arXiv:2601.19322v1 [cs.CG] 27 Jan 2026

采用混合式 n 边插值函数的多面体设计

P´eter Salvi

布达佩斯科技经济大学

摘要

本文提出了一种新的参数曲面表示，可对给定的任意拓扑闭合网格的顶点进行插值。通过混合局部多边二次插值片，构造出平滑连接的四边形曲面片。在非四边形情形下，这需要一种涉及有理曲线的特殊参数化技术。本文还讨论了三角形子曲面片的恰当处理方式以及子曲面片的其他表示方法。

1 引言

基于控制多面体的曲面表示形式多种多样，包括递归细分 [1]，广义样条 [7] 以及“流形”方法 [5]。本文考察一种基于流形的构造方法变体，其代表性工作包括 Zorin 的研究 [13, 10]，以及 Fang 最近开展的研究 [3]。

图 1 展示了基本思路。输入是一个闭合网格。我们假设网格仅由四边形构成；如果不是，可以对所有面进行中心分割（类似于 Catmull–Clark细分的一步），以消除多边曲面片，同时保留所有原始顶点。对于每个四边形，其各个角点周围的一环邻域定义了（多边）二次控制网。我们可以生成四个局部曲面片来插值这些控制点，并在与该四边形关联的参数区域内对其求值（图 2）。生成曲面由这些曲面片混合而成。

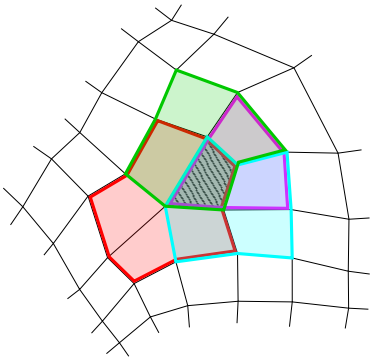


图 1：围绕一个四边形的重叠二次网。

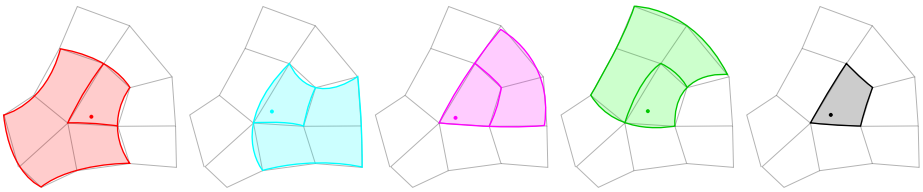


图 2：混合局部插值片。圆点表示各插值片中的一个求值点；最后一幅图展示了生成的曲面片。

请注意，虽然大多数类似方法采用近似方式，但我们在这里关注的是能够插值输入点的曲面片。插值准则使这些插值函数在给定区域内更为相似，从而可能提升生成曲面的质量。

本文其余部分组织如下。第 2 节介绍规则四边形网格这一简单情形下的构造。第 3节说明如何处理不规则顶点，并在第 ´3.1节定义二次广义 B´zier（QGB）曲面片，并在第 3.2节介绍一种基于有理 Bzier 曲线的参数化。第 4节展示一些测试结果；最后总结了未来的研究工作。

2 规则网格

在规则（闭合）网格中，所有顶点的价均为 4，因此每个四边形周围的控制网都是四边形。我们使用二次张量积 B´ezier 曲面片作为插值函数。

令$\mathbf{C}_i$ 和$\mathbf{E}_i$ $(i = 1 \dots 4)$分别表示角控制点和边控制点，其中$\mathbf{E}_i$ 位于$\mathbf{C}_{i-1}$ 与 $\mathbf{C}_i$ 之间（采用循环编号）。中间控制点记为$\mathbf{M}$。于是，插值函数定义为

$$\mathbf{I}(u,v) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \mathbf{P}_{ij} B_i^2(u) B_j^2(v), \tag{1}$$

