arXiv:2601.19465v1 [math.HO] 27 Jan 2026

高维视觉证明、尼科马库斯四维定理，以及四次幂之和中神秘的不可约因子($3n^2+3n-1$)

Urtzi Buijs

Abstract. 幂和 $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$ 可用伯努利数通过Faulhaber公式来描述。该公式的前几种情形有多种视觉证明，进而得到因式分解形式的福尔哈伯多项式。

本文介绍一种技术，可为这些因式分解形式提供高维视觉证明，并对其中出现的根给出几何解释。

特别地，我们证明了四维中的尼科马库斯定理，并以视觉方式解释了在五维中有理数上的多项式环里不可约因子 $(3n^2+3n-1)$ 的出现。.

1. Introduction

数学家长期以来一直对形数着迷。早在公元前6世纪，毕达哥拉斯学派就已明确表现出按照几何图案对数字进行分类的兴趣。在此过程中，他们引入了三角数、平方数和其他多边形数 [11, p。 76]。

如今我们仍在使用一些形数术语，例如平方数 1，4，9，.....，这些数可以用石块或方块实际排列成正方形图案。尽管这些几何表示通常无法与代数的灵活性相媲美，但它们确实能让我们以视觉方式、用极其简洁的方法完成某些证明。最常见的例子之一，便是证明连续奇数之和总是一个平方数的视觉证明。

如果我们把每个奇数 $2n+1$ 表示为一种角形排列，由两条长度为 n的线段在一个正方形处相交构成，那么图示表明 $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$。

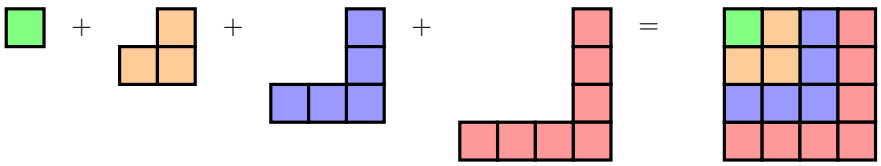


Figure 1. 连续奇数之和

任意多个连续自然数 1，2、3、.....相加，得到的都是一个三角数，并且有标准的几何解释。

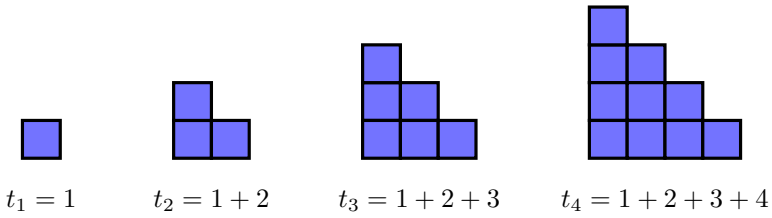


FIGURE 2. 三角数

虽然乍看之下，求出三角数的明确值似乎颇具挑战，因为这需要将许多连续项相加，但经典的视觉论证可以大大简化这一任务。关键在于，单个三角数 t_n 可能不容易直接计算，而它的两倍 $2t_n$ 则容易处理得多。将平面中的一个三角形排列旋转并平移后，与另一个副本拼合成一个矩形，就能以更高效的方式重新组织相同的信息，并轻松读出 t_n 的值。

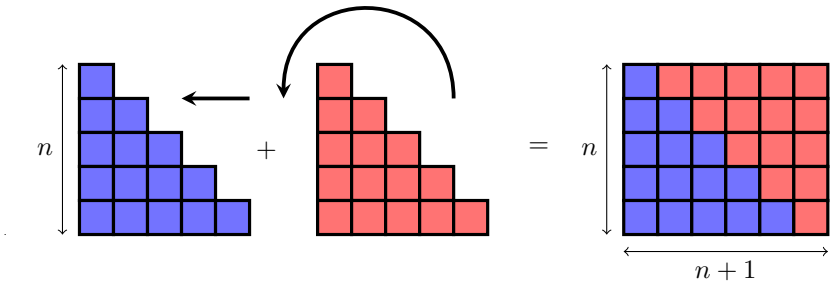


FIGURE 3. 三角数公式的视觉证明

由于矩形排列中的方块数量就是其底和高的乘积，我们得到 $2t_n = n(n+1)$，因此得出三角数的著名公式：

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

求前 n 个正方形之和的简单公式这一问题，早在阿基米德（公元前 287—212 年）时就已得到研究。在他的著作《论螺线》中，他结合阿基米德螺线下的面积，推导出了以下公式

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.2}$$

该公式由恒等式 [3, 命题 10，第 162] 页：

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (n+1)n^2 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2). \tag{1.3}$$

利用表达式 $1+2+3+\cdots+n = {}^{n}{}_{(n+1)\,2}$ 并化简，可以很容易得到公式（1.2）。这个恒等式也有一种直观解释 [18], ，如图4所示。

前 n 个立方体之和早在公元 1 世纪就已由杰拉萨的尼科马库斯在其著作《算术入门》中讨论过 [8], ，他在其中描述了

该公式前几种情形所遵循的规律。这个结果乍看之下几乎令人难以置信，但实际上是恒等式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2. \tag{1.4}$$

这一结果后来被其他作者进一步讨论，尤其是印度数学家阿耶波多在其《阿耶波多历数书》（公元499年）中进行了讨论 [4]。

这一恒等式也存在视觉证明 [10], ，如图5所示。

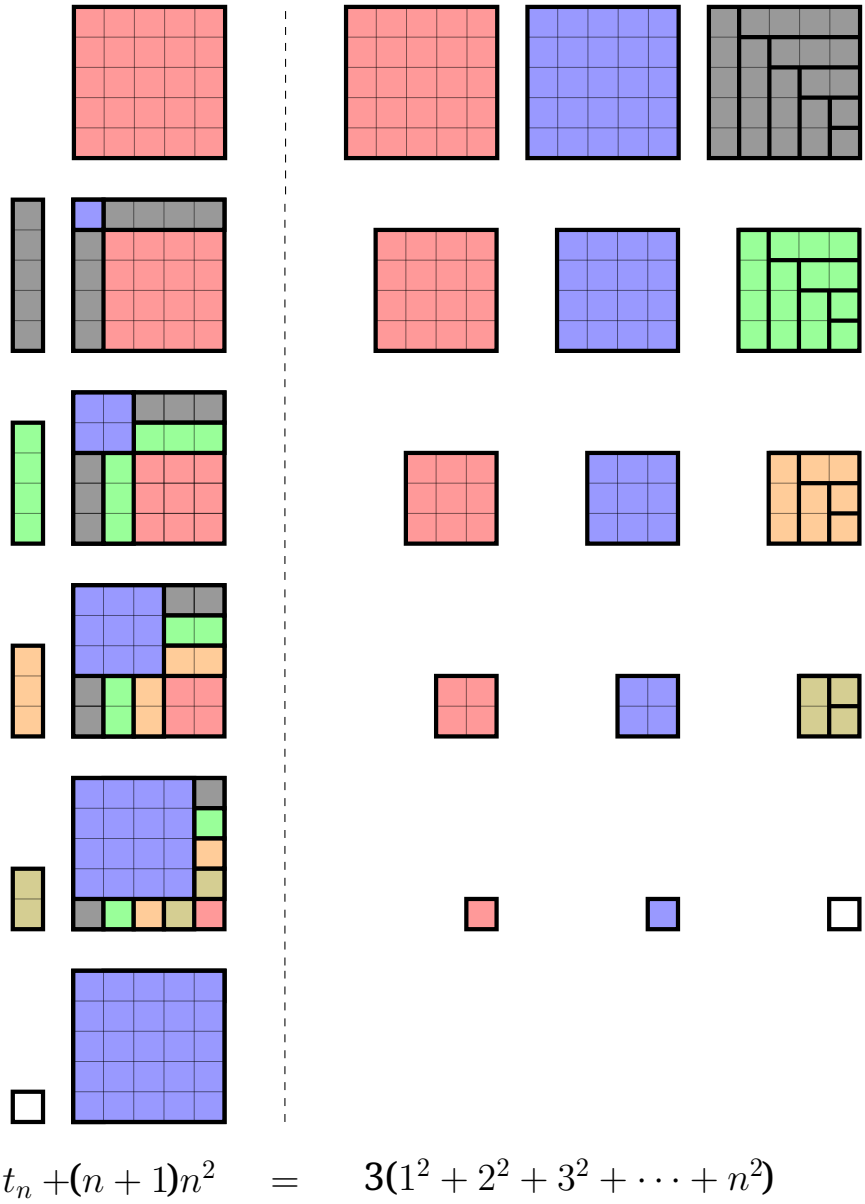


FIGURE 4. 阿基米德恒等式的视觉证明

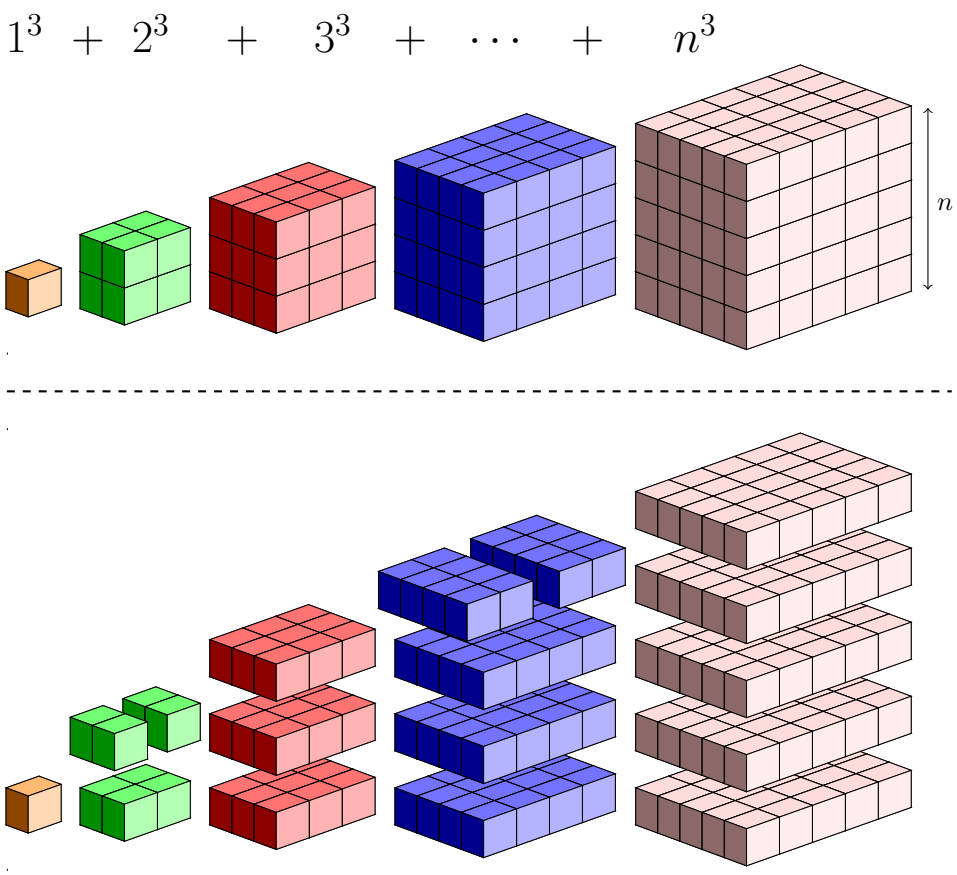


FIGURE 5. 尼科马科斯定理的视觉证明

图4和图5所示的平方和与立方和视觉证明无疑令人印象深刻，也颇具美感，但并非无可批评。阿基米德的论证基于这样一种想法：计算边长为 1、2、3、.....、n 的 n 个正方形中的方块数量很繁琐，而将这一构型复制三份，就能更轻松地计算相同的总数，即 $3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$。然而，图4中的视觉证明似乎并未遵循图3中那种简单直观的模式。

