arXiv:2601.19200v1 [math.CT] 27 Jan 2026

单子的 Eilenberg-Moore 范畴中高阶导子与高阶微分挠理论的刻画

Dipti Paik * Divya Ahuja † Surjeet Kour‡

摘要

设 T 是范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个单子。本文引入单子 T 上的高阶导子概念，并用T上的普通导子对其进行刻画。我们还定义了 Eilenberg-Moore 范畴 EM_T 中单子T 上的模的高阶导子，并以类似方式建立其刻画。我们给出若干示例来说明并支持所得结果。此外，我们考察EM_T 上的挠理论成为高阶微分挠理论的条件，并证明当且仅当模$M \in EM_T$ 上的每个高阶导子都能唯一延拓到其商模$Q_\tau(M)$时，该挠理论才是高阶微分的。

MSC（2020）主题分类：13N15, 16S90, 18C20, 18E40

关键词：高阶微分挠理论、遗传挠理论、导子、Eilenberg-Moore 范畴

1 引言

在全文中，我们假设 F 是一个零特征域，A 是一个含幺结合环，且 AMod 是左 A-模范畴。若加性映射 $\rho : A \to A$ 满足 Leibniz 法则，即对所有 $a, b \in A$，有 $\rho(ab) = \rho(a)b + a\rho(b)$，则称其为 A 上的导子。给定 A 上的导子 ρ 以及左 A-模 M，若加性映射 $\varrho : M \to M$ 满足对所有 $a \in A$、$m \in M$，有 $\varrho(am) = a\varrho(m) + \rho(a)m$，则称其为 M 上的 $a\rho$-导子。高阶导子以一种自然的方式推广了这一概念。若一族加性映射 $\Omega = \{\Omega_i : A \to A\}_{i=0}^{n}$ 满足对所有 $a, b \in A$ 以及 $k = 0, 1, \ldots, n$，有 $\Omega_k(ab) = \sum_{i=0}^{k} \Omega_i(a)\Omega_{k-i}(b)$，则称其为 A 上的 n 阶高阶导子。这里，$\Omega_0$ 是 A 上的恒等映射，而 Ω_1 与普通导子一致。设 Ω 是 A 上的 n 阶高阶导子，且 $M \in AMod$。一族加性映射 $\Psi = \{\Psi_i : M \to M\}_{i=0}^{n}$，其中 Ψ_0 是 M 上的恒等映射，若对所有 $a \in A$、$m \in M$ 以及 $k = 0, \ldots, n$，有 $\Psi_k(am) = \sum_{i=0}^{k} \Omega_i(a)\Psi_{k-i}(m)$，则称其为 M 上的 n 阶高阶 Ω-导子。特别地，Ψ_1 是 M 上的普通 Ω_1-导子。

在经典模论背景下，挠理论与导子之间的相互作用已得到广泛研究。对于 A-模范畴 AMod 上的挠理论 $\tau = (\mathscr{T}, \mathscr{F})$，已知 τ 是遗传的，当且仅当每个模 M 的商模都存在；此时，商模 $Q_\tau(M)$ 是与之相关的无挠模 M/M_τ 的 τ-内包络，其中 M_τ 表示 M 的 τ-挠子模（见 [8], [21]）。此外，若遗传挠理论τ 满足：对于每个 $M \in AMod$ 以及 M 上的每个 ρ-导子 ϱ，都有 $\varrho(M_\tau) \subseteq M_\tau$（见 [7]），则称其为微分挠理论。微分挠理论意义重大，因为它们使得任意对象 $M \in AMod$ 上的 ρ-导子 ϱ 能够唯一延拓到其商模。文献 [12] 证明，若 τ 是 AMod 上的挠理论，且 M 是 τ-无挠的，则 M 上的每个 ρ-导子 ϱ都可以延拓为商模 $Q_\tau(M)$ 上的 ρ-导子。Bland 后来在 [7]中证明了这种延拓的唯一性。Lomp 和 van den Berg 在 [16] 中证明，AMod 中的所有遗传挠理论都是微分的。在 [5], 中，Banerjee 将这一结果推广到预加性范畴，并证明若预加性范畴 $\mathcal{A}$上的导子为 ρ，则每个遗传

*德里印度理工学院数学系。电子邮件：paikdipti09@gmail.com
†金奈数学科学研究所数学系。电子邮件：divyaahuja1428@gmail.com。
‡德里印度理工学院数学系。电子邮件：koursurjeet@gmail.com。

挠理论于 ${}_{\mathcal{A}}\mathrm{Mod}$ 中必须是微分的，并且每个 ρ-导子在一个 $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{M}$ 上都能唯一延拓到其商模。最近的一项工作中，[1], Ahuja 和 Kour 用单子取代小预加法范畴，并证明：若$\delta: T \longrightarrow T$是单子 T上的导子，则每个 δ-导子在一个 T-模 M 都能唯一延拓为 δ商模上的 M-导子。

在高阶导子的背景下，Rim 在 [24] 中研究了高阶反导子的延拓问题，并证明在适当条件下，模 M 上的此类映射可以延拓到其商模。当环对合是平凡的时，这就归结为 Ribenboim 关于高阶导子的概念（见 [23]），从而推广了 Golan 的结果 [12]。Bland 在 [4] 中进一步刻画了这些延拓的存在性与唯一性。

在本文中，我们将 Bland 关于环和模上的高阶导子的理论 [4] 推广到单子上的高阶导子以及单子上的模的 Eilenberg-Moore 范畴这一背景下。我们从范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个单子（T, θ, ζ）开始。首先，我们在第 2 节引入单子 T 上 n 阶 >1 高阶导子 Δ 的概念（见定义 2.4 和定义 2.6）。此外，当 $\mathscr{C}$ 是一个 F-线性范畴时，我们用 T 上的普通导子刻画单子 T 上的高阶导子，从而推广 Mirzavaziri 对代数 [20] 的刻画。在第 3 节中，我们研究模 M $\in \mathrm{EM}_T$，并引入 M 上 n 阶 >1 高阶 Δ-导子的概念。受 Banerjee 和 Kour [3, 的工作启发，定理 5.5], 表明，交换环上的模的高阶导子完全由普通导子的序列决定；因此，当 $\mathscr{C}$ 是一个 F-线性范畴时，我们用 M 上的普通导子刻画 M 上的高阶 Δ-导子。

从第 4 节开始，我们假设 $\mathscr{C}$是一个 Grothendieck 范畴，即一个余极限存在、滤过余极限正合且 $\mathscr{C}$有一组生成元 $\{\mathrm{G}_i\}_{i\in\Lambda}$ 的阿贝尔范畴。设 (T, θ, ζ, Δ) 是 $\mathscr{C}$上的一个 n 阶高阶微分单子，且 T 正合并保持余极限；设 $\tau = (\mathscr{T}, \mathscr{F})$ 是 EM_T上的一个遗传挠理论。由 [17, 推论 3.4]可知，EM_T 上的遗传挠理论与 Gabriel 滤子族一一对应。设 $\mathscr{L} = \{\mathscr{L}_{TG_i}\}_{i\in\Lambda}$是 EM_T上对应的 Gabriel 滤子族。接下来，我们研究 EM_T 上的高阶微分挠理论，并证明第 4 节的以下主要结果。

定理 A. *(见定理 4.8)* 设 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是一个定义在 $\mathscr{C}$上的 n 阶高阶微分单子，它正合且保持余极限，并且 τ 是 EM_T上的遗传挠理论。则下列陈述等价。

i) 每个与 τ对应的 *Gabriel* 滤子都是 Δ-不变的。

ii) τ 是一个 n 阶高阶微分挠理论。

iii) 对任意（M, f_M） $\in EM_T$、任意 n 阶高阶 Δ-导子 $\{D_n\}$、任意子模 $N \subseteq M_\tau$以及任意 $j \in \{0, \ldots, n\}$，都存在 $K \in \mathcal{L}_{TG_i}$ 使得（Δ_j）$_{G_i}$（K） $\subseteq \ker(TG_i \to N)$。

iv) 对任意（M, f_M） $\in EM_T$、M 上的任意 n 阶高阶 Δ-导子 $\{D_n\}$ 以及任意 $N \subseteq M_\tau$，都存在 $K \in \mathcal{L}_{TG_i}$ 使得（Δ_j）$_{G_i}$（K） $\subseteq \ker(TG_i \to N)$ 对所有 $j = 0, 1, \ldots, n$ 均成立。

最后，在第5 节中，我们研究关于挠理论 Δ的商模$Q(M)$ 上的高阶导子，其中M 是 τ上EM。受 Rim 对反导子的扩张的定义启发， [24], 我们引入了在 Δ-导子在$Q(M)$ 上的概念，其中M 无挠；随后，我们确立了本文最后一个主要结果。

定理 B。（参见定理 *5.6*）设 τ 是 EM_T 上的遗传挠理论，且 (M, f_M) 是 EM_T中的任意对象。那么，对于任意$\tilde{}$$n$ 阶高阶 Δ-导子 $D : M \longrightarrow M$，当且仅当 τ 是 n 阶高阶微分挠理论时，D 才能唯一地延拓为 $Q_\tau(M) \longrightarrow Q_\tau(M)$ 上的 n 阶高阶 Δ-导子。

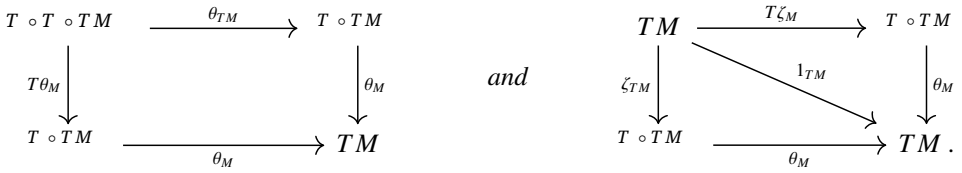
2 单子上高阶导子的刻画

本节中，我们将根据普通导子的概念，刻画范畴 $\mathscr{C}$上的单子上的高阶导子。首先，我们回顾单子、单子上的模的 Eilenberg-Moore 范畴以及单子上的普通导子的定义，参见 [1]。

定义 2.1。 范畴 $\mathscr{C}$上的单子是一个三元组(T,θ,ζ)，由一个自函子 $T\colon\ \mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}$以及两个自函子 $T\circ T\longrightarrow T$和 $\zeta\colon 1_{\mathscr{C}}\longrightarrow T$之间的自然变换 $\theta\colon$ 组成，并满足对于任意对象 $M\in\mathscr{C}$，我们有

$$\theta_M\circ\theta_{TM}=\theta_M\circ T\theta_M\quad and\quad \theta_M\circ T\zeta_M=1_{TM}=\theta_M\circ\zeta_{TM}\,, \tag{2.1}$$

即，下列图表是交换的



两个单子 (T,θ,ζ)和 (T',θ',ζ')之间的单子态射是一个自然变换 $\phi\colon T\longrightarrow T'$，满足以下等式:

$$\phi\circ\theta=\theta'\circ(\phi*\phi)\qquad and\qquad \phi\circ\zeta=\zeta'\,.$$

定义 2.2. 单子 (T,θ,ζ)上的模是一个二元组 (M,f_M)，由一个对象 $M\in\mathscr{C}$和一个态射 $f_M\colon TM\longrightarrow M$组成，并满足以下等式:

$$f_M\circ\theta_M=f_M\circ T(f_M)\qquad and\qquad f_M\circ\zeta_M=1_M\,.$$

此外，两个 T-模 (M,f_M)和 $(M',f_{M'})$之间的 T-模态射是一个态射 $g\colon M\longrightarrow M'\ in\ \mathscr{C}$，满足

$$f_{M'}\circ Tg=g\circ f_M\,.$$

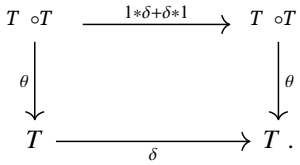
我们用 EM_T表示单子 T 上的模所构成的 *Eilenberg-Moore* 范畴。给定一个对象 $M\in\mathscr{C}$，容易看出$(TM,f_{TM}=\theta_M\colon T\circ TM\longrightarrow TM)\in EM_T$。此外，众所周知（见 [18]）存在一个自然同构

$$EM_T(TM,N)\cong\mathscr{C}(M,N) \tag{2.2}$$

对于 $M\in\mathscr{C}$和 $N\in EM_T$。

现在我们回顾 [1] 中的以下定义。

定义 2.3. [1, 定义 3.1] 设 (T,θ,ζ)是 $\mathscr{C}$ 上的一个单子。若自然变换 $\delta\colon T\longrightarrow T$使下图交换，则称其为 T 上的普通导子



我们继续将四元组 (T,θ,ζ,δ)称为微分单子。

现在回顾一下环A上n 阶高阶导子的定义。A 上的n 阶高阶导子是一组加性映射$\Omega=\{\Omega_i\colon A\longrightarrow A\}_{i=0}^{n}$，其中$\Omega_0$ 是A 上的恒等映射，且Ω_k 满足以下条件:

$$\begin{aligned}\Omega_k(ab)&=\Omega_k(a)\Omega_0(b)+\Omega_{k-1}(a)\Omega_1(b)+\ldots+\Omega(a)\Omega_k(b)\\&=\Omega_k(a)b+\Omega_{k-1}(a)\Omega_1(b)+\ldots+a\Omega_k(b)\end{aligned} \tag{2.3}$$

对所有a、$b\in A$ 以及所有$k\geq 1$均成立。现在我们证明，环上的高阶导子这一概念自然地推广为单子T上的高阶导子。此外，我们发现，环上高阶导子的刻画在单子语境下仍然成立（见 [20]）。

