arXiv:2601.19415v1 [math.QA] 27 Jan 2026

$D_4^{(1)}$ 的标准模生成集

´ ´ ˇIVANA BARANOVIC、MIROSLAV JERKOVIC 和 GORAN TRUPCEVIC

ABSTRACT. 设 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 为类型为 $D_4^{(1)}$ 的仿射李代数， $L(\Lambda)$为其层为 k、最高权向量为 v_Λ的标准模。我们将 Feigin-Stoyanovsky 型子空间定义为

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)\, v_\Lambda,$$

其中， $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1$ 是与 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$相关联的 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的 $\mathbb{Z}$-分次。利用顶点算子关系，我们约化 $W(\Lambda)$的 Poincar´e-Birkhoff-Witt 张成集，并用差分条件和初始条件对其进行描述。整个标准模 $L(\Lambda)$的张成集可作为 $W(\Lambda)$张成集的极限得到。

1. INTRODUCTION

设 $\mathfrak{g}$ 为有限维李代数， $\tilde{\mathfrak{g}}$为其对应的仿射李代数

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

其中， c 是典范中心元， d是次数算子（参见 [K]）。仿射李代数具有顶点算子构造，J. Lepowsky 和 R. Wilson [LW1, LW2] 利用这一构造，从李代数理论的角度诠释了罗杰斯-拉马努金型组合恒等式。此后，J. Lepowsky、M. Primc、A. Meurman 等人的工作延续了这一研究方向（参见 [LP, MP]）。该研究计划的一个重要部分，是为仿射李代数的标准模（或其某些子空间）寻找单项式基。

在$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$中，B. Feigin 和 E. Stoyanovsky 引入并研究了一个子空间 $W(\Lambda)$，其中 $\mathfrak{n}$是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的 Borel 子代数~的幂零根：

$$\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}],$$

并且 Λ 和 v_Λ 分别是 $L(\Lambda)$ 的最高权和最高权向量。这个定义可以推广到仿射李代数的任意最高权模。

Galin Georgiev（参见 [Ge]）进一步研究了主子空间，并为 $\mathfrak{sl}(\ell+1,\ \mathbb{C})$ 的表示构造了一类特定的~组合基。他利用来自[DL] 的交织算子证明所构造的基具有线性无关性。S. Capparelli、J. Lepowsky 和 A. Milas 也使用了这些算子（参见 [CLM1、CLM2]），为 $\mathfrak{sl}(\ell+1,\ \mathbb{C})$ 的主子空间特征导出了 Rogers-Ramanujan~递推关系和 Rogers-Selberg 递推关系。与 C. Calinescu 合作（参见 [C]）的后续工作，导出了~关于 $\mathfrak{sl}(\ell+1,\ \mathbb{C})$ 的 1 级标准表示的主子空间，以及 $\mathfrak{sl}(3,\ \mathbb{C})$ 的高层标准模的某些~主子空间的 Rogers-Ramanujan 型递推关系。求解这些递推关系得到了主子空间的特征公式。

与主子空间类似的空间曾由 M. Primc 在 [P1, P2, P3],中研究，随后利用这些子空间的基构造标准模的基。在 [P3],中，M. Primc 采用 Capparelli-Lepowsky-Milas 方法，为线

IVANA BARANOVIĆ, baranovic.ivana@yahoo.com.MIROSLAV JERKOVIĆ, mjerkov@fkit.unizg.hr
UNIVERSITY OF ZAGREB FACULTY OF CHEMICAL ENGINEERING AND TECHNOLOGY, ZAGREB, CROATIA.
GORAN TRUPČEVIĆ, goran.trupcevic@ufzg.hr
UNIVERSITY OF ZAGREB FACULTY OF TEACHER EDUCATION, ZAGREB, CROATIA.

性无关性提供了更简洁的证明，这些基是在 [P1]中构造的。对于 $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$ 的其他 Feigin-Stoyanovsky子空间，这种方法也被证明卓有成效；在 [T1], 中，G. Trup˘cevi´c 为 $W(\Lambda)$ 的所有层一标准模找到了组合基，其中 $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$。他还在 [T2]中将证明推广到了所有高层模。在 [J], 中，M. Jerkovi´c 利用已知的仿射李代数 $\sim\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$ 标准模 Feigin-Stoyanovsky 型子空间组合基描述，得到了固定层下 Feigin-Stoyanovsky 型子空间的正合序列 k。由此导出了这些子空间形式特征的递推关系系统。

本文采用相同的方法，继续开展 [Ba] 中的工作。利用顶点算子关系，我们找到了代数 $D_4^{(1)}$ 的层 k 标准模的 Feigin-Stoyanovsky 型子空间的张成集。随后，我们证明，整个标准模 $L(\Lambda)$ 的张成集可以由 $W(\Lambda)$ 的张成集取极限得到。

本文结构如下：在第 2 节和第 3 节中，我们介绍背景设定，并引入 Feigin-Stoyanovsky 子空间的概念，同时给出张成该子空间的单项式集合上的线性序。在第 4 节中，我们回顾基本 $\tilde{\mathfrak{g}}$-模的经典 Frenkel-Kac-Segal 构造，定义单纯流算子，并回顾顶点算子关系。接着，在第 5 节中，我们证明满足差分条件和初始条件的单项式构成 $W(\Lambda)$ 的张成集。最后，在第 6 节中，我们利用这一结果为整个标准模 $L(\Lambda)$ 得到一个生成集。

*2000*年数学主题分类：主要分类 17B67；次要分类 17B69、05A19。致谢：我们衷心感谢 Mirko Primc 在该主题上的帮助和宝贵建议。

2. Affine Lie algebras and basic modules

对于 $\ell\geq 4$，令 $\mathfrak{g}$ 为 D_ℓ 型复单李代数， $\mathfrak{h}$ 为其 Cartan子代数。相应的根系 R 可实现在 $\mathbb{R}^\ell$ 中。固定 R 的基 $\Pi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$，其中

$$\alpha_1=\epsilon_1-\epsilon_2,\dots,\alpha_{\ell-1}=\epsilon_{\ell-1}-\epsilon_\ell,\alpha_\ell=\epsilon_{\ell-1}+\epsilon_\ell,$$

其中 ϵ_1、.....、ϵ_ℓ 是 $\mathbb{R}^\ell$ 的规范基。于是我们有根空间分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in R}\mathfrak{g}_\alpha$，以及 $\mathfrak{g}$ 的三角分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-+\mathfrak{h}+\mathfrak{n}_+$。令 $\theta=\epsilon_1+\epsilon_2$ 为最高根。记归一化Killing型为 $\langle,\ \rangle$，使得 $\langle\theta,\theta\rangle=2$。我们通过Killing形式将 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{h}^*$ 识别。对于每个根 α，固定一个根向量 $x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$。

记 $\omega_1,\dots,\omega_\ell$ 为基本权，并为方便起见定义 $\omega_0=0$。我们按照 [Ba], 固定权 $\omega=\omega_1=\epsilon_1$。注意， ω 是微小权，即

$$\langle\omega,\alpha\rangle\in\{-1,0,1\}\quad\text{for all}\quad\alpha\in R.$$

这给出了 $\mathfrak{g}$的诱导 $\mathbb{Z}$分次

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1,\qquad\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}+\sum_{\langle\omega,\alpha\rangle=0}\mathfrak{g}_\alpha,\qquad\mathfrak{g}_{\pm1}=\sum_{\langle\omega,\alpha\rangle=\pm1}\mathfrak{g}_\alpha.$$

子代数 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_{-1}$ 是交换子代数，且 $\mathfrak{g}_0$ 通过伴随作用作用于它们。子代数 $\mathfrak{g}_0$ 是约化的，其半单部分 $\mathfrak{l}_0=[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ 是一个单代数：当 $\ell=4$ 时类型为A_3，当 $\ell\geq 5$时类型为 $D_{\ell-1}$。

设 $\Gamma=\{\alpha\in R\mid\langle\omega,\alpha\rangle=1\}$。则

$$\Gamma=\{\gamma_2,\dots,\gamma_\ell,\gamma_{\underline{\ell}},\dots,\gamma_{\underline{2}}\},$$