相比之下，图5所采用的构造体现了更显著的概念转变。它并非通过组合拼块来简化计数，而是反其道而行：将构型拆分成更小的部分，再重新排列它们，组成一个新的图形。

主要难点在于，这些视觉论证似乎无法以任何直接明了的方式推广，从而得到 p 次幂和的公式， $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$。

寻找四次幂、五次幂及更高次幂的幂和公式，历史悠久，许多杰出的数学家都曾为此努力。

1631 年，Johann Faulhaber（1580–1635）发表了幂和的显式公式，涵盖至第 17 次幂，但并未给出一般表达式 [9, 14]。几年后，即 1636 年，Pierre de Fermat（1601–1665）引入了基于形数的递推关系，用较早的幂和表示任意这类幂和，但由此产生的计算很快便变得难以处理 [15, 5]。

Blaise Pascal（1623–1662）在研究算术三角形的过程中，于 1654 年发现了一个适用于任意幂和的、更为实用的公式，尽管它仍是递归形式 [17, 13]。

所有幂和的第一个闭式公式由 Jacob Bernoulli（1654–1705）在其身后出版的著作《猜度术》 [6]中提出。他在书中引入了如今以他命名的数，并指出数列 B_0, B_1, B_2, ...给出了这些幂和的统一公式。他显然十分兴奋地写道：

“.....我只花了不到一刻钟的四分之一，便算出前 1000 个数的十次方之和为 91,409,924,241,424,243,424,241,924,242,500。”

他得到的闭式公式如下：

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j \, n^{p+1-j}, \tag{1.5}$$

其中，数列 $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ 由以下递归关系定义：

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i} B_i = m+1, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

该数列的前几项列于下表：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0

TABLE 1. 前几个伯努利数的值。

因此， $p = 1$、2、3、4 的公式如下：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n(n+1)}{2},\\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\\
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5}(n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

然而，幂和公式 (1.5) 的证明纯属代数推导（例如，见 [2]）。在这项工作中，我们旨在通过视觉证明，为这些公式提供几何直观。

在结束幂和的历史概述后，我们现在回到一个问题：平方和的情形需要一个简单且可推广的证明。尽管公式 (1.2) 的以下证明十分简单，但它是最近才提出的 [19, 16]。

在这种情况下，我们统计单位立方体。因此，对前 n 个正方形求和，相当于先数一个单位立方体，再数边长为 2 的正方形中的立方体，然后数边长为 3 的正方形中的立方体，依此类推，直到边长为 n 的正方形。

这些立方体可以排列成一个高度为 n 的方底金字塔。因此，计算 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 等价于计算这个金字塔中单位立方体的数量。

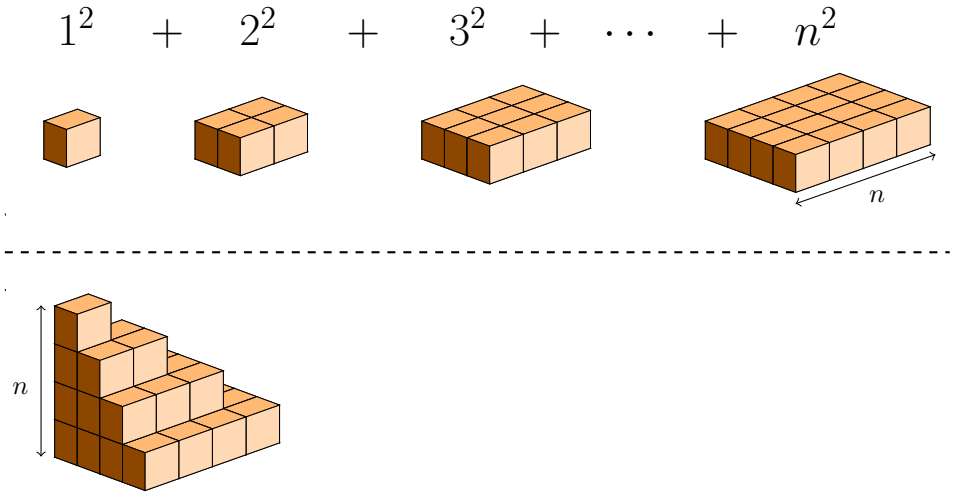


FIGURE 6. 金字塔中的平方和与单位立方体

我们用 p_n 表示这个金字塔中单位立方体的数量。与三角数的情况一样，尽管 p_n 可能难以直接计算，但有些矛盾的是， $3p_n$ 的求值要容易得多。

事实上，如果取三个完全相同的棱锥，我们可以在三维空间中旋转并平移它们，将它们组装成一个立体块。

$$3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right)$$

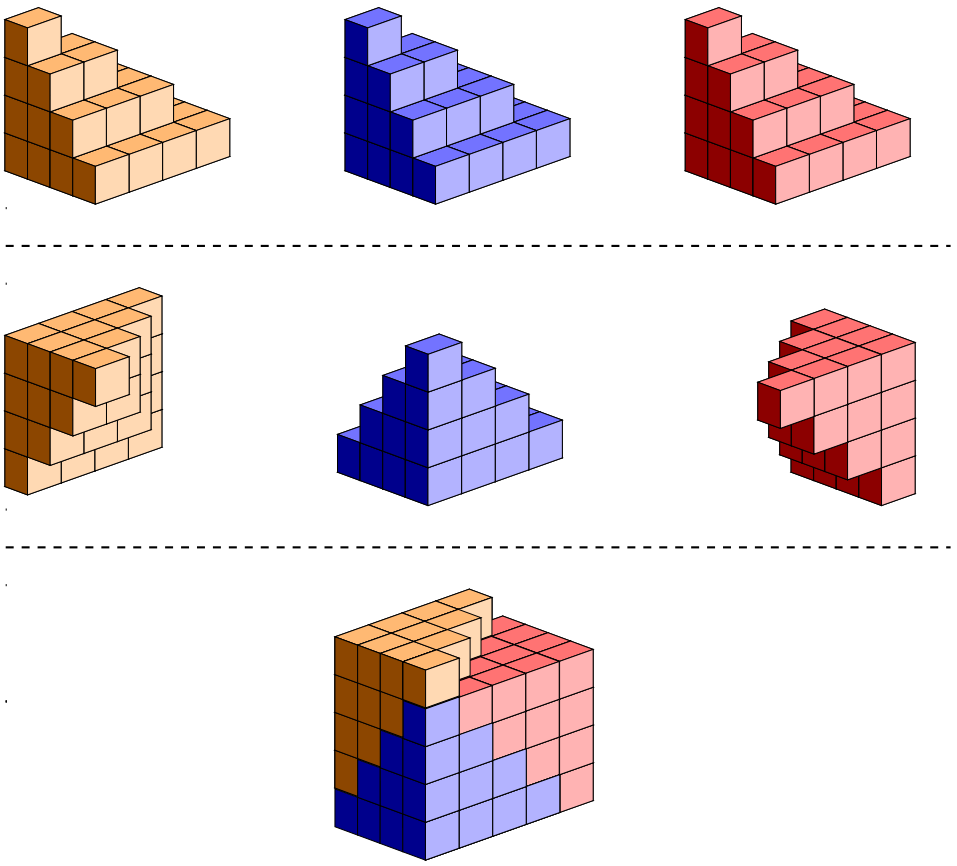


FIGURE 7. 三个棱锥组成一个近似长方体的立体

由于这个立体块的顶面呈阶梯状，我们需要进行一个小小的几何“DIY步骤”——稍作调整，使顶层变得平整——从而得到一个完美的平行六面体。

所得的平行六面体（见图8）长为 $n+1$ 个单位，宽为 n 个单位，高为 $n+\frac{1}{2}$ 个单位。因此，高为 n 的三个方底金字塔中的单位立方体总数为 $n(n+1)(n+\frac{1}{2})$。

因此，我们得到以下公式：

$$p_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3}. \tag{1.8}$$

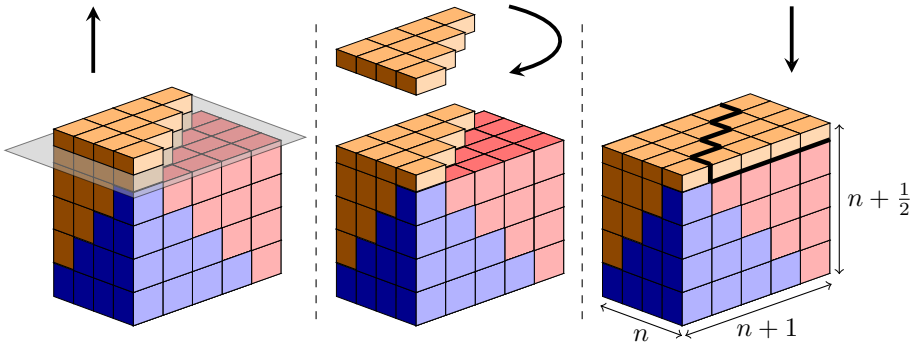


FIGURE 8. 将顶层整平的几何DIY步骤

尽管公式 (1.2) 和 (1.8) 本质上相同，但它们的书写方式对于引出本文的基本思想起着重要作用。

图3中关于三角数 $1+2+3+\cdots+n$ 的视觉证明，以及图7和图8中关于金字塔数 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的视觉证明，完全类似。两种情况下的核心思路都相同：将两个三角形排列组合成一个矩形，或将三个方底金字塔组合成一个平行六面体。因此，所得公式的分母自然等于所用拼块的数量，而这个数量又与视觉证明所处的维度相对应。

分子中的因子数量也体现了维度。这些因子恰好对应所得立体块的尺寸，而其中出现的数——即 n中的多项式的根——则源于为得到完美立体块所需的几何调整。

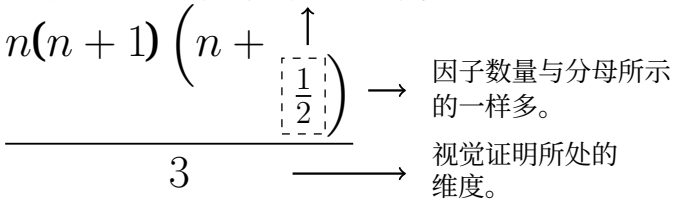


FIGURE 9. 幂和公式的结构

尽管尼科马科斯定理的视觉证明（见图5）并未遵循前两个证明的相同模式，但所得恒等式 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$ 仍然展现出图9中所描述的相同结构特征。由于 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，我们得到

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &= (1+2+3+\cdots+n)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

根据 Faulhaber公式，该表达式也通过（1.7）出现。

换言之，该公式的分子中有四个因子，分母中有一个 4；然而，视觉证明本身并不是在四维空间中进行的。这自然引出了以下问题：

是否有可能通过组装四个超立方体棱锥，在 4 维空间中给出尼科马科斯定理的视觉证明，使所得 4 维立体块各维度的乘积得到公式 (1.9)**?**

一旦实现了这一目标，我们还可以提出更高的要求。如果考察 (1.7) 中的第四个恒等式——Faulhaber公式中的四次幂之和——就会发现，它可以改写为图9所示的结构形式：

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})(n^2+n-\frac{1}{3})}{5}. \tag{1.10}$$

项 $_1$ $_2$ 此前已经出现过，我们也理解产生这一项的几何调整类型。但不可约因子 $n^2+n-\frac{1}{3}$ 的含义是什么?

