\nu(\nu+1)m\,\mathrm{sn}^2(t\mid m). \tag{48}$$

证明采用了斯图姆–刘维尔理论中的一种标准技巧，称为 Pr¨ufer 变换。这里我们仅简要概述论证，并请读者参阅 [CL55 第 8] 章以及 [Zet05 第 4 章第 5]节，以了解缺失的技术细节。Pr¨ufer 变换由以下代换给出：

$$y(t) = \rho(t)\sin\theta(t), \qquad y'(t) = \rho(t)\cos\theta(t),$$

将方程 (48) 化为如下系统

$$\theta'(t) = \cos^2\theta(t) + (\lambda - q(t))\sin^2\theta(t), \qquad \rho'(t) = (1 + q(t) - \lambda)\rho(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t). \tag{49}$$

设 $\theta_\nu(t;\lambda)$ 是方程 (49) 中第一个方程满足初始条件 $\theta(0) = 0$ 的解（由初等常微分方程理论可轻易得出 $\theta_\nu(t;\lambda)$ 的存在性）。

函数 $y_1(t) := \mathrm{Ec}_1^1(t \mid m) = \mathrm{sn}(t \mid m)$ 满足

$$-y_1''(t) + 2m\,\mathrm{sn}^2(t \mid m)y_1(t) = (m+1)y_1(t), \qquad y_1(0) = y_1'(K(m)) = 0.$$

因此，函数 $\tilde{y}_1(t) := y_1\Big(\sqrt{\nu^{-2}(\nu+1)}\,t\Big)$ 满足方程 (48)，其中 $\lambda = \lambda_1 := \frac{1}{2}\nu(\nu+1)(m+1)$，且 $\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}_1'\Big(\sqrt{\nu^{-2}(\nu+1)}K(m)\Big) = 0$。由于 $\nu \leqslant 1$，我们有 $\sqrt{\nu^{-2}(\nu+1)} \geqslant 1$，且函数 $\tilde{y}_1(t)$ 在 $[0, K(m)]$ 上递增。这表明，对于 $t \in [0, K(m)]$，$\theta_\nu(t;\lambda_1) \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$。众所周知，对于每个固定的 $t > 0$，$\theta_\nu(t;\lambda)$ 是关于 λ 的递增函数，且当 $\lambda \to +\infty$ 时，$\theta_\nu(t;\lambda) \to +\infty$。由此可知，存在 $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$，使得对于 $t \in [0, K(m)]$，$\theta_\nu(t;\lambda_2) \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$，并且 $\theta_\nu(K(m);\lambda_2) = \frac{\pi}{2}$。显然，这个 λ_2 正是满足边界条件 $y(0) = y'(K(m)) = 0$ 的方程 (48) 的第一特征值。由于对于 $t \in [0, K(m)],$，$\cos\theta_\nu(t;\lambda_2) \geqslant 0$，我们看到相应的特征函数 $\mathrm{Ec}_\nu^1(t \mid m)$ 在同一区间上递增。□

由此可知，函数 $\mathrm{Ec}_\nu^1(z \mid m)$ 随 $[0, K(m)],$ 增大；即，方程 (46) 的相应特征函数在 $[0, b_0]$ 上递增。接着，我们可以运用命题 4.3 证明中的相同技巧，证明 λ_0' 不是方程 (46) 的第一特征值。这个矛盾表明 $\lambda_0' = 2$。因此，同样根据 Kar14 命题 11] 和 Mor24 命题 3.15], 中的论证，我们得到 $\lambda_{q-1}(1) = 2$，这立即推出所要证明的结论。□

命题 4.5. 假设 (15) 成立。那么，对于每个 $l \geqslant 2$，都有 $\lambda_0(l) > 2$。

证明。由 fol方程 (42,43) 的特征值的变分刻画可得

$$\lambda_0(l) = \inf \frac{\int_0^b (|h'|^2 + 4\pi^2 l^2 |h|^2)\mathrm{d}y}{\int_0^b \rho|h|^2\mathrm{d}y},$$

其中 下确界取遍所有满足 $h(y+b) \equiv e^{-2\pi i l a}h(y)$ 的 $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$。由于

$$\rho(y) = 2\pi^2(-2\tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \leqslant 2\pi^2(\tau_2 + \tau_3 - \tau_1),$$

对于每个 $l \geqslant 2$，我们有

$$\frac{\int_0^b (|h'|^2 + 4\pi^2 l^2 |h|^2)\mathrm{d}y}{\int_0^b \rho|h|^2\mathrm{d}y} \geqslant \frac{16\pi^2 \int_0^b |h|^2\mathrm{d}y}{\int_0^b \rho|h|^2\mathrm{d}y} > \frac{8}{\tau_2 + \tau_3 - \tau_1} \geqslant 2.$$

□

命题 4.6. 若 (16) 成立，则 (15) 成立。

证明。将 (15) 的左端用 n_0、n_1、m 表示，我们得到

$$\tau_2 + \tau_3 - \tau_1 = \frac{n_1}{n_1 - n_0}\left(1 - n_0 - \frac{n_0}{m}\right).$$

考虑两种情况。

情况 1：$\frac{p}{q} > \frac{1}{\sqrt{3}}$。我们有

$$\frac{n_1}{n_1 - n_0}\left(1 - n_0 - \frac{n_0}{m}\right) \leqslant \frac{1}{1 - n_0}\left(1 - n_0 - \frac{n_0}{m}\right) = 1 - \frac{n_0}{(1 - n_0)m}.$$

因此，只需证明 $\Theta(m) > 0$，其中

$$\Theta(m) := 3 + \frac{n_0}{(1 - n_0)m}$$

而 n_0 是由 (25) 隐式定义的 m 中的一个函数。由 (28) 可得

$$\lim_{m \to 0} \Theta(m) = 3 + \frac{1}{1 - \frac{4p^2}{q^2}} > 0, \quad \text{since} \quad \frac{p}{q} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

我们需要证明 $\Theta(m)$ 在 (0,1) 上不变号。为此，只需证明：若对某个 $m \in (0,1)$，有 $\Theta(m) = 0$，则

$$\Phi(n_0 \mid m) = \sqrt{\frac{(1 - n_0)(n_0 - m)}{n_0}}\Pi(n_0 \mid m) < \frac{p\pi}{q}.$$

消去 n_0 并再次利用 $\frac{p}{q} > \frac{1}{\sqrt{3}}$，可知只需证明以下不等式

$$\Omega(m) := \sqrt{\frac{4 - 3m}{3(1 - 3m)}}\Pi\left(-\frac{3m}{1 - 3m}\,\middle|\, m\right) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \qquad m \in (0, 1/3).$$

我们有

$$\Omega'(m) = \frac{2(2 - 3m)E(m) - (4 - 3m)(1 - m)K(m)}{2m(1 - m)\sqrt{3(4 - 3m)(1 - 3m)}}.$$