定义 2.4。 设$(T,\ \theta,\ \zeta)$是范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个单子。若一族 $\Delta=\{\Delta_i:T\ \longrightarrow T\}_{i=0}^{n}$自然变换满足 Δ_0 是 T 上的恒等自然变换，则称其为 T 上一个 n 阶高阶导子，当且仅当下图交换

$$\begin{array}{ccc} T\circ T & \xrightarrow{1*\Delta_i+\Delta_1*\Delta_{i-1}+\ldots+\Delta_i*1} & T\circ T \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ T & \xrightarrow{\Delta_i} & T \end{array} \tag{2.4}$$

对所有 $i=0,1,\ldots,n$。我们称四元组$(T,\ \theta,\ \zeta,\ \Delta)$为 n 阶高阶微分单子。

注 2.5。 设$(T,\ \theta,\ \zeta,\ \Delta)$是 $\mathscr{C}$ 上的 n 阶高阶微分单子。当 $n\ =1,\ \Delta$与 T 上的普通导子重合。此外，对于任意 $0\leq k\ \leq n$，这一族

$$\bar{\Delta_k}=\{\Delta_i:T\longrightarrow T\}_{i=0}^{k}$$

构成 T 上的 k 阶高阶导子。因此，每个 n 阶高阶导子都会导出所有 $1\leq k\ \leq n$ 阶的高阶导子。

定义 2.6。 一族自然变换 $\Delta\ =\ \{\Delta_i:T\ \longrightarrow T\}_{i=0}^{\infty}$是单子$(T,\ \theta,\ \zeta)$上的高阶导子，当且仅当它满足下图

$$\begin{array}{ccc} T\circ T & \xrightarrow{1*\Delta_i+\Delta_1*\Delta_{i-1}+\ldots+\Delta_i*1} & T\circ T \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ T & \xrightarrow{\Delta_i} & T \end{array} \tag{2.5}$$

对所有 $i\ \geq 0$均成立，其中约定 Δ_0是 T 上的恒等自然变换。在这种情况下，我们称$(T,\ \theta,\ \zeta,\ \Delta)$为高阶微分单子。

现在给出单子上高阶导子的刻画。

命题 2.7。 设 $\mathscr{C}$为一个 $\mathfrak{F}$-线性范畴，且 (T,θ,ζ,Δ)为 $\mathscr{C}$上的高阶微分单子。则存在一个序列$\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$，其元素是 T 上的普通导子，使得

$$(n+1)\Delta_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\delta_{k+1}\circ\Delta_{n-k}$$

对每个 $n\ \geq 0$均成立。

证明。 我们对n进行归纳法证明。当$n\ =0$时，考虑 $\delta_1=\Delta_1$。由于 Δ_1是T上的普通导子，因此对于$n\ =0$，结论成立。现在假设对于所有$k\ \leq n$结论均成立，并证明$k\ =n+1$时结论成立。考虑

$$\delta_{n+1}=(n+1)\Delta_{n+1}-\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{k+1}\circ\Delta_{n-k}. \tag{2.6}$$

只需证明 δ_{n+1} 是 T 上的普通导子，即下图可交换

$$\begin{array}{ccc} T\ \circ T & \xrightarrow{1*\delta_{n+1}+\delta_{n+1}*1} & T\ \circ T \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\theta} \\ T & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & T. \end{array}$$

我们看到

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1}\circ\theta &= \Big[(n+1)\Delta_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1}\delta_{k+1}\circ\Delta_{n-k}\Big]\circ\theta && \text{(by (2.6))}\\
&= (n+1)\Delta_{n+1}\circ\theta - \sum_{k=0}^{n-1}\delta_{k+1}\circ\Delta_{n-k}\circ\theta\\
&= (n+1)\Big[\theta\circ\Big(\sum_{k=0}^{n+1}\Delta_k * \Delta_{n+1-k}\Big)\Big] - \Big[\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{k+1}\circ\theta\circ\Big(\sum_{l=0}^{n-k}\Delta_l * \Delta_{n-k-l}\Big)\Big] && \text{(by (2.4))}\\
&= \theta\circ\sum_{k=0}^{n+1}(k+n+1-k)\Delta_k * \Delta_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k}\delta_{k+1}\circ\theta\circ(\Delta_l * \Delta_{n-k-l})\\
&= \theta\circ\sum_{k=0}^{n+1}(k+n+1-k)\Delta_k * \Delta_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k}\theta\circ(1*\delta_{k+1}+\delta_{k+1}*1)\circ(\Delta_l * \Delta_{n-k-l}). && (2.7)
\end{aligned}$$

我们不将方程（2.7）拆分为以下两部分，并分别计算。定义

$$K = \theta\circ\sum_{k=0}^{n+1}k(\Delta_k * \Delta_{(n+1-k)}) - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k}\theta\circ(\delta_{k+1}*1)\circ(\Delta_l * \Delta_{(n-k-l)}) \tag{2.8}$$

and

$$L = \theta\circ\sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)(\Delta_k * \Delta_{(n+1-k)}) - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k}\theta\circ(1*\delta_{k+1})\circ(\Delta_l * \Delta_{(n-k-l)}). \tag{2.9}$$

于是， $\delta_{n+1}\circ\theta = K + L$。现在我们证明

$$K = \theta\circ(\delta_{n+1}*1) \qquad \text{and} \qquad L = \theta\circ(1*\delta_{n+1}).$$

为了计算K，我们首先注意到 $0 \le k+l \le n$ 以及$k \ne n$。现在令$r = l+k$。于是得到

$$\begin{aligned}
K &= \theta\circ\sum_{k=0}^{n+1}k(\Delta_k * \Delta_{n+1-k}) - \sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0,k\ne n}^{r}\theta\circ(\delta_{k+1}*1)\circ(\Delta_{r-k} * \Delta_{n-r})\\
&= \theta\circ\sum_{k=0}^{n+1}k(\Delta_k * \Delta_{n+1-k}) - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0,k\ne n}^{r}\theta\circ(\delta_{k+1}*1)\circ(\Delta_{r-k} * \Delta_{n-r}) - \sum_{k=0}^{n-1}\theta\circ(\delta_{k+1}*1)\circ\Delta_{n-k}\,,
\end{aligned}$$

i.e,

$$K + \sum_{k=0}^{n-1}\theta\circ(\delta_{k+1}*1)\circ\Delta_{n-k} = \theta\circ\sum_{k=0}^{n+1}k(\Delta_k * \Delta_{n+1-k}) - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0,k\ne n}^{r}\theta\circ(\delta_{k+1}*1)\circ(\Delta_{r-k} * \Delta_{n-r})\,.$$

现在，在$k = t+1$ 处代入K的第一个求和项，得到

$$\begin{aligned}
K + \sum_{k=0}^{n-1}\theta\circ(\delta_{k+1}*1)\circ\Delta_{n-k} &= \theta\circ\sum_{t=0}^{n}(t+1)(\Delta_{t+1} * \Delta_{n-t}) - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0,k\ne n}^{r}\theta\circ(\delta_{k+1}*1)\circ(\Delta_{r-k} * \Delta_{n-r})\\
&= \theta\circ\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)(\Delta_{t+1} * \Delta_{n-t}) - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0,k\ne n}^{r}\theta\circ(\delta_{k+1}*1)\circ(\Delta_{r-k} * \Delta_{n-r})\\
&\quad + (n+1)\theta\circ(\Delta_{n+1}*1). && (2.10)
\end{aligned}$$

通过交换复合律，我们注意到 $(\delta_{k+1} * 1) \circ (\Delta_{r-k} * \Delta_{n-r}) = (\delta_{k+1} \circ \Delta_{r-k}) * (1 \circ \Delta_{n-r})$。此外，由于 $0 \leq r+1 \leq n$，根据归纳法可得 $(r+1)\Delta_{r+1} = \sum_{k=0}^{r} \delta_{k+1} \circ \Delta_{r-k}$。因此，我们得到$k \neq n$

$$\begin{aligned} K + \sum_{k=0}^{n-1} \theta \circ (\delta_{k+1} * 1) \circ \Delta_{n-k} &= \theta \circ \sum_{r=0}^{n-1} \Big[(r+1)\Delta_{r+1} - \sum_{k=0, k\neq n}^{r} \delta_{k+1} \circ \Delta_{r-k} \Big] * \Delta_{n-r} + (n+1)\theta \circ (\Delta_{n+1} * 1) \\ &= (n+1)\theta \circ (\Delta_{n+1} * 1). \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} K &= (n+1)\theta \circ (\Delta_{n+1} * 1) - \sum_{k=0}^{n-1} \theta \circ (\delta_{k+1} * 1) \circ \Delta_{n-k} \\ &= (n+1)\theta \circ (\Delta_{n+1} * 1) - \sum_{k=0}^{n-1} \theta \circ (\delta_{k+1} \circ \Delta_{n-k}) * 1 \qquad \text{（由复合律的交换性）} \\ &= \theta \circ \Big[(n+1)(\Delta_{n+1} * 1) - \sum_{k=0}^{n-1} (\delta_{k+1} \circ \Delta_{n-k}) * 1 \Big] \\ &= \theta \circ \Big[\Big((n+1)\Delta_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} (\delta_{k+1} \circ \Delta_{n-k}) \Big) * 1 \Big] \\ &= \theta \circ (\delta_{n+1} * 1) \, . \end{aligned}$$

类似地，可以证明 $L = \theta \circ (1 * \delta_{n+1})$。因此

$$\delta_{n+1} \circ \theta = K + L = \theta \circ (1 * \delta_{n+1} + \delta_{n+1} * 1).$$

也就是说，δ_{n+1} 是T上的一个导子。证明完毕。 □

推论 2.8. 设 $\mathscr{C}$为一个$\mathfrak{F}$-线性范畴，且$(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是 $\mathscr{C}$上的一个 n 阶高阶微分单子。那么，存在一个 T 上的普通导子序列 $\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$，使得

$$(i+1)\Delta_{i+1} = \sum_{k=0}^{i} \delta_{k+1} \circ \Delta_{i-k}$$

对每个 $0 \leq i < n$,

例 2.9. 设$(T, \theta, \zeta, \delta)$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 上的一个微分单子。则集合 $\Delta = \{\Delta_n = {}^{\delta^n}{}_{n!}\}_{n=1}^{\infty} with \Delta_0 = Id_T$ 是 T 上的一个高阶导子。

例 2.10. 设$(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是 $\mathscr{C}$ 上 n 阶的高阶微分单子。对于任意 $1 \leq k \leq n$，考虑以下自然变换序列

$$\Delta'_t = \begin{cases} Id_T & if\, t = 0, \\ 0 & if\, k \nmid t, \\ \Delta_s & if\, t = ks. \end{cases}$$

那么，$\Delta' = \{\Delta_t\}_{t=0}^{n}$ 是 T 上的 n 阶高阶导子。

例 2.11。 设 (T, θ, ζ) 是定义在 $\mathscr{C}$ 上的单子。由 [1, 例 3.2] 可知，对于一个固定的自然变换 $\mu : 1_{\mathscr{C}} \longrightarrow T$，$\delta = \theta \circ (\mu_T - T\mu)$ 是 T 上的一个普通导子。现在我们定义

$$\Delta_n = \begin{cases} Id & for\ n = 0, \\ \delta & for\ n = 1, \\ \Delta_n = \theta^{n-2} \circ (\mu^{n-1} * \delta) & for\ all\ n \geq 2, \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $\theta_M^{n-2} = \theta_M \circ \theta_{TM} \circ \ldots \theta_{T^{n-2}M}$ 和 $\mu^{n-1} = \mu * \mu * \ldots * \underbrace{\mu}_{n-1}$.