由此引出第二个问题：

我们能否扩展此前的视觉构造，在五维中为公式 (1.10)**给出视觉证明，从而揭示不可约因子** $n^2+n-\frac{1}{3}$ **的几何本质?**

本文将探讨这两个问题。文章结构如下。

第2节介绍构造所需的预备工具。

第2.1节介绍我们将用于可视化高维物体的技巧。具体而言，我们将看到，同一物体的不同低维截面如何针对同一问题给出不同答案，并由此立即得到恒等式。更重要的是，这种方法能让我们灵活地拼接稍后出现的二维拼图。

第2.2节运用这一技巧，为公式 (1.8)给出二维视觉证明，对应图7和图8。

第 3 节专门讨论四维中的尼科马科斯定理。

第3.1节说明如何利用四维超立方体的三维截面，为公式 (1.9) 提供视觉证明。

第 3.2 节将这一论证降一维，把证明转化为一个二维拼图。将这一方法推广到高维时，这种降维至关重要。

第 4 节为四次幂之和的公式 (1.10) 提供视觉证明。第 4.1 节拼合四个五维棱锥，并将所得构型呈现为一个二维拼图。

第 4.2 节将第五个五维棱锥纳入同一个拼图。

第 4.3 节介绍了第一种剪切粘贴操作，用以说明因子$n(n+1)$。

第 4.4 节旨在理解第二种剪切粘贴操作，它解释了剩余因子 $n^2+n-\frac{1}{3}$。

第 4.5 节通过阐明上一节中进行的构造，推导出了因子 $n+\frac{1}{2}$。

注 1.1（关于高维视觉证明的前期工作）。 在开始探索高维视觉证明之前，我们先简要介绍几项从不同角度研究相关思想的早期工作：

(1) 关于形数的一部基础参考著作无疑是 John H. Conway 和 Richard K. Guy 所著的《数之书》 [7]。在第 2 章（从图形中看图形：以几何进行算术与代数）中，关于三维的部分以引人注目的方式展示了六边形金字塔实际上就是立方体，并采用了图1中证明的三维类比。在专论第四维的部分，作者指出：“虽然很难想象四维中的拼图，但这是可以做到的！”，并运用拼接立体块、将其各维度相乘的技巧，得出了五胞体数的表达式。

(2) 在 [12], 中，作者首先给出了恒等式 $1+2+3+\cdots+n=n(n+1)\,2$ 的一个视觉证明，与图3所示的证明不同；随后，他将这一构造推广到三维，从而为平方和的恒等式 (1.2) 给出了视觉证明。借助超立方体的视觉表示，作者继续过渡到下一维，甚至成功地为立方和的恒等式 (1.9) 给出了视觉演示。然而，在后记中，他承认存在以下障碍：

> “……应该存在一个由五维平行六面体构成的五维块，使相应的体积能够得出上述恒等式。然而，五维空间中出现了新的情况：多项式$3n^2+3n-1$ 在整数范围内不可约。我不知道这是否会对这一过程产生重大影响，但要在5维空间中绘制2 维物体这一技术难题，肯定会妨碍可视化。”

2. Lower dimensional sections and the sum of squares

本节将介绍一种利用截面，通过低维切片来可视化三维图形的方法。为说明这一方法，我们将通过考察图7和图8中的平面截面，重新审视公式（1.8）的视觉证明。这样，原来的立体几何问题就转化成了一个二维谜题。

2.1. 低维截面。 可视化三维图形的一种方法是观察它的平面 X 射线。例如，如果我们想像《平面国》中的生物那样观察图6中的方底金字塔《平面国》 [1], ，可以对该图形取适当的二维截面。由于我们的目标是利用图像高效地计算单位立方体的数量，因此只需选择能让每个立方体恰好被扫描一次的 X 射线，这样我们就可以通过计算平面截面中的正方形数量，代替计算原立体中的立方体数量。

从图中可以看出，X射线中出现的正方形数量是$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，这正如预期：金字塔中的单位立方体数量恰好等于这个总和。

我们将把金字塔的平面截面称为主截面；其X射线产生幂和（在此例中为正方形数）。

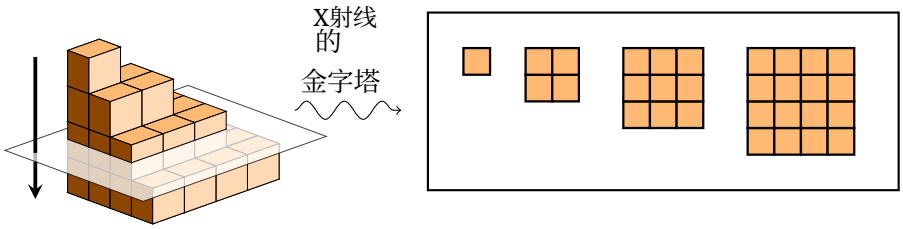


FIGURE 10. 金字塔的主截面。

截面法的优势在于，对金字塔进行X射线照射并不存在唯一方式。事实上，我们还可以进行侧面X射线照射，并观察到这些截面所包含的正方形数量与逐次截断的三角数一样多。

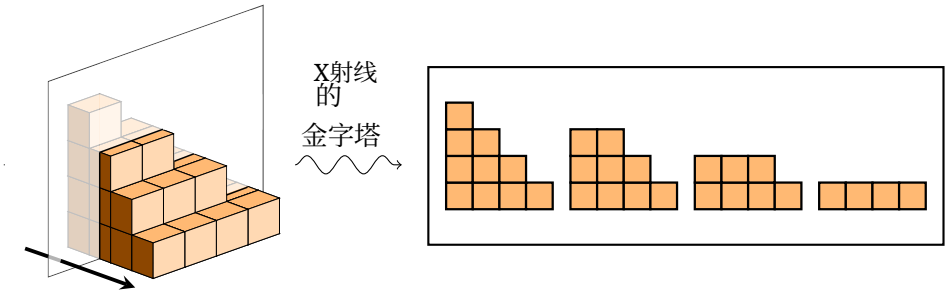


FIGURE 11. 金字塔的次截面。

这些剖面截面将称为次截面。

这一观察具有重要意义，因为两类截面中的正方形数量必须相同——因此也必须与原始金字塔中的立方体数量相同——由此我们得到以下恒等式：

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \quad & 1+2+3+\cdots+n \\ & +2+3+\cdots+n \\ & +3+\cdots+n \\ & \vdots \\ & +n \end{aligned} \tag{2.1}$$

这个恒等式的视觉证明正是由图 10 和图 11 给出的。不过，这个恒等式也有一个非常简单的代数证明，而且该证明可以自然地推广到任意维度。具体而言，

引理 2.1. 对于 $p \geq 0$，以下恒等式成立：

$$\begin{aligned} 1^{p+1} + 2^{p+1} + 3^{p+1} + \cdots + n^{p+1} = \quad & 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p \\ & +2^p + 3^p + \cdots + n^p \\ & +3^p + \cdots + n^p \\ & \vdots \\ & +n^p \end{aligned} \tag{2.2}$$

证明。右侧的和可以用另一种方式计算。我们不必按顺序逐行求和，而可以按列求和，结果相同。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1^p & + & 2^p & + & 3^p & + & \cdots & + & n^p \\ & + & 2^p & + & 3^p & + & \cdots & + & n^p \\ & & & + & 3^p & + & \cdots & + & n^p \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & + & n^p \\ \hline 1 \cdot 1^p & + & 2 \cdot 2^p & + & 3 \cdot 3^p & + & \cdots & + & n \cdot n^p \end{array}$$

FIGURE 12. 按列求和得到的结果

而且由于 $1 \cdot 1^p + 2 \cdot 2^p + 3 \cdot 3^p + \cdots + n \cdot n^p = 1^{p+1} + 2^{p+1} + 3^{p+1} + \cdots + n^{p+1}$，引理立即得证。□

备注 2.2。尽管本文聚焦于视觉证明，我们仍出于多种原因纳入了这个代数引理。首先，这个引理自然地源自我们通过截面将高维可视化的技巧：$p = 1$这一情形恰好就是平方和与截断三角数之和相等。其次，一旦认清其代数元素的空间排列——即按列而非按行求和，引理 2.1 的证明便显而易见。这自然引出了一个问题：归根结底，代数是否不过是以符号方式进行视觉论证?

如上所述，在 $p = 1$ 的情况下，恒等式 (2.2) 表示平方和与截断三角数之和相等。对于$p = 2$，该恒等式则表示立方和与截断金字塔数之和相等。立方和对应于四维超立方体棱锥的主截面，而截断金字塔数则由其次截面产生。第 3 节将利用这一对应关系，为四维情形下的尼科马科斯定理建立视觉证明。

2.2. **二维中的平方和**。现在，我们有了通过低维截面来可视化高维物体的方法，于是重新审视恒等式 (1.8) 的视觉证明。在三维中，这个证明使用三个方底金字塔；而现在，我们将从《平面国》居民的视角重新诠释它，考察这些金字塔的平面截面。这是将二维截面用作三维

可视化技术的首次应用，也为下一节做准备；届时，我们将采用类似的方法，考察四维物体的三维截面。

为了将图7和图8中的三维证明转换为二维，我们对图7中的立体块进行X射线成像，得到一种二维拼图。

由于构成立体块时有三个棱锥参与，X射线的方向决定了哪些棱锥会以次截面的形式出现在二维拼图中，以及哪个棱锥会以主截面的形式出现。

值得注意的是，在图13的二维拼图中，如果省去所选方向下呈现主截面的那个棱锥（黄色的那个），那么其余两个棱锥的第一部分恰好就是低一维的幂和公式视觉证明。具体而言，在图13上方一排X射线图中，去掉黄色正方形（主截面）后，剩下的恰好是图3，由两个拼合在一起的三角数组成。

在其余截面中，如果去掉黄色正方形，就会得到截断三角形，并留下一个近似正方形的空隙，黄色金字塔的截面正好可以嵌入其中。

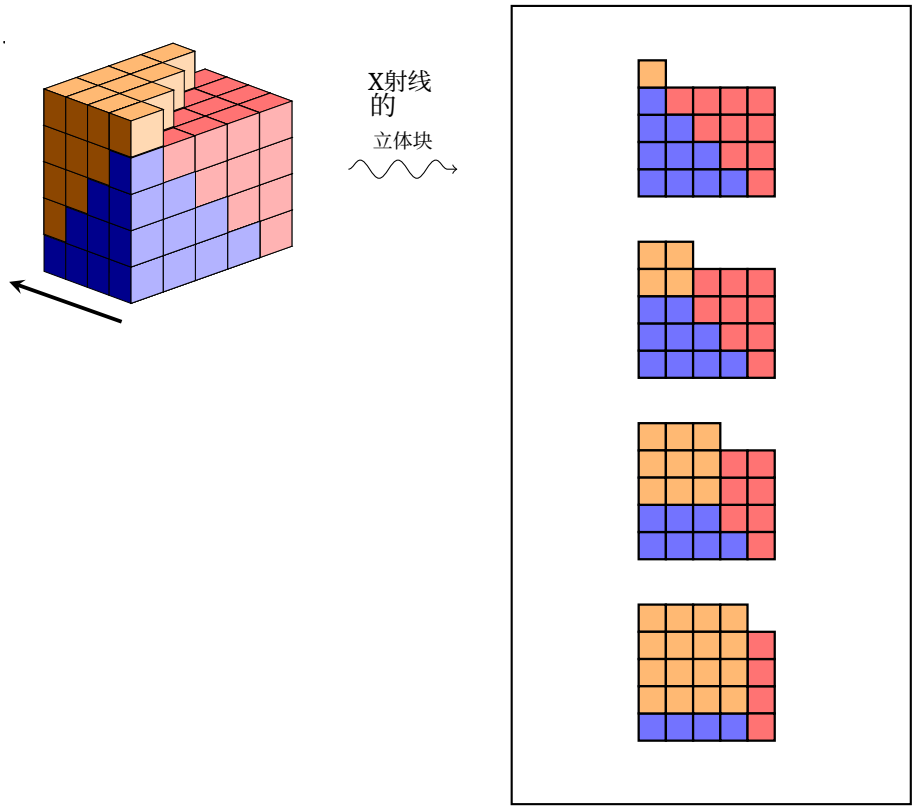


FIGURE 13. 2D X射线重建三维视觉证明

接下来，我们需要在二维拼图上进行一个小小的几何“自己动手步骤”，把所有拼块变成全等矩形。为此，我们将第一行切成两半

然后交换第一截面与最后一个截面、第二截面与倒数第二个截面中的两半，以此类推。

图14所示的结果是一组底为 $n+1$ 、高为$n+\frac{1}{2}$ 的矩形，其长度和高度与图8中完成DIY步骤后得到的立体块相匹配。由于X射线是沿着剩余维度拍摄的，因此三维块体的宽度就对应于截面的总数，也就是二维拼图中矩形的数量。