由于 $\Omega(0) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$，因此只需验证

$$2(2 - 3m)E(m) - (4 - 3m)(1 - m)K(m) < 0, \qquad m \in (0, 1/3).$$

我们有

$$\frac{K(m)}{E(m)} > 1 + \frac{m}{4} > \frac{2(2 - 3m)}{(4 - 3m)(1 - m)},$$

其中，第一个不等式由 $K(0) = E(0) = \pi/2$ 得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left[K(m) - \left(1 + \frac{m}{4}\right)E(m)\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{(1 + 3m)E(m)}{1 - m} + K(m)\right) > 0,$$

第二个不等式等价于显然的不等式 $m^2(3m + 5) > 0$。

情形 2：$\left|\frac{r+a}{q}\right| < \frac{\sqrt{3}}{4}$。容易看出

$$\frac{n_1}{n_1 - n_0}\left(1 - n_0 - \frac{n_0}{m}\right) \leqslant n_1\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

因此，只需证明 $\Theta(m) > 0$，其中

$$\Theta(m) := 4 - n_1\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

且 n_1 是一个由（25）隐式给出的 m 中的函数。由（28）可知

$$\lim_{m \to 0} \Theta(m) = 4 - \frac{1}{1 - \frac{4(r+a)^2}{q^2}} > 0, \quad \text{since} \quad \left|\frac{r + a}{q}\right| < \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

我们必须证明 $\Theta(m)$ 在 (0,1) 上不变号。为此，只需证明：若对于某个 $m \in (0,1)$，$\Theta(m) = 0$，则

$$\Phi(n_1 \mid m) = \sqrt{\frac{(1-n_1)(n_1-m)}{n_1}}\Pi(n_1 \mid m) > \left|\frac{(r+a)\pi}{q}\right|.$$

消去 n_1 并再次利用 $\left|\frac{r+a}{q}\right| < \frac{\sqrt{3}}{4}$，我们得到只需证明以下不等式

$$\Omega(m) := \sqrt{\frac{(1-3m)(3-m)}{4(1+m)}}\Pi\left(\frac{4m}{1+m}\,\middle|\, m\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\pi, \qquad m \in (0, 1/3).$$

我们有

$$\Omega'(m) = \frac{(3m^2-2m+3)E(m) - (3-m)(1-m)K(m)}{4m(1-m)\sqrt{(3-m)(1-3m)(1+m)}}.$$

由于 $\Omega(0) = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$，接下来只需验证

$$(3m^2-2m+3)E(m) - (3-m)(1-m)K(m) > 0, \qquad m \in (0, 1/3).$$

我们有

$$\frac{K(m)}{E(m)} < \frac{1}{\sqrt{1-m}} < \frac{3m^2-2m+3}{(3-m)(1-m)},$$

其中，第一个不等式由 $K(0) = E(0) = \pi/2$ 得出，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left[\sqrt{1-m}K(m) - E(m)\right] = \frac{(1-\sqrt{1-m})(E(m)-K(m))}{2m\sqrt{1-m}} < 0,$$

而第二个不等式等价于显然的不等式

$$m(9m^3 - 11m^2 + 15m + 3) > 0, \qquad m \in (0, 1/3).$$

□

现在我们有

$$\begin{aligned} N(2) &= \sum_{i=0}^{\infty} \#\{i > 0 \mid \lambda_i(0) < 2\} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} 2\#\{i > 0 \mid \lambda_i(l) < 2\} \quad \text{(by Proposition 4.1)} \\ &\geqslant \sum_{i=0}^{\infty} \#\{i > 0 \mid \lambda_i(0) < 2\} + \sum_{i=0}^{\infty} 2\#\{i > 0 \mid \lambda_i(1) < 2\} \\ &= 2p - 1 + \delta_{2p,q} + 2(\lceil 2|r+a| - 1\rceil + \delta_{r+a,0}) \qquad \text{(by Propositions 4.3, 4.2(i), and 4.4).} \end{aligned}$$

这就证明了 (13)。若满足 (16)，则根据命题 4.5 和命题 4.6，唯一的不等式变为等式。□

注 4.1。可以证明，不等式 (13) 可以是严格的。事实上，将 $h(y) := e^{-\frac{4\pi i a}{b}y}$ 用作问题 (42,43) 的试验函数，其中 $l = 2$，我们得到

$$\lambda_0(2) \leqslant \frac{\int_0^b (|h'|^2 + 16\pi^2|h|^2)\mathrm{d}y}{\int_0^b \rho|h|^2\mathrm{d}y} < \frac{8\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)}{\tau_1+\tau_3-\tau_2},$$

其中我们用到了

$$\rho(y) = 2\pi^2(-2\tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \geqslant 2\pi^2(\tau_1 + \tau_3 - \tau_2).$$

由此可知，如果

$$\tau_1+\tau_3-\tau_2=\frac{n_1}{n_1-n_0}\left(1-\frac{n_0}{m}+n_0\right)>4\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right),$$

然后 $\lambda_0(2)<2$，且不等式 (13) 严格成立。这可以通过以下分步过程实现。

- 置

$$T(m,n_0,n_1):=\frac{n_1}{n_1-n_0}\left(1-\frac{n_0}{m}+n_0\right).$$

选择 $m\in(0,1)$ $\tilde{n}_0\in(-\infty,0)$ $n_1\in(m,1)$，使得 $T(m,\tilde{n}_0,n_1)>4$（例如，$m=\frac{1}{6},\tilde{n}_0=-6,n_1=\frac{9}{10}$）。

- 选择 $n_0<0$，使其足够接近 $\tilde{n}_0$，从而 $T_0:=T(m,n_0,n_1)>4$ 且 $\Phi(n_0\mid m)=\frac{p_0\pi}{q_0}$ 是 π 的有理倍数，其中 Φ 是由 (21) 定义的函数。
- 选择 $k\in\mathbb{N}$ 使得

$$b:=\frac{kq_0}{\pi}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_0}\right)mK(m)}$$

足够大，使得 $b>\max\left(1,\frac{1}{\sqrt{T_0-4}}\right)$。令 $p:=kp_0,q:=kq_0$。

- 最后，令 $\eta:=\Phi(n_1\mid m)$。若 $\{\eta q\}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，则令 $r:=[\eta q],a:=\{\eta q\}$；否则令 $r:=[-\eta q],a:=\{-\eta q\}$。

按此方式选取 a,b,p,q,r 后，我们有

$$T(m,n_0,n_1)=T_0>4\left(\frac{1}{4b^2}+1\right)\geqslant 4\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right),$$

如所需。

5. The value of the functional

本节证明 (14) 和 (17)。我们有

$$\bar{\lambda}_{N(2)}(\mathbb{T}^2,g_{a,b}^{p,q,r})=2\int_0^b\rho(y)\,\mathrm{d}y=4\pi^2((\tau_1+\tau_2+\tau_3)b-2\int_0^b\tau\,\mathrm{d}y).$$