其中 $\gamma_i=\epsilon_1+\epsilon_i$和 $\gamma_{\underline{i}}=\epsilon_1-\epsilon_i$，对 $i=2,..,\ell$成立。我们称 Γ 为颜色集，并记作$x_i=x_{\gamma_i}$, $x_{\underline{i}}=x_{\gamma_{\underline{i}}}$。注意， γ_2 是最高根 θ。

记 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 为类型 $D_\ell^{(1)}$ 的相应仿射李代数，

$$\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]+\mathbb{C}c+\mathbb{C}d,$$

其中 c 为典范中心元， d 为次数算子（参见 [K]）。对 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，置 $x(j) = x \otimes t^j$, 并记 $x(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n-1}$ 为形式变量 z中的形式洛朗级数。

令 $\mathfrak{h}^e = \mathfrak{h} + \mathbb{C}c + \mathbb{C}d$, $\tilde{\mathfrak{n}}_\pm = \mathfrak{g} \otimes t^{\pm 1}\mathbb{C}[t^{\pm 1}] + \mathfrak{n}_\pm$,

我们有三角分解： $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}_- + \mathfrak{h}^e + \tilde{\mathfrak{n}}_+$，以及相对于 ω 的诱导 $\mathbb{Z}$-分次:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} + \tilde{\mathfrak{g}}_0 + \tilde{\mathfrak{g}}_1,$$

$\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] + \mathbb{C}c + \mathbb{C}d$, $\tilde{\mathfrak{g}}_{\pm 1} = \mathfrak{g}_{\pm 1} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$。子空间 $\tilde{\mathfrak{g}}_1 \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ 是一个交换子代数，且 $\mathfrak{g}_0$ 通过伴随作用作用于 $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ 。

令 $\tilde{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \subset (\mathfrak{h}^e)^*$ 为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的单根集。记 $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_\ell \in (\mathfrak{h}^e)^*$ 为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的基本权，它们由 $\langle \Lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ 和 $\Lambda_i(d) = 0$（ $i = 1, \ldots, \ell$）定义，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 Killing 形式在 $\mathfrak{h}^e$ 上的标准延拓。

将 $L(\Lambda)$ 记为一个标准 $\tilde{\mathfrak{g}}$-模，即具有支配整最高权的不可约最高权模

$$\Lambda = k_0\Lambda_0 + k_1\Lambda_1 + \cdots + k_\ell\Lambda_\ell,$$

$k_i \in \mathbb{Z}_+$ 对应于 $i = 0, \ldots, \ell$，并将 v_Λ 记为 $L(\Lambda)$ 的一个固定最高权向量。中心元 c 在 $L(\Lambda)$ 上的作用为一个标量

$$k = \Lambda(c) = k_0 + k_1 + 2k_2 + \cdots + 2k_{\ell-2} + k_{\ell-1} + k_\ell,$$

称其为模 $L(\Lambda)$ 的层。注意，模 $L(\Lambda_0)$、 $L(\Lambda_1)$、 $L(\Lambda_{\ell-1})$ 和 $L(\Lambda_\ell)$ 的层为 1，而 $L(\Lambda_2) \ldots, L(\Lambda_{\ell-2})$ 是 2级模。

3. Feigin-Stoyanovsky's type subspaces

对于每个支配整 Λ 定义一个*Feigin-Stoyanovsky* 型子空间

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1) \cdot v_\Lambda \subset L(\Lambda).$$

若令 $\tilde{\mathfrak{g}}_1^- = \tilde{\mathfrak{g}}_1 \cap \tilde{\mathfrak{n}}_-$，则

$$W(\Lambda) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1^-) \cdot v_\Lambda.$$

根据庞加莱-伯克霍夫-维特定理， $W(\Lambda)$ 有一个由单项式向量构成的张成集

$$\{x_{\gamma_1}(-n_1)x_{\gamma_2}(-n_2)\cdots x_{\gamma_t}(-n_t)v_\Lambda \,|\, t \in \mathbb{Z}_+, \gamma_i \in \Gamma, n_i \in \mathbb{N}\}. \tag{3.1}$$

该张成集中的元素可以与 $U(\tilde{\mathfrak{g}}_1^-) = S(\tilde{\mathfrak{g}}_1^-)$ 中的单项式对应起来。我们有时将来自 $\tilde{\mathfrak{g}}_1^-$的元素称为单项式的变量、元素 或因子。

Introdu以如下方式在单项式上定义一个线性序。首先，在 t 上定义一个线性序 he 颜色 rs Γ:

$$\gamma_2 > \gamma_3 > \cdots > \gamma_\ell > \gamma_{\underline{\ell}} > \cdots > \gamma_{\underline{2}}.$$

˜在变量集合 $\Gamma = \{x_\gamma(n) \,|\, \gamma \in \Gamma,\ n \in \mathbb{Z}\}$ 上，通过 $x_\alpha(i) < x_\beta(j)$ 定义线性序；如果 $i < j$ 或$i = j$， $\alpha < \beta$，则成立。最后，为了在 $S(\tilde{\mathfrak{g}}_1^-)$ 中的单项式上定义序，假设变量从右到左按降序排列。单项式集合上的序 $<$ 定义为字典序，即从右到左（从最大变量到最小变量）比较变量。

序 $<$ 与乘法相容（见 [P1, T1]）：

$$\text{if} \quad \mathbf{m} < \mathbf{m}' \quad \text{then} \quad \mathbf{m}\mathbf{m}_1 < \mathbf{m}'\mathbf{m}_1 \tag{3.2}$$

˜对于单项式 $\mathbf{m}$， $\mathbf{m}'$， $\mathbf{m}_1 \in \mathbb{C}[\Gamma]$。

我们还将单项式的长度定义为其因子的个数。

4. Vertex operator construction

本文余下部分，我们将讨论范围限定在类型为 D_4的 $\mathfrak{g}$ 情形。在这种情形下，颜色集为 $\Gamma = \{\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_4, \gamma_3, \gamma_2\}$。 $\tilde{\mathfrak{g}}$的基本权为$\Lambda_0, \ldots, \Lambda_4$，相应的标准模 $L(\Lambda_i)$对 $i = 0,1,3,4$而言是1级的，对$i = 2$而言是2级的。

通过 Frenkel-Kac-Segal 构造（详情见 [LL] ），标准模可实现在齐次海森堡子代数的福克空间 $M(1)$ 与权格的群代数 $\mathbb{C}[P]$ （以基 $e^\lambda, \lambda \in P$ 为基）的张量积 $V_P = M(1) \otimes \mathbb{C}[P]$ 上。 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的作用由以下顶点算子公式给出：

$$x_\alpha(z) = E^-(-\alpha, z)E^+(-\alpha, z)e^\alpha \epsilon(\alpha, \cdot)z^\alpha,$$

其中， $z^\lambda \cdot e^\mu = e^\mu z^{\langle \lambda, \mu \rangle}$, $e_\alpha = e^\alpha \epsilon(\alpha, \cdot)$ 是乘法算子 e^α 与 2-余循环 $\epsilon(\cdot, \cdot)$ 的乘积，而 $E^\pm(\alpha, z) = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \alpha(\pm m) z^{\mp m}/\pm m\right) \otimes 1$。

基本模 $L(\Lambda_0) = V_Q = M(1) \otimes \mathbb{C}[Q]$ 是一个顶点算子代数，而 $L(\Lambda_i) = M(1) \otimes e^{\omega_i}\mathbb{C}[Q]$ 对于 $i = 1$，3，4 是该代数的模。2 级标准模 $L(\Lambda_2)$ 可以实现为两个旋量表示副本的张量积的子模，即 $L(\Lambda_3) \otimes L(\Lambda_3)$（同理， $L(\Lambda_4) \otimes L(\Lambda_4)$ 也如此）（见 [Ba]）。层 $k > 1$ 的标准模可以实现为 1 级和 2 级标准模的张量积的子模：

$$L(\Lambda) \subset L(\Lambda_0)^{k_0} \otimes L(\Lambda_1)^{k_1} \otimes L(\Lambda_2)^{k_2} \otimes L(\Lambda_3)^{k_3} \otimes L(\Lambda_4)^{k_4} \subset V_P^{\otimes k}.$$