因此，高为 n的三个方底金字塔中的立方体数量，即3$(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$，恰好是 $n(n+1)(n+\frac{1}{2})$，由此即可得出所需公式。

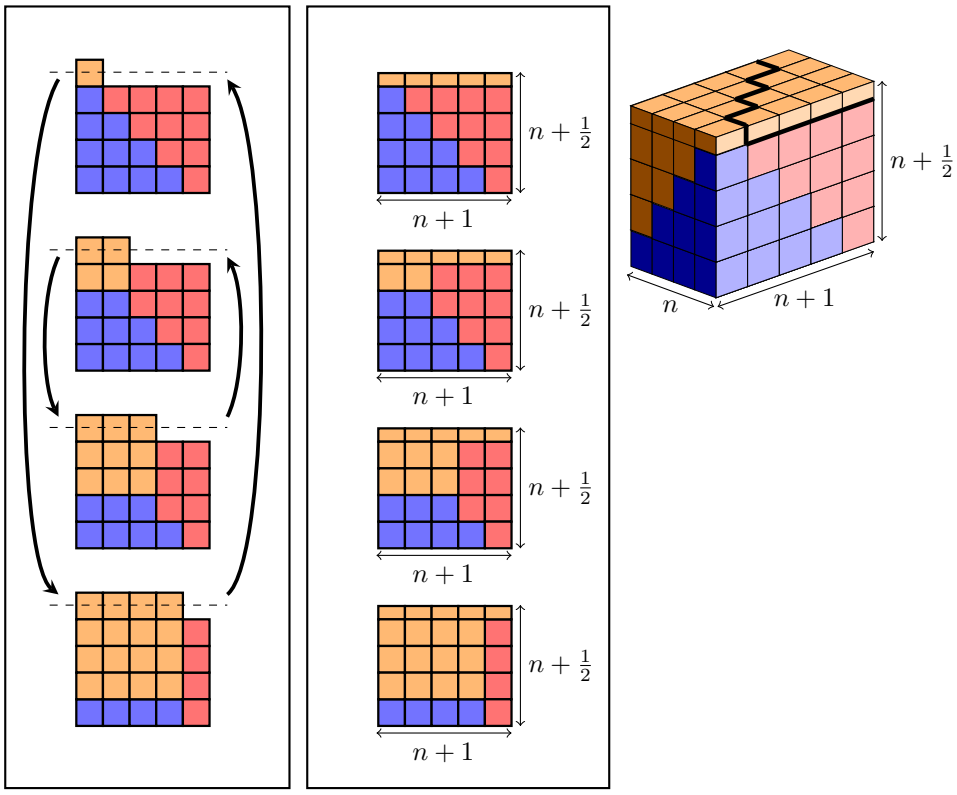


FIGURE 14. 三维视觉证明二维拼图中的DIY

在通过二维截面证明三维定理的能力得到提升后，我们现在已经准备好迈出下一步：探索第四维，并通过考察其三维截面，在四维中证明尼科马科斯定理。

注 2.3（代数与视觉论证 I）。 此时值得停下来，评估代数证明与视觉论证各自的优缺点。在图13所示的立体块截面中，我们看到两个截断三角形之间留下了一个“近似正方形”的空隙。

用代数表示，这一说法可以写成：

$$2\Big(m+(m+1)+\cdots+n\Big)+m^2=(n+1)^2-(n+1-m), \tag{2.3}$$

其中 $1\le m\le n$。

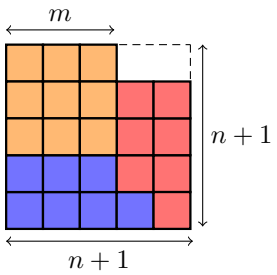


FIGURE 15. 两个截断三角形之间留下了一个近似正方形的空隙

利用图3中得到的三角数表达式，可以证明这个恒等式，即：

$$\begin{aligned}2\Big(m+(m+1)+\cdots+n\Big)+m^2 &= 2\Big(t_n-t_{m-1}\Big)+m^2\\ &= 2\Big(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(m-1)m}{2}\Big)+m^2\\ &= n^2+n+m=(n+1)^2-n-1+m.\end{aligned}$$

通过这个例子，我们看到，图15所描绘的图像既对应于恒等式（2。3），也对应于我们所见的该恒等式的证明。尽管这个恒等式及其证明并非毫无复杂之处，但图像清晰明了。

在接下来的章节中，当我们探讨更高维度时，会遇到更多这样的情况：视觉论证非常清晰简单，而其代数“翻译”却复杂得多，且充斥着繁琐的符号。

3. NICOMACHUS' 4D THEOREM FOR SUM OF CUBES

本章可以说是本书的核心章节，因为这是我们首次运用分层技术来直观呈现超出直接感知能力的高维空间。

诚然，借助超立方体等表示方式，第四维虽难以想象，但仍可加以可视化，如 [12]所示；然而，到了下一阶——第五维，这种方法便行不通了。

因此，本章不仅通过截面给出了清晰简洁的尼科马科斯定理四维证明，也为毫不费力地直观呈现第五维铺平了道路。

因此，一旦我们在第3.1节确立了尼科马科斯定理，就会再次对相同的三维切片应用分层技术，将构造化简为一个二维拼图，其风格类似于第2.2节中的图13和图14。

3.1. 通过三维截面证明尼科马库斯四维定理。本节的目标是为立方和的公式 (1.9) 提供一个四维可视化证明。因此，我们首先对这个和进行表示。此时，人们可能自然会想，为什么这里所有立方体都被赋予了相同的颜色，而图5中却不是这样。

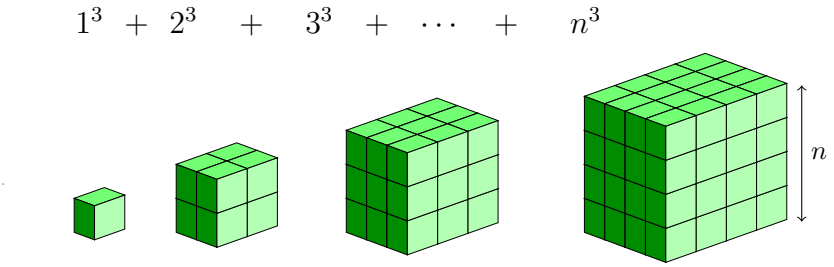


FIGURE 16. 四维棱锥的主截面

熟悉前几节所介绍策略的读者（或查看过图16说明文字的读者）会认出，这一构型是一个四维金字塔的主三维截面的集合。

在图5中，立方体是彼此独立的单元，我们将它们分解成更小的部分，拼成一幅正方形拼图。然而，在当前的情形中，n 绿色立方体构成一个单一的物体：一个四维金字塔。这就是将它们描绘成统一颜色的原因。

正如我们在第2.1节中所观察到的，获得棱锥截面的方法不止一种。在引理 2.1 中令 $p = 2$，恒等式左边对应于上文讨论的主截面，而右边描述的是次截面，在本例中，它们呈现为截断棱锥。

$$
\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\
& +2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\
& +3^2 + \cdots + n^2 \\
& \vdots \\
& +n^2
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

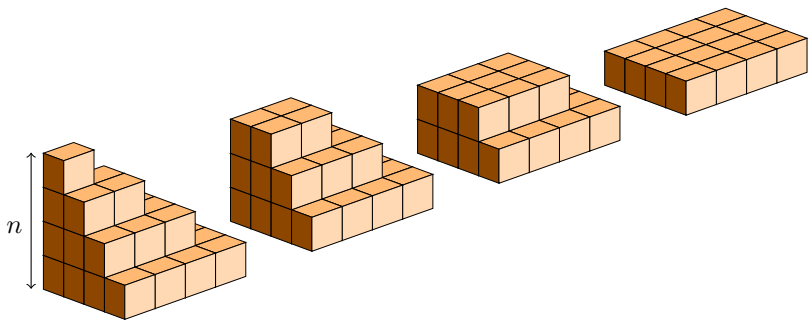


FIGURE 17. 四维棱锥的次截面

如果我们检查由三个拼合在一起的三维棱锥构成的立体块的X射线（见图13），就会发现其中两个棱锥在X射线中产生了次截面；也就是说，产生了能够拼合在一起的截断三角形，其中第一个截面与低维中的视觉证明相吻合（见图3）。

相比之下，第三个棱锥的主截面（在这种情况下是正方形）能够填入这些“近乎”方形的空隙。

同样，可以将四个超立方体棱锥组装起来，使得在观察它们的三维X射线时，其中三个呈现为次截面——也就是截断棱锥——它们的第一截面与前一个维度的视觉证明（即图7）相吻合。

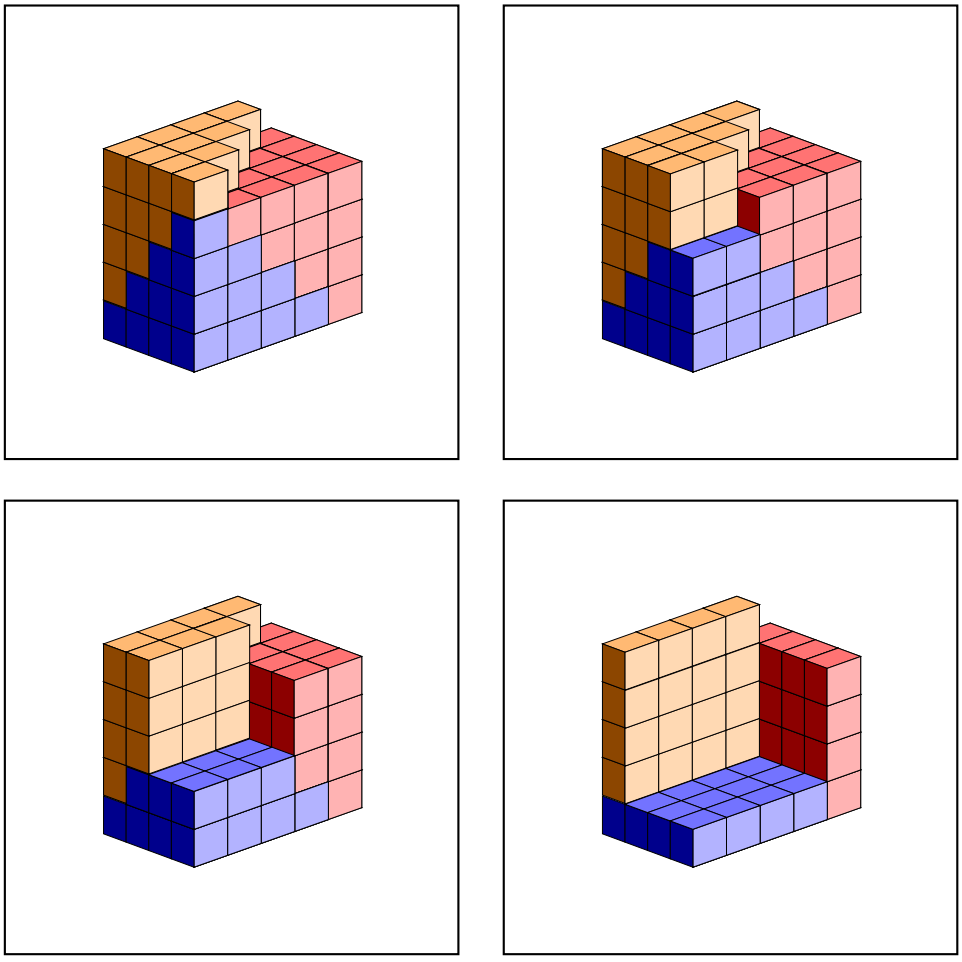


FIGURE 18. 三个组装后的四维棱锥的次截面

在三个组装好的四维棱锥的次截面留下的“近似立方体”空隙中，恰好可以嵌入第四个四维棱锥；它正是通过其主截面——即立方体——呈现出来的（见图16）。

因此，四个组装好的四维棱锥的三维截面形成了n 不完整的立体块，再次需要进行一些自己动手处理。不过在这种情况下，公式（1.9）告诉我们，无需切割小立方体，只需重新排列即可。