注意，对于所有 $n \geq 2$，我们都有

$$\begin{aligned} (\Delta_n)_M &= \theta_M^{n-2} \circ (\mu^{n-1} * \delta)_M \\ &= \theta_M \circ \theta_{TM} \circ \ldots \circ \theta_{T^{n-2}M} \circ (\mu^{n-1} * \delta)_M \\ &= \theta_M \circ T\theta_M \circ \ldots \circ T\theta_{T^{n-3}M} \circ (\mu * (\mu^{n-2} * \delta))_M && (\theta_M \circ \theta_{TM} = \theta_M \circ T\theta_M) \\ &= \theta_M \circ T(\theta_M \circ \ldots \circ \theta_{T^{n-3}M}) \circ \mu_{T^{n-1}M} \circ (\mu^{n-2} * \delta)_M && (\text{取 } \nu_M = \theta_M \circ \ldots \circ \theta_{T^{n-3}M} \colon T^{n-1}M \longrightarrow T^2M) \\ &= \theta_M \circ \mu_{TM} \circ (\theta_M \circ \theta_{TM} \circ \ldots \circ \theta_{T^{n-3}M}) \circ (\mu^{n-2} * \delta)_M && (T\nu_M \circ \mu_{T^{n-1}M} = \mu_{TM} \circ \nu_M) \\ &= \theta_M \circ \mu_{TM} \circ (\Delta_{n-1})_M, && (2.12) \end{aligned}$$

其中，最后一个等式源于 μ 是一个自然变换这一事实。因此，我们可以写成 $\Delta_n = \theta \circ \mu_T \circ \Delta_{n-1}$。现在我们证明 $\Delta = \{\Delta_n \colon T \longrightarrow T\}_{n \geq 0}$ 在 T 上构成一个高阶导子。为此，只需证明下图

$$\begin{array}{ccc} T \circ T & \xrightarrow{1*\Delta_n + \Delta_1 * \Delta_{n-1} + \ldots + \Delta_n * 1} & T \circ T \\ \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ T & \xrightarrow{\Delta_n} & T \end{array} \tag{2.13}$$

对所有 n 都可交换。

对于 $n = 0$，结论显然成立；对于 $n = 1$，结论直接由 [1, 例 32] 得出。现在假设该命题对 $k \leq n - 1$ 成立，并证明它对 $k = n$ 成立。首先注意，对于任意 $1 \leq t \leq n - 1$，我们有

$$\begin{aligned} \theta_M \circ \mu_{TM} \circ \theta_M \circ (\Delta_t * \Delta_{n-t})_M &= \theta_M \circ \mu_{TM} \circ \theta_M \circ (\Delta_t)_{TM} \circ T(\Delta_{n-t})_M \\ &= \theta_M \circ T\theta_M \circ \mu_{TTM} \circ (\Delta_t)_{TM} \circ T(\Delta_{n-t})_M && (\mu_{TM} \circ \theta_M = T\theta_M \circ \mu_{TTM}) \\ &= \theta_M \circ \theta_{TM} \circ \mu_{TTM} \circ (\Delta_t)_{TM} \circ T(\Delta_{n-t})_M && (\theta_M \circ T\theta_M = \theta_M \circ \theta_{TM}) \\ &= \theta_M \circ (\Delta_{t+1})_{TM} \circ T(\Delta_{n-t})_M && (\text{by } (2.11)) \\ &= \theta_M \circ (\Delta_{t+1} * \Delta_{n-t})_M. && (2.14) \end{aligned}$$

此外，我们看到

$$\begin{aligned} &\theta_M \circ T\theta_M \circ \mu_{TTM} \circ T(\Delta_{n-1})_M \\ &= \theta_M \circ T\theta_M \circ \mu_{TTM} \circ T(\Delta_{n-1})_M - \theta_M \circ \theta_{TM} \circ T\mu_{TM} \circ T(\Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ \theta_{TM} \circ T\mu_{TM} \circ T(\Delta_{n-1})_M \\ &= \theta_M \circ \theta_{TM} \circ (\mu_{TTM} - T\mu_{TM}) \circ T(\Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ T\theta_M \circ T\mu_{TM} \circ T(\Delta_{n-1})_M \\ &= \theta_M \circ (\Delta_1)_{TM} \circ T(\Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ T\theta_M \circ T\mu_{TM} \circ T(\Delta_{n-1})_M. && (2.15) \end{aligned}$$

最后，对于 $k = n$，我们得到

$$\begin{aligned} (\Delta_n \circ \theta)_M &= (\theta \circ \mu_T \circ \Delta_{n-1})_M \circ \theta_M && (\text{by}(2.11)) \\ &= \theta_M \circ \mu_{TM} \circ (\Delta_{n-1})_M \circ \theta_M \\ &= \theta_M \circ \mu_{TM} \circ \theta_M \circ (1 * \Delta_{n-1} + \Delta_1 * \Delta_{n-2} + \ldots + \Delta_{n-1} * 1)_M && (\text{by induction}) \\ &= \theta_M \circ \mu_{TM} \circ \theta_M \circ (1 * \Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ \mu_{TM} \circ \theta_M \circ (\Delta_1 * \Delta_{n-2})_M + \ldots + \theta_M \circ \mu_{TM} \circ \theta_M \circ (\Delta_{n-1} * 1)_M \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta_M \circ \mu_{TM} \circ \theta_M \circ (1 * \Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ (\Delta_2 * \Delta_{n-2})_M + \ldots + \theta_M \circ (\Delta_n * 1)_M && \text{(by (2.14))}\\
&= \theta_M \circ \mu_{TM} \circ \theta_M \circ T(\Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ (\Delta_2 * \Delta_{n-2})_M + \ldots + \theta_M \circ (\Delta_n * 1)_M \\
&= \theta_M \circ T\theta_M \circ \mu_{TTM} \circ T(\Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ (\Delta_2 * \Delta_{n-2})_M + \ldots + \theta_M \circ (\Delta_n * 1)_M && (\mu_{TM} \circ \theta_M = T\theta_M \circ \mu_{TTM})\\
&= \theta_M \circ (\Delta_1)_{TM} \circ T(\Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ \theta_{TM} \circ T\mu_{TM} \circ T(\Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ (\Delta_2 * \Delta_{n-2})_M + \ldots + \theta_M \circ (\Delta_n * 1)_M && \text{(by2.15)}\\
&= \theta_M \circ (\Delta_1 * \Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ T\theta_M \circ T\mu_{TM} \circ T(\Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ (\Delta_2 * \Delta_{n-2})_M + \ldots + \theta_M \circ (\Delta_n * 1)_M && (\theta_M \circ T\theta_M = \theta_M \circ \theta_{TM})\\
&= \theta_M \circ (\Delta_1 * \Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ T(\Delta_n)_M + \theta_M \circ (\Delta_2 * \Delta_{n-2})_M + \ldots + \theta_M \circ (\Delta_n * 1)_M && \text{(by (2.11))}\\
&= \theta_M \circ (\Delta_1 * \Delta_{n-1})_M + \theta_M \circ (1 * \Delta_n)_M + \theta_M \circ (\Delta_2 * \Delta_{n-2})_M + \ldots + \theta_M \circ (\Delta_n * 1)_M \\
&= \theta_M \circ (1 * \Delta_n + \Delta_1 * \Delta_{n-1} + \ldots + \Delta_n * 1)_M.
\end{aligned}
$$

证明至此完成。

3 单子上的模的高阶导子刻画

本节中，我们在 Eilenberg-Moore 范畴中引入单子上的模的高阶导子概念，并建立一种类似的刻画：如 [3, 定理 55]所述，可用单子上的模上的普通导子来刻画单子上的模的高阶导子。我们首先回顾 [1]中单子上的模的普通导子的定义。

定义 3.1。 [1, 定义 3。5] 设$(T, \theta, \zeta, \delta)$是范畴 $\mathscr{C}$上的一个微分单子，且(M, f_M)是 EM_T中的一个对象。那么，态射 $d : M \longrightarrow M$ $\mathscr{C}$中的一个态射称为 M 上的 δ-导子，当且仅当下图交换：

$$
\begin{array}{ccc}
TM & \xrightarrow{Td+\delta_M} & TM \\
{\scriptstyle f_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\
M & \xrightarrow[d]{} & M
\end{array}
\tag{3.1}
$$

回顾一下，给定环A上的一个 n 阶高阶导子 Ω，M 上的一个 n 阶高阶 Ω-导子是一个态射族 $\Psi := \{\Psi_k : M \longrightarrow M\}^{n}{}_{k=0}$，其中 Ψ_0 是M 上的恒等映射，并且 Ψ_k 满足以下条件：

$$
\begin{aligned}
\Psi_k(am) &= \Omega_0(a)\Psi_k(m) + \Omega_1(a)\Psi_{k-1}(m) + \ldots + \Omega_k(a)\Psi_0(m) \\
&= a\Psi_k(m) + \Omega_1(a)\Psi_{k-1}(m) + \ldots + \Omega_k(a)m
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

对所有 $a \in A$、$m \in M$ 以及所有 $k \geq 0$ （见 [4]）。现在我们证明，A-模上的高阶导子概念自然地延拓为单子上的模上的高阶导子。

定义 3.2。 设 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是 $\mathscr{C}$上的一个 n 阶高阶微分单子，并设 (M, f_M) 是 EM_T中的一个对象。那么，如果下图交换，我们称对象 M 上 $\mathscr{C}$ 中的一族 $D = \{D_i : M \longrightarrow M\}_{i=0}^{n}$ 态射是 M 上的一个 n 阶高阶 Δ-导子

$$
\begin{array}{ccc}
TM & \xrightarrow{TD_i + TD_{i-1}\circ(\Delta_1)_M + \ldots + TD_1 \circ (\Delta_{i-1})_M + (\Delta_i)_M} & TM \\
{\scriptstyle f_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\
M & \xrightarrow{D_i} & M
\end{array}
\tag{3.3}
$$

f或对所有 $i = 0, 1, \ldots\ldots, n$，其中约定 $D_0 = Id_M$ 是 $\mathscr{C}$ 中 M 上的恒等态射。

注3.3。 设（M，f_M）是高阶微分单子（T，θ，ζ，Δ）上的一个模，其阶为 n，且 $D = \{D_i : M \longrightarrow M\}_{i=0}^{n}$ 是一个高阶 Δ导子。对于 $n = 1$，D 是 M 上相对于 Δ_1的普通导子。此外，对于任意 $0 < k \leq n$，集合

$$\bar{D}_k = \{D_i : M \longrightarrow M\}_{i=0}^{k}$$

¯定义了 M 上关于 Δ_k 如备注2.5中所定义的 k 阶高阶导子。因此，M 上的每个 n 阶高阶导子都定义了对所有 $0 < k \leq n$ 的 k 阶高阶导子。

定义3.4。 设 (M, f_M) 是高阶微分单子 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$上的一个模。若态射族 $D = \{D_i : M \longrightarrow M\}_{i=0}^{\infty}$ in $\mathscr{C}$ 满足下图，则称其为 M 上的高阶导子 Δ:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{TD_i+TD_{i-1}\circ(\Delta_1)_M+\ldots+TD_1\circ(\Delta_{i-1})_M+(\Delta_i)_M} & TM \\ {\scriptstyle f_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\ M & \xrightarrow{D_i} & M \end{array} \tag{3.4}$$

对所有 $i \geq 0$ 均交换，并约定 D_0 是 $\mathscr{C}$中 M 上的恒等态射。

现在我们给出单子上的模的高阶导子的刻画。

命题 3.5。 设 $\mathscr{C}$是一个 $\mathfrak{F}$-线性范畴，且 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是 $\mathscr{C}$上的高阶微分单子，其中 Δ 可由 T 上的普通导子族 $\delta = \{\delta_i : T \longrightarrow T\}_{i=1}^{\infty}$ 确定。设 (M, f_M) 是 EM_T中的一个对象，并配备了高阶导子 D。则存在一个由 M 上的普通导子组成的序列 $\{d_i : M \longrightarrow M\}_{i=0}^{\infty}$，使得

$$(n+1)D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} d_{k+1} \circ D_{n-k}$$

对每个 $n \geq 0$。

证明。 我们通过对n归纳法来证明这一结果。由于D_1 是M上的一个普通 δ_1-导子，因此

$$D_1 \circ f_M = f_M \circ (TD_1 + \delta_{1_M}) = f_M \circ (Td_1 + \delta_{1_M}).$$

令$d_1 = D_1$。那么d_1 是一个 δ_1-导 子。因此，当$n = 0$时，结论成立。现在假设对于所有$k \leq n$，结论都成立并证明$n + 1$时结论成立。我们令t

$$d_{n+1} = (n+1)D_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} d_{k+1} \circ D_{n-k}.$$

我们采用与命题 2.7 证明类似的方法，来说明 d_{n+1} 是 δ_{n+1}-导子在 M 上，即下图交换

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Td_{n+1}+(\delta_{n+1})_M} & TM \\ {\scriptstyle f_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\ M & \xrightarrow[d_{n+1}]{} & M \end{array} \tag{3.5}$$

我们看到

$$\begin{aligned} d_{n+1} \circ f_M &= \Big((n+1)D_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} d_{k+1} \circ D_{n-k}\Big) \circ f_M \\ &= (n+1)D_{n+1} \circ f_M - \sum_{k=0}^{n-1} d_{k+1} \circ D_{n-k} \circ f_M \end{aligned}$$

$$= (n+1)f_M \circ \sum_{k=0}^{n+1} TD_k \circ (\Delta_{n+1-k})_M - \sum_{k=0}^{n-1} d_{k+1} \circ f_M \circ \sum_{t=0}^{n-k} TD_t \circ (\Delta_{n-k-t})_M \qquad \text{(by Remark 3.3)}$$

$$= (n+1)f_M \circ \sum_{k=0}^{n+1} TD_k \circ (\Delta_{n+1-k})_M - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-k} d_{k+1} \circ f_M \circ TD_t \circ (\Delta_{n-k-t})_M$$

$$= (k+n+1-k)f_M \circ \sum_{k=0}^{n+1} TD_k \circ (\Delta_{n+1-k})_M - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-k} f_M \circ \Big(Td_{k+1} + \delta_{k+1}\Big) \circ TD_t \circ (\Delta_{n-k-t})_M. \tag{3.6}$$

我们将（3.6）分为以下两部分：

$$L_1 = kf_M \circ \sum_{k=0}^{n+1} TD_k \circ (\Delta_{n+1-k})_M - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-k} f_M \circ Td_{k+1} \circ TD_t \circ (\Delta_{n-k-t})_M \tag{3.7}$$

and

$$L_2 = (n+1-k)f_M \circ \sum_{k=0}^{n+1} TD_k \circ (\Delta_{n+1-k})_M - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-k} f_M \circ \delta_{k+1} \circ TD_t \circ (\Delta_{n-k-t})_M. \tag{3.8}$$

注意，$0 \le t + k \le n$ 且 $k \ne n$。令 $r = t + k$ 代入L_1, 的第二个求和项中，可得

$$\begin{aligned} L_1 &= f_M \circ \sum_{k=0}^{n+1} kTD_k \circ (\Delta_{n+1-k})_M - \sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{r} f_M \circ Td_{k+1} \circ TD_{r-k} \circ (\Delta_{n-r})_M \\ &= (n+1)f_M \circ TD_{n+1} + f_M \circ \sum_{k=0}^{n} kTD_k \circ (\Delta_{n+1-k})_M - \sum_{k=0}^{n-1} f_M \circ Td_{k+1} \circ TD_{n-k} - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{r} f_M \circ Td_{k+1} \circ TD_{r-k} \circ (\Delta_{n-r})_M. \end{aligned} \tag{3.9}$$