其中，$B_k^d(t)$ 是参数 t 处的 d 次伯恩斯坦多项式中的第 k 个多项式，并且

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{00} = \mathbf{C}_3, && \mathbf{P}_{10} = \hat{\mathbf{E}}_4, && \mathbf{P}_{20} = \mathbf{C}_4,\\
&\mathbf{P}_{01} = \hat{\mathbf{E}}_3, && \mathbf{P}_{11} = \frac{1}{4}(16\mathbf{M} - \sum_{i=1}^{4}(\mathbf{C}_i + 2\hat{\mathbf{E}}_i)), && \mathbf{P}_{21} = \hat{\mathbf{E}}_1,\\
&\mathbf{P}_{02} = \mathbf{C}_2, && \mathbf{P}_{12} = \hat{\mathbf{E}}_2, && \mathbf{P}_{22} = \mathbf{C}_1.
\end{aligned} \tag{2}$$

这里，$\hat{}\mathbf{E}_i = 2\mathbf{E}_i - \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{i-1} + \mathbf{C}_i)$ 是控制点位置，使得 $[\mathbf{C}_{i-1}, \hat{}\mathbf{E}_i, \mathbf{C}_i]$ 定义了一条插值 $\mathbf{E}_i$ 的二次贝塞尔曲线。

四边形的参数化位于 $[0,1]^2$, , 并根据以下插值约束进行局部旋转（$\mathbf{S}$ 表示要创建的曲面片）：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}(0,0) = \mathbf{M}, && \mathbf{S}(1,0) = \mathbf{E}_1,\\
&\mathbf{S}(0,1) = \mathbf{E}_2, && \mathbf{S}(1,1) = \mathbf{C}_1.
\end{aligned} \tag{3}$$

那么，四边形定义域中对应于（u, v）点的插值点为（$(u+1)/2$,$(v+1)/2$）。

因此，四边形片可以定义为四个插值函数的混合：

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{I}_i \left(\frac{u_i+1}{2}, \frac{v_i+1}{2} \right) \Phi(u_i, v_i). \tag{4}$$

局部参数化定义如下

$$\begin{aligned} u_1 &= u, & v_1 &= v, \\ u_2 &= v, & v_2 &= 1-u, \\ u_3 &= 1-u, & v_3 &= 1-v, \\ u_4 &= 1-v, & v_4 &= u. \end{aligned} \tag{5}$$

混合函数是两个单变量混合函数的乘积

$$\Phi(u,v) = \Psi(u) \cdot \Psi(v) \tag{6}$$

满足以下约束：

$$\Psi(0) = 1, \qquad \Psi(1) = 0, \qquad \Psi^{(k)}(0) = \Psi^{(k)}(1) = 0 \tag{7}$$

对于某个 $k > 0$。对于有限的 k，可以应用 Hermite 混合函数：

$$\Psi(t) = \sum_{i=0}^{k} B_i^{2k+1}(t). \tag{8}$$

对于 $k = \infty$有多种选择，包括鼓包函数和指数有理 B 样条 [8]。本文所有示例均采用了 $k = 2$ Hermite 混合函数。

3 不规则顶点

不规则顶点会生成一个非四边形控制网。我们使用二次广义 B´ezier 曲面片对这些点进行插值，定义如下。

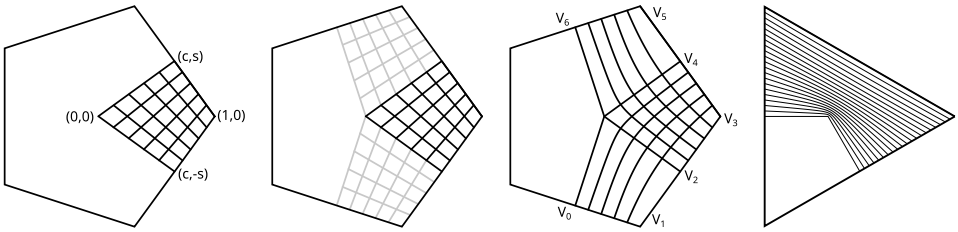
3.1 二次广义 B´ezier（QGB）插值函数

广义 B´ezier（GB）曲面片 [11] 通常仅定义为三次或更高次，但很容易将其构造进一步推广到二次情形。由于这将是一个 C^0 插值函数，其方程甚至比原始方程更简单。