通过对顶点算子 $V_P^{\otimes k}$ 取张量积， $V_P^{\otimes k}$ 成为顶点算子代数 $V_Q^{\otimes k}$ 的一个模（见 [DL]）。

现在我们回顾 [Ba] 中顶点算子之间的一些关系，并将其推广到层 k 的情形。

引理1. 对于 $\gamma, \delta, \tau \in \Gamma$

$$x_\delta(-1)x_\gamma(-1)v_{\Lambda_0} = 0 \qquad if \qquad \delta \neq \underline{\gamma}, \tag{4.1}$$

$$x_{\underline{\gamma}}(-1)x_\gamma(-1)v_{\Lambda_0} = Cx_{\underline{\delta}}(-1)x_\delta(-1)v_{\Lambda_0} = C'e^{2\omega}v_{\Lambda_0}, \tag{4.2}$$

$$x_\tau(-1)x_\delta(-1)x_\gamma(-1)v_{\Lambda_0} = 0, \tag{4.3}$$

其中 $C, C' \in \mathbb{C}$ 是一些非零常数。

这给出了1级模的顶点算子之间的关系（参见 [DL, LL]）：

定理2. 设 $\gamma, \delta \in \Gamma$. 则在 $L(\Lambda_i)$ 上， $i = 0,1, \ell - 1, \ell$ 满足以下关系

$$x_\delta(z)x_\gamma(z) = 0 \qquad if \qquad \delta \neq \underline{\gamma},$$
$$x_{\underline{\gamma}}(z)x_\gamma(z) = Cx_{\underline{\delta}}(z)x_\delta(z),$$
$$x_\delta(z)x_{\underline{\gamma}}(z)x_\gamma(z) = 0,$$

对于某个非零常数 $C \in \mathbb{C}$。

同一原理也可应用于高等级模。由关系 (4.1) 至 (4.3) 可得

$$x_{\delta_1}(-1)x_{\delta_2}(-1)\cdots x_{\delta_{k+1}}(-1)v_{\Lambda_0}^{\otimes k} = 0,$$

如果集合 $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k+1}\}$ 不包含任何一对 γ， γ。同样，这给出了层 k 模 $L(\Lambda)$ 的顶点算子之间的关系：

$$x_{\delta_1}(z)x_{\delta_2}(z)\cdots x_{\delta_{k+1}}(z) = 0. \tag{4.4}$$

我们还回顾了[Ba]中产生1级和2级模的初始条件的关系。

L引理 3. 对于*1*级 模 $L(\Lambda_1)$、 $L(\Lambda_3)$ 和 $L(\Lambda_4)$，以下关系成立：

$$\begin{aligned} x_\gamma(-1)v_{\Lambda_1} &= 0 \qquad for \qquad \gamma \in \Gamma, \\ x_\gamma(-1)v_{\Lambda_3} &= 0 \qquad for \qquad \gamma \in \{2,3,\underline{4}\}, \\ x_\gamma(-1)v_{\Lambda_4} &= 0 \qquad for \qquad \gamma \in \{2,3,4\}. \end{aligned}$$

对于层 2 模 $L(\Lambda_2)$ ，以下关系成立

$$\begin{aligned} x_2(-1)v_{\Lambda_2} &= 0, \\ x_\tau(-1)x_\delta(-1)v_{\Lambda_2} &= 0 \end{aligned}$$

对于 $\tau \leq \delta$ 和 $\tau \neq \delta$。

定义单纯流算子 $[\omega]$： $V_P \to V_P$，由 $[\omega] = e^\omega \epsilon(\cdot, \omega)$ 给出，其限制

$$\begin{aligned} L(\Lambda_0) &\xrightarrow{[\omega]} L(\Lambda_1) \xrightarrow{[\omega]} L(\Lambda_0) \\ L(\Lambda_3) &\xrightarrow{[\omega]} L(\Lambda_4) \xrightarrow{[\omega]} L(\Lambda_3) \end{aligned}$$

ar1级标准模上的单纯流算子。以下关系成立 d:

$$[\omega]v_0 = C_1 v_1 \tag{4.5}$$
$$[\omega]v_1 = C_2 x_2(-1)x_{\underline{2}}(-1)v_0 \tag{4.6}$$
$$[\omega]v_3 = C_3 x_{\underline{4}}(-1)v_4 \tag{4.7}$$
$$[\omega]v_4 = C_4 x_4(-1)v_3 \tag{4.8}$$

对于某些非零常数 C_1, C_2, C_3, C_4。

以下交换关系成立

$$x_\alpha(n)[\omega] = [\omega]x_\alpha(n + \alpha(\omega)), \qquad \alpha \in R, \quad n \in \mathbb{Z},$$

（参见 [DLM] 和 [Ga]）。对于 $\gamma \in \Gamma$，有

$$x_\gamma(-n-1)[\omega] = [\omega]x_\gamma(-n).$$

对于单项式 $\mathbf{m} \in U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)$，用 $\mathbf{m}^\pm$ 表示将$\mathbf{m}$中的次数增加/减少 **1** 所得到的单项式。用 $\mathbf{m}^{\pm m}$ 表示将 $\mathbf{m}$中的次数增加/减少 m 所得到的单项式。那么

$$\mathbf{m}[\omega] = [\omega]\mathbf{m}^+.$$

在层 $k > 1$ 的情形下，使用 **1**级单纯流算子的张量积

$$[\omega] = [\omega] \otimes \cdots \otimes [\omega].$$

特别地， $L(\Lambda_2) \xrightarrow{[\omega]} L(\Lambda_2)$。以下关系成立

$$[\omega]v_2 = C \cdot x_3(-1)x_{\underline{3}}(-1)v_2, \tag{4.9}$$

其中某个非零常数为 C。

5. Difference and initial conditions

对于单项式 $\mathbf{m}$ 和给定的 $j \in \mathbb{N}$，令 a_t （分别为 a_t）表示 $\mathbf{m}$ 中 $x_t(-j)$ （分别为 $x_t(-j)$）因子的数量。此外，令 b_t （分别为 b_t）表示 $\mathbf{m}$ 中 $x_t(-j-1)$ （分别为 $x_t(-j-1)$）因子的数量。若单项式 $\mathbf{m}$ 满足层 k 的差分条件，即满足以下频率条件，则称其满足该层的差分条件：

(i) $b_2 + a_2 + a_3 + a_4 + a_4 + a_3 \leq k$,
(ii) $b_2 + a_3 + a_4 + a_4 + a_3 + a_2 \leq k$, (iii)
$b_3 + b_2 + a_2 + a_3 + a_4 + a_4 \leq k$, (iv)
$b_3 + b_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_3 \leq k$, (v)
$b_4 + b_3 + b_2 + a_2 + a_3 + a_4 \leq k$,

(vi) $b_4 + b_3 + b_2 + a_2 + a_3 + a_4 \le k$,
(vii) $b_4 + b_4 + b_3 + b_2 + a_2 + a_3 \le k$,
(viii) $b_3 + b_4 + b_4 + b_2 + a_2 + a_3 \le k$,
(ix) $b_3 + b_4 + b_4 + b_3 + b_2 + a_2 \le k$, (x)
$b_2 + b_3 + b_4 + b_4 + b_3 + a_2 \le k$,

对于每个 $j \in \mathbb{N}$。

我们回顾代数 $D_4^{(1)}$ 的 1 级和 2 级标准模中 Feigin-Stoyanovsky 型子空间的相关结果，这些结果出自 [Ba]。定理2中顶点算子之间的关系使我们能够将 1 级和 2 级模的 Feigin-Stoyanovsky 子空间的 PBW张成集化简为一个基。该基中的单项式满足某些组合条件，即差分条件和初始条件。