由 (35) 和 [BF71, 233.17 and 331.01]，我们有

$$\int_0^b\tau\,\mathrm{d}y=\frac{q}{2\pi}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-\tau_1)(\tau_2-t)(\tau_3-t)}}=\frac{q\tau_1}{\pi\sqrt{\tau_3-\tau_1}}\left(\left(1-\frac{n_0}{m}\right)K(m)+\frac{n_0}{m}E(m)\right)=$$
$$b\tau_3-\frac{q}{\pi}\sqrt{\tau_3-\tau_1}E(m).$$

这意味着 (14)。还需证明，如果 $p=q=1$，那么

$$4\pi^2b(\tau_1+\tau_2-\tau_3)+8\pi\sqrt{\tau_3-\tau_1}E(m)>\max\{\frac{4\pi^2}{b},8\pi\},$$

将 τ_1、τ_2、τ_3 替换为 m、n_0、n_1 并经过一些变换后，可改写为

$$\left(m-\frac{m}{n_0}-1\right)K(m)^2+2K(m)E(m)>\max\{\pi^2,2\pi b\}.$$

引入函数

$$\Xi(m):=\left(m-\frac{m}{n_0}-1\right)K(m)^2+2K(m)E(m),\qquad\widetilde{\Xi}(m):=\frac{\Xi(m)}{\sqrt{\Psi(m)}},$$

其中 Ψ 由（26）给出，而 n_0、n_1 被视为由（25）隐式定义的 m 中的函数。接下来需要证明 $\Xi(m) > \pi^2$ 以及 $\tilde{\Xi}(m) > 2$。利用（27），我们得到

$$\Xi'(m) = \frac{n_0 E(m)(K(m) - E(m))((m-1)K(m) + E(m))}{m(m-1)(n_0 E(m) + (m - n_0)K(m))} > 0,$$

这里我们用到了 (22) 和 (23)。此外，由 (28) 可得

$$\lim_{m \to 0} \Xi(m) = \pi^2,$$

这就证明了 $\Xi(m) > \pi^2$。

第二个不等式的证明更为复杂。我们有

$$\widetilde{\Xi}'(m) = \frac{(mn_0n_1 - 2mn_0 - mn_1 + n_0n_1)E(m)(E(m) - K(m))(E(m) - (1-m)K(m))}{2(m-1)m\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0}\right)m}(n_0E(m) + (m-n_0)K(m))(n_1E(m) + (m-n_1)K(m))}.$$

下面证明

$$mn_0n_1 - 2mn_0 - mn_1 + n_0n_1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m - \frac{m}{n_0} + 1 - 2\frac{m}{n_1} > 0. \tag{50}$$

由于 $n_1 > m$，只需证明 $\Theta(m) > 0, m \in (0, 1)$，其中

$$\Theta(m) := m - \frac{m}{n_0} - 1.$$

由 (28) 可得

$$\lim_{m \to 0} \Theta(m) = 2 > 0.$$

我们必须证明 $\Theta(m)$ 在 (0,1) 上不变号。为此，只需证明若对某个 $m \in (0,1)$，有 $\Theta(m) = 0$，则

$$\Phi(n_0 \mid m)\sqrt{\frac{(1-n_0)(n_0-m)}{n}}\Pi(n_0 \mid m) < \pi.$$

消去 n_0 后，只需证明以下不等式

$$\Omega(m) := \sqrt{\frac{2-m}{1-m}}\Pi\left(-\frac{m}{1-m}\,\middle|\, m\right) < \pi, \qquad m \in (0,1).$$

在第 6 节中，我们将看到函数 $\Omega(m)$ 在 (0, 1) 上单调递减，并且

$$\Omega(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi, \qquad \lim_{m \to 1} \Omega(m) = \frac{\pi}{2},$$

这立即推出所需的不等式。至此，(50) 的证明完成。利用这个不等式~以及 (22) 和 (23)，我们得到 $\Xi'(m) < 0$。此外，由 (29) 和 $(m-1)K(m) \to 0$ 可知，当 $m \to 1$ 时

$$\lim_{m \to 1} \widetilde{\Xi}(m) = 2,$$

~由此证明了 $\Xi(m) > 2$。定理 5 的证明至此结束。 □

5.1. 矩形共形类中的极大度量。

定理 2 的证明。必要时交换矩形的两条边，我们可以假设 $b>0, b\neq 1$ and$\rho=\rho(y)$ 与 x 无关。通过缩放，我们可以假设 $\lambda_1(\mathbb{T}^2,g)=2$。度量 g 对应的拉普拉斯特征值问题由 (40) 给出，且命题 4.1 适用。由于 $a=0$，(43) 对所有整数 $l\geqslant 0$ 都是周期边界条件。由斯图姆-刘维尔特征值的变分刻画可轻易得出，$\lambda_0(l)$ 是关于 l 的单调递增函数。由于 $\lambda_1(\mathbb{T}^2,g)=2$ 且 $\lambda_0(0)=0$，我们有

$$\lambda_j(l)>2 \qquad \text{whenever} \qquad j=0,\, l>2 \quad \text{or} \quad j=1,\, l>1 \quad \text{or} \quad j\geqslant 2.$$

特别地，特征值 2 的重数至多为 4，并且存在一个调和映射 $u\colon (\mathbb{T}^2,[g_{0,b}]) \to \mathbb{S}^3$（可能不是线性满的）。由于 Δ_g 的 λ_1-特征空间由形如 (41) 且$l=0$、1 的函数生成，因此可以很容易地使映射 u 关于作用 (2,3) 具有 $\mathbb{S}^1$-不变性。根据定理 1，我们知道平坦度量不是 $b\neq 1$对应的共形类 $[g_{0,b}]$ 中的极大度量，因此由定理 6 可知，对于某个整数 p，$q>0$和满足 (4) 的 r，有$u=u^{p,\,0\,\overset{q\ r}{b}}{}_{,,}$。由于 $N(2)=1$，不等式 (13) 推出 $p=q=1, r=0$，继而由 (4) 可得 $b>1$。结论得证。□

6. Relation to Otsuki tori

本节证明

定理 8. 对于任意整数 $\tilde p,\tilde q,\tilde r$，只要 $\tilde p,\tilde q$为正整数、互素，且满足 $\frac{\tilde p}{\tilde q}\in\left(\frac12,\frac{\sqrt2}{2}\right)$，就存在唯一的 $\tilde b\geqslant 1$，使得对于任意整数 $k\geqslant 1$，映射 $u^{k\tilde p,\quad k\tilde q\ \tilde r}{}_{,,}$是极小的。若 $\frac{\tilde p}{\tilde q}\neq\frac12$，则该映射的像与大棬环面 $O_{\tilde p/\tilde q}$重合（相差一个 $\mathbb{S}^3$的等距变换）。这些是映射$u^{\tilde r\ k\tilde p,\ a\ \overset{q\ r}{\tilde b}}{}_{,,}$中仅有的极小映射。