曲面定义在规则的 n 边多边形 $\{(\cos\frac{2k\pi}{n}, \sin\frac{2k\pi}{n})\}, k = 0 \ldots n-1$上，并且我们为每条边创建局部坐标映射

$$s_i(u,v) = \lambda_i/(\lambda_{i-1}+\lambda_i), \qquad d_i(u,v) = 1-\lambda_{i-1}-\lambda_i, \tag{9}$$

其中 $\{\lambda_i\}$ [4] 是相对于定义域多边形的 $(u,\ v)$ 的 Wachspress 坐标。



(a) 双线性映射 (b) 不连续性 (c) 有理曲线映射 (d) 三角形情形

图3：四边形 →插值函数映射。

沿用上一节的记号，

$$\mathbf{I}(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{C}_{i-1} \frac{1}{2} B_0^2(s_i) + \hat{\mathbf{E}}_i B_1^2(s_i) + \mathbf{C}_i \frac{1}{2} B_2^2(s_i) \right) B_0^2(d_i) + \mathbf{P}_0 B_0(u,v). \tag{10}$$

此处 B_0 表示权重亏缺

$$B_0(u,v) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} B_0^2(s_i) + B_1^2(s_i) + \frac{1}{2} B_2^2(s_i) \right) B_0^2(d_i), \tag{11}$$

且中心控制点 $\mathbf{P}_0$ 的定义使得曲面片插值于 $\mathbf{M}$：

$$\mathbf{P}_0 = \frac{n^2 \mathbf{M} - \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{C}_i + 2\hat{\mathbf{E}}_i \right)}{n(n-3)}. \tag{12}$$

请注意，对于 $n = 4$ 这与第 2 节中的张量积插值函数完全相同。也很容易看出，对于 $n = 3$ 这是一个二次三角形 B´ézier 曲面片。

3.2 参数化

我们仍需在四边形域 $[0,1]^2$ 与插值函数的定义域（内接于单位圆的正多边形）之间建立映射。后者对应的部分是一个由以下点定义的风筝形：(0，0)、(c，$-s$)、(1，0) 和 (c，s)，其中 $c = \frac{1}{2}(\cos(2\pi/n) + 1)$ 且 $s = \frac{1}{2}\sin(2\pi/n)$，见图 3。一种天真的做法是使用双线性映射（图 3a）。然而，这会带来一个问题：使用这种简单映射时，同一插值函数的相邻部分会出现参数化不连续的情况（图 3b）。在本节余下部分，我们将构造一种映射，使其具有 C^∞连续性（原点处除外，该点是奇异点）。

该方法通过在两个参数方向上创建 曲线束 二次有理 B´ézier 曲线来实现，并将映射 (u,v) 定义为 u-曲线与 v-曲线的交点——参见图3c，其中还给出了以下记号：

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= (c + \hat{c}, -s - \hat{s}), & \mathbf{V}_1 &= (2c - 1, -2s), \\ \mathbf{V}_2 &= (c, -s), & \mathbf{V}_3 &= (1, 0), \\ \mathbf{V}_4 &= (c, s), & \mathbf{V}_5 &= (2c - 1, 2s), \\ \mathbf{V}_6 &= (c + \hat{c}, s + \hat{s}), \end{aligned} \tag{13}$$