命题4。 不满足层 k 差分条件的单项式可以从张成集(3.1)中排除。

证明： 我们证明，任何$\mathbf{m}$ 不满足差分条件的单项式都必然包含一个长度为 $k+1$ 的子单项式 $\mathbf{m}'$，它是在某个关系中出现的最小单项式。我们将这类最小单项式称为相应关系的首项 。因此$\mathbf{m}'$可以替换为一些更大的单项式；根据 (3.2)，$\mathbf{m}$ 也可以如此替换。我们先对条件 (ii) 和 (v) 证明这一点，然后简述其余情况的论证。

（ii）假设$\mathbf{m}$ 不满足差分条件（ii）。这意味着$\mathbf{m}$ 具有一个子单项式

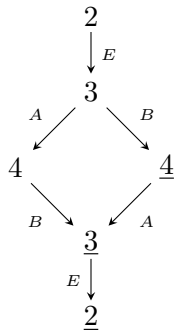
$$\mathbf{m}' = x_2(-j-1)^{b_2} x_{\underline{3}}(-j)^{a_{\underline{3}}} x_{\underline{4}}(-j)^{a_{\underline{4}}} x_4(-j)^{a_4} x_3(-j)^{a_3} x_2(-j)^{a_2},$$

其中为 $b_2 + a_{\underline{3}} + a_{\underline{4}} + a_4 + a_3 + a_2 = k+1$。为了得到关于$\mathbf{m}'$的关系，从一个关系开始

$$x_4(z)^{a_{\underline{3}}+a_4} x_3(z)^{a_{\underline{4}}} x_2(z)^{b_2+a_3+a_2} = 0 \tag{5.1}$$

（见（4.4））。

将 $E = x_{\epsilon_3-\epsilon_2}$、 $A = x_{\epsilon_4-\epsilon_3}$ 和$B = x_{-\epsilon_4-\epsilon_3}$ 记为 $\mathfrak{l}_0$的Chevalley生成元。 $\mathfrak{l}_0$ 在 $\mathfrak{g}_1$ （因而也在$\hat{\mathfrak{g}}_1$）上的伴随作用如下图所示：



经过适当的归一化，这对应于以下关系：

$$\begin{aligned}
&E \cdot x_2 = x_3, \quad E \cdot x_{\underline{3}} = x_{\underline{2}}, \quad E \cdot x_3 = E \cdot x_4 = E \cdot x_{\underline{4}} = E \cdot x_{\underline{2}} = 0,\\
&A \cdot x_3 = x_4, \quad A \cdot x_{\underline{4}} = x_{\underline{3}}, \quad A \cdot x_2 = A \cdot x_4 = A \cdot x_{\underline{3}} = A \cdot x_{\underline{2}} = 0,\\
&B \cdot x_3 = x_{\underline{4}}, \quad B \cdot x_4 = x_{\underline{3}}, \quad B \cdot x_2 = B \cdot x_{\underline{4}} = B \cdot x_{\underline{3}} = B \cdot x_{\underline{2}} = 0.
\end{aligned}$$

对关系 (5.1) 施加 $B^{a_4+a_3}$ 作用，得到

$$\sum C_r x_{\underline{3}}(z)^{a_{\underline{4}}+a_{\underline{3}}-r} x_{\underline{4}}(z)^r x_4(z)^{a_4+r-a_{\underline{4}}} x_3(z)^{a_{\underline{4}}-r} x_2(z)^{b_2+a_3+a_2} = 0, \tag{5.2}$$

其中 C_r 为非零整数，求和遍历 $0 \le r \le a_4$、 $a_4 - a_4 \le r$。接下来，对 (5.2) 施加 E^{a_3} 作用，得到

$$\sum C_{r,s} x_2(z)^s x_3(z)^{a_4+a_3-r-s} x_4(z)^r x_4(z)^{a_4+r-a_4} x_3(z)^{a_4-r+a_3-s} x_2(z)^{b_2+a_2+s} = 0, \tag{5.3}$$

其中 $C_{r,s}$ 是非零整数，求和遍历 $0 \le r \le a_4$, $a_4 - a_4 \le r$, $0 \le s \le a_3$,$s \le a_3 + a_4 - r$。

系数 $z^{b_2 j + (a_3+a_4+a_4+a_3+a_2)(j-1)}$ 给出了单项式之间的一个关系。注意，这个关系中的所有单项式长度均为 $k+1$，且总次数相同。因此，该关系中的最小单项式将具有最小形状，也就是说，所有因子的次数至多相差 1。等价地，最小单项式将有 b_2 个次数为$-j-1$的因子，以及 $a_3+a_4+a_4+a_3+a_2$个次数为 $-j$的因子。对于这种形状，我们需要从 (5.3) 中找出颜色的最小配置：先考虑单项式的 $(-j)$-部分，再考虑 $(-j-1)$-部分。因此，最小单项式的形式如下

$$x_2(-j-1)^{b_2} x_2(-j)^s x_3(-j)^{a_4+a_3-r-s} x_4(-j)^r x_4(-j)^{a_4+r-a_4} x_3(-j)^{a_4-r+a_3-s} x_2(-j)^{a_2+s}$$

我们寻找满足 r, s 的对象，使得这样的单项式最小。这意味着， $x_2(-j)$ 的指数需要尽可能小，接着 $x_3(-j)$ 的指数需要尽可能小，以此类推。这首先意味着 s 最小，因此 $s = 0$。接下来， r 需要最大，因此 $r = a_4$。由此可知，该关系的最小单项式恰为 $\mathbf{m}'$。

(v) 假设 $\mathbf{m}$ 不满足差分条件 (v)。这意味着 $\mathbf{m}$ 有一个子单项式

$$\mathbf{m}' = x_4(-j-1)^{b_4} x_3(-j-1)^{b_3} x_2(-j-1)^{b_2} x_2(-j)^{a_2} x_3(-j)^{a_3} x_4(-j)^{a_4},$$

其中 $b_4 + b_3 + b_2 + a_2 + a_3 + a_4 = k+1$。这次从

$$x_4(z)^{b_4+a_2+a_3+a_4} x_3(z)^{b_3} x_2(z)^{b_2} = 0. \tag{5.4}$$

用 $B^{a_2+a_3}$ 作用于关系 (5.4)，得到

$$\sum C_r x_3(z)^{a_3+a_2-r} x_4(z)^r x_4(z)^{b_4+a_4+r} x_3(z)^{b_3-r} x_2(z)^{b_2} = 0, \tag{5.5}$$

其中 C_r 是非零整数，求和遍历 $0 \le r \le a_3 + a_2$、 $r \le b_3$。接下来，用 E^{a_2} 作用于 (5.5)，得到

$$\sum C_{s,r} x_2(z)^{a_2-s} x_3(z)^{a_3-r+s} x_4(z)^r x_4(z)^{b_4+a_4+r} x_3(z)^{b_3-r+s} x_2(z)^{b_2-s} = 0, \tag{5.6}$$

其中 $C_{s,r}$ 是非零整数，求和遍及 $0 \le r \le a_3 + a_2$, $r \le b_3$, $0 \le s \le b_2$,$s \le a_2$。

系数 $z^{(b_4+b_3+b_2)j + (a_2+a_3+a_4)(j-1)}$ 给出了单项式之间的一个关系。同样，这个关系中的所有单项式长度均为 $k+1$，且总次数相同。因此，该关系中的最小单项式将具有最小形状——它将有 $b_4+b_3+b_2$ 个次数为$-j-1$ 的因子，以及 $a_2+a_3+a_4$ 个次数为 $-j$的因子。我们需要先针对单项式的 $(-j)$ 部分，再针对 $(-j-1)$ 部分，找出这种形状在 (5.6) 中的最小颜色配置。因此，最小单项式的形式为

$$x_4(-j-1)^{b_4+r} x_3(-j-1)^{b_3-r+s} x_2(-j-1)^{b_2-s} x_2(-j)^{a_2-s} x_3(-j)^{a_3-r+s} x_4(-j)^r x_4(-j)^{a_4}.$$