证明。映射 $u^{p,a\ \overset{q\ r}{b}}{}_{,,}$是极小的，当且仅当它是共形的，即

$$|\partial_x u^{p,q,r}_{a,b}|^2=|\partial_y u^{p,q,r}_{a,b}|^2, \qquad \langle \partial_x u^{p,q,r}_{a,b}, \partial_y u^{p,q,r}_{a,b}\rangle=0.$$

由于

$$|\partial_x u^{p,q,r}_{a,b}|^2=4\pi^2\sin^2\varphi, \qquad |\partial_y u^{p,q,r}_{a,b}|^2=A-4\pi^2\cos^2\varphi, \qquad \langle \partial_x u^{p,q,r}_{a,b}, \partial_y u^{p,q,r}_{a,b}\rangle=2\pi d, \tag{51}$$

我们得出，$u^{p,a\ \overset{q\ r}{b}}{}_{,,}$的极小性等价于等式 $A=4\pi^2$ 和 $d=0$，而这又等价于

$$\tau_1+\tau_2=1, \qquad \tau_3=1.$$

特别地，第二个等式与（8）推出 $r+a=0$。将两个等式都用m、n_0、n_1表示，我们得到

$$n_0=-\frac{m}{1-m}, \qquad n_1=m.$$

将 n_0 从 (20) 中的第二个方程消去，我们得到

$$\Omega(m):=\sqrt{\frac{2-m}{1-m}}\,\Pi\left(-\frac{m}{1-m}\,\middle|\,m\right)=\frac{\pi p}{q}.$$

我们有 $\Omega(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$。下面计算 $\lim_{m\to 1}\Omega(m)$。我们有

$$\Pi\left(-\frac{m}{1-m}\,\middle|\,m\right) = \Pi\left(-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\,\middle|\,1-\varepsilon\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\sin^2 t\right)\sqrt{1-(1-\varepsilon)\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^3 t}\frac{\varepsilon\,\mathrm{d}t}{(\varepsilon+\tan^2 t)\sqrt{1+\varepsilon\tan^2 t}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1+\varepsilon s}\,\mathrm{d}s}{(1+s)\sqrt{s(1+\varepsilon^2 s)}},$$

其中 $\varepsilon := 1-m$ 且 $s := \frac{1}{\varepsilon}\tan^2 t$。因此,

$$\lim_{m\to 1}\Omega(m) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1+\varepsilon s}\,\mathrm{d}s}{(1+s)\sqrt{s(1+\varepsilon^2 s)}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{(1+s)\sqrt{s}} = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

现在我们有

$$\Omega'(m) = \frac{2E(m)-(2-m)K(m)}{2m\sqrt{(2-m)(1-m)}}.$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}[2E(m)-(2-m)K(m)] = \frac{(1-m)K(m)-E(m)}{2(1-m)} < 0$$

由（22）式可知，$\Omega(m)$ 从 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ 单调递减至 $\frac{\pi}{2}$，这意味着 $\frac{p}{q}\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，并且 m 的值由 $\Omega(m) = \frac{p\pi}{q}$ 唯一确定。随后，b 的值由（20）式中的第一个方程唯一确定。我们有 $u^{p}_{a}{}^{q\ r}_{\ b} = u^{k\tilde{p}}_{k\tilde{q}\,\tilde{r}}$，其中 $k := \gcd(p,q)$ $\tilde{p} := \frac{p}{k}$，$\tilde{q} := \frac{q}{k}$，$\tilde{b} := \frac{b}{k}$，$\tilde{r} := r$。由于映射 $u^{p}_{a}{}^{q\ r}_{\ b}$ 是关于作用（2,3）的 $\mathbb{S}^1$-等变映射，其像按定义是一个大棍环面。还需证明它恰好是环面 $O_{\tilde{p}/\tilde{q}}$，即不可能是其他任何大棍环面。回顾 Hsiang-Lawson 构造，大棍环面来自轨道空间 $\tilde{\mathbb{S}^2_{\geqslant 0}}$ 中的闭测地线，该空间配备了某个度量（详见 [HL71、Pen13b] ）。另一方面，如果 $\tilde{\varphi}(y)$ $\theta(y)$ 是由函数（10a）、（11）参数化映射 $u^{\tilde{p}}_{0\ \tilde{b}}{}^{\tilde{q}\ 0}_{\ \theta}$ 的函数，那么 $\tilde{\varphi}$、$\tilde{\theta}$ 也参数化了轨道空间 $\mathbb{S}^2_{\geqslant 0}$ 中的相应曲线，如第 3 节所述。若将 $\tilde{\varphi}$ 视为 $\tilde{\theta}$ 的函数，则它是周期为 $\frac{2\pi\tilde{p}}{\tilde{q}}$ 的周期函数。由此可从该曲线推断出数值 $\tilde{p}$、$\tilde{q}$，这表明映射 $u^{\tilde{p}}_{0\ \tilde{b}}{}^{\tilde{q}\ 0}_{\ \theta}$ 的像确实是 $O_{\tilde{p}/\tilde{q}}$。□

7. The dependence of $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g^{1,1,0}_{a,b})$ on a, b

虽然 $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g^{1,\ \ 1\ 0,\ ,}_{a\ \ b})$ 可由 (14) 显式给出，但很难看出当参数 a,b 中的一个固定而另一个变化时，这个表达式会如何变化。事实上，τ_1,τ_2,τ_3 对 a,b 的依赖关系非常复杂且是隐式的。不过，结果表明，$\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g^{1,\ \ 1\ 0,\ ,}_{a\ \ b})$ 关于 a 和 b 的导数可以用 τ_1,τ_2,τ_3 表示。

设 $a,b\in\mathbb{R}, b>0$ 和 $N\in\mathbb{N}$。调和映射 $u\colon (\mathbb{T}^2,[g_{a,b}]) \to \mathbb{S}^N$ 的霍普夫微分为

$$\mathcal{H} := \langle \partial_z u, \partial_z u\rangle \mathrm{d}z^2,$$

其中，$z := x+yi$ 是$(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}])$上的局部共形坐标。霍普夫微分是$(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}])$上的全局定义的全纯二次微分。特别地，对于某些常数 $H_{re}, H_{im}\in\mathbb{R}$，我们有 $\langle \partial_z u, \partial_z u\rangle \equiv H_{re} + H_{im} i$。定理 3 几乎可直接由以下命题得出，该命题本身也具有独立的研究价值。

命题 7.1（M. Karpukhin 私人交流）。设 $N \in \mathbb{N}$ 和 $u_{a,b}\colon (\mathbb{T}^2, [g_{a,b}]) \to \mathbb{S}^N$ 是一个关于 (a,b) 光滑变化的调和映射族。那么

$$\mathrm{d}_{a,b} E_{g_{a,b}}(u_{a,b}) = 2(H_{im}\mathrm{d}a + H_{re}\mathrm{d}b).$$