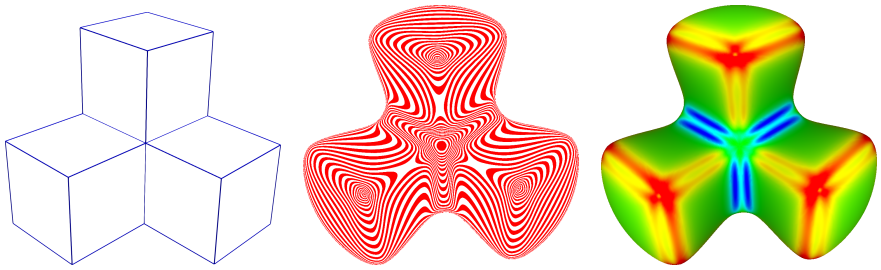


图4：Trebol 模型（左：控制网，中：等照度线，右：平均曲率）。

其中 $\hat{c} = \frac{1}{2}(\cos(4\pi/n) - 1)$ 和 $\hat{s} = \frac{1}{2}\sin(4\pi/n)$。 u-曲线的控制点和有理权重如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \mathbf{V}_0(1-u) + \mathbf{V}_1 u, & w_0 &= 1, \\ \mathbf{R}_1 &= \mathbf{V}_2 u \exp(u^2 - u), & w_1 &= 1/u, \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{V}_4(1-u) + \mathbf{V}_3 u, & w_2 &= 1. \end{aligned} \tag{14}$$

对于 v 曲线，同样有：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \mathbf{V}_6(1-v) + \mathbf{V}_5 v, & w_0 &= 1, \\ \mathbf{R}_1 &= \mathbf{V}_4 v \exp(v^2 - v), & w_1 &= 1/v, \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{V}_2(1-v) + \mathbf{V}_3 v, & w_2 &= 1. \end{aligned} \tag{15}$$

然后，可以用以下公式求出曲线本身：

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{2} \mathbf{R}_i w_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^{2} w_i B_i^2(t)}. \tag{16}$$

中间控制点中的指数项是为了适应多边形$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_5 - \mathbf{V}_6 - (0,0)$ 所在的三角形域为凹形的情况，这有助于将曲线拉回原点附近。图3d显示了v值对应的三角形中的曲线 $v = k/20$， $k = 0 \ldots 20$。

对于四边形域中的给定点（u， v），我们需要求出相应的 u曲线与 v曲线的交点。这可以通过在 $[\frac{1}{2}, 1]$区间 [6] 内进行嵌套黄金分割搜索轻松完成。虽然这有些耗费计算资源，但可以（也应该）预先计算。

3.3 三角形片

三边 QGB 片是一个二次 B´ézier 三角形，因此没有中心控制点。由于我们希望插值中间点$\mathbf{M}$，因此应将边界升阶为三次，并使用三次 B´ézier 三角形，这样便多了一个自由度：

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_{300} = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{P}_{030} = \mathbf{C}_2, \quad \mathbf{P}_{003} = \mathbf{C}_3, \\ &\mathbf{P}_{210} = \frac{1}{3}(\mathbf{C}_1 + 2\hat{\mathbf{E}}_2), \quad \mathbf{P}_{120} = \frac{1}{3}(\mathbf{C}_2 + 2\hat{\mathbf{E}}_2), \\ &\mathbf{P}_{021} = \frac{1}{3}(\mathbf{C}_2 + 2\hat{\mathbf{E}}_3), \quad \mathbf{P}_{012} = \frac{1}{3}(\mathbf{C}_3 + 2\hat{\mathbf{E}}_3), \\ &\mathbf{P}_{102} = \frac{1}{3}(\mathbf{C}_3 + 2\hat{\mathbf{E}}_1), \quad \mathbf{P}_{201} = \frac{1}{3}(\mathbf{C}_1 + 2\hat{\mathbf{E}}_1), \end{aligned} \tag{17}$$