我们寻找使这样的单项式最小的 r, s。首先注意， r 需要取最小值，因此$r = 0$。其次， s 需要取最小值，因此 $s = 0$。由此可知，该关系的最小单项式恰为 $\mathbf{m}'$。

对于其他差分条件，我们只简要概述论证。

(i) 令 $b_2 + a_2 + a_3 + a_4 + a_4 + a_3 = k+1$。 $B^{a_4} E^{a_2+a_4+a_3}$ 对该关系的作用

$$x_3(z)^{a_2+a_3} x_4(z)^{a_4} x_2(z)^{b_2+a_4+a_3} = 0$$

给出一个关系

$$\sum C_{s、\ r}\underline{x_2}(z)^{a_{\underline{2}}+a_3+a_{\underline{4}}-r}x_{\underline{3}}(z)^{a_{\underline{3}}-a_3-a_{\underline{4}}+r+s}x_{\underline{4}}(z)^{a_{\underline{4}}-s}x_4(z)^{a_4-s}x_3(z)^{r-a_{\underline{4}}+s}x_2(z)^{b_2+a_3+a_{\underline{4}}-r}=0$$

其中 $C_{s,\ r}$ 为非零整数，求和遍历 $0\leq r\leq a_2+a_3+a_4$、$a_3-a_3-\underline{a_4}\leq r\leq b_2+\underline{a_3}+a_4$、$0\leq s\leq a_4$、$a_4-r\leq s\leq \underline{a_4}$。

(iii) 设 $b_3+b_2+a_2+a_3+a_4+a_4=k+1$。$E^{a_2}B^{a_2+a_3+a_4}$ 的作用于该关系

$$x_4(z)^{a_4+a_{\underline{2}}+a_{\underline{3}}}x_3(z)^{b_3+a_{\underline{4}}}x_2(z)^{b_2}=0$$

给出一个关系

$$\sum C_{s,r}x_{\underline{2}}(z)^{a_{\underline{2}}-s}x_{\underline{3}}(z)^{a_{\underline{3}}+s+a_{\underline{4}}-r}x_{\underline{4}}(z)^{r}x_4(z)^{a_4+r-a_{\underline{4}}}x_3(z)^{b_3+a_{\underline{4}}-r+s}x_2(z)^{b_2-s}=0,$$

其中 $C_{s,\ r}$ 为非零整数，求和遍历 $0\leq r\leq a_2+a_3+a_4$、$r\leq b_3+a_4$、$0\leq \underline{s}\leq a_2$。

(iv) 令 $b_3+b_2+a_2+a_4+a_4+a_3=k+1$。$A^{a_4}E^{b_3+a_2+a_4+a_3}$ 对该关系的作用

$$x_{\underline{3}}(z)^{a_{\underline{2}}}x_{\underline{4}}(z)^{a_{\underline{4}}}x_2(z)^{b_3+b_2+a_3+a_4}=0$$

给出一个关系

$$\sum C_{s,r}x_{\underline{2}}(z)^{a_{\underline{2}}-r}x_{\underline{3}}(z)^{s+r}x_{\underline{4}}(z)^{a_{\underline{4}}-s}x_4(z)^{a_4-s}x_3(z)^{b_3+a_3+r+s}x_2(z)^{b_2-r}=0,$$

其中 $C_{s,\ r}$ 为非零整数，求和遍历 $0\leq r\leq a_2$、$0\leq s\leq a_4$。

(vi) 令 $b_4+b_3+b_2+a_2+a_3+a_4=k+1$。$E^{a_2}A^{a_2+a_3}$ 对该关系的作用

$$x_{\underline{4}}(z)^{b_{\underline{4}}+a_{\underline{2}}+a_{\underline{3}}+a_{\underline{4}}}x_3(z)^{b_3}x_2(z)^{b_2}=0$$

给出一个关系

$$\sum C_{s,r}x_{\underline{2}}(z)^{a_{\underline{2}}-s}x_{\underline{3}}(z)^{a_{\underline{3}}-r+s}x_{\underline{4}}(z)^{b_{\underline{4}}+a_{\underline{4}}+r}x_4(z)^{r}x_3(z)^{b_3-r+s}x_2(z)^{b_2-s}=0,$$

其中 $C_{s,\ r}$ 为非零整数，求和遍历 $0\leq r\leq a_2+a_3$、$0\leq s\leq a_2$、$r-a_3\leq s\leq b_2$。

(vii) 令 $b_4+b_4+b_3+b_2+a_2+a_3=k+1$。$E^{a_2}B^{b_4+a_2+a_3}$ 对该关系的作用

$$x_4(z)^{b_4+a_{\underline{2}}+a_{\underline{3}}}x_3(z)^{b_3+b_{\underline{4}}}x_2(z)^{b_2}=0$$

给出一个关系

$$\sum C_{s,r}x_{\underline{2}}(z)^{a_{\underline{2}}-s}x_{\underline{3}}(z)^{b_{\underline{4}}+a_{\underline{3}}-r+s}x_{\underline{4}}(z)^{r}x_4(z)^{b_4-b_{\underline{4}}+r}x_3(z)^{b_3+b_{\underline{4}}-r+s}x_2(z)^{b_2-s}=0,$$

其中 $C_{s,\ r}$ 为非零整数，求和遍历 $0\leq r\leq b_4+a_2+a_3$、$b_4-b_4\leq \underline{r}\leq b_{\underline{3}}+b_{\underline{4}}$、$0\leq s\leq a_2$、$r-b_4-a_3\leq s\leq b_2$。

(viii) 令 $b_3+b_4+b_4+b_2+a_2+a_3=k+1$。$E^{a_2}B^{b_4+b_3+a_2+a_3}$ 对该关系的作用

$$x_4(z)^{b_{\underline{3}}+b_4+a_{\underline{2}}+a_{\underline{3}}}x_3(z)^{b_{\underline{4}}}x_2(z)^{b_2}=0$$

给出一个关系

$$\sum C_{s,r}x_{\underline{2}}(z)^{a_{\underline{2}}-s}x_{\underline{3}}(z)^{b_{\underline{3}}+b_{\underline{4}}+a_{\underline{3}}-r+s}x_{\underline{4}}(z)^{r}x_4(z)^{b_4-b_{\underline{4}}+r}x_3(z)^{b_{\underline{4}}-r+s}x_2(z)^{b_2-s}=0,$$

其中 $C_{s,\ r}$ 为非零整数，求和遍历 $0\leq r\leq b_4$、$b_4-b_4\leq r$、$0\leq s\leq a_{\underline{2}}$、$r-b_4-b_3-a_3\leq s\leq b_2$。

(ix) 令 $b_3+b_4+b_4+b_3+b_2+a_2=k+1$。$B^{b_4}E^{b_4+b_3+a_2}$ 对该关系的作用

$$x_4(z)^{b_4}x_{\underline{3}}(z)^{b_{\underline{3}}+a_{\underline{2}}}x_2(z)^{b_{\underline{4}}+b_3+b_2}=0$$

给出一个关系

$$\sum C_{s,r}x_{\underline{2}}(z)^{b_{\underline{4}}+b_3+a_{\underline{2}}-s}x_{\underline{3}}(z)^{b_{\underline{3}}-b_3-b_{\underline{4}}+r+s}x_{\underline{4}}(z)^{b_{\underline{4}}-r}x_4(z)^{b_4-r}x_3(z)^{r+s-b_{\underline{4}}}x_2(z)^{b_2+b_3+b_{\underline{4}}-s}=0,$$

其中 $C_{s,r}$ 为非零整数，求和遍历 $0\leq s\leq b_3+b_4+a_2$, $b_3+b_4-b_3\leq s\leq b_2+b_{\underline{3}}+b_4$, $0\leq r\leq b_4$, $b_4-s\leq r\leq b_4$。