证明。在此证明中，我们将 $(\mathbb{T}^2, [g_{a,b}])$ 上的函数和度量与 $\mathbb{R}^2$ 上的 $\Gamma_{a,b}$-周期函数和度量等同。由于 (a,b) 会变化，重新参数化单位正方形 $\square := [0,1]^2$ 上的 $u_{a,b}$ 更为方便。令

$$F_{a,b} := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \hat{g}_{a,b} := \frac{1}{b} F_{a,b}^* g_{a,b} = \frac{1}{b}\big(\mathrm{d}x^2 + 2a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (a^2+b^2)\mathrm{d}y^2\big), \quad \hat{u}_{a,b} = u_{a,b} \circ F_{a,b}.$$

逆度量为

$$\hat{g}_{a,b}^{-1} = \frac{1}{b}\big((a^2+b^2)\mathrm{d}x^2 - 2a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2\big).$$

我们有

$$E_{g_{a,b}}(u_{a,b}) = E_{\hat{g}_{a,b}}(\hat{u}_{a,b}) = \frac{1}{2b}\int_{\square}\big((a^2+b^2)|\partial_x \hat{u}_{a,b}|^2 - 2a\langle \partial_x \hat{u}_{a,b}, \partial_y \hat{u}_{a,b}\rangle + |\partial_y \hat{u}_{a,b}|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此，

$$\mathrm{d}_{a,b} E_{g_{a,b}}(u_{a,b}) = \left(\frac{1}{b}\int_{\square}(a|\partial_x \hat{u}_{a,b}|^2 - \langle \partial_x \hat{u}_{a,b}, \partial_y \hat{u}_{a,b}\rangle)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}a +$$
$$\left(\frac{1}{2b^2}\int_{\square}\big((b^2-a^2)|\partial_x \hat{u}_{a,b}|^2 + 2a\langle \partial_x \hat{u}_{a,b}, \partial_y \hat{u}_{a,b}\rangle - |\partial_y \hat{u}_{a,b}|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}b + \int_{\square} g_{a,b}^{-1}(\mathrm{d}\hat{u}_{a,b}, \mathrm{d}(\mathrm{d}_{a,b}\hat{u}_{a,b}))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对于最后一项，我们有

$$\int_{\square} g_{a,b}^{-1}(\mathrm{d}\hat{u}_{a,b}, \mathrm{d}(\mathrm{d}_{a,b}\hat{u}_{a,b}))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\square}\langle \Delta_{g_{a,b}}\hat{u}_{a,b}, \mathrm{d}_{a,b}\hat{u}_{a,b}\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\square}|\mathrm{d}\hat{u}_{a,b}|^2\langle \hat{u}_{a,b}, \mathrm{d}_{a,b}\hat{u}_{a,b}\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$\frac{1}{2}\int_{\square}|\mathrm{d}\hat{u}_{a,b}|^2 \mathrm{d}_{a,b}\big(|\hat{u}_{a,b}|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

由于 $|\hat{u}_{a,b}|^2 \equiv 1$。因此，

$$\mathrm{d}_{a,b} E_{g_{a,b}}(u_{a,b}) = \left(\frac{1}{b}\int_{\square}(a|\partial_x \hat{u}_{a,b}|^2 - \langle \partial_x \hat{u}_{a,b}, \partial_y \hat{u}_{a,b}\rangle)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}a +$$
$$\left(\frac{1}{2b^2}\int_{\square}\big((b^2-a^2)|\partial_x \hat{u}_{a,b}|^2 + 2a\langle \partial_x \hat{u}_{a,b}, \partial_y \hat{u}_{a,b}\rangle - |\partial_y \hat{u}_{a,b}|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}b.$$

另一方面，由于 $u_{a,b}(x,y) = \hat{u}_{a,b}(x - \frac{a}{b}y, \frac{y}{b})$，我们有

$$\begin{aligned} 4H_{re} &= |\partial_x u_{a,b}|^2 - |\partial_y u_{a,b}|^2 = |\partial_x \hat{u}_{a,b}|^2 - \left|-\frac{a}{b}\partial_x \hat{u}_{a,b} + \frac{1}{b}\partial_y \hat{u}_{a,b}\right|^2 \\ &= \frac{1}{b^2}\big((b^2-a^2)|\partial_x \hat{u}_{a,b}|^2 + 2a\langle \partial_x \hat{u}_{a,b}, \partial_y \hat{u}_{a,b}\rangle - |\partial_y \hat{u}_{a,b}|^2\big), \\ 4H_{im} &= -2\langle \partial_x u_{a,b}, \partial_y u_{a,b}\rangle = -2\langle \partial_x \hat{u}_{a,b}, -\frac{a}{b}\partial_x \hat{u}_{a,b} + \frac{1}{b}\partial_y \hat{u}_{a,b}\rangle = \frac{2}{b}(a|\partial_x \hat{u}_{a,b}|^2 - \langle \partial_x \hat{u}_{a,b}, \partial_y \hat{u}_{a,b}\rangle). \end{aligned}$$

比较最后两个方程，我们得到所需结论。 □

定理 3 的证明。由式 (51) 可知，映射 $u^{1,\ 1\,0\ ,\ ,}_{a\ b}$ 的霍普夫微分的分量为

$$H_{re} = \pi^2 - \frac{A}{4}, \qquad H_{im} = -\pi d.$$

由 (31) 和 (34)，对于 $p = q = 1, r = 0$ 和 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，我们有 $d < 0$。由此可得 $H_{im} > 0$，并且根据命题 7.1，$\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^{2,\ 1\,0\ ,,}_{a\ b}) = 2E(u^{1,\ 1\,0\ ,,}_{a\ b})$ 关于 a 单调递增。根据同一命题，$\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, u^{1,\ 1\,0\ ,,}_{a\ b}) = 2E(u^{1,\ 1\,0\ ,,}_{a\ b})$ 关于 b 单调递减，可由 $H_{re}{}^{a\ b} < 0$ 得出，或者等价地，由 $A > 4\pi^2$ 得出。利用 (39)，容易看出，后一不等式等价于第 5 节证明的 (50)。这一观察完成了证明。□

8. The third limit case and a nonintegrable Jacobi field

在定理 5 的极限情形中，(4) 中前两个不等式至少有一个变为等式。因此，自然也要考虑第三种极限情形，即 (4) 中第三个不等式变为等式的情形。更确切地说，假设 p、q、r 固定，且 (a', b') 趋近某个点 (a, b)，使得 $(r+a)^2 + b^2 = p^2$。那么，由于 $\Psi(m) = \frac{\pi^2 b^2}{q^2}$，我们有 $m \to 0$，由 (28) 得，

$$-\frac{\tau_1}{\tau_3 - \tau_1} = \frac{m}{n_0} \to 1 - \frac{4p^2}{q^2}, \qquad \frac{1 - \tau_1}{\tau_3 - \tau_1} = \frac{m}{n_1} \to 1 - \frac{4(r+a)^2}{q^2}.$$