进一步，将$k = l + 1$ 代入L_1, 的第二个求和项中，可得

$$\begin{aligned} L_1 &= (n+1)f_M \circ TD_{n+1} + f_M \circ \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)TD_{l+1} \circ (\Delta_{n-l})_M - \sum_{k=0}^{n-1} f_M \circ Td_{k+1} \circ TD_{n-k} - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{r} f_M \circ Td_{k+1} \circ TD_{r-k} \circ (\Delta_{n-r})_M \\ &= f_M\Big((n+1)TD_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} Td_{k+1} \circ TD_{n-k}\Big) + f_M \circ \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)TD_{l+1} \circ (\Delta_{n-l})_M - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{r} f_M \circ Td_{k+1} \circ TD_{r-k} \circ (\Delta_{n-r})_M \\ &= f_M\Big((n+1)TD_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} Td_{k+1} \circ TD_{n-k}\Big) + f_M \circ \sum_{l=0}^{n-1}\Big((l+1)TD_{l+1} - \sum_{k=0}^{l} Td_{k+1} \circ TD_{l-k}\Big) \circ (\Delta_{n-l})_M \\ &= f_M \circ Td_{n+1}. \end{aligned}$$

类似地，可得$L_2 = f_M \circ (\delta_{k+1})_M$。因此，可得$d_{n+1} \circ f_M = f_M \circ (Td_{n+1} + (\delta_{k+1})_M)$。 □

推论 3.6. 设 $\mathscr{C}$为一个$\mathfrak{F}$-线性范畴，且$(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个 n 阶高阶微分单子，其中 Δ 可由 T 上的普通导子族 $\delta = \{\delta_i : T \longrightarrow T\}_{i=0}^{n}$ 确定。设(M, f_M) 是 EM_T 中的一个对象，其上赋有一个定义在 M 上的 n 阶高阶 Δ-导子 D。那么，存在 M 上普通导子的一个序列 $\{d_i : M \longrightarrow M\}_{i=0}^{n}$，满足 $d_0 = Id_M$，使得

$$(i+1)D_{i+1} = \sum_{k=0}^{i} D_{k+1} \circ d_{i-k}$$

对每个 $0 \le i < n$。

例3.7。 设 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是例2.9中定义的高阶微分单子。若 $(M, f_M) \in EM_T$， 且 $d : M \longrightarrow M$ 是 M 上的普通 δ-导子，则 $D = \{D_n = d^n n!\}_{n\geq 0}$ 是 M 上的高阶 Δ-导子。

例*3.8*。考虑例 *2.11* 中定义的高阶微分单子 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$。由 [1, 例3.6], 可知，对于一个模 $(M, f_M) \in EM_T$， $d = f_M \circ \mu_M$ 是一个普通的 δ-导子。我们定义 $D = \{D_n : M \longrightarrow M\}_{n\geq 0}$ 为

$$D_n = \begin{cases} Id & for\ n = 0, \\ d & for\ n = 1, \\ d^n & for\ all\ n \geq 2. \end{cases} \tag{3.10}$$

现在我们证明 $D = \{D_n\}_{n\geq 0}$ 是 M 上的一个高阶 Δ-导子。为此，只需证明下列图表 m

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{TD_i + TD_{i-1}\circ(\Delta_1)_M + \ldots + TD_1\circ(\Delta_{i-1})_M + (\Delta_i)_M} & TM \\ \downarrow{\scriptstyle f_M} & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\ M & \xrightarrow{D_i} & M \end{array} \tag{3.11}$$

对所有 $i \geq 1$。均交换。

当 $n = 0$ 时，结论显然成立；当 $n = 1$ 时，结论直接由 [1, 例3.6] 得出。现在假设该命题对所有 $i < n$ 均成立。那么当 $i = n$ 时，我们有

$$\begin{aligned} D_n \circ f_M &= D_1^n \circ f_M \\ &= D_1 \circ D_{n-1} \circ f_M && (D_i = D_1^i) \\ &= D_1 \circ f_M \circ (TD_{n-1} + TD_{n-2} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + (\Delta_{n-1})_M) && \text{(by induction)} \\ &= f_M \circ (TD_1 + (\Delta_1)_M) \circ (TD_{n-1} + TD_{n-2} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + (\Delta_{n-1})_M) \\ &= f_M \circ TD_1 \circ (TD_{n-1} + TD_{n-2} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + (\Delta_{n-1})_M) + f_M \circ (\Delta_1)_M \circ (TD_{n-1} + TD_{n-2} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + (\Delta_{n-1})_M) \\ &= f_M \circ (TD_n + TD_{n-1} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + TD_1 \circ (\Delta_{n-1})_M) + f_M \circ (\Delta_1)_M \circ (TD_{n-1} + TD_{n-2} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + (\Delta_{n-1})_M). \end{aligned} \tag{3.12}$$

注意，对于所有 $1 \leq k \leq n$，我们都有

$$\begin{aligned} f_M \circ (\Delta_1)_M \circ TD_{n-k} \circ (\Delta_{k-1})_M &= f_M \circ \theta_M \circ (\mu_T - T\mu)_M \circ TD_{n-k} \circ (\Delta_{k-1})_M \\ &= f_M \circ \theta_M \circ \mu_{TM} \circ TD_{n-k} \circ (\Delta_{k-1})_M - f_M \circ Tf_M \circ T\mu_M \circ TD_{n-k} \circ (\Delta_{k-1})_M \\ &\qquad (f_M \circ \theta_M = f_M \circ Tf_M) \\ &= f_M \circ \theta_M \circ \mu_{TM} \circ (\Delta_{k-1})_M \circ TD_{n-k} - f_M \circ TD_1 \circ TD_{n-k} \circ (\Delta_{k-1})_M \\ &\qquad (TD_{n-k} \circ (\Delta_{k-1})_M = (\Delta_{k-1})_M \circ TD_{n-k}) \\ &= f_M \circ (\Delta_k)_M \circ TD_{n-k} - f_M \circ TD_{n-k+1} \circ (\Delta_{k-1})_M \qquad (\theta_M \circ \mu_{TM} \circ (\Delta_{k-1}) = (\Delta_k)_M) \\ &= f_M \circ TD_{n-k} \circ (\Delta_k)_M - f_M \circ TD_{n-k+1} \circ (\Delta_{k-1})_M. \end{aligned} \tag{3.13}$$

因此，方程（*3.12*）的第二个求和项为

$$\begin{aligned} & f_M \circ (\Delta_1)_M \circ (TD_{n-1} + TD_{n-2} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + (\Delta_{n-1})_M) \\ &= f_M \circ (\Delta_1)_M \circ TD_{n-1} + f_M \circ (\Delta_1)_M \circ TD_{n-2} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + f_M \circ (\Delta_1)_M \circ (\Delta_{n-1})_M \\ &= f_M \circ TD_{n-1} \circ (\Delta_1)_M + f_M \circ TD_{n-2} \circ (\Delta_2)_M - f_M \circ TD_{n-1} \circ (\Delta_1)_M && \text{(by (3.13))} \\ &\quad + f_M \circ TD_{n-3} \circ (\Delta_3)_M - f_M \circ TD_{n-2} \circ (\Delta_2)_M + \ldots + f_M \circ (\Delta_n)_M - f_M \circ TD_1 \circ (\Delta_{n-1})_M \\ &= f_M \circ (\Delta_n)_M. \end{aligned} \tag{3.14}$$

最后，将(3.14)代入(3.12)，得到

$$D_n \circ f_M = f_M \circ (TD_n + TD_{n-1} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + TD_1 \circ (\Delta_{n-1})_M + (\Delta_n)_M).$$

例如，若 $n = 3$,则我们得到

$$\begin{aligned}
D_3 \circ f_M &= D_1^3 \circ f_M \\
&= D_1 \circ D_2 \circ f_M && (D_i = D_1^i) \\
&= D_1 \circ f_M \circ (TD_2 + TD_1 \circ (\Delta_1)_M + \ldots + (\Delta_2)_M) && \text{(by induction)} \\
&= f_M \circ (TD_1 + (\Delta_1)_M) \circ (TD_2 + TD_1 \circ (\Delta_1)_M + (\Delta_2)_M) \\
&= f_M \circ TD_1 \circ (TD_2 + TD_2 \circ (\Delta_1)_M + (\Delta_1)_M) + f_M \circ (\Delta_1)_M \circ (TD_2 + TD_1 \circ (\Delta_1)_M + (\Delta_2)_M) \\
&= f_M \circ (TD_3 + TD_2 \circ (\Delta_1)_M + TD_1 \circ (\Delta_2)_M) + f_M \circ (\Delta_1)_M \circ (TD_2 + TD_1 \circ (\Delta_1)_M + (\Delta_2)_M). && (3.15)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&f_M \circ (\Delta_1)_M \circ (TD_2 + TD_1 \circ (\Delta_1)_M + (\Delta_2)_M) \\
&= f_M \circ (\Delta_1)_M \circ TD_2 + f_M \circ TD_1 \circ (\Delta_2)_M - f_M \circ TD_2 \circ (\Delta_1)_M + f_M \circ (\Delta_3)_M - f_M \circ TD_1 \circ (\Delta_2)_M && \text{(by(3.13))} \\
&= f_M \circ (\Delta_3)_M. && ((\Delta_1)_M \circ TD_2 = TD_2 \circ (\Delta_1)_M)
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$D_3 \circ f_M = f_M \circ (TD_3 + TD_2 \circ (\Delta_1)_M + TD_1 \circ (\Delta_2)_M + (\Delta_3)_M).$$

4 高阶微分挠理论

本节中，我们建立单子的 Eilenberg-Moore 范畴中高阶微分挠理论的框架。在本节中，假设 $\mathscr{C}$ 是一个 Grothendieck 范畴，且 $\{G_i\}_{i\in\Lambda}$ 是 $\mathscr{C}$的一族有限生成投射生成元。我们先回顾 [17] 和 [25]中的若干预备定义。

定义 4.1。 *([25, §1.1])* 设 $\mathscr{D}$是一个阿贝尔范畴。若一对全子范畴 $\tau = (\mathscr{T}, \mathscr{F})$ 属于 $\mathscr{D}$，且对于任意 $M \in \mathscr{T}$和 $N \in \mathscr{F}$，都有 $\mathscr{D}(M, N) = 0$；并且对于任意 $M \in \mathscr{D}$，存在 $M' \in \mathscr{T}$和 $M'' \in \mathscr{F}$，使得有如下短正合序列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

在 $\mathscr{D}$中。 此外，若挠理论 $\tau = (\mathscr{T}, \mathscr{F})$ 的挠类 $\mathscr{T}$对取子对象封闭，则称其为遗传的。

定义 4.2。 （见 [17, 命题 3.2 与命题 3。3]）设 $\mathscr{C}$ 为一个 *Grothendieck* 范畴，并设 $\{G_i\}_{i\in\Lambda}$ 为 $\mathscr{C}$的一族有限生成投射生成元。*Gabriel* 滤子族是满足以下条件的集合 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_{G_i}\}_{i\in\Lambda}$：

i）对于每个 $i \in \Lambda$， $\mathcal{L}_{G_i}$ 由 G_i 的子对象组成。特别地， $\mathcal{L}_{G_i} \neq \varnothing$ 作为 $G_i \in \mathcal{L}_{G_i}$。
ii）如果 $I \subseteq J \subseteq G_i$ 且 $I \in \mathcal{L}_{G_i}$， 则 $J \in \mathcal{L}_{G_i}$。
iii）对于 $\mathscr{C}$ 中的任意态射 g： $G_i \longrightarrow G_j$ 以及所有 $I \in \mathcal{L}_{G_j}$， 均有 $g^{-1}(I) \in \mathcal{L}_{G_i}$。
iv）如果 $I \subseteq J \in \mathcal{L}_{G_j}$， 使得对于每个 g： $G_i \longrightarrow J \subseteq G_j$ （在 $\mathscr{C}$ 中），都有 $g^{-1}(I) \in \mathcal{L}_{G_i}$， 则 $I \in \mathcal{L}_{G_j}$。

对于 Grothendieck 范畴 $\mathscr{C}$，我们从（参见 [17, §3],[1, §2.2]）得知， $\mathscr{C}$ 上的遗传挠理论 $\tau = (\mathscr{T}, \mathscr{F})$ 与 $\mathscr{C}$ 中的 Gabriel 滤子 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_{G_i}\}_{i\in\Lambda}$ 之间存在一一对应关系，如下所示：

$$I \in \mathscr{L}_{G_i} \Leftrightarrow G_i/I \in \mathscr{T}\ . \tag{4.1}$$

我们现在回顾 [1]中的以下结果。

命题 4.3. [1, 命题 2。2] 设 $\mathscr{C}$ 为一个 *Grothendieck* 范畴，且 $\{G_i\}_{i\in\Lambda}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一族有限生成投射生成元。设 (T,θ,ζ) 是 $\mathscr{C}$ 上的一个单子，它是正合的并且保持余极限。那么 EM_T 是一个 *Grothendieck* 范畴，并且 $\{TG_i\}_{i\in\Lambda}$ 给出 EM 的一族有限生成投射生成元$_T$。