(x) 设 $b_2+b_3+b_4+b_4+b_3+a_2=k+1$。$B^{b_4}E^{b_2+b_4+b_3+a_2}$对该关系的作用

$$x_3(z)^{b_2+b_3+a_2}x_4(z)^{b_4}x_2(z)^{b_4+b_3}=0$$

给出一个关系

$$\sum C_{s,r}x_2(z)^{b_2+b_4+b_3+a_2-s}x_3(z)^{b_3-b_3-b_4+r+s}x_4(z)^{b_4-r}x_4(z)^{b_4-r}x_3(z)^{r+s-b_4}x_2(z)^{b_3+b_4-s}=0,$$

其中 $C_{s,r}$ 是非零整数，求和遍历 $0\le s\le b_3+b_4$, $s\ge b_3+b_4-b_3$, $0\le r\le b_4$,$b_4-s\le r\le b_4$。■

我们还定义单项式的初始条件：令 b_t（分别是 b_t）表示 $\mathbf{m}$ 中 $x_t(-1)$（分别是 $x_t(-1)$）因子的个数。若单项式 $\mathbf{m}$ 满足关于 $L(\Lambda)$,$\Lambda=k_0\Lambda_0+k_1\Lambda_1+k_2\Lambda_2+k_3\Lambda_3+k_4\Lambda_4$ 的初始条件，则以下频率条件成立：

(i) $b_2\le k_0$, (ii) $b_3+b_2\le k_0+k_2$, (iii)
$b_4+b_3+b_2\le k_0+k_2+k_3$, (iv)
$b_4+b_3+b_2\le k_0+k_2+k_4$, (v)
$b_4+b_4+b_3+b_2\le k_0+k_2+k_3+k_4$, (vi)
$b_3+b_4+b_4+b_2\le k_0+k_2+k_3+k_4$, (vii)
$b_3+b_4+b_4+b_3+b_2\le k_0+2k_2+k_3+k_4$, (viii)
$b_2+b_3+b_4+b_4+b_3\le k_0+2k_2+k_3+k_4$.

注 5。与其他情形一样（参见 [Ba、BPT、T2]），通过向 $\mathbf{m}$ 中添加“虚” (0)-因子，可以用差分条件来表示初始条件。令

$$\mathbf{m}_\Lambda=x_2(0)^{k_1}x_3(0)^{k_2}x_4(0)^{k_3}x_4(0)^{k_4}x_3(0)^{k_2}x_2(0)^{k_1}.$$

则单项式 $\mathbf{m}$满足 $L(\Lambda)$ 的差分条件和初始条件，当且仅当 $\mathbf{m}'=\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}_\Lambda$满足差分条件。事实上，初始条件就是以这种方式定义的，从而使该性质成立。

命题6。不满足层 k 的初始条件的单项式，可以从张成集 (3.1) 中排除。

证明：我们证明，对于一个不满足初始条件的单项式 $\mathbf{m}$，要么 $\mathbf{m}v_\Lambda=0$，要么单项式向量 $\mathbf{m}v_\Lambda$ 对某个关系是极小的。因此，$\mathbf{m}v_\Lambda$ 可以由更大的单项式向量替代。

假设 $\mathbf{m}=x_4(-1)^{b_4}x_3(-1)^{b_3}x_2(-1)^{b_2}$ 不满足初始条件 (iii)，即 $b_4+b_3+b_2>k_0+k_2+k_3$。那么，根据引理 3,

$$\mathbf{m}v_\Lambda=\mathbf{m}\left(v_{\Lambda_0}^{\otimes k_0}\otimes v_{\Lambda_1}^{\otimes k_1}\otimes v_{\Lambda_2}^{\otimes k_2}\otimes v_{\Lambda_3}^{\otimes k_3}\otimes v_{\Lambda_4}^{\otimes k_4}\right)=0,$$

因为$\mathbf{m}$ 的每个因子都会湮灭 v_{Λ_1}。因此，所有包含$\mathbf{m}$ 作为子单项式的单项式向量都可以从张成集中排除。如果$\mathbf{m}$ 不满足初始条件 (i)、(ii) 和 (iv)，也可以给出类似的论证。

接下来，假设$\mathbf{m}=x_3(-1)^{b_3}x_4(-1)^{b_4}x_4(-1)^{b_4}x_3(-1)^{b_3}x_2(-1)^{b_2}$ 不满足初始条件 (vii)。令 $\Lambda'=k_0\Lambda_0+k_2\Lambda_2+k_3\Lambda_3+k_4\Lambda_4$ 和 $\Lambda''=k_1\Lambda_1$。那么，由引理 3,

$$\mathbf{m}v_\Lambda=\mathbf{m}\left(v_{\Lambda'}\otimes v_{\Lambda''}\right)=\left(\mathbf{m}v_{\Lambda'}\right)\otimes v_{\Lambda''}.$$

现在，由模 $L(\Lambda')$ 关于差分条件 (ix) 的关系即可得出结论。如果$\mathbf{m}$ 不满足初始条件 (viii)，也可以给出类似的论证。

最后，假设 $\mathbf{m}=x_4(-1)^{b_4}x_4(-1)^{b_4}x_3(-1)^{b_3}x_2(-1)^{b_2}$ 不满足初始条件 (v)。B^{b_4} 对该关系的作用

$$x_4(-1)^{b_4}x_3(-1)^{b_4+b_3}x_2(-1)^{b_2}v_\Lambda=0$$

给出以下关系

$$\sum C_r x_{\underline{3}}(-1)^r x_{\underline{4}}(-1)^{b_4-r} x_4(-1)^{b_4-r} x_3(-1)^{b_3+r} x_2(-1)^{b_2} v_\Lambda = 0,$$

其中 C_r 为非零整数，求和遍历 $0 \le r \le b_4$, $r \le b_4$。单项式向量$\mathbf{m}v_\Lambda$ 是该关系中最小的，因此可以从张成集中排除。如果$\mathbf{m}$不满足初始条件 (vi)，也可以给出类似的论证。■

注7。 在 [BPT, T2] 中，用于证明 $W(\Lambda)$ 在层 k 情形下的张成集具有线性无关性的方法，关键依赖于这样一个事实：每个在层 k 上满足初始条件和差分条件的单项式，都可以按照张量因子进行分解，且各因子分别满足相应的初始条件和差分条件。对于 D_4，这一点并不成立：有一个单项式

$$x_3(-1)\, x_{\underline{3}}(-1)\, x_2(-2)\, x_3(-2)\, x_2(-3)\, x_3(-3)\, x_{\underline{3}}(-3)\, x_3(-4)^2$$

满足3级模的差分条件，但无法将其分解为两个单项式，分别满足1级模和2级模的差分条件。因此，无法在此处应用 [BPT, T2] 中线性无关性证明的论证思路。

注8。 我们计算与以下临界等式相对应的首项数量：

(i) $b_2 + a_2 + a_3 + a_4 + \bar{a}_4 + a_3 = k+1$, (ii)
$b_2 + a_3 + a_4 + \bar{a}_4 + \bar{a}_3 + a_2 = k+1$, (iii)
$b_3 + b_2 + a_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4 + a_4 = k+1$, (iv)
$b_3 + b_2 + a_2 + a_4 + \bar{a}_4 + \bar{a}_3 = k+1$, (v)
$b_4 + b_3 + b_2 + a_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4 = k+1$, (vi)
$b_4 + b_3 + b_2 + a_2 + a_3 + \bar{a}_4 = k+1$, (vii)
$b_4 + \bar{b}_4 + b_3 + b_2 + a_2 + \bar{a}_3 = k+1$, (viii)
$b_3 + \bar{b}_4 + b_4 + b_2 + a_2 + a_3 = k+1$, (ix)
$b_3 + \bar{b}_4 + b_4 + \bar{b}_3 + b_2 + a_2 = k+1$, (x)
$b_2 + \bar{b}_4 + b_4 + \bar{b}_3 + a_2 = k+1$。