简单计算可得

$$\tau_1, \tau_2 \to \frac{4p^2 - q^2}{4b^2}, \quad \tau_3 \to \frac{p^2}{b^2}, \qquad \theta(y) \to \frac{2\pi p}{b} y, \quad \alpha(y) \to -\frac{2\pi(r+a)}{b},$$

最后

$$u^{p,q,r}_{a',b'} \to u^{p,r;\varphi_0}_{a,b}, \quad \text{where} \quad \varphi_0 = \arccos \frac{\sqrt{4p^2 - q^2}}{2b}. \tag{52}$$

或许有人会好奇这里的 φ_0 这一取值有何特殊之处。结果表明，对于这个 φ_0，映射 $u^{p,\ a\ b}_{\ \ \ \

于是， ν_1,ν_2,ν_3 构成 $\Gamma(u^*T\mathbb{S}^3)$ 的整体基，并且在每一点 $(x,y)\in(\mathbb{T}^2,[g_{a,b}])$ 处都是正交归一的。经过冗长但直接的计算可知，在此基下，算子 $J_{u,g_{a,b}}$ 具有如下形式

$$J_{u,g_{a,b}}V=\Delta_0 V+4\pi A\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\partial_x V+\frac{4\pi}{b}\begin{pmatrix}0&0&Bp\\0&0&A(r+a)\\-Bp&-A(r+a)&0\end{pmatrix}\partial_y V,$$

其中， $\Delta_0=-(\partial_x^2+\partial_y^2)\mathbf{1}$ 是作用于 $V\in\Gamma(u^*T\mathbb{S}^3)$各分量的平坦拉普拉斯算子。由于 $J_{u,\ g_{a,\ b}}$具有常系数，我们可以分离变量。如果

$$V=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}V_{k,l}e^{\frac{2\pi i}{b}(lbx+(k-la)y)},\qquad V_{k,l}\in\mathbb{C}^3$$

V的傅里叶展开为

$$J^{\mathbb{C}}_{u,g_{a,b}}V=\frac{4\pi^2}{b^2}\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}(J^{k,l}_{u,g_{a,b}}V_{k,l})e^{\frac{2\pi i}{b}(lbx+(k-la)y)},$$

其中

$$J^{k,l}_{u,g_{a,b}}=(l^2b^2+(k-la)^2)\mathbf{1}+2ilb^2A\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}+2i(k-la)\begin{pmatrix}0&0&Bp\\0&0&A(r+a)\\-Bp&-A(r+a)&0\end{pmatrix},\quad k,l\in\mathbb{Z}.$$

我们有

$$\det J^{k,l}_{u,g_{a,b}}=(l^2b^2+(k-la)^2)((l^2b^2+(k-la)^2)^2-4A^2(lb^2-(k-la)(r+a))^2-4B^2p^2(k-la)^2).$$

代入 $k=\pm q$、$l=0$并利用（18）， $A^2=\frac{4p^2-q^2}{4b^2}$、$A^2+B^2=1$，我们得到 $\det J^{\pm q,\ u\ \ 0}_{u,\ g_{a,\ b}}=0$。$J_{u,\ g_{a,\ b}}$ 的相应特征空间由 V_1、V_2 张成，其中

$$V_1=2Bp\cos\frac{2\pi q}{b}y\,\nu_1+2A(r+a)\cos\frac{2\pi q}{b}y\,\nu_2-q\sin\frac{2\pi q}{b}y\,\nu_3,$$
$$V_2=2Bp\sin\frac{2\pi q}{b}y\,\nu_1+2A(r+a)\sin\frac{2\pi q}{b}y\,\nu_2+q\cos\frac{2\pi q}{b}y\,\nu_3.$$

接下来只需证明，例如， V_1 不可积。反设其可积，并令 $(u_t)_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 为 $u=u_0$对应的调和变分。令 $\lambda:=\frac{2\pi}{b}p=\frac{2\pi}{b}\sqrt{(r+a)^2+b^2}$。由于任意调和映射 $(\mathbb{T}^2,g_{a,\ b})\to\mathbb{S}^3$ 都由拉普拉斯算子的特征函数给出，特别是映射 u 由λ-特征函数给出，因此对于所有充分小的 t，映射 u_t 也由 λ-特征函数给出。换言之，我们可以假设

$$\tilde{u}_t(x,y)=\left(\sum A_{k,l}(t)e^{\frac{2\pi i}{b}(lbx+(k-la)y)},\sum B_{k,l}(t)e^{\frac{2\pi i}{b}(lbx+(k-la)y)}\right),\qquad A_{k,l},B_{k,l}\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{C},$$

其中，与通常一样， $\tilde{u}_t\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}^3$ 是 u_t的提升，并且求和遍及所有满足以下条件的 $k,l\in\mathbb{Z}$

$$\frac{4\pi^2}{b^2}(l^2b^2+(k-la)^2)=\lambda^2.\tag{53}$$

我们有

$$2Bp\cos\frac{2\pi q}{b}y=\langle V_1,\nu_1\rangle=\left\langle\left.\frac{\partial u_t}{\partial t}\right|_{t=0},\nu_1\right\rangle=\sum\mathrm{Re}(-iA'_{k,l}(0)e^{\frac{2\pi i}{b}(lbx+(k-la-p)y)}).$$

由（实）傅里叶展开的唯一性可知，右端唯一非零的求和项是满足$l=0$、$k=p\pm q$的那些项，因此（53）蕴含 $q=2p$。用 ν_2 代替 ν_1 作类似论证，可得

$q = 2|r + a|$。然而，由于（18），这两个等式不可能同时成立。矛盾由此证明了结论。□

注 8.1. 不可积雅可比场的存在是相当罕见的性质。例如， [Muk97] 证明，环面 $u^{1,\ 0\ 1}_{a\ b}{}^{0;\varphi_0}$, 存在不可积雅可比场，当且仅当 $\varphi_0 \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$。

9. Discussion

9.1. 为什么猜想 1.1 很难？一旦找到 λ_1 （无论是在整体意义下还是在共形类中）的一个极大度量候选，证明它确实是极大值的一种标准工具就是所谓的 Hersch技巧。该技巧由 [Her70] 提出，随后成功应用于许多类似情形。其思路如下。考虑 $\mathbb{S}^3$ 的共形自同构族，定义为

$$G_\gamma(z) = \frac{1-\gamma^2}{|z+\gamma|^2}(z+\gamma) + \gamma, \qquad \gamma \in \mathbb{B}^4, \quad z \in \mathbb{S}^3,$$

其中 $\mathbb{B}^4 = \{\gamma \in \mathbb{R}^4 : \ |\gamma| \leqslant 1\}$. 设 $(a, b) \in \mathcal{M}$ 且 $u\colon (\mathbb{T}^2, [g_{a,b}]) \to \mathbb{S}^3$ 是满足以下条件的光滑映射

$$E(G_\gamma \circ u) \leqslant E(u), \qquad \gamma \in \mathbb{B}^4. \tag{54}$$

于是，由 λ_1 的变分刻画和标准的拓扑论证可得

$$\Lambda_1(M, [g_{a,b}]) \leqslant E(u).$$

特别地，若 u 是调和的，则

$$\Lambda_1(M, [g_{a,b}]) \leqslant \bar{\lambda}_1(M, \frac{1}{2}|\mathrm{d}u|^2_{g_{a,b}} g_{a,b}).$$