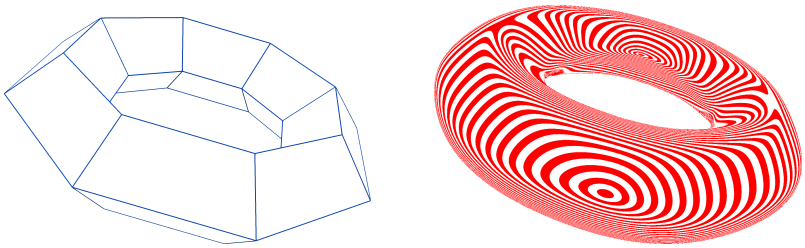


图 5：环面模型（左：控制网，右：等照度图）。

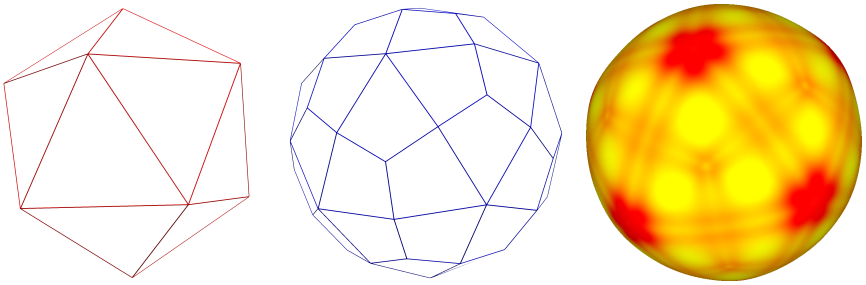


图 6：二十面体模型（从左至右：三角形控制网格、细分后的控制网格、平均曲率图）。

and

$$\mathbf{P}_{111} = \frac{1}{6}(27\mathbf{M} - \sum_{\max(i,j,k)=3} \mathbf{P}_{ijk} - 3 \sum_{\max(i,j,k)=2} \mathbf{P}_{ijk}). \tag{18}$$

然后可以通过以下方式求值该曲面片：

$$\mathbf{I}(u,v) = \sum_{i+j+k=3} \mathbf{P}_{ijk} \frac{6}{i!j!k!} \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k. \tag{19}$$

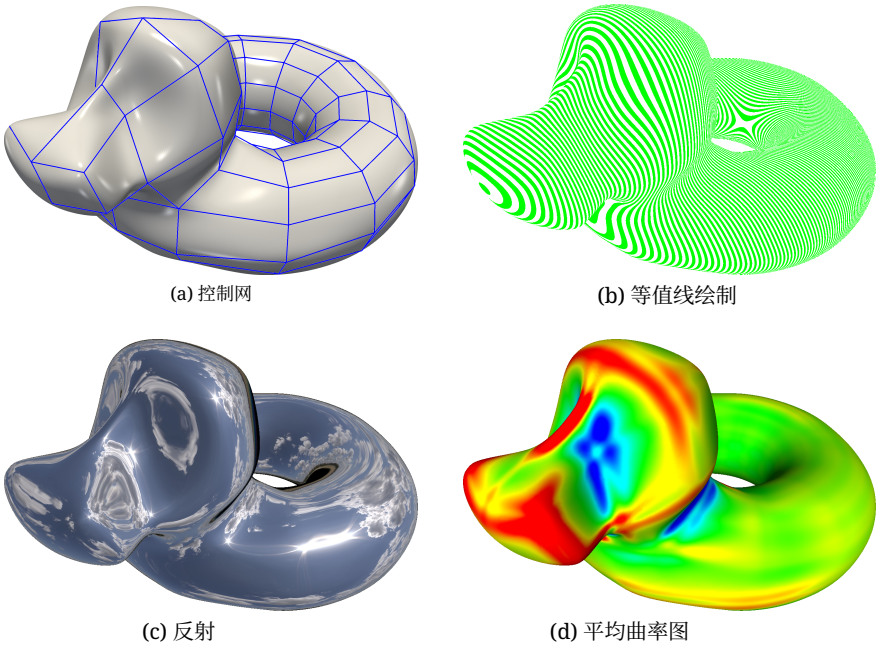
3.4 替代表示

我们可以采用许多多边曲面表示；有关综述，请参见我们即将发表的论文 [12]。特别是，中点和中点库恩曲面片 [9]非常适合这项任务。然而，我们的实验表明，生成的模型差异很小；从计算角度看，QGB 曲面片则更简单、高效。