注意，这些首项恰好是相对于第3节所定义的序而言，违反初始条件和差分条件的极小单项式。

令 #$LT(k)$ 表示层 k 上首项的数量。为了求得 #$LT(k)$，我们计算临界等式 (i) 到 (x) 的不同解的数量。方程 (i) 给出$\binom{k+6}{5}$ 个解。若 $a_2 > 0$，则方程 (ii) 的解不同于前面的解；这又给出 $\binom{k+5}{5}$个解。只有当 $b_3 > 0$ 时，方程 (iii) 的解才是新的；这又给出 $\binom{k+5}{5}$ 个解。其余方程也依照上述方法类推。可得

$$\#\mathrm{LT}(k) = \binom{k+6}{5} + 6\binom{k+5}{5} + 3\binom{k+4}{5} = \frac{(k+2)^2(k+3)^2(k+4)}{12}$$

这是层 k 上首项的总数。

我们可以将 #$LT(k)$ 与由 $x_\theta(-1)^{k+1}$ 张成的 $\mathfrak{l}_0$-模 V_k 的维数进行比较。根据魏尔维数公式（参见 [H]）

$$\dim V_k = \frac{(k+2)(k+3)^2(k+4)}{12}.$$

因此

$$\#\mathrm{LT}(k) = (k+2)\cdot \dim V_k.$$

对于每个关系，都有 $k+2$ 个首项，每个首项对应一种不同的最小形状。因此，关系 (i) 至 (x) 描述了与 Frenkel-Kac-Segal 关系上的 $\mathfrak{l}_0$ 作用相对应的所有首项

$$x_\theta(z)^{k+1} = 0.$$

T这为相信上述张成集实际上是一个基提供了理由 .

6. Spanning sets of standard modules

与其他情形类似（参见 [FS、P1、P2、P3]），整个标准模 $L(\Lambda)$ 的张成集可以由 $W(\Lambda)$ 的张成集取极限得到。

Set

$$e = \prod_{\gamma\in\Gamma} e_\gamma.$$

命题 9 ([P1, P2, P3]). $L(\Lambda) = \langle e\rangle U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)v_\Lambda$.

命题 9 已在 A_ℓ 和 B_2 的情形下于 [P1, P2, P3], 中证明，且此情形下也有类似的证明。

由于

$$\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\gamma_{\underline{4}}+\gamma_{\underline{3}}+\gamma_{\underline{2}} = 6\epsilon_1 = 6\omega,$$

则 $e = C[\omega]^6$, 对于某个 $C\neq 0$。因此

推论 10。 $L(\Lambda) = \langle[\omega]^2\rangle U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)v_\Lambda$。

定义极端向量

$$v_\Lambda^{(-2m)} = [\omega]^{-2m}v_\Lambda, \qquad m\in\mathbb{Z}$$

以及相应的平移 Feigin-Stoyanovsky 型子空间

$$W_{-2m} = U(\tilde{\mathfrak{g}}_1)v_\Lambda^{(-2m)}.$$

这给出一个嵌入序列

$$\begin{array}{c}\cdots \xrightarrow{[\omega]^{-2}} W_0 \xrightarrow{[\omega]^{-2}} W_{-2} \xrightarrow{[\omega]^{-2}} W_{-4} \xrightarrow{[\omega]^{-2}} W_{-6} \xrightarrow{[\omega]^{-2}} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{[\omega]^{-2}} v_\Lambda \xrightarrow{[\omega]^{-2}} v_\Lambda^{(-2)} \xrightarrow{[\omega]^{-2}} v_\Lambda^{(-4)} \xrightarrow{[\omega]^{-2}} v_\Lambda^{(-6)} \xrightarrow{[\omega]^{-2}} \cdots\end{array} \tag{6.1}$$

根据推论 10,

$$L(\Lambda) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} W_{-2m}.$$

由于

$$[\omega]^{-2m}\mathbf{m}v_\Lambda = \mathbf{m}^{+2m}v_\Lambda^{(-2m)},$$

可以通过取 W 的一个张成集并移动单项式的次数，得到 W_{-2m} 的一个张成集。若 $\mathbf{m}$ 满足 初始条件 IC_{2m}，对于 $W(\Lambda)$, 则称其满足初始条件；当且仅当它不包含次数为 $2m$ 或更高的元素，且次数为 $2m-1$ 的元素满足与 $\mathbf{m}^{+2m}$ 中次数为 -1 的元素的初始条件相对应的附加条件时，$\mathbf{m}^{+2m}$ 满足初始条件。

命题 11. 该集合

$$\mathcal{B}_{-2m} = \{\mathbf{m}v_\Lambda^{(-2m)} \mid \mathbf{m} \textit{ satisfies } DC \textit{ and } IC_{2m} \textit{ for } W(\Lambda)\},$$

是 W_{-2m}的一个生成集。

为描述嵌入序列 (6.1), 令

$$\mathbf{n}_0 = x_2(-1)x_{\underline{2}}(-1), \qquad \mathbf{n}_1 = 1, \qquad \mathbf{n}_2 = x_3(-1)x_{\underline{3}}(-1),$$
$$\mathbf{n}_3 = x_4(-1), \qquad \mathbf{n}_4 = x_{\underline{4}}(-1).$$

此外，令

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{n}_1^-\mathbf{n}_0, \qquad \mathbf{m}_1 = \mathbf{n}_0^-\mathbf{n}_1, \qquad \mathbf{m}_2 = \mathbf{n}_2^-\mathbf{n}_2,$$
$$\mathbf{m}_3 = \mathbf{n}_4^-\mathbf{n}_3, \qquad \mathbf{m}_4 = \mathbf{n}_3^-\mathbf{n}_4.$$

引理 1 和 3、关系 (4.5) 至 (4.9) 以及注 5 给出

命题12. *(i)* 单项式 $\mathbf{n}_i$, $i = 0, 1, 2,3, 4$, 是因子次数大于 -1 且在 v_{Λ_i} 上作用非平凡的极大单项式，并且

$$\mathbf{n}_0 v_{\Lambda_0} = C_0[\omega]v_{\Lambda_1}, \qquad \mathbf{n}_1 v_{\Lambda_1} = C_1[\omega]v_{\Lambda_0}, \qquad \mathbf{n}_2 v_{\Lambda_2} = C_2[\omega]v_{\Lambda_2},$$
$$\mathbf{n}_3 v_{\Lambda_3} = C_3[\omega]v_{\Lambda_4}, \qquad \mathbf{n}_4 v_{\Lambda_4} = C_4[\omega]v_{\Lambda_3},$$

对于某些 $C_i \neq 0$、$i = 0$、.....、4。

(ii) 单项式 $\mathbf{m}_i$, $i = 0,1, 2,3, 4$ 是次数大于 -2 的因子中作用于 v_{Λ_i} 上不为零的最大单项式，并且

$$\mathbf{m}_i v_{\Lambda_i} = C_i'[\omega]^2 v_{\Lambda_i},$$

对于某些 $C_i' \neq 0$、$i = 0$、.....、4。

(iii) 单项式 $\mathbf{m}$ 满足 $W(\Lambda_i)$ 的差分条件和初始条件，当且仅当 $\mathbf{m}\mathbf{m}_i^{+2}$ 满足差分条件。

对于高层模 $L(\Lambda)$、$\Lambda = k_0\Lambda_0 + k_1\Lambda_1 + k_2\Lambda_2 + k_3\Lambda_3 + k_4\Lambda_4$，设其最高权向量为 $v_\Lambda = v_{\Lambda_0}^{\otimes k_0} \otimes v_{\Lambda_1}^{\otimes k_1} \otimes v_{\Lambda_2}^{\otimes k_2} \otimes v_{\Lambda_3}^{\otimes k_3} \otimes v_{\Lambda_4}^{\otimes k_4}$

$$\mathbf{m}_\Lambda = \mathbf{m}_0^{k_0}\mathbf{m}_1^{k_1}\mathbf{m}_2^{k_2}\mathbf{m}_3^{k_3}\mathbf{m}_4^{k_4}.$$