因此，证明猜想 1.1 的一种自然尝试是在 (54) 中取 $u := u^{1,\ 1\,0\,,\ ,\,0}_{a\ b}$。遗憾的是，事实证明，在这种情况下，(54) 对某些共形类 $(a, b) \in \mathcal{M}$ （很可能对所有共形类）并不成立。事实上，令 $(a, b) \to (a_0, b_0)$，其中 $a_0^2 + b_0^2 = 1$。于是由 (52) 可得

$$u^{1,1,0}_{a,b} \to u^{1,0;\varphi_0}_{a_0,b_0}, \quad \text{where} \quad \varphi_0 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2b_0}.$$

令 $\gamma_0 := (1,\ 0,\ 0,\ 0)$。利用 [MR86, (1.7)], , 我们得到 $u := u^{1,\ 0;\varphi_0}_{a_0\ b_0}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_{t=0} E(G_{t\gamma_0} \circ u) = \int_{\mathbb{T}^2} (3\langle u, \gamma_0\rangle^2 - 1)|\mathrm{d}u|^2_{g_{a,b}} \mathrm{d}v_{g_{a,b}} =$$

$$\frac{4\pi^2}{b_0^2}\int_0^{b_0}\left(\frac{9}{4b_0^2}\cos^2\frac{2\pi}{b_0}y - 1\right)\mathrm{d}y = \frac{4\pi^2}{b_0^3}\left(\frac{9}{8} - b_0^2\right) > 0.$$

这意味着，当 $u = u^{1,\ 1\,0\,,\ ,\,\gamma = t\gamma_0}_{a\ b}$ 足够小时，且 (a, b) 足够接近 (a_0, b_0) 时，(54) 不成立。注意，在 [ESIR97], 中，作者使用 (54)，取 $u = u^{1,\ 0\,\psi_0,\ ,\ ,}_{a_0\ b_0}$，其中 $\psi_0 = \arccos\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \neq \varphi_0$，以证明平坦度量在任意菱形共形类 $(a_0, b_0) \in \mathcal{M}, a_0^2 + b_0^2 = 1$ 中都是极大的。

人们或许可以通过构造一个四维的能量下降变分族来推广 Hersch技巧，使得 $u^{1,\ 1\,0\,,,}_{a\ b}$，也就是说，该族中每个映射的能量都不超过 $u^{1,\ 1\,0\,,,}_{a\ b}$ 的能量（参见 [KS24]）。然而，我们认为这将是一项颇具挑战性的任务。回顾一下，对于调和映射 $u\colon (\mathbb{T}^2, g) \to \mathbb{S}^3$，其能量指标 $\mathrm{Ind}_E u$（相应地，能量零度 $\mathrm{Nul}_E u$）是相应雅可比稳定算子 $J_{u,g}$ 的负（相应地，零）特征值的个数。显然，任何上述变分族都会诱导出一个四维子空间 $U \subset \Gamma(u^*T\mathbb{S}^3)$，使得 $J_{u,g}|_U \leqslant 0$。然而，根据我们在 Wolfram Mathematica 中进行的数值实验，似乎 $\mathrm{Ind}_E(u^{1,\ 1\,0\,,,}_{a\ b}) = 3$

并且 $\mathrm{Nul}_E(u^1_{a,b}) = 7$（事实上，我们有 $\mathrm{Ind}_E(u^1_{a,b}) \leqslant 4N(2) = 4$，依据 [Kar21，命题 1.6] 无论如何）。六个雅可比场来自 $\mathbb{S}^3$ 的旋转（这些场实际上并无多大用处），剩余的场则来自 $(\mathbb{T}^2, [g_{a,b}])$ 的共形自同构，由 y-平移给出。因此，对能量指标有贡献的场寥寥无几，而且它们似乎没有明确的几何意义。这使得甚至构造空间 U 都很困难，更不用说构造一个四维的能量下降变分族了。

最后请注意，式 (54) 的类比形式以及非平凡雅可比场的缺失，在确立共形类中极大化子的定量稳定性方面都发挥着关键作用，参见 [KNPS25]。特别是，上述讨论表明，如果猜想 1.1 成立，那么 [KNPS25] 的方法就无法用于证明相应极大化子的定量稳定性（不过，也可能通过其他方法来研究这种稳定性）。

9.2. 未来研究方向。为克莱因瓶建立定理 6 的类比结果将很有意义。另一种可能是将作用 (2) 替换为

$$\alpha \cdot (z_1, z_2) = (e^{2\pi i k\alpha} z_1, e^{2\pi i l\alpha} z_2), \qquad (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3, \qquad \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$$

对于某些正的互素整数 k, l。相应的 $\mathbb{S}^1$-等变极小环面和克莱因瓶称为 Lawson τ-曲面 [Law70, HL71, Pen12]。请注意，与大椭环面不同，Lawson τ-曲面可用初等函数表示。可以合理地预期，Lawsonτ-曲面的调和类比（如果存在）可由椭圆积分表示。高维球面的情形也值得研究（参见 [Pen15] 中关于 $\mathbb{S}^1$-等变极小环面在 $\mathbb{S}^5$ 中的情形）。最后，将定理 6 与基于谱数据对调和 $\mathbb{S}^1$-等变环面所作的分类进行比较也很有意义 [CO20]。

References

[BF71] Paul F. Byrd 和 Morris D. Friedman。《 *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*》。数学科学基础丛书。施普林格出版社（柏林、海德堡），第2版，1971年。[Car25] B. C. Carlson。《NIST 数学函数数字图书馆》。第19章：椭圆积分。`https://dlmf.nist.gov/19`，2025年。[CKM19] Donato Cianci、Mikhail Karpukhin 和 Vladimir Medvedev。论由第一特征函数给出的曲面的分支极小浸入。 *Annals of Global Analysis and Geometry*，56(4):667–690，2019年。[CL55] Earl A. Coddington 和 Norman Levinson。《 *Theory of ordinary differential equations*》。麦格劳-希尔，1955年。[CO20] Emma Carberry 和 Ross Ogilvie。 3 *Journal of Geometry* 球 *and Physics* 157 103808, 22, 2020 面中等变调和环面的空间。，：。[Eas73] M.S.P. Eastham。《 *Spectral theory of periodic differential equations*》。苏格兰学术出版社，1973年。[Eel87] James Eells。Delaunay 曲面。 *The Mathematical Intelligencer*，9(1):53–57，1987年。[EKWZ99] M.S.P. Eastham、Q. Kong、H. Wu 和 A. Zettl。斯图姆–刘维尔问题特征值之间的不等式。 *Journal of Inequalities and Applications* 3 25 43, 1999 ，：–。[