仔细观察这些不完美的立体块，我们会发现，每个立体块都包含一个多余区域和一个对应的缺失区域。具体来说，在倒数第三个截面中，有一块 $n \times n$ 正方形薄片从立体块中凸出（在 $n = 4$时见图6中的4×4）；在前一个截面中，凸出的薄片大小为（$n - 1$） $\times$ （$n - 1$）；这一规律一直延续到第二个截面，其中有一块 2×2 薄片，以及第一个截面，其中多余部分由一个绿色正方形构成。

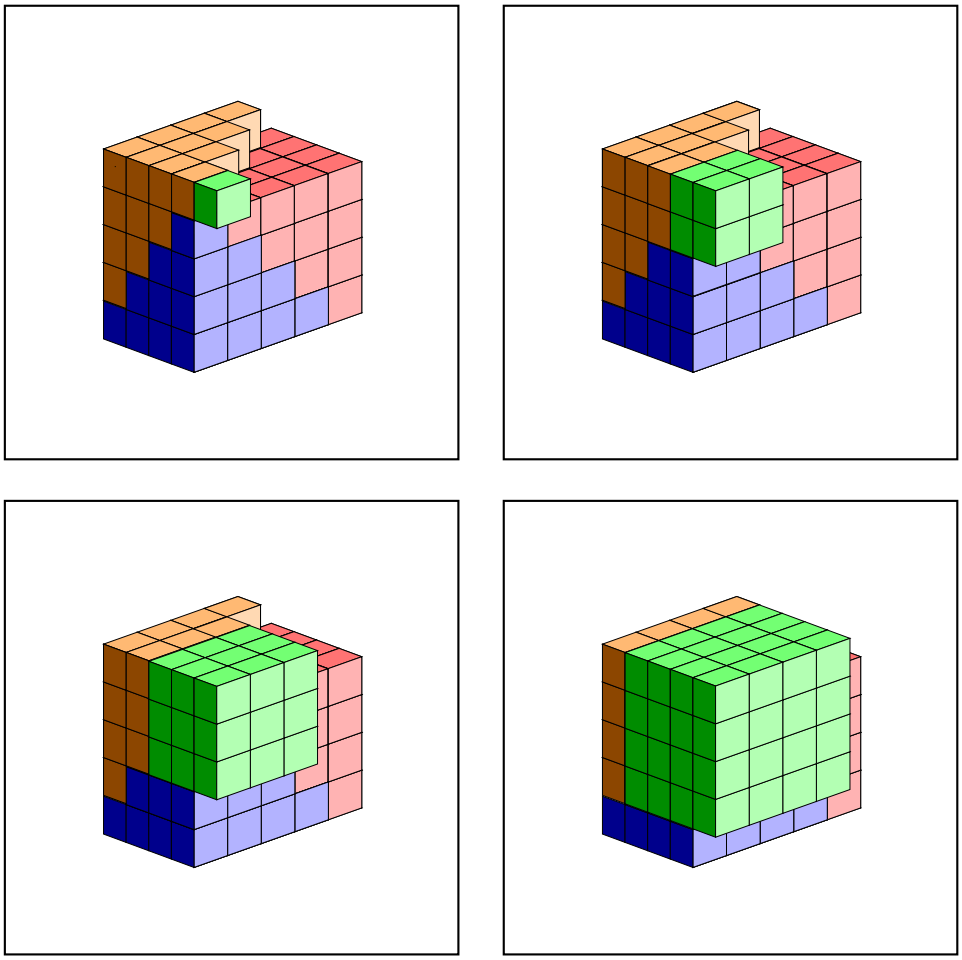


FIGURE 19. 3个四个拼合而成的四维金字塔的D截面

然而，如图20所示，将这些薄片从立体块中分离后，需要填补的区域恰好是第一个截面中的一个三角形缺口，它逐渐收窄，直到在最后一个截面中变成长度为 n 的线性缺口。

正如我们从引理 2.1（尤其是恒等式 (2.1)）中所知，平方和等于截断三角数之和。因此，

凸出的正方形填补了相应的空隙，形成 n 个相同的立体块，如图21所示。

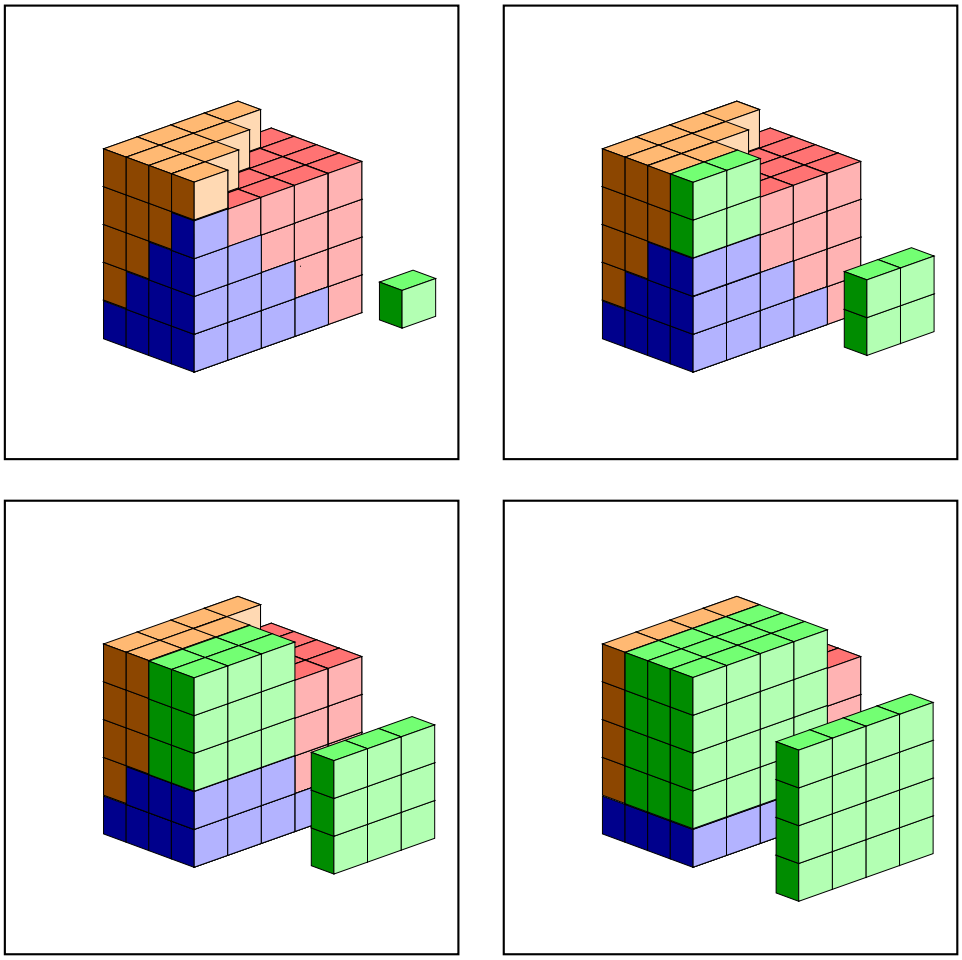


FIGURE 20. 自己动手：从块中移除多余的板块

所得相同立体块的尺寸为：长 $n+1$ 英寸、宽 n 英寸、高 $n+1$ 英寸。此外，这样的立体块恰有 n 个，每个都对应我们考察的一个截面。因此，单位立方体的总数为 $n^2(n+1)^2$。

回想一下，我们从四个超立方体棱锥开始，它们的三维截面中共包含 4($1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$) 个单位立方体。因此，我们得到了所需的恒等式：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