于是由命题12和（3.2）可得

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_\Lambda v_\Lambda &= (\mathbf{m}_0 v_{\Lambda_0})^{\otimes k_0} \otimes (\mathbf{m}_1 v_{\Lambda_1})^{\otimes k_1} \otimes (\mathbf{m}_2 v_{\Lambda_2})^{\otimes k_2} \otimes (\mathbf{m}_3 v_{\Lambda_3})^{\otimes k_3} \otimes (\mathbf{m}_4 v_{\Lambda_4})^{\otimes k_4} \\ &= (C_0'[\omega]^2 v_{\Lambda_0})^{\otimes k_0} \otimes (C_1'[\omega]^2 v_{\Lambda_1})^{\otimes k_1} \otimes (C_2'[\omega]^2 v_{\Lambda_2})^{\otimes k_2} \otimes (C_3'[\omega]^2 v_{\Lambda_3})^{\otimes k_3} \otimes (C_4'[\omega]^2 v_{\Lambda_4})^{\otimes k_4} \\ &= C'[\omega]^2 v_\Lambda,\end{aligned}$$

其中 $C', C_1', \ldots, C_4' \neq 0$。

注意，除一个标量因子外，

$$\mathbf{m}v_\Lambda = \mathbf{m}[\omega]^{-2}[\omega]^2 v_\Lambda = \mathbf{m}\mathbf{m}_\Lambda^{+2} v_\Lambda^{(-2)},$$

对于单项式 $\mathbf{m}$。因此， W 的张成集可以嵌入到 W_{-2}的张成集中，

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_{-2}.$$

归纳地继续下去，可得一列包含关系

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_{-2} \subset \mathcal{B}_{-4} \subset \cdots \subset \mathcal{B}_{-2t} \subset \cdots . \tag{6.2}$$

要得到整个 $L(\Lambda)$的张成集，应取“极限 $t \to \infty$”，即取序列（6.2）的归纳极限。形式化地，令

$$v_\Lambda^{(-2t)} = \mathbf{m}_\Lambda^{+2t+2}\mathbf{m}_\Lambda^{+2t+4}\cdots v_\Lambda^{(-\infty)}.$$

如果半无限单项式 $\mathbf{m}$ 从某一点开始由 $\mathbf{m}_\Lambda$ 的连续平移组成，则称它具有周期尾部，或者称其稳定，

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}'\mathbf{m}_\Lambda^{+2t+2}\mathbf{m}_\Lambda^{+2t+4}\cdots ,$$

对某个 $t \in \mathbb{Z}$ 成立。

定理13。集合

$$\overline{\mathcal{B}} = \{\mathbf{m}v_\Lambda^{(-\infty)} \,|\, \mathbf{m} \textit{ stabilizes and satisfies } DC\}$$

是 $L(\Lambda)$的生成集。

由 [Ba] 可知，对于 Λ，基本权 $\mathcal{B}_0$ 是 $W(\Lambda)$ 的一组基，因此

推论14。若 Λ 是基本权，则集合

$$\overline{\mathcal{B}} = \{\mathbf{m}v_\Lambda^{(-\infty)} \,|\, \mathbf{m} \textit{ stabilizes and satisfies } DC\}$$

是 $L(\Lambda)$ 的基。

Acknowledgements

GT 的资助来自欧盟通过国家复苏与韧性计划推出的 NextGenerationEU 计划，资助项目为“数学基础研究”（UFZG-NPOO- 25-589）。

References

[Ba] I. Baranovi´c, *Combinatorial bases of Feigin-Stoyanovsky's type subspaces of level 2 standard modules for* $D_4^{(1)}$, 《通讯代数》39 (2011), 第 3 期, 1007–1051[BPT] I. Baranovi´c、M. Primc 和 G. Trup˘cevi´c, *Bases of Feigin-Stoyanovsky's type subspaces for* $C_\ell^{(1)}$, 《拉马努金杂志》45 (2018), 第 1 期, 265–289[C] C. C˘alinescu, *Principal subspaces of higher-level standard* $\widehat{\mathfrak{sl}(3)}$*-modules*, 《纯粹与应用代数杂志》210 (2007), 第 2, 559 575 – CLM S. Capparelli、J. Lepowsky 和 A. Milas, [1] *The Rogers-Ramanujan recursion and intertwining operators*, 《当代数学通讯》 **5** 2003 6, 947 966 [2] ( ), 第 – 期 CLM S. Capparelli、J. Lepowsky 和 A. Milas, *The Rogers-Selberg recursions the Gordon-Andrews identities* , , 《拉马努金杂志》( ), 第 – 期 *and intertwining operators* **12** 2006 3, 379 397 [ ] DL C. Dong、J. Lepowsky, *Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators*, 《数学进展》丛书 112，Birkha ¨ 1993 user，波士顿, [ ] DLM C. Dong、H. Li 和 G. Mason, *Simple currents and extensions of vertex operator algebras*, 《数学物理通讯》 **180** 1996 ˘ 3, 671 707 ( )，第 – 期 FS A. V. Stoyanovskii 和 B. L. Feigin, 《泛函分析及其应用》28 (1994)，第 1 期，55–72; [ ] 译自《泛函分析及其应用》28 (1994)，第 1 期，68–90，96 B. Feigin、A. V. Stoyanovsky, *Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifolds* 9308079 , hep-th/ Ge G. *Combinatorial constructions of modules for infinite-dimensional Lie algebras. I. Principal* [ ] Georgiev, *subspace* **112** 1996 3, 247 , 《纯粹与应用代数杂志》( )，第 – 期[ ] 286 *The automorphisms of affine fusion rings* Ga T. Gannon, , 《数学进展》 **165** 2002 2, 165 193 ( )，第 – 期 H J. Humphreys, , 施普林 [ ] *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* 格，纽约，1994[J] M. Jerkovi´c, *Recurrence relations for characters of affine Lie algebra* $A_l^{(1)}$, 《纯粹与应用代数杂志》213 (2009 6, 913 926)，第 – 期 K V. G. Kac, [ ] *Infinite-dimensional Lie algebras* 3 1990 , 第 版。剑桥大学出版社，剑桥, [ ] *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations* LL J. Lepowsky、H.-S. Li, ,《数学进展》丛书 227，Birkh ¨auser，波士顿，2004[LP] J. Lepowsky 和 M. Primc, *Structure of the standard modules for the affine Lie algebra* $A_1^{(1)}$, 《当代数学》 46, 1985 美国数学会，普罗维登斯，RI，LW J. Lepowsky 和 R. L. Wilson, [1] *The structure of standard modules. I. Universal algebras and the Rogers-* *Ramanujan identities* **77** 1984 2, 199 290 , 《Invent. Math.》( )，第 – 期[LW2] J. Lepowsky 和 R. L. Wilson, *The structure of standard modules. II. The case* $A_1^{(1)}$, *principal gradation*, 《Invent. Math.》 **79** 1985 3, 417 442 ( )，第 – 期 MP A. Meurman 和 M. Primc, *Annihilating fields of standard modules of* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ [ ] ˜ *and combinatorial identities*, 《美国数学会回忆录》137 (1999)，第 652 期，viii+89 页[P1] M. Primc, *Vertex operator construction of standard modules for* $A_n^{(1)}$, 《太平洋数学杂志》162 (1994)，第 1 期，143–187 [2] *Basic representations for classical affine Lie algebras* **228** 2000 1, 1 50 P M. Primc, , 《代数杂志》( ), [3] *k r -admissible configurations and intertwining operators Lie algebras vertex operator alge-* 第 – 期 P M. Primc, (,) , 载于 , *bras and their applications* 425 434, 442, , – 《当代数学》, 美国数学会，普罗维登斯，RI, 2007 [1] ´ *Combinatorial bases of Feigin-Stoyanovsky's type subspaces of level 1 standard modules for* T G. Trup˘cevic, $\widetilde{\mathfrak{sl}}(\ell+1,\mathbb{C})$, 《通讯代数》38 (2010)，第 10 期，3913–3940[T2] G. Trup˘cevi ´ $l+$ c, 1 $\mathbb{C}$ *-modules* **322** 2009 10, 3744 3774 *Combinatorial bases of Feigin-Stoyanovsky's type subspaces of higher-level standard* $\widetilde{\mathfrak{sl}}$(,) , 《代数杂志》( )，第 – 期