定义 4.4。（参见 [1, 定义 3。3]）设 (T,θ,ζ,δ) 是 $\mathscr{C}$ 上的一个单子，且 T 正合并保持余极限。那么，EM_T 上的一族 *Gabriel* 滤子 $\mathcal{L}=\{\mathcal{L}_{TG_j}\}_{j\in\Lambda}$ 称为 δ-不变的，如果对于每个 $j\in\Lambda$ 和 $I\in\mathcal{L}_{TG_j}$，都存在某个 $J\in\mathcal{L}_{TG_j}$，使得 $\delta_{G_j}(J)\subseteq I$。

设 $\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ 是 EM_T 上的一个遗传挠理论，且 $M\in EM_T$。我们回顾 [1, §3] 中的结果：M 的挠子对象为

$$M_\tau:=\sum_{N\in|M_\tau|}N,$$

其中 $|M_\tau|=\{N\subseteq M|\ker(g:TG_i\longrightarrow N)\in\mathcal{L}_{TG_i},\ \text{对于所有 } g\in EM_T(TG_i,N) \text{ 以及所有 } i\in\Lambda\}$ 均成立。于是，我们得到 [1] 给出的以下定义。

定义 4.5。（参见 [1, 定义 3。7]）设 (T,θ,ζ,δ) 是 $\mathscr{C}$ 上的一个微分单子，且 $\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ 是 EM_T 上的一个遗传挠理论。若对于任意对象 $(M,f_M)\in EM_T$ 以及 M 上任意一个 δ-导子 d，均有 $d(M_\tau)\subseteq M_\tau$，则称 $\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ 是微分的。

我们在高阶导子的语境下将这些定义推广如下。

定义 4.6. 设 (T,θ,ζ,Δ) 是 $\mathscr{C}$ 上的一个 n 阶高阶微分单子，且 T 是正合的并保持余极限。那么，若对每个 $j\in\Lambda$ 和 $I\in\mathcal{L}_{TG_j}$，都存在某个 $J\in\mathcal{L}_{TG_j}$ 使得对所有 $i=0,1,\ldots,n.$，$(\Delta_i)^{G_j}(J)\subseteq I$，则称 EM_T 上的 *Gabriel* 滤子族 $\mathcal{L}=\{\mathcal{L}_{TG_j}\}_{j\in\Lambda}$ 是 Δ不变的，且阶为 n。

定义 *4.7.* 设 (T,θ,ζ,Δ) 是 $\mathscr{C}$ 上的一个 n 阶高阶微分单子，且 T 是正合的并保持余极限；设 $\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ 是 EM_T 上的一个遗传挠理论。那么，若对任意对象 $(M,f_M)\in EM_T$ 以及 M 上任意一个 n 阶高阶 Δ-导子 D，在所有 $i=0,1,\ldots,n$ 时均有 $D_i(M_\tau)\subseteq M_\tau$，则称 $\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ 是 n 阶高阶微分的。

我们注意到，上述概念可以自然地推广到无限阶情形。更确切地说，对于 $\mathscr{C}$ 上的高阶微分单子 (T,θ,ζ,Δ)，EM_T 上的一族 Gabriel 滤子 $\mathcal{L}=\{\mathcal{L}_{TG_j}\}_{j\in\Lambda}$ 若满足：对每个 $j\in\Lambda$ 和 $I\in\mathcal{L}_{TG_j}$，都存在某个 $J\in\mathcal{L}_{TG_j}$，使得对所有 $i\geq 0$，$(\Delta_i)^{G_j}(J)\subseteq I$，则称其为 Δ-不变的。类似地，若 EM_T 上的遗传挠理论 $\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ 满足：对于任意对象 $(M,f_M)\in EM_T$ 以及 M 上任意高阶 Δ-导子 D，都有 $D_i(M_\tau)\subseteq M_\tau$，对所有 $i\geq 0$ 均成立，则称其为高阶微分的。

定理 4.8。设 (T,θ,ζ,Δ) 是 $\mathscr{C}$ 上一个 n 阶高阶微分单子，它是正合的且保持余极限；设 τ 是 EM_T 上的一个遗传挠理论。那么以下陈述等价。

i) 与 τ 对应的每个 *Gabriel* 滤子都是 Δ-不变的 n 阶滤子。

ii) τ 是 n 阶高阶微分挠理论。

iii) 对任意 $(M,f_M)\in EM_T$、任意 n 阶高阶 Δ-导子 D、任意子模 $N\subseteq M_\tau$，以及任意 $j\in\{0,\ldots,n\}$，存在 $K\in\mathcal{L}_{TG_i}$ 使得 $(\Delta_j)^{G_i}(K)\subseteq\ker(TG_i\to N)$。

iv) 对任意 $(M,f_M)\in EM_T$、M 上任意 n 阶高阶 Δ-导子 D，以及任意 $N\subseteq M_\tau$，存在 $K\in\mathcal{L}_{TG_i}$ 使得 $(\Delta_j)^{G_i}(K)\subseteq\ker(TG_i\to N)$，对所有 $j=0,1,\ldots,n$ 均成立。

证明。*i)* $\Longrightarrow$ *ii)*。令 $\mathcal{L}=\{\mathcal{L}_{TG_i}\}$ 为与 τ 对应的 Gabriel 滤子，并且 $(M,f_M)\in EM_T$。令 $D:M\longrightarrow M$ 为 M 上的一个 Δ-高阶导子，其阶为 n，且 $N\in|M_\tau|$。为证明 τ 是 n阶高阶微分挠理论，我们将对 n 使用归纳法。对于 $n=0$，证明显然。我们假设该命题对 $p=0$、1、$\ldots$、$n-1$ 成立，并证明它对 $p=n$ 成立。

我们考虑 EM_T 中的一个态射 $g:G_i\longrightarrow D_nN$，并证明 $\ker(g)\in\mathcal{L}_{TG_i}$。与 g 对应的态射为 $\tilde{g}:TG_i\xrightarrow{\zeta_{G_i}}TG_i\,g\to D_nN$，属于 $\mathscr{C}$。令 $\tilde{D}_n:N\longrightarrow D_nN$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个满态射，且 $i_n:D_nN\longrightarrow M$ 是 EM_T 中的一个单态射。

于是，我们有 $i_n \circ \tilde{D}_n = D_n \circ i$。由于 G_i 是投射的，存在一个态射 $\tilde{h}: G_i \longrightarrow N$，属于 $\mathscr{C}$，使得 $\tilde{D}_n \circ \tilde{h} = \tilde{g} = g \circ \zeta_{G_i}$。令 $h: TG_i \xrightarrow{T\tilde{h}} TN_f \xrightarrow{N} N$ 为与 h 在 EM_T 中对应的态射。我们设

$$H = \cap\{\ker(TG_i \longrightarrow D_p N)\}_{p=0}^{n-1} \subseteq \ker(h).$$

由于对于所有 $p = 1、2 \ldots、n-1$，$D_p N \in |M_\tau|$，显然有 $H \in \mathcal{L}_{TG_i}$。由 (i) 可知，存在一个对象 $J \in \mathcal{L}_{TG_i}$，使得对于所有 $t = 0、\ldots、n$</style}，$()(f) \subseteq H$。令 $I = H \cap J$。由下列交换图

$$\begin{array}{ccccc} TG_i & \xrightarrow{Ti \circ T\tilde{h}} & TM & \xrightarrow{TD_n + TD_{n-1} \circ (\Delta_1)_M + \cdots + (\Delta_n)_M} & TM \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_M} & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\ & & M & \xrightarrow{D_n} & M, \end{array}$$

可得

$$D_n \circ f_M \circ Ti \circ T\tilde{h}(I) = f_M \circ TD_n \circ Ti \circ T\tilde{h}(I) + \sum_{k=1}^{n-1} f_M \circ TD_k \circ (\Delta_{n-k})_M \circ Ti \circ T\tilde{h}(I) + f_M \circ (\Delta_n)_M \circ Ti \circ T\tilde{h}(I)\,. \tag{4.2}$$

注意到

$$\begin{aligned} D_n \circ f_M \circ Ti \circ T\tilde{h}(I) &= D_n \circ i \circ f_N \circ T\tilde{h}(I) && (f_M \circ Ti = i \circ f_N) \\ &= D_n \circ i \circ h(I) && (f_N \circ T\tilde{h} = h) \\ &= 0\,. && (\text{since } I \subseteq \ker(h)) \end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned} f_M \circ (\Delta_n)_M \circ Ti \circ T\tilde{h}(I) &= f_M \circ Ti \circ (\Delta_n)_N \circ T\tilde{h}(I) && ((\Delta_i)_M \circ Ti = Ti \circ (\Delta_i)_N) \\ &= i \circ f_N \circ T\tilde{h}((\Delta_n)_{G_i}(I)) && ((\Delta_n)_N \circ T\tilde{h} = T\tilde{h} \circ (\Delta_n)_{G_i}) \\ &= i \circ h((\Delta_n)_{G_i}(I)) && (f_N \circ T\tilde{h} = h) \\ &= 0_\circ && ((\Delta_n)_{G_i}(I) \subset H \subseteq \ker(h)) \end{aligned}$$

此外，由于 $f_M \circ TD_k \circ (\Delta_{n-k})_M \circ Ti \circ Th: TG_i \longrightarrow D_k N$ 是 EM_T 中的一个态射，且 $(\Delta_{n-k})_{G_i}(I) \subseteq H$，我们注意到，对于任意 $0 < k <$ n</style},

$$f_M \circ TD_k \circ (\Delta_{n-k})_M \circ Ti \circ T\tilde{h}(I) = f_M \circ TD_k \circ Ti \circ T\tilde{h}((\Delta_{n-k})_{G_i}(I)) = 0\,.$$

最后，由（4.2），我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= f_M \circ TD_n \circ Ti \circ T\tilde{h}(I) \\ &= f_M \circ Ti_n \circ T\tilde{D}_n \circ T\tilde{h}(I) && (i_n \circ \tilde{D}_n = D_n \circ i) \\ &= f_M \circ Ti_n \circ Tg \circ T\zeta_{G_i}(I) && (\tilde{D}_n \circ \tilde{h} = g \circ \zeta_{G_i}) \\ &= i_n \circ g \circ \theta_{G_i}(T\zeta_{G_i}(I)) && (f_M \circ Ti_n \circ Tg = i_n \circ g \circ \theta_{G_i}) \\ &= i_n \circ g(I)\,. && (\theta_{G_i} \circ T\zeta_{G_i} = 1_{TG_i}) \end{aligned}$$

由于 i_n 是单态射，$g(I) = 0$。因此 $I \subseteq \ker(g)$。进一步，由于 $I \in \mathcal{L}_{TG_i}$，根据定义 4.2 的性质 (ii)，我们得到 $\ker(g) \in \mathcal{L}_{TG_i}$。这证明了 $D_n N \in |M_\tau|$。

ii) $\Longrightarrow$ iii)。设 $N \in |M_\tau|$，且 $g: TG_i \longrightarrow N$ 是 EM_T 中的一个态射。设 $\hat{g}: G_i \longrightarrow N$ 是由 $\hat{g} = g \circ \zeta_{G_i}$ in $\mathscr{C}$ 给出的对应态射。现在我们对 n 进行归纳法。对于 $n = 0$，令 $K = \ker(g) \in \mathcal{L}_{TG_i}$。那么 $(\Delta_0)_{G_i}(K) = K \subseteq \ker(g)$。因此，$n = 0$ 时该命题成立。现在假设对于所有 $t < n$，该命题均成立，并证明它对 $t = n$ 也成立。

由于 τ 是阶为n的高阶微分挠理论，由$(i) \implies (ii)$的证明可知，对于所有$j = 0$、1、. . . 、n，都有$D_jN \in |M_\tau|$。因此，通过归纳法，存在一个对象$K_{tj} \in \mathcal{L}_{TG_i}$，使得对于所有<style id="t ">n 以及所有$j \leq n$，都有$(\Delta_t)_{G_i}(K_{tj}) \subseteq \ker(TG_i \longrightarrow D_jN)$。令

$$K = \bigcap_{\substack{t<n \\ j\leq n}} K_{tj} \cap \ker(TG_i \longrightarrow D_nN). \tag{4.3}$$

由于$D_nN \in |M_\tau|$，$K \in \mathcal{L}_{TG_i}$。W e 现在证明 $(\Delta_n)_{G_i}(K) \subseteq \ker(g)$。为此，我们考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} TG_i & \xrightarrow{Ti\circ T\hat{g}} & TM & \xrightarrow{TD_n+TD_{n-1}\circ(\Delta_1)_M+\cdots+(\Delta_n)_M} & TM \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_M} & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\ & & M & \xrightarrow{D_n} & M\,, \end{array}$$

也就是说，我们
有

$$D_n \circ f_M \circ Ti \circ T\hat{g}(K) = f_M \circ TD_n \circ Ti \circ T\hat{g}(K) + \sum_{k=1}^{n-1} f_M \circ TD_k \circ (\Delta_{n-k})_M \circ Ti \circ T\hat{g}(K) + f_M \circ (\Delta_n)_M \circ Ti \circ T\hat{g}(K). \tag{4.4}$$

注意到

$$\begin{aligned} D_n \circ f_M \circ Ti \circ T\hat{g}(K) &= D_n \circ i \circ f_N \circ T\hat{g}(K) && (f_M \circ Ti = i \circ f_N) \\ &= D_n \circ i \circ g(K) && (f_N \circ T\hat{g} = g) \\ &= 0\,. && (K \subseteq \ker(g)) \end{aligned}$$