由此完成了尼科马库斯四维定理的证明。

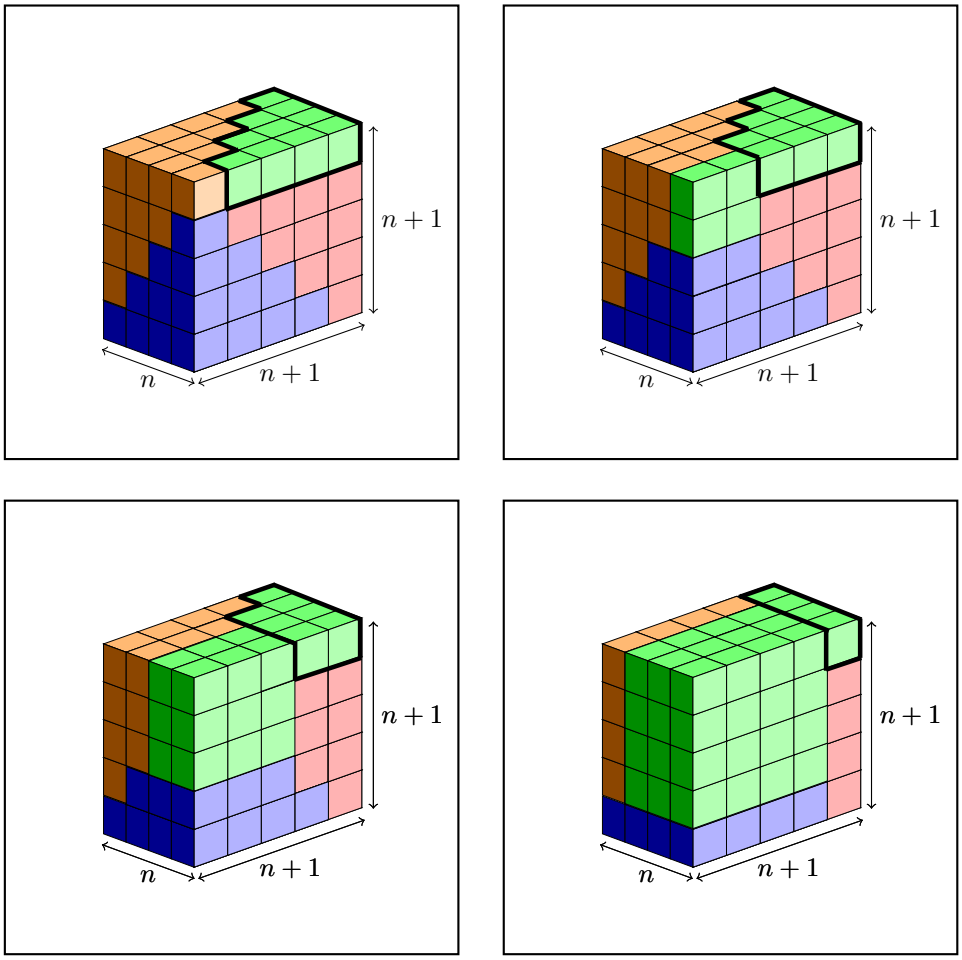


FIGURE 21. 自己动手：填补立体块之间的空隙

3.2.二维截面中的尼科马库斯四维定理。 尽管我们是能够在三维空间中进行可视化的三维生物，但必须承认，这个维度带来了一些困难。

事实上，图7和图8中关于平方和的视觉证明是在三维空间中进行的，并非毫无挑战。棱锥以及它们组成的立体块都有我们看不见的背面，因此必须以某种方式在脑海中想象出来。

因此，在图13和图14中通过二维截面来观察同一个证明，便会清晰得多。作为三维生物，我们真正擅长的是二维可视化。

这并不成问题，因为截面法使我们能够将四维证明转换为其三维截面；每个三维截面本身都是一个三维图形，可以通过二维截面来研究。

因此，本小节将致力于把尼科马库斯四维定理的证明转化为二维视觉证明，同时也为跃升至五维做好准备。

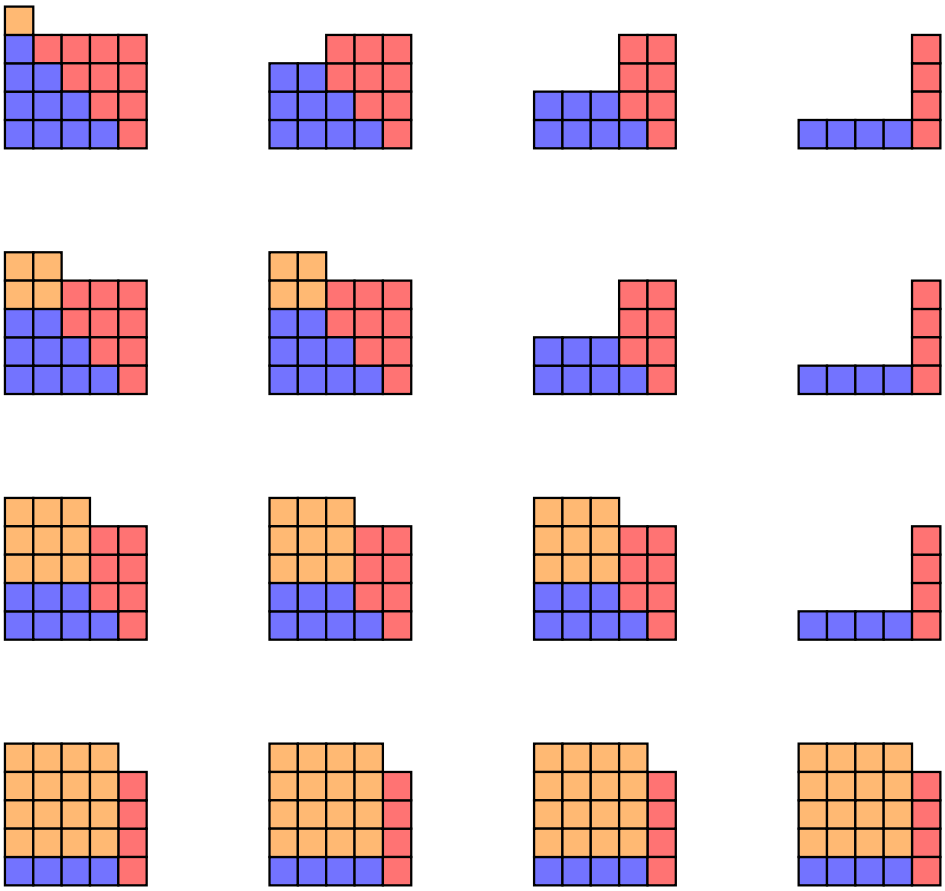


图18的FIGURE 22. 2维截面

如果我们对按图18所示组装的三个四维金字塔的每个三维截面分别进行二维X射线图投影，就会得到 n 列二维拼图（图22中有四列，因为在我们的插图中 $n = 4$），每个三维截面对应一列。请注意，第一列恰好是图13的X射线图，因为我们对组装后的四维金字塔中对应于第一个三维截面的三维块体进行了X射线投影，而这第一张X射线图总是与低维的视觉证明相吻合。

我们可以看到，第二列中去除了 1×1 个正方形，以及第一列三角形中长度为1的阶梯；第三列中也去除了 2×2 个正方形和长度为2的阶梯。此模式持续下去，直到最后一个截面，其中去除了所有边长不超过 $(n-1) \times (n-1)$ 的正方形，以及所有长度不超过 $n-1$ 的阶梯。

正是在形成的空隙中，第四个四维金字塔恰好可以嵌入（见图19）。在图23中我们可以看到，除了对应四维块体二维截面的 n 列（我们的图示中有四列）之外，还有一额外行。这额外行正是从三维块体中突出的部分。

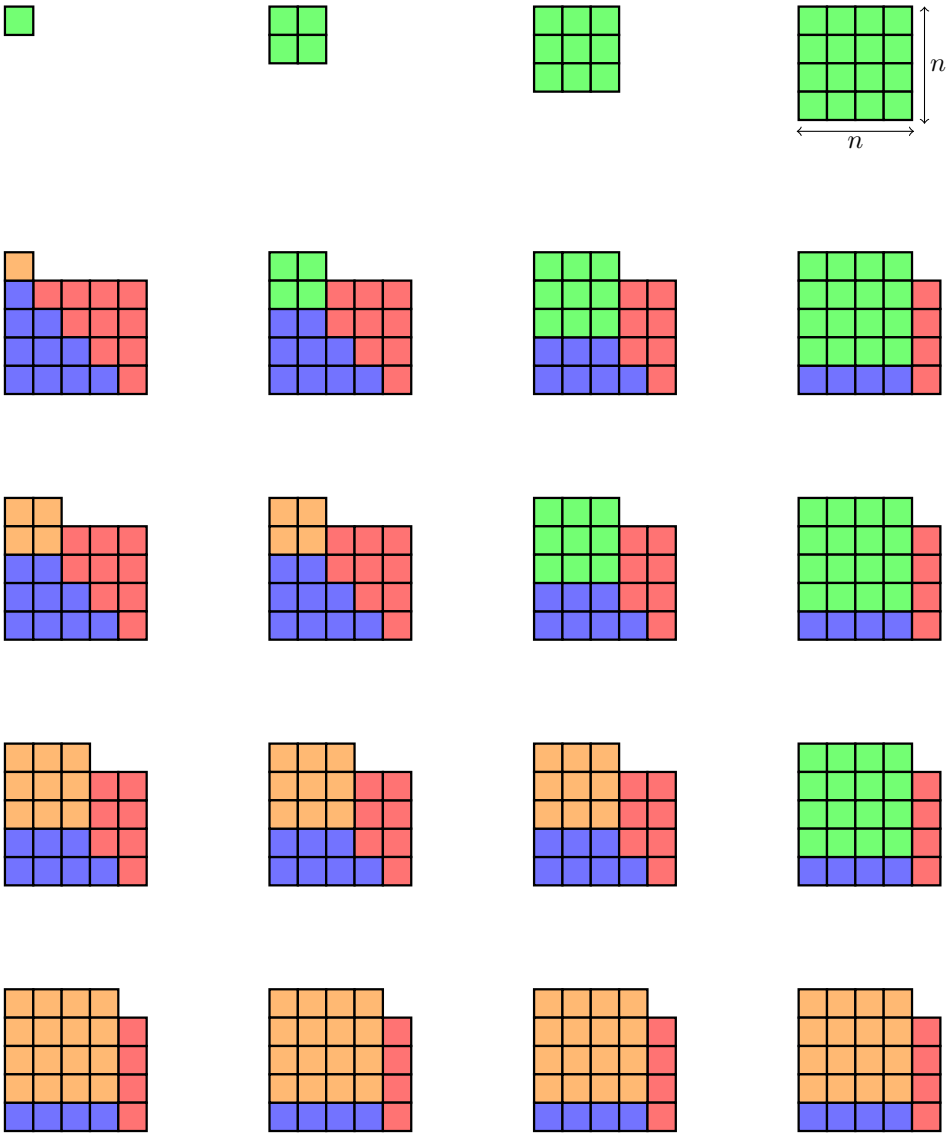


FIGURE 23. 2D 截面（图19）

现在，我们用这额外的第一行填补其他拼块中的空隙，直到每个形状都变成矩形。图21中的这一步基于恒等式（2.1）和一幅三维图示。在这个二维版本中，同样的DIY步骤以不同的视觉方式呈现出来，而且更加简单。

在每个二维拼图中，除第一行之外的所有行的右上角都是空的。总共有 n 行和 n列带有这个缺失的右上方方格。这些$n \times n$ 空隙对应于第一行最后一段绿色方块中的 $n \times n$ 个小方格，我们用这些绿色方格填补所有这些空隙。

如果现在忽略最后一行和最后一列，那么二维拼图就有 $n-1$ 行和$n-1$列。在这个缩小后的排列中，空的正方形移动到了第一行从右数第二个位置。同样，空隙的数量与第一行倒数第二段中的绿色方格数量相同，因此我们也可以将它们填补起来。

我们重复这一过程：每次移除最外侧的一行和一列，空隙就向左移动一个位置，然后用第一行中相应的绿色方格填补。最后，我们得到一个由矩形二维拼图组成的 $n \times n$ 数组，每个拼图的底和高均为 $n+1$ （见图24）。

这个二维拼图中的单位正方形数量，与四个四维棱锥中的单位立方体数量相同。因此 $4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) = n^2(n+1)^2$，这恰好是我们已经知道的恒等式。

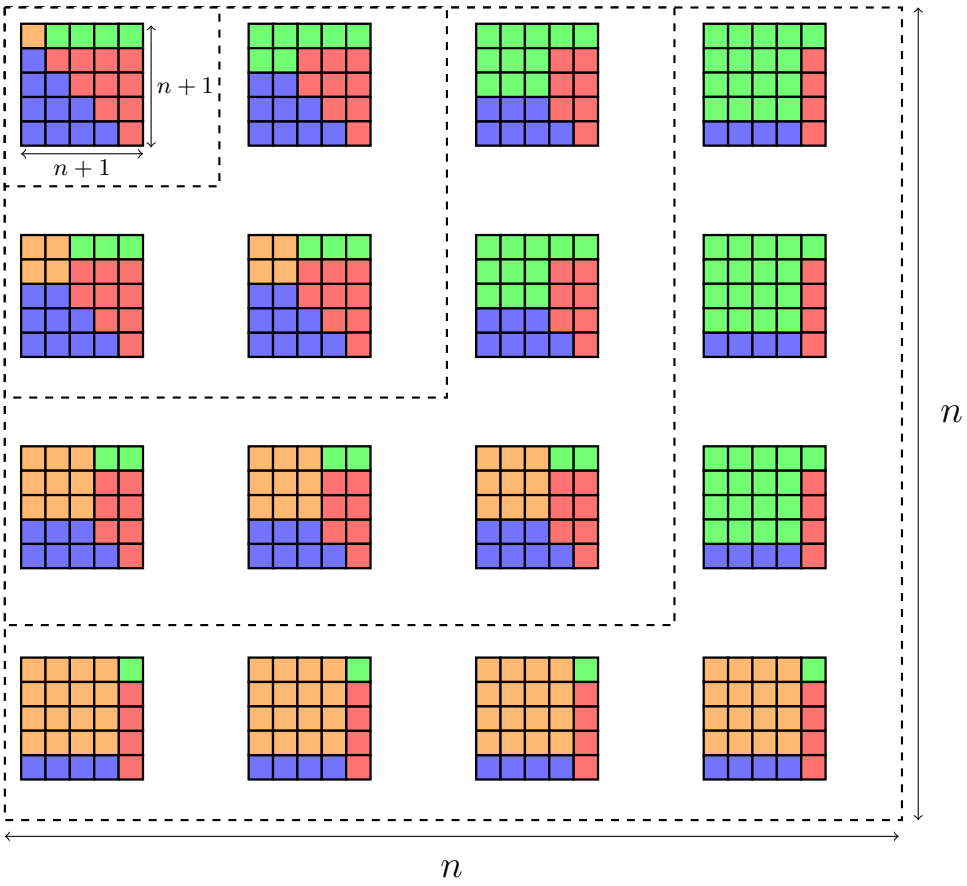


FIGURE 24. 二维拼图中的自己动手步骤

4. The mysterious $(3n^2+3n-1)$ factor

本文最后一节将通过视觉解释来说明这个恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}(n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