ESGJ06] Ahmad El Soufi、Hector Giacomini 和 Mustapha Jazar。克莱因瓶上拉普拉斯算子最小特征值的唯一极值度量。 *Duke Mathematical Journal*，135(1):181–202，2006年。[ESI00] Ahmad El Soufi 和 Sa¨ıd Ilias。允许由其第一特征函数给出等距浸入的黎曼流形。*Pacific Journal of Mathematics*，195(1):91–99，2000年。[ESI03] Ahmad El Soufi 和 Sa¨ıd Ilias。共形类中拉普拉斯算子第一特征值的极值度量。*Proceedings of the American Mathematical Society*，131(5):1611–1618，2003年。[ESI08] Ahmad El Soufi 和 Sa¨ıd Ilias。紧流形上的拉普拉斯算子特征值泛函与度量变形。*Journal of Geometry and Physics*，58(1):89–104，2008年。[ESIR97] Ahmad El Soufi、Sa ¨ ` *Séminaire de théorie spectrale* ıd Ilias 和 *et géométrie* 15 17 23, 1996 1997 Antonio Ros。论环面的第一特征值。，：–-。[Her70] Joseph Hersch。关于齐性球形膜的四个等周性质。，：A–A。[HL71] Wu-Yi Hsiang 和 H. Blaine Lawson, Jr. 低余维数的极小子流形。 *Journal of Differential Geometry* 5 1 38, 1971 ，：–。

[JLN+05] Dmitry Jakobson、Michael Levitin、Nikolai Nadirashvili、Nilima Nigam 和 Iosif Polterovich。亏格为二的曲面上第一特征值可以有多大？ *International Mathematics Research Notices*，(63):3967–3985，2005年。[JNP06] Dmitry Jakobson、Nikolai Nadirashvili 和 Iosif Polterovich。克莱因瓶上第一特征值的极值度量。 *Canadian Journal of Mathematics*，58(2):381–400，2006年。[Kan25] Fan Kang。论 Berger 等周问题。 *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*，363 695:–704，2025年。[Kar14] Mikhail Karpukhin。大槻环面双极曲面的谱性质。 *Journal of Spectral Theory* 4 1 87 111, , ( ):–。[Kar21] 2014 Mikhail Karpukhin。极小球面的指标与等周特征值不等式。 *Inventiones Mathematicae*，223 1 335( ):–377，2021年。[Kar25] Mikhail Karpukhin。曲面上特征值泛函的二次变分公式。 *arxiv.org preprint* 。[KLO17] Chiu-Yen Kao、*arXiv:2508.10465* 2025 Rongjie Lai 和 Braxton Osting。闭黎曼曲面上拉普拉斯-贝尔特拉米特征值的最大化。 *ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations*，23(2):685–720，2017年。[KM22] Mikhail Karpukhin 和 Antoine M´etras。通过调和映射求拉普拉斯算子与斯捷克洛夫算子的极值度量。 *Journal of Geometric Analysis* 32 5 154, 36, 2022 , ( ):论文编号 。[KNPS25] Mikhail Karpukhin、Micka¨el Nahon、Iosif Polterovich 和 Daniel Stern。曲面上拉普拉斯特征值等周不等式的稳定性。 *Journal of Differential Geometry*，129(2):415–490，2025年。[KS24] Mikhail Karpukhin 和 Daniel Stern。极小极大调和映射与共形特征值的新刻画。 *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*，26(11):4071–4129，2024年。[Lap08] Hugues Lapointe。$\mathbb{S}^4$中双极极小曲面的谱性质。 *Differential Geometry and its Applications*，26 1 9( ):–22，2008年。[Law70] H. Blaine Lawson, Jr. S^3中的完备极小曲面。 *Annals of Mathematics. Second Series*，92:335–374，1970年。[Mor24] Egor Morozov。大槻环面双极曲面的指标。 *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*，27(22)，2024年。[MR86] Sebasti´an Montiel 和 Antonio Ros。由第一特征函数给出的曲面极小浸入与共形面积。*Inventiones Mathematicae*，83(1):153–166，1986年。[Muk97] Mariko Mukai。克利福德环面所给调和映射的变形。 *Kodai Mathematical Journal*，20 3 252( ):–268，1997年。[Nad96] Nikolai Nadirashvili，Berger 等周问题与曲面的极小浸入。*Analysis* 6 877 897, 1996 *Geometric and Functional Analysis* , : –。[NS19] Shin Nayatani 和 Toshihiro Shoda。亏格为二的闭曲面上使拉普拉斯算子第一特征值达到最大值的度量。 *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*，357(1):84–98，2019年。[ˆOts70] Tominosuke ˆOtsuki。常曲率黎曼流形中的极小超曲面。 *American Journal of Mathematics* 92 1 145 173, 1970 , ( ):–。[Pen12] Alexei V. Penskoi。Lawson τ 曲面与 Lam´e 方程的极值谱性质。， ( ):–192，2012年。[Pen13a] Alexei V. Penskoi。曲面上拉普拉斯-贝尔特拉米算子特征值的极值度量。 *Moscow Mathematical Journal* 12 1 173 *Uspekhi Mat.* , (( )):–168, *Nauk* 68 6 414 107 2013年。[Pen13b] Alexei V. Penskoi。大槻环面的极值谱性质。 *Mathematische Nachrichten*，286(4):379–391，2013年。[Pen15] Alexei V. Penskoi。广义 Lawson 环面与克莱因瓶。 *Journal of Geometric Analysis* 25 4 2645 2666, , ( ):–。[Pen19] 2015 Alexei V. Penskoi。曲面上拉普拉斯-贝尔特拉米算子高阶特征值的等周不等式。 *Tr.* , (代数拓扑、组合学与数学物理):–308，2019年。[Pet14] Romain Petrides。曲面上拉普拉斯第一特征值极大度量的存在性与正则性。 *Mat. Inst. Steklova* 305 291 *Geometric and Functional Analysis* 24 4 1336 1376, 2014 , ( ):–。[Smi72] R. T. Smith。《 *Harmonic mappings of spheres*》。博士论文，华威大学，数学研究所，1972年。[Vol25] H. Volkmer。《NIST 数学函数数字图书馆》。第29章：Lam´e 函数。`https://dlmf.nist.gov/29`，2025年。[WR25] 椭圆积分：数学函数网站。`https://functions.wolfram.com/EllipticIntegrals`，1998-2025年。[Zet05] Anton Zettl。《 *Sturm-Liouville theory*》，第 *Mathematical Surveys and Monographs*卷第121卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2005年。

Université de Montréal, Faculté des arts et des sciences, Département de mathématiques et de statistique
Pavillon André-Aisenstadt (AA-5190)

2920, chemin de la Tour
Montréal (QC)H3T 1J4*Email address*:
egor.morozov@umontreal.ca