此外，对于 $0 < k \leq n$，我们得到

$$\begin{aligned} f_M \circ TD_k \circ (\Delta_{n-k})_M \circ Ti \circ T\hat{g}(K) &= f_M \circ TD_k \circ Ti \circ (\Delta_{n-k})_N \circ T\hat{g}(K) && ((\Delta_{n-k})_M \circ Ti = Ti \circ (\Delta_{n-k})_N) \\ &= f_M \circ TD_k \circ Ti \circ T\hat{g}((\Delta_{n-k})_{G_i}(K)) && ((\Delta_{n-k})_N \circ T\hat{g} = T\hat{g} \circ (\Delta_{n-k})_{G_i}) \\ &= f_M \circ T(D_k \circ i \circ \hat{g})((\Delta_{n-k})_{G_i}(K)) \\ &= (\widetilde{D_k \circ i} \circ \hat{g})((\Delta_{n-k})_{G_i}(K)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式是由以下事实得出的：$D_kN \in |M_\tau|$ 以及 $(\widetilde{\ \ D_k \circ i} \circ \hat{g}) : TG_i \longrightarrow D_kN$ 是EM_T中的一个态射。因此，我们得到

$$\begin{aligned} 0 = f_M \circ (\Delta_n)_M \circ Ti \circ T\hat{g}(K) &= f_M \circ Ti \circ T\hat{g}((\Delta_n)_{G_i}(K)) && ((\Delta_n)_M \circ Ti \circ T\hat{g} = Ti \circ T\hat{g} \circ (\Delta_n)_{G_i}) \\ &= i \circ f_N \circ T\hat{g}((\Delta_n)_{G_i}(K)) && (f_M \circ Ti = i \circ f_N) \\ &= i \circ g((\Delta_n)_{G_i}(K)). && (f_N \circ T\hat{g} = g) \end{aligned}$$

由于i 是单态射，我们得到$g((\Delta_n)_{G_i}(K)) = 0$。这表明$(\Delta_n)_{G_i}(K) \subseteq \ker(g)$。
$iii) \implies iv)$。设$N \in |M_\tau|$。由（iii），对每个$j = 0, 1, \ldots, n$，存在$K_j \in \mathcal{L}_{TG_i}$使得$(\Delta_j)_{G_i}(K_j) \subseteq \ker(TG_i \longrightarrow N)$。现在通过取$K = \bigcap_{0\leq j\leq n} K_j$即可得到证明。
iv) $\implies$ i)。给定 I $\in \mathcal{L}_{TG_i}$，由 (4.1) 可知 $TG_i/I \in \mathcal{T}$。现在，由 (iv)，存在对象 K $\in \mathcal{L}_{TG_i}$ 使得对每个 j $= 0, 1, \ldots,$ n，都有 $(\Delta_j)_{G_i}(K) \subseteq \ker(TG_i \longrightarrow TG_i/I) = I$。这就完成了证明。□

注记 4.9。 注意，定理 4.8 在高阶微分单子 ff的情形下仍然成立 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 作用于 $\mathscr{C}$，其中 T 是正合的且保持余极限，并且 τ 是 EM 上的遗传挠理论$_T$。论证方式与上文给出的证明类似。

5 商模上的高阶导子

我们继续讨论一个 Grothendieck 范畴 $\mathscr{C}$，它具有一族 $\{G_i\}_{i\in\Lambda}$，该族是 $\mathscr{C}$的有限生成投射生成元。令$\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ 为 EM_T上的遗传挠理论，并令 $\mathcal{L}=\{\mathcal{L}_{TG_i}\}_{G_i\in\mathscr{C}}$为与 τ相关联的 Gabriel 滤子族。于是，根据 [11] 可知，对于每个对象（M， f_M） $\in EM_T$，存在一个函子

$$Q_\tau : EM_T \longrightarrow EM_T, \qquad M \longmapsto Q_\tau(M),$$

定义为

$$Q_\tau(M)(TG_i) = \varinjlim_{I\in\mathcal{L}_{TG_i}} EM_T(I, M/M_\tau).$$

对象 $Q_\tau(M)$ 称为 M 的商模。令 $p : M \longrightarrow M/M_\tau$ 表示 EM_T 中的典范满态射。对于 EM_T 中的任意态射 $f\colon TG_i \to M$，由 [11, § 2.2] 可知，存在一个态射

$$\Phi_M : M \longrightarrow Q_\tau(M)$$

在 EM_T 中定义为

$$\Phi_M(TG_i)(f) = \eta_i(p\circ f),$$

其中

$$\eta_i : EM_T(TG_i,\, M/M_\tau) \longrightarrow \varinjlim_{I\in\mathcal{L}_{TG_i}} EM_T(I,\, M/M_\tau)$$

是典范态射。此外，由 [11, §2.2] 可知， Φ 关于 M 是函子性的；也就是说，对于 EM_T 中的任意态射 $g : TG_j \longrightarrow TG_i$，存在一个诱导态射

$$Q_\tau(M)(g) : Q_\tau(M)(TG_i) \longrightarrow Q_\tau(M)(TG_j),$$

使得以下等式成立:

$$Q_\tau(M)(g)\circ\Phi_M(TG_i)(g) = \Phi_M(TG_j)(g)\circ EM_T(-, M)(g). \tag{5.1}$$

由 [11], 我们还知道，$\ker(\Phi_M)$ 和 $\operatorname{coker}(\Phi_M)$ 在 EM_T 中是 τ-挠的。此外，由于 Φ_M 具有函子性，且 $Q_\tau(M)$ $=Q_\tau(M/M_\tau)$，我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\;p\;} & M/M_\tau \\ {\scriptstyle\Phi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi_{M/M_\tau}} \\ Q_\tau(M) & \xrightarrow{\;\cong\;} & Q_\tau(M/M_\tau), \end{array}$$

即，$\Phi_M(M_\tau) = \Phi_{M/M_\tau}\circ p(M_\tau) = 0$，这意味着 $M_\tau \subseteq \ker(\Phi_M)$。因此，$\ker(\Phi_M) = M_\tau$。

在本节中，我们考虑一个 $\mathscr{C}$ 上 n 阶的高阶微分单子 $(\mathrm{T}, \theta, \zeta, \Delta)$，其中 T 是正合的并保持余极限。给定对象 $\mathrm{M} \in \mathrm{EM}_T$ 上的 n 阶高阶 Δ-导子，我们现在将其扩展到商模 $\mathrm{Q}_\tau(\mathrm{M})$。以下假设 τ 是一个 n 阶高阶微分挠理论。那么根据定理 4.8，与τ 对应的 Gabriel 滤子是 n 阶 Δ-不变的。

注 5.1. 请注意，本节中确立的所有结果对于无限阶的高微分单子也仍然成立。因此，我们仅讨论有限阶情形，因为一般情形下的证明完全类似。

引理 5.2. 设 $(M,f_M) \in EM_T$ 是一个无挠模，带有一个阶为 n 的高 Δ-导子 D；设 $f \in Q_\tau(M)(TG_i)$ 是由 $f: I \longrightarrow M$ 表示的态射，其中某个 $I \in \mathcal{L}_{TG_i}$。设 $J \in \mathcal{L}_{TG_i}$ 满足：对所有 $k = 0,1,\ldots,n$，均有 $(\Delta_k)_{G_i}(J) \subseteq I$。令 $K = I \cap J$。定义映射 $D_k f: K \longrightarrow M$ 如下

$$\widetilde{D}_k f(K) = \begin{cases} f(K) & for\ k = 0, \\ D_1 f(K) - f((\Delta_1)_{G_i}(K)) & for\ k = 1, \\ D_k(f(K)) - f((\Delta_k)_{G_i}(K)) - \sum_{\substack{t+j=k \\ t,j>0}} \widetilde{D}_t f\Big((\Delta_j)_{G_i}(K)\Big) & for\ all\ 2 \le k \le n. \end{cases} \tag{5.2}$$

那么，对于每个 $0 \le k \le n$，映射 $D_k f$ 都是 $Q_\tau(M)(TG_i)$ 中的态射。

证明。由于 $(K, f_k) \in \mathcal{L}_{TG_i}$ and$\mathcal{L}_{TG_i}$ is Δ-在 n 阶下不变，存在一个对象 $K' \in \mathcal{L}_{TG_i}$，使得对于所有$0 \le t \le n$，$(\Delta_t)_{G_i}(K') \subseteq K$。现在我们对 n 使用归纳法。注意，当 $n = 0$ 时，$D_0 f = f$，结论显然成立。当 $n = 1$ 时，由于 $(\Delta_1)_{G_i}$是 T 上的普通导子，结论可由 [1, 引理 4.1]直接推出。现在我们证明 $n = 3$ 时的结论。一般情形也可以用类似的方法证明。

为了证明　要证明$D_3 f$ 是$Q_\tau(M)(TG_i)$中的态射，只需证明下图可交换

$$\begin{array}{ccccc} TK' & \xrightarrow{Ti} & TK & \xrightarrow{T(\widetilde{D}_3 f)} & TM \\ \downarrow{\scriptstyle f_{K'}} & & \downarrow{\scriptstyle f_K} & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\ K' & \xrightarrow[i]{} & K & \xrightarrow[\widetilde{D}_3 f]{} & M, \end{array}$$

即,

$$\widetilde{D}_3 f(i(f_{K'}(TK'))) = f_M(T(\widetilde{D}_3 f)(Ti(TK'))) . \tag{5.3}$$

根据（5.2）中的定义，我们有

$$\widetilde{D}_3 f(i(f_{K'}(TK'))) = D_3(f(i(f_{K'}(TK')))) - f((\Delta_3)_{G_i}(i(f_{K'}(TK'))) - \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} \widetilde{D}_t f((\Delta_j)_{G_i}(i(f_{K'}(TK')))). \tag{5.4}$$

我们看到，（5.3）的右端给出

$$\begin{aligned} f_M(T(\widetilde{D}_3 f)(Ti(TK'))) = f_M \circ T((\widetilde{D}_3 f)(i(K'))) &= f_M(T(D_3 f(i(K')) - f((\Delta_3)_{G_i}(i(K'))) - \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} \widetilde{D}_t f(\Delta_j)_{G_i}(i(K')))) \\ &= f_M(T(D_3 f)(Ti(TK'))) - f_M(Tf(T(\Delta_3)_{G_i})(Ti(TK'))) \\ &\quad - f_M \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} T(\widetilde{D}_t f)T(\Delta_j)_{G_i}(Ti(TK')). \end{aligned} \tag{5.5}$$

现在考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} TK' & \xrightarrow{Ti} & TK & \xrightarrow{Tf} & TM & \xrightarrow{TD_3+TD_2\circ(\Delta_1)_M+TD_1\circ(\Delta_2)_M+(\Delta_3)_M} & TM \\ \downarrow{\scriptstyle f_{K'}} & & \downarrow{\scriptstyle f_K} & & \downarrow{\scriptstyle f_M} & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\ K' & \xrightarrow{i} & K & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{D_3} & M, \end{array} \tag{5.6}$$

i.e,

$$D_3(f(i(f_{k'}(TK')))) = f_M \circ (TD_3 + TD_2 \circ (\Delta_1)_M + TD_1 \circ (\Delta_2)_M + (\Delta_3)_M) \circ Tf \circ Ti(TK'). \tag{5.7}$$

代入 $f_M(T(D_3(Tf(Ti(TK')))))$ 到 (5.5) 中，可得

$$f_M(T(\widetilde{D}_3 f)(Ti(TK'))) = D_3(f(i(f_{k'}(TK')))) - f_M \circ (TD_2 \circ (\Delta_1)_M + TD_1 \circ (\Delta_2)_M + (\Delta_3)_M) \circ Tf \circ Ti(TK') - f_M(Tf(T(\Delta_3)_{G_i})(Ti(TK'))) - f_M \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} T(\widetilde{D}_t f) T(\Delta_j)_{G_i}(Ti(TK')). \tag{5.8}$$

由（5.4）和（5.8）可知，只需验证以下方程成立：

$$f((\Delta_3)_{G_i}(i(f_{K'}(TK'))) + \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,\ j>0}} \widetilde{D}_t f(\Delta_j)_{G_i}(i(f_{K'}(TK'))) = f_M(TD_2 \circ (\Delta_{1_M}) + TD_1 \circ ((\Delta_2)_M) + (\Delta_3)_M)(Tf(Ti(TK'))) \tag{5.9}$$

$$+ f_M(Tf(T(\Delta_3)_{G_i}(Ti(TK')))) + f_M\Big(\sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} T(\widetilde{D}_t f) \circ T(\Delta_j)_{G_i}(Ti(TK'))\Big).$$

由于对所有 $t = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ (\Delta_t)_{G_i}(K') \subseteq K$ 和 f_K，$(\Delta_t)_K$ 分别是 θ_{G_i} 和 $(\Delta_t)_{TG_i}$ 的限制，因此我们得到

$$\begin{aligned}(\Delta_k)_{G_i}(i(f_{K'}(TK'))) &= (\Delta_k)_{G_i}(f_k(Ti(TK'))) \\ &= (\Delta_k)_{G_i}(\theta_{G_i}(Ti(TK'))) \\ &= \theta_{G_i}((\Delta_k)_{TG_i} + \ldots + T(\Delta_k)_{G_i})(Ti(TK')) \qquad \text{(by(2.4))} \\ &= f_K((\Delta_k)_{TG_i} + \ldots + T(\Delta_k)_{G_i})(Ti(TK')). \qquad (5.10)\end{aligned}$$