我们将特别关注因式分解形式

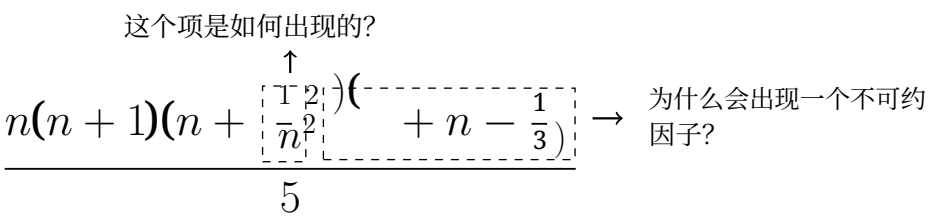


Figure 25. 四次幂求和公式。

分母告诉我们视觉构造所处的维度，尽管我们只能通过其向下直到二维的低维截面来观察它。利用我们在低维情形中学到的内容，我们将确定需要重新排列成全等矩形的二维拼图。这些矩形的数量和边长必须与前一个表达式分子中的因子相匹配。在接下来的小节中，我们将论证这些因子中的每一个。

4.1. 第 0 步：通过截面设置二维拼图。四次幂之和 $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$ 等于五维金字塔中单位五维超立方体的数量。在本文中，我们通过取五个这样的五维金字塔，并将它们组装、调整成一个五维长方体来计算这个和。单位超立方体的总数就是这个长方体五条边长的乘积。

由于我们无法将三维以上的维度视觉化，因此我们采用低维截面来进行研究。我们首先取五个五维金字塔中的四个进行组装，同时牢记第五个金字塔稍后将被嵌入剩余的空隙中。该构型具有 n 个四维截面。其中第一个截面，正是尼科马科斯定理情形中出现的四维拼图。反过来，这个首个四维截面又具有 n 个三维截面，它们恰好就是图19所示的那些截面。最后，这些 n 个三维截面中的每一个都可以化简为图23中的二维拼图，其中每一列对应一个截面。

我们再次展示这幅图，但这次它不再表示四个拼合在一起的四维棱锥，而是表示四个拼合在一起的五维棱锥的第一四维截面。

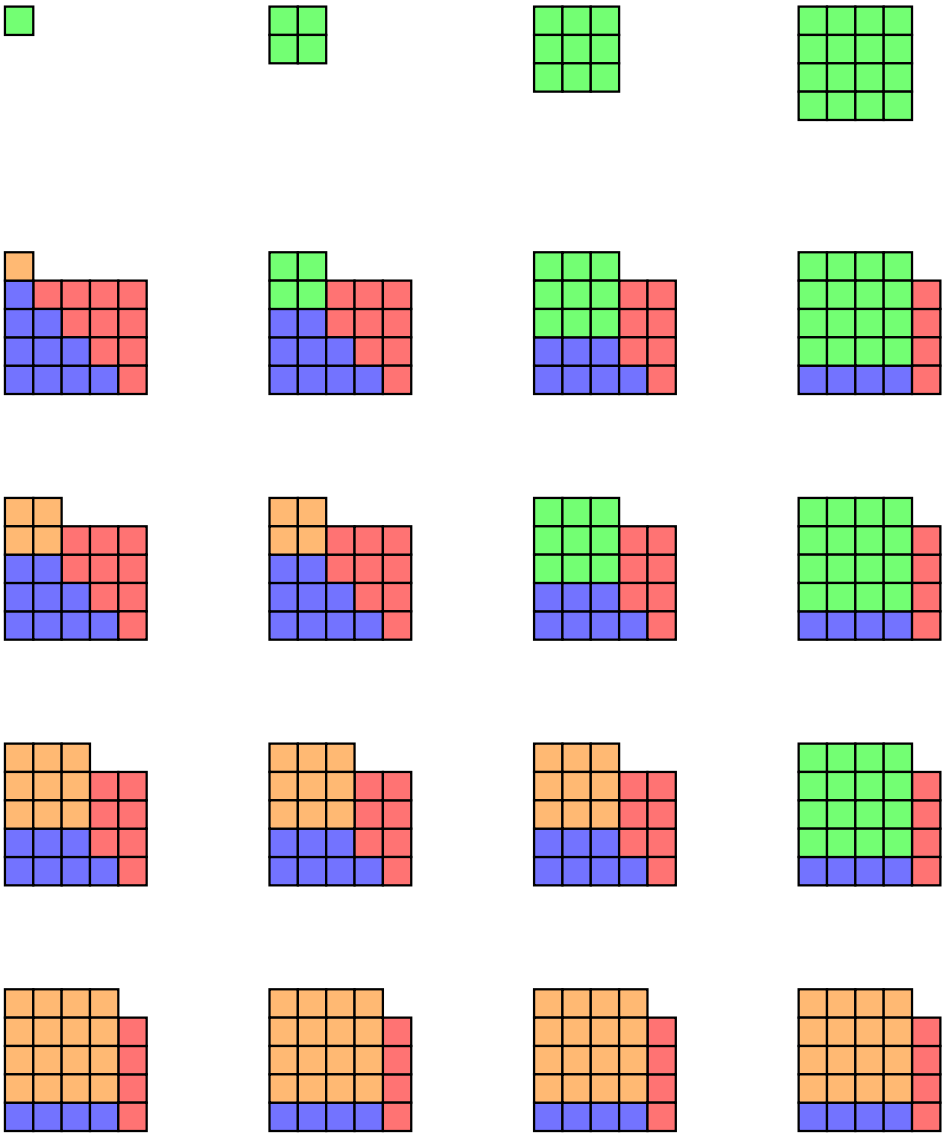


FIGURE 26. 四个组装而成的五维棱锥的第一个四维截面

后续截面是从第一个截面逐层移除层而得到的。从第一部分中，我们移除所有边长为 1 的正方形，以及每个三角形中长度为 1 的阶梯；剩下的图形就是第二个截面。要得到下一个截面，我们再移除所有边长为 2 的正方形，以及三角形中长度为 2 的阶梯，依此类推。按照这种方式，边长依次为 1，2，……，$n-1$，最后一个截面只包含边长为 n 的正方形和长度为 n 的阶梯。