4 结果

我们的第一个模型是一个环面形状的规则四边形网格，见图 5。结果与环面相去甚远，但等照度线在曲面上平滑流动。

图中所示的 *trebol* 对象是图 4 中常用的测试模型，因为它具有价数为 3、4、5 和 6 的顶点。等照度线表明，多边曲面片质量良好且连续连接，而均值图显示边往往略显平坦。



(a) 控制网　(b) 等值线绘制

(c) 反射　(d) 平均曲率图

图 7：‘Bob’模型。

图 6 中的二十面体模型由三角形组成。首先执行一次 Catmull–Clark 细分，得到一个包含 3、4 和 5 价顶点的四边形网格。平均曲率图显示，5 价顶点附近的数值较大；除此之外，只有微小波动，这些波动对应于网格边。

最后，图7 展示了一个更复杂的模型[1]，具有环境映射、等值线绘制和平均曲率。

结论与未来工作

我们提出了一种新的构造方法，可对任意拓扑网格进行插值，生成分片参数曲面。未来还有许多值得进一步研究的方向。目前，我们的方法仅适用于闭合网格；未来应将其推广到带边界的网格。此外，还可以加入连续边界约束（位置插值和交叉导数插值）。也可以考虑扩展形状参数。若能结合向量插值，或许可以获得更好的质量。

致谢

本项目得到匈牙利科学研究基金（OTKA，编号：145970）的支持。

[1] Ta取自 K-surfac 论文所提供的代码　es [2]。

参考文献

[1] Thomas J. Cashman。《超越 Catmull–Clark? 细分曲面方法进展综述》。Computer Graphics Forum，31(1)：42–61，2012。[2]Tobias Djuren、Maximilian Kohlbrenner 和 Marc Alexa。《K 曲面：在高斯曲率极值处插值的 Bézier 样条》。ACM Transactions on Graphics (TOG)，42(6)：210，2023。[3] Xiang Fang。《任意阶连续性的广义混合方案》。博士论文，滑铁卢大学，加拿大，2023。[4] Michael S. Floater。《广义重心坐标及其应用》。Acta Numerica，24：161–214，2015。[5] Cindy M. Grimm 和 Denis Zorin。《基于流形的曲面建模与参数化》。载于 SIGGRAPH '06 Courses，第 1–81 页。ACM，2006。[6] Mykel J. Kochenderfer 和 Tim A. Wheeler。《优化算法》。麻省理工学院出版社，2019。[7] J¨org Peters。《具有不规则性的网格样条》。SMAI 计算数学期刊，5：161–183，2019。[8] P´eter Salvi。《使用位移混合编辑任意曲面的内部》。载于信息技术进展研讨会论文集，第 35–38 页。BME，2021。[9] P´eter Salvi、Istv´an Kov´ács 和 Tam´ás V´árady。《具有丰满度控制的计算高效超限片》。载于信息技术进展研讨会论文集，第 96–100 页。BME，2017。[10] Elif Tosun 和 Denis Zorin。《带边界的基于流形的曲面》。Computer Aided Geometric Design，28(1)：1–22，2011。[11] Tam´ás V´árady、P´eter Salvi 和 Gy¨orgy Karik´ó。《具有简单控制结构的多边 Bézier 曲面片》。Computer Graphics Forum，35(2)：307–317，2016。[12] Tam´ás V´árady、P´eter Salvi 和 M´árton Vaitkus。《真正的多边参数曲面片——综述》。Computer Aided Geometric Design，110：102286，2024。[13] Lexing Ying 和 Denis Zorin。《一种构造任意光滑度曲面的简单流形方法》。ACM Transactions on Graphics (TOG)，23(3)：271–275，2004。