然后，在（**右端**）的（5.9）中，我们看到

$$f_M \circ (TD_2 \circ (\Delta_1)_M + TD_1 \circ (\Delta_2)_M + (\Delta_3)_M) \circ (Tf(Ti(TK'))) + f_M \circ Tf(T(\Delta_3)_{G_i}(Ti(TK'))) + f_M(\sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} T(\widetilde{D}_t f) T(\Delta_j)_{G_i}(Ti(TK')))$$

$$= f_M \circ (TD_2 \circ (\Delta_1)_M + T\ D_1 \circ (\Delta_2)_M) \circ (Tf(Ti(TK'))) + f_M \circ (\Delta_3)_M \circ (Tf(Ti(TK'))) + f_M \circ Tf \circ (T(\Delta_3)_{G_i} \circ (Ti(TK'))$$

$$+ \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,\ j>0}} \widetilde{(D_t f)} \circ f_k \circ T\ (\Delta_j)_{G_i} \circ (Ti\ (TK')), \tag{5.11}$$

其中，最后一个等式成立是因为，对于 t = 1，2，有 $(D_t f) \circ f_k = f_M \circ T(D_t f)$。

另一方面，等式（**LHS**）的左边（5.9）为

$$f((\Delta_3)_{G_i}(i(f_{K'}(TK'))) + \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} \widetilde{D}_t f(\Delta_j)_{G_i}(i(f_{K'}(TK'))) \tag{5.12}$$

$$= f \circ f_K((\Delta_3)_{TG_i} + (\Delta_2)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_2)_{G_i} + T(\Delta_3)_{G_i}) \circ (Ti(TK'))$$

$$+ \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,\ j>0}} \widetilde{(D_t f)} \circ f_K \circ ((\Delta_j)_{TG_i} + (\Delta_{j-1})_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + \ldots\ldots + T(\Delta_j)_{G_i}) \circ (Ti(Tk'))) \qquad \text{(by (5.10))}$$

$$= f \circ f_K((\Delta_3)_{TG_i} + (\Delta_2)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_2)_{G_i} + T(\Delta_3)_{G_i}) \circ (Ti(TK'))$$

$$+ \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,\ j>0}} (\widetilde{D_t f}) \circ f_K((\Delta_j)_{TG_i} + (\Delta_{j-1})_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + \ldots + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_{j-1})_{G_i}) \circ (Ti(TK'))) + \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,\ j>0}} \widetilde{(D_t f)} \circ f_K \circ T\ (\Delta_j)_{G_i} \circ (Ti(TK'))$$

$$= f \circ f_K((\Delta_3)_{TG_i} + (\Delta_2)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_2)_{G_i} + T(\Delta_3)_{G_i}) \circ (Ti(TK'))$$

$$+ \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,\ j>0}} \widetilde{f_M \circ T(D_t f)} \circ ((\Delta_j)_{TG_i} + (\Delta_{j-1})_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + \ldots + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_{j-1})_{G_i}) \circ (Ti(Tk'))) \qquad \text{(by induction)}$$

$$+ \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,\ j>0}} \widetilde{(D_t f)} \circ f_K \circ (T(\Delta_j)_{G_i}) \circ (Ti(TK'))$$

$$
\begin{aligned}
&= f_M \circ Tf \circ ((\Delta_3)_{TG_i} + (\Delta_2)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_2)_{G_i} + T(\Delta_3)_{G_i}) \circ (Ti(TK')) \qquad (f \circ f_K = f_M \circ Tf) \\
&\quad + f_M \circ T(\widetilde{D}_1 f) \circ ((\Delta_2)_{TG_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i}) \circ (Ti(TK')) + f_M \circ T(\widetilde{D}_2 f) \circ (\Delta_1)_{TG_i} \circ (Ti(TK')) \\
&\quad + \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} (\widetilde{D}_t f) \circ f_K \circ (T\Delta_j)_{G_i} \circ (Ti(TK')) \\
&= f_M \circ Tf \circ ((\Delta_3)_{TG_i} + (\Delta_2)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_2)_{G_i} + T(\Delta_3)_{G_i}) \circ (Ti(TK')) \\
&\quad + f_M \circ T\Big(D_1 f - f(\Delta_1)_{G_i}\Big) \circ ((\Delta_2)_{TG_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i}) \circ (Ti(TK')) + f_M \circ T\Big(D_2 f - f(\Delta_2)_{G_i} - \widetilde{D_1} f(\Delta_1)_{G_i}\Big) \circ (\Delta_1)_{TG_i}) \\
&\quad \circ (Ti(TK')) + \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} (\widetilde{D}_t f) \circ f_K \circ T(\Delta_j)_{G_i} \circ (Ti(TK')) \\
&= f_M \circ Tf \circ ((\Delta_3)_{TG_i} + (\Delta_2)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_2)_{G_i} + T(\Delta_3)_{G_i}) \circ (Ti(TK')) \\
&\quad + f_M \circ TD_1 \circ Tf \circ ((\Delta_2)_{TG_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i}) \circ (Ti(TK')) - f_M \circ Tf \circ T(\Delta_1)_{G_i} \circ ((\Delta_2)_{TG_i} \\
&\quad + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i}) \circ (Ti(TK')) + f_M \circ TD_2 \circ Tf \circ (\Delta_1)_{TG_i} \circ (Ti(TK')) - f_M \circ Tf \circ T(\Delta_2)_{G_i} \circ (\Delta_1)_{TG_i} \circ (Ti(TK')) \\
&\quad - f_M \circ T(\widetilde{D_1} f) \circ T(\Delta_1)_{G_i} \circ (\Delta_1)_{TG_i} \circ (Ti(TK')) + \sum_{\substack{t+j=3 \\ t,j>0}} (\widetilde{D}_t f) \circ f_K \circ T(\Delta_j)_{G_i} \circ (Ti(TK')) \\
&= \text{右端} + f_M \circ Tf \circ ((\Delta_2)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_2)_{G_i}) \circ (Ti(TK')) + f_M \circ TD_1 \circ Tf \circ (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} \circ (Ti(TK')) \\
&\quad - f_M \circ Tf \circ T(\Delta_1)_{G_i} \circ ((\Delta_2)_{TG_i} + (\Delta_1)_{TG_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i}) \circ (Ti(TK')) - f_M \circ Tf \circ T(\Delta_2)_{G_i} \circ (\Delta_1)_{TG_i} \circ (Ti(TK')) \\
&\quad - f_M \circ TD_1 \circ Tf \circ T(\Delta_1)_{G_i} \circ (\Delta_1)_{TG_i} \circ (Ti(TK')) + f_M \circ Tf \circ T(\Delta_1)_{G_i} \circ T(\Delta_1)_{G_i} \circ (\Delta_1)_{TG_i} \circ (Ti(TK')) \qquad \text{(by (5.11))} \\
&= \textbf{右侧} + 0_\circ \qquad (\text{作为 } (\Delta_l)_{TG_i} \circ T(\Delta_m)_{G_i} = T(\Delta_m)_{G_i} \circ (\Delta_l)_{TG_i})
\end{aligned}
$$

证明完毕。 □

~ ~因此，根据引理 5.2，存在一个态射族 $D := \{D_k : Q_\tau(M) \longrightarrow Q_\tau(M)\}^n{}_{k=1}$ 于 $\mathscr{C}$ 中定义如下：

$$\widetilde{D}_k(TG_i) : Q_\tau(M)(TG_i) \longrightarrow Q_\tau(M)(TG_i), \qquad f \mapsto \widetilde{D}_k f \tag{5.13}$$

对于$M \in EM_T$ 以及$f \in Q_\tau(M)(TG_i)$。

~ ~引理 *5.3.* 设 $(M, f_M) \in EM_T$ 是一个无挠模，且 D 是 M 上的一个 Δ-导子，其阶为 n。若 $D := \{D_k : Q_\tau(M) \longrightarrow Q_\tau(M)\}^n{}_{k=0}$ 是如 *(5.13)* 中定义的态射族，则下图交换

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi_M} & Q_\tau(M) \\ \downarrow{\scriptstyle D_n} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{D_n}} \\ M & \xrightarrow{\Phi_M} & Q_\tau(M) \end{array} \tag{5.14}$$

对于所有 $k = 0, 1, \ldots, n$。

证明。我们考虑 EM_T 中的态射 $f : TG_i \longrightarrow M$。于是，存在相应的态射 $\tilde{f} : G_i \longrightarrow M$，其位于 $\mathscr{C}$ 中，由 $\tilde{f} : G_i \xrightarrow{\zeta_{G_i}} TG_i \; f \mapsto M$ 给出。此外，$D_k \circ \tilde{f} : G_i \; f \mapsto M \; D \xrightarrow{k} M$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个态射，而它存在相应的态射 $\hat{D}_k(f) \in EM_T(TG_i, M)$，由 $\hat{D}_k(f) : TG_i \; T \xrightarrow{\zeta_{G_i}} T \; TG_i \; T \; f \longrightarrow T \; M \; TD \xrightarrow{k} T \; M \; f \xrightarrow{M} M$ 给出。注意，为了证明

图表（5.14）的交换性，只需证明下图是交换图

$$\begin{array}{ccc} EM_T(TG_i, M) & \xrightarrow{\Phi_M(TG_i)} & Q_\tau(M)(TG_i) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \hat{D}_k(TG_i)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{D}_k(TG_i)} \\ EM_T(TG_i, M) & \xrightarrow{\Phi_M(TG_i)} & Q_\tau(M)(TG_i) \end{array} \tag{5.15}$$

对于所有$k = 0$、1、.....、n。

我们对n进行归纳法证明。对于$k = 0$，图表（5.15）显然交换；对于$k = 1$，其交换性由[1, 引理 41]推出。现在假设图表（5.15）对于所有$k < n$都交换。注意到

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_n(f)(TG_i) &= D_n(f(TG_i)) - f((\Delta_n)_{Gi}(TG_i)) - \sum_{\substack{t+j=n \\ t,j>0}} \widetilde{D}_t f((\Delta_j)_{G_i}(TG_i)) \\ &= D_n(f(1_{TG_i}(TG_i))) - f((\Delta_n)_{Gi}(TG_i)) - \sum_{\substack{t+j=n \\ t,j>0}} \widetilde{D}_t f((\Delta_j)_{G_i}(TG_i)) \\ &= D_n(f(\theta_{G_i} \circ T\zeta_{G_i}(TG_i))) - f((\Delta_n)_{Gi}(TG_i)) - \sum_{\substack{t+j=n \\ t,j>0}} \widetilde{D}_t f((\Delta_j)_{G_i}(TG_i)) && (\theta_{G_i} \circ T\zeta_{G_i} = 1_{TG_i}) \\ &= D_n(f_M(Tf(T\zeta_{G_i}(TG_i)))) - f((\Delta_n)_{Gi}(TG_i)) - \sum_{\substack{t+j=n \\ t,j>0}} \widetilde{D}_t f((\Delta_j)_{G_i}(TG_i)) && (f \circ \theta_{G_i} = f_M \circ Tf) \\ &= f_M(TD_n + TD_{n-1} \circ (\Delta_1)_M + \cdots + (\Delta_n)_M) \circ (Tf(T\zeta_{G_i}(TG_i))) - f((\Delta_n)_{Gi}(TG_i)) && \text{(by (3.4))} \\ &\quad - \sum_{\substack{t+j=n \\ t,j>0}} \widetilde{D}_t f((\Delta_j)_{G_i}(TG_i)). && (5.16) \end{aligned}$$

此外，我们看到

$$\begin{aligned} f_M((\Delta_n)_M(Tf(T\zeta_{G_i}(TG_i)))) &= f_M(Tf((\Delta_n)_{TG_i}(T\zeta_{G_i}(TG_i)))) && ((\Delta_n)_M \circ Tf = Tf \circ (\Delta_n)_{TG_i}) \\ &= f_M(Tf(T\zeta_{G_i}(\Delta_n)_{G_i}(TG_i))) && ((\Delta_n)_{TG_i} \circ T\zeta_{G_i} = T\zeta_{G_i} \circ (\Delta_n)_{G_i}) \\ &= f((\Delta_n)_{G_i}(TG_i)). && (f_M \circ Tf \circ T\zeta_{G_i} = f) \end{aligned}$$

现在，对于$0 < k < n$，我们得到

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_k f((\Delta_{n-k})_{G_i}(TG_i)) &= \hat{D}_k f \circ ((\Delta_{n-k})_{G_i}(TG_i)) && \text{（由归纳法）} \\ &= f_M \circ TD_k \circ Tf \circ T\zeta_{G_i} \circ ((\Delta_{n-k})_{G_i}(TG_i)) && (\hat{D}_k f = f_M \circ Tf \circ T\zeta_{G_i}) \\ &= f_M \circ TD_k \circ Tf \circ (\Delta_{n-k})_{TG_i} \circ T\zeta_{G_i} \circ (TG_i) && (T\zeta_{G_i} \circ (\Delta_{n-k})_{G_i} = (\Delta_{n-k})_{TG_i} \circ T\zeta_{G_i}) \\ &= f_M \circ TD_k \circ (\Delta_{n-k})_M \circ Tf \circ T\zeta_{G_i} \circ (TG_i). \end{aligned}$$

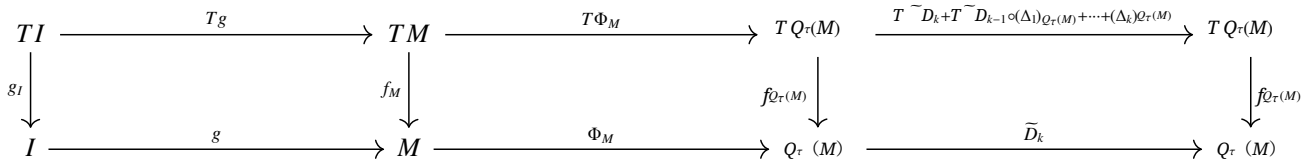
最后将上述表达式代入（5.16），得到

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_n(f)(TG_i) &= f_M(TD_n(Tf(T\zeta_{G_i}(TG_i)))) \\ &= \hat{D}_n(f)(TG_i). \end{aligned}$$

因此 $\widetilde{D}_n(f)(TG_i) = \hat{D}_n(f)(TG_i)$ 对所有 n均成立，因此图表（5.15）对所有 $0 \le k \le n$均交换。 □

定理 *5.4.* 设 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个 n 阶高阶微分单子，且为正合并保持余极限；设 $\tau = (\mathscr{T}, \mathscr{F})$ 是 EM_T 上的一个 n 阶遗传微分挠理论。设 $(M, f_M) \in EM_T$ 是一个无挠模 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，其上装备了一个 n 阶高阶 Δ-导子 D。则态射族 $D = \{D_k : Q_\tau(M) \longrightarrow Q_\tau(M)\}^n_{k=0}$，其中 $\widetilde{D}_0 = Id_{Q_\tau(M)}$ 是恒等态射，即 $EM\mathscr{C}$ 中 $Q_\tau(M)$ 上的恒等态射，是 $(Q_\tau(M), f_{Q_\tau(M)})$ 上的一个 n 阶高阶 Δ-导子。

$\widetilde{\quad}$证明。 令 $g \in Q_\tau(M)(TG_i)$ 由态射 $g : I \longrightarrow M$ 表示，其中 $(I, g_I) \in \mathcal{L}_{TG_i}$。 为证明$D$ 是$Q_\tau(M)$上的高阶导子，我们证明对于所有$k = 0, 1, \ldots, n$， 下图在 $\mathscr{C}$中可交换。



(5.17)

容易看出，图表 (5.17) 中的前两个方块是可交换的。现在只需证明对所有 $k = 0$， 1， ...， n， 以下等式成立。

$$\widetilde{D}_k \circ \Phi_M \circ g \circ g_I = f_{Q_\tau(M)} \circ (T\widetilde{D}_k + T\widetilde{D}_{k-1} \circ (\Delta_1)_{Q_\tau(M)} + \cdots + (\Delta_k)_{Q_\tau(M)}) \circ T\Phi_M \circ Tg. \tag{5.18}$$

我们注意到，对所有 k = 0、1、...、n， $f_{Q_\tau}(M) \circ T\,\Phi_M = \Phi_M \circ f_M$ 且 $(\Delta_k)_{Q_\tau}(M) \circ T\,\Phi_M = T\Phi_M \circ (\Delta_k)_M$。此外，由引理 5.3， $\widetilde{\quad}$对所有 k = 0、1、...、n， $D_k \circ \Phi_M = \Phi_M \circ D_k$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&f_{Q_\tau(M)} \circ (T\,\widetilde{D}_k + T\,\widetilde{D}_{k-1} \circ (\Delta_1)_{Q_\tau(M)} + \ldots + (\Delta_k)_{Q_\tau(M)}) \circ T\Phi_M \circ Tg \\
&= \sum_{t=0}^{k} \widetilde{f}_{Q_\tau(M)} \circ T D_t \circ (\Delta_{k-t})_{Q_\tau M} \circ T\Phi_M \circ Tg \\
&= \sum_{t=0}^{k} \widetilde{f}_{Q_\tau(M)} \circ T D_t \circ T\Phi_M \circ (\Delta_{k-t})_M \circ Tg && ((\Delta_{k-t})_{Q_\tau(M)} \circ T\Phi_M = T\Phi_M \circ (\Delta_{k-t})_M) \\
&= \sum_{t=0}^{k} f_{Q_\tau(M)} \circ T\Phi_M \circ T D_t \circ (\Delta_{k-t})_M \circ Tg && (\widetilde{D}_k \circ \Phi_M = \Phi_M \circ D_k) \\
&= \sum_{t=0}^{k} \Phi_M \circ f_M \circ T D_t \circ (\Delta_{k-t})_M \circ Tg && (f_{Q_\tau(M)} \circ T\Phi_M = \Phi_M \circ f_M) \\
&= \Phi_M \circ f_M \circ (T D_k + T D_{k-1} \circ (\Delta_1)_M + \ldots + (\Delta_k)_M) \circ Tg \\
&= \Phi_M \circ D_k \circ f_M \circ Tg && (D \text{ 是一个 n 阶高阶导子}) \\
&= \widetilde{D}_k \circ \Phi_M \circ f_M \circ Tg && (\widetilde{D}_k \circ \Phi_M = \Phi_M \circ D_k) \\
&= \widetilde{D}_k \circ \Phi_M \circ g \circ g_I. && (f_M \circ Tg = g \circ g_I)
\end{aligned}$$

证明现已完成。 □

$\widetilde{\quad}$根据引理 5.3 和定理 5.4，D 是一个 Δ-阶数为 n 的 Q_τ(M上的高阶导子，它扩张了 D 在 n 阶 M上的高阶导子。下一个定理将证明，此提升是唯一确定的。

定理 *5.5*（高阶 Δ-导子的延拓唯一性）。设 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是 $\mathscr{C}$ 上的 n 阶高阶微分单子，它是正合的，且保余极限；并设 τ 是 EM_T 上的遗传 n 阶高阶微分挠理论。设 $D : M \longrightarrow M$ 是无挠模 $(M, f_M) \in EM_T$ 上的 n 阶高阶 Δ-导子。那么，在定理 *(5.4)* 中得到的 $Q_\tau(M) \longrightarrow Q_\tau(M)$ 上的 n 阶高阶 Δ-导子$\widetilde{D}$，是 $Q_\tau(M)$ 上延拓$\widetilde{D}$ 的唯一 n 阶高阶 Δ-导子。也就是说，D 是唯一满足引理 *5.3* 的 n 阶高阶 Δ-导子，即

$$\widetilde{D}_k \circ \Phi_M = \Phi_M \circ D_k$$

对所有 $0 \le k \le n$。

证明。设D'是$Q_\tau(M)$上的另一个阶n Δ-高阶导子，它提升了M上的D Δ-导子。现在我们对n使用归纳法。当$n = 0$时，有$D_0 = D'_0 = \mathrm{Id}$，因此该结论对$n = 0$成立。现在假设该结论对所有$k \le n-1$均成立。对于$k = n$，我们可见

$$\begin{aligned}(\widetilde{D}_n - \widetilde{D'}_n) \circ f_{Q_\tau(M)} &= f_{Q_\tau(M)} \circ (T\widetilde{D}_n + T\widetilde{D}_{n-1} \circ (\Delta_1)_{Q_\tau(M)} + T\widetilde{D}_{n-2} \circ (\Delta_2)_{Q_\tau(M)} + \ldots + \Delta_{n_{Q_\tau(M)}}) \\ &\quad - f_{Q_\tau(M)} \circ (T\widetilde{D'}_n + T\widetilde{D'}_{n-1} \circ (\Delta_1)_{Q_\tau(M)} + T\widetilde{D'}_{n-2} \circ (\Delta_2)_{Q_\tau(M)} + \ldots + (\Delta_n)_{Q_\tau(M)}) \\ &= f_{Q_\tau(M)} \circ T(\widetilde{D}_n - \widetilde{D'_n}). \qquad \text{(since } \widetilde{D}_k = \widetilde{D'}_k \text{ for all } k \le n-1)\end{aligned}$$

因此$D_n - D'_n$是$Q_\tau(M)$上属于EM_T的一个态射。由于

$$(\widetilde{D}_n - \widetilde{D'}_n) \circ \Phi_M = \Phi_M \circ (D_n - D_n) = 0,$$

存在一个诱导态射 $\mathrm{Coker}(\Phi_M) \longrightarrow \mathrm{Q}_\tau(\mathrm{M})$ in EM_T，使得 $\mathrm{D}_n - \mathrm{D'}_n$ 可经由它分解。根据 [11, 命题 2.4 和定理 2.5], ，有 $\mathrm{Coker}(\Phi_M) \in \mathscr{T}$和 $\mathrm{Q}_\tau(\mathrm{M}) \in \mathscr{F}$。因此，态射 $\mathrm{Coker}(\Phi_M) \longrightarrow \mathrm{Q}_\tau(\mathrm{M})$ 是零态射，故 $\mathrm{D}_n - \mathrm{D'}_n = 0$，即对所有 n，$\mathrm{D}_k = \mathrm{D'}_k$。□

定理 5.6。设 $(T, \theta, \zeta, \Delta)$ 是 $\mathscr{C}$上的一个 n 阶高阶微分单子，且其为正合并保持余极限。设 τ 是 EM_T 上的一个遗传挠理论，并且 (M, f_M) 是 EM_T中的任意对象。则任意 n 阶高阶 Δ-导子 $D\colon\ M \longrightarrow M$都可以唯一延拓为高阶 Δ-导子 $D\colon\ Q_\tau(M) \longrightarrow Q_\tau(M)$，当且仅当 τ 是一个 n 阶高阶微分挠理论。

证明。本定理的充分性部分是直接的，其证明采用了与 [1, 定理 4.5]中所述相同的论证和技术。因此，我们省略细节，并请读者参阅所引用文献中的相应证明。为证明必要性部分，我们考虑 M 上的高阶D -导子及其在 $Q_\tau(M)$上的 n 阶延拓 D。对i而言，我们现在考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi_M} & Q_\tau(M) \\ \downarrow{\scriptstyle D_i} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{D_i}} \\ M & \xrightarrow{\Phi_M} & Q_\tau(M)\,. \end{array} \tag{5.19}$$

设 $N \subseteq M_\tau$。由于 $M_\tau = \ker(\Phi_M)$，$\Phi_M \circ D_i(N) = D_i \circ \Phi_M(N) = 0$ 对所有 i 均成立。因此 $D_i(N) \subseteq \ker(\Phi_M) = M_\tau$ 对所有 i 均成立。因此τ 是一个 n 阶高阶微分挠理论。□

参考文献

[1] D. Ahuja 和 S. Kour，《单子 Eilenberg-Moore 范畴上的微分挠理论》，《纯粹与应用代数杂志》229 (2025)，107910。[2] D. Ahuja、A. Banerjee、S. Kour 和 S. Ray，《单子与余单子的 Eilenberg-Moore 范畴及箭图表示》，见 2307. 13201v2。[3] A. Banerjee 和 S. Kour，《(A, δ)-模、Hochschild 同调与高阶导子》，Ann. Mat. Pura Appl. (4) 198 (2019)，第 5 期，1781–1802。[4] E Bland. Paul，《环与模上的高阶导子》，《国际数学与数学科学杂志》2005 (2005)，第 15 期，2373–2387。[5] A. Banerjee，《微分挠理论与多对象环》，Canad. Math. Bull. 62 (2019)，第 4 期，703–714。[6] A. Beligiannis 和 I. Reiten，《挠理论的同调与同伦方面》，Mem. Amer. Math. Soc. 188 (2007)，第 883 期。[7] P. E. Bland，《微分挠理论》，J. Pure Appl. Algebra 204 (2006)，第 1 期，1–8。[8] ，《挠理论专题》，Mathematical Research，第 103 卷，Wiley-VCH Verlag Berlin GmbH，柏林，1998。

[9] M. Hoshino, 《Lambek 挠理论》, Osaka J. Math. 29 (1992), 第 3 期, 447–453。[10] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik, 《张量范畴》, Mathematical Surveys and Monographs, 第 205 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2015。[11] G. A. Garkusha, 《Grothendieck 范畴》, 《代数与分析》13 (2001), 第 2 期, 1–68（俄文）。[12] J. S. Golan, 《导子向商模的延拓》, Comm. Algebra 9 (1981), 第 3 期, 275–281。[13] , 《挠理论》, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 第 29 卷, 朗文科技出版社, 哈洛; 约翰·威立父子公司, 纽约, 1986。[14] A. Grothendieck, 《关于同调代数的若干问题》, 东北 Math. J.(2) 9 (1957), 119–221。[15] M. Kashiwara 和 P. Schapira, 《范畴与层》, 施普林格出版社, 柏林-海德堡, 2006。[16] C. Lomp 和 J. van den Berg, 《所有遗传挠理论都是微分的》, J. Pure Appl. Algebra 213 (2009), 第 4 期, 476–478。[17] A. J. López、M. P. López López 和 E. V. Nóvoa, 《Grothendieck 范畴中的 Gabriel 滤子》, 《数学出版物》36 (1992), 第 2A 期, 673–683 (1993)。[18] S. MacLane, 《工作数学家的范畴论》, 数学研究生教材, 第 5 卷, 施普林格出版社, 纽约-柏林, 1971。[19] B. Mitchell, 《多对象环》, 《数学进展》8 (1972), 1–161。[20] M. Mirzavaziri, 《代数上高阶导子的刻画》, Comm. Algebra 38 (2010), 第 3 期, 981–987。[21] K. Ohtake, 《余局部化与局部化》, J. Pure Appl. Algebra 11 (1977/78), 第 1–3 期, 217–241。[22] N. Popescu, 《阿贝尔范畴及其在环与模上的应用》, London Mathematical Society Monographs, 第 3 卷, 学术出版社, 伦敦-纽约, 1973。[23] P. Ribenboim, 《模的高阶导子》, Portugal. Math. 39 (1980), 第 1–4 期, 381–397 (1985)。纪念 Ant´onio Monteiro 专刊。[24] S. H. Rim, 《高阶反导子向商模的延拓》, 庆北数学杂志 27 (1987), 39–46。[25] Bo Stenstr¨om, 《商环》, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 第 217 卷, 施普林格出版社, 纽约-海德堡, 1975。环论方法导论。[26] R. Street, 《Frobenius 单子与伪幺半群》, J. Math. Phys. 45 (2004), 第 10 期, 3930–3948。