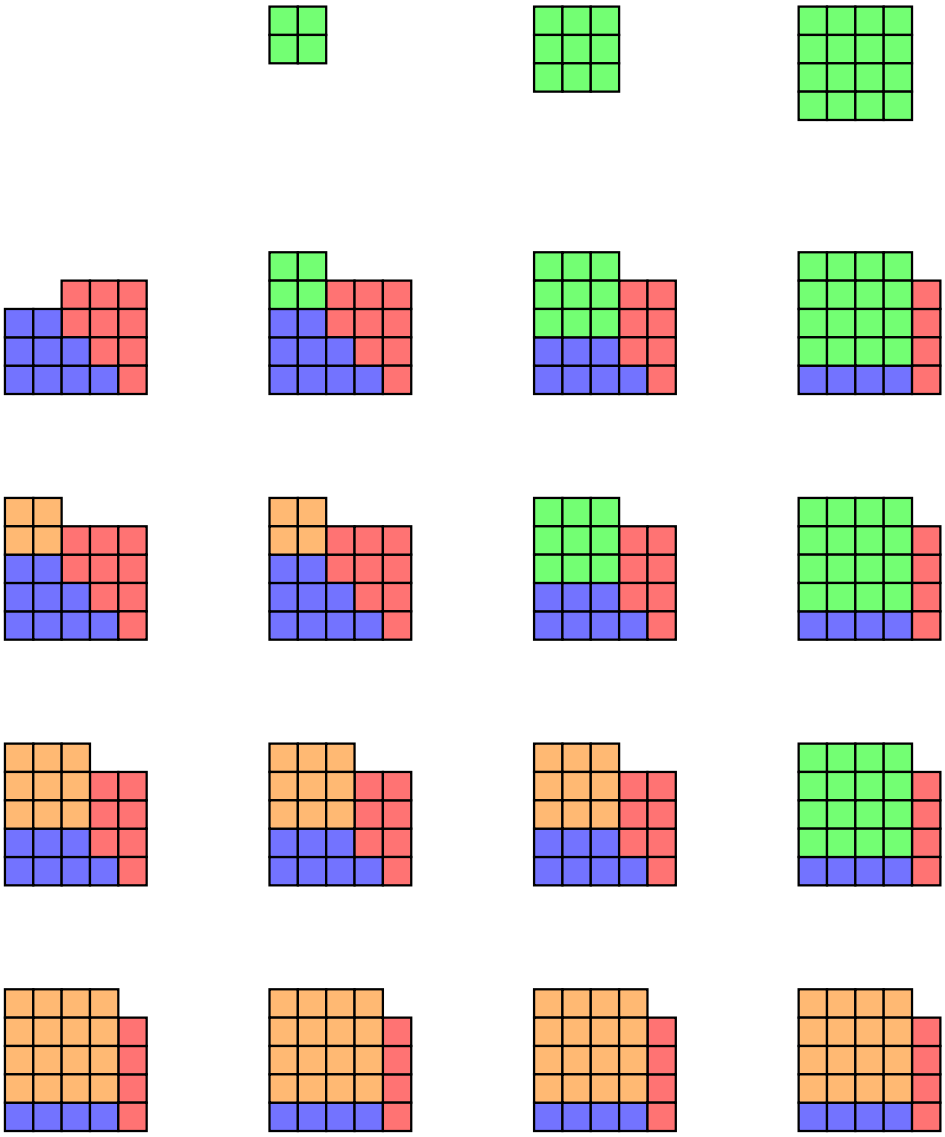


FIGURE 27. 四个拼合的五维棱锥的第二个四维截面

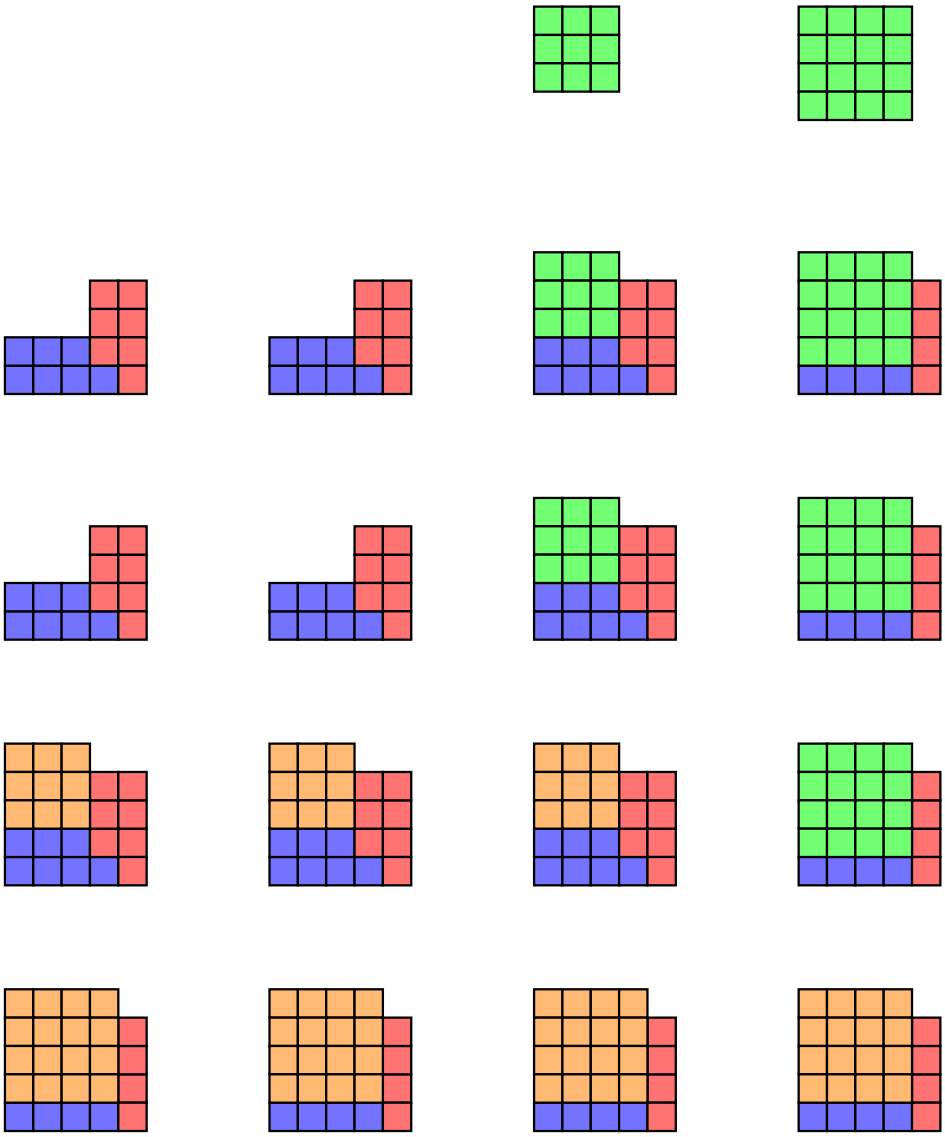
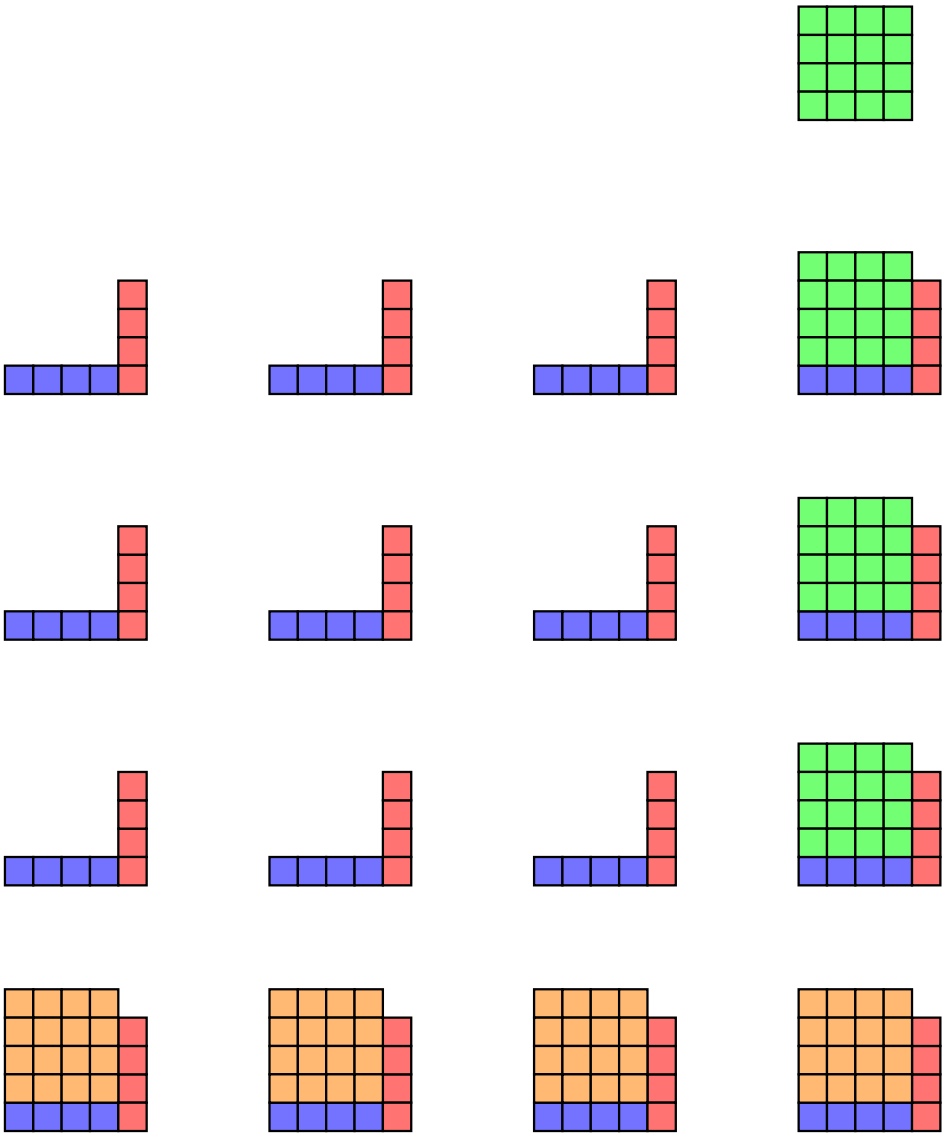


FIGURE 28. 四个组合而成的五维金字塔的第三个四维截面



四个拼合的五维金字塔的第FIGURE 29. n个四维截面

注 4.1（代数论证与视觉论证 II）。 此时，自然会想要寻求一种代数论证，以证明这些截面确实是以这种方式得到的。在低维中，我们已经从几何上验证了这一过程确实行得通；但随着我们进入高维，我们的直觉会变得越来越不可靠，因此我们可能需要一种可以依凭的代数论证。

例如，对于两个三维金字塔，我们得到

$$\begin{aligned} 2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) = \quad & 2(1+2+3+\cdots+n) \\ & +2(2+3+\cdots+n) \\ & +2(3+\cdots+n) \\ & \vdots \\ & +2(n). \end{aligned}$$

这里，左侧统计了两个拼合的三维金字塔中的单位立方体数量（图13中的红色和蓝色金字塔），右侧的每一行分别对应一个二维截面。在每个截面中，两个三角数都减少一阶，直到最后一个截面只剩下两个长度为 n 的阶梯。

如果我们不组装两个三维金字塔，而是组装三个，就会得到

$$\begin{aligned} 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) = \quad & 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \\ & +2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) \\ = \quad & [1^2+2(1+2+3+\cdots+n)] \\ & [2^2+2(2+3+\cdots+n)] \\ & [3^2+2(3+\cdots+n)] \\ & \vdots \\ & [n^2+2(n)], \end{aligned}$$

其中，右侧的每一行都对应图13右侧所示的一个二维截面。

我们将在高维中使用的关键引理指出，如果我们截断指数为 $p+1$的幂和，那么相应的指数为p 的三角和也会在同一点截断。更确切地说，它表述如下。

引理 4.2。对于任意 $p \geq 0$、 $n \geq 1$ 和 $1 \leq m \leq n$，有：

$$\begin{aligned} m^{p+1}+(m+1)^{p+1}+\cdots+n^{p+1} = \quad & m^p+(m+1)^p+\cdots+n^p \\ & \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ & m^p+(m+1)^p+\cdots+n^p \\ & +(m+1)^p+\cdots+n^p \\ & \vdots \\ & +n^p \end{aligned} \tag{4.1}$$

证明。 证明的思路是将 $m^{p+1}+(m+1)^{p+1}+\cdots+n^{p+1}$ 写成以下差值

$$(1^{p+1}+2^{p+1}+\cdots+n^{p+1})-(1^{p+1}+2^{p+1}+\cdots+(m-1)^{p+1})$$

然后应用引理 2.1，将这两个和都表示为三角和。相等的项相互抵消，结论随即得出。□

在第3.1章中，为了通过三维截面证明尼科马科斯定理的四维版本，我们取了三个四维金字塔，并得到

$$\begin{aligned} 3(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) = \quad & 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) \\ & +3(2^2+3^2+\cdots+n^2) \\ & +3(3^2+\cdots+n^2) \\ & \vdots \\ & +3(n^2), \end{aligned}$$

其中，右侧的每一行对应三个四维金字塔的 n 三维截面之一，如图18所示。第一个截面与拼合后的三个三维金字塔重合，而在后续每个截面中，这些三维金字塔都会少一层。

现在，我们可以将引理 4.2 应用于截断平方和，并将该恒等式改写为

$$\begin{aligned} & 3(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) = \\ = \quad & \begin{pmatrix} [1^2+2(1+2+3+\cdots+n)] \\ +[2^2+2(2+3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [2(2+3+\cdots+n)] \\ +[2^2+2(2+3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} [2(3+\cdots+n)] \\ +[2(3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} [2(n)] \\ +[2(n)] \\ +[2(n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中，每对括号代表图22中的一列。我们注意到，在第二个截面中，项 1^2 和 1 缺失；在下一个截面中，项 2^2 和 2 也消失了；而在最后一个截面中，只剩下项 n^2 和 n。

图23 对应于四个拼合而成的四维棱锥的二维截面，可表示为以下代数变换

$$\begin{aligned} 4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) = \quad & (1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) \\ & +3(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) \\ = \quad & 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \\ & +2^2+3^2+\cdots+n^2 \\ & +3^2+\cdots+n^2 \\ & \vdots \\ & +n^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \begin{pmatrix} [1^2+2(1+2+3+\cdots+n)] \\ +[2^2+2(2+3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [2(2+3+\cdots+n)] \\ +[2^2+2(2+3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} [2(3+\cdots+n)] \\ +[2(3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} [2(n)] \\ +[2(n)] \\ +[2(n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1^2 \\ +[1^2+2(1+2+3+\cdots+n)] \\ +[2^2+2(2+3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^2 \\ +[2^2+2(2+3+\cdots+n)] \\ +[2^2+2(2+3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 3^2 \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ +[3^2+2(3+\cdots+n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n^2 \\ [n^2+2(n)] \\ +[n^2+2(n)] \\ +[n^2+2(n)] \\ \vdots \\ +[n^2+2(n)] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

在最后一个方程中，我们为单位正方形标上了不同颜色，使其与图23中对应的正方形颜色一致。这样做是为了帮助读者将这一代数变换与形数的变换联系起来理解。然而，要直接用代数方式描述从图23到图24的阶梯变化，却很难表述。

我们可以认同，用代数来表达拼接棱锥及其截面的视觉论证相当繁琐，因为这在很大程度上取决于如何用括号分组不同的项。这种代数运算并不常见，也不怎么令人愉快。相比之下，引出这些计算的图像简单而直观。在这种情况下，视觉论证似乎比代数本身更合适，而且从某种意义上说也更有力。无论如何，这段话旨在说明这样一种方法的合理性：借助低一维的图示，通过逐步移除正方形和阶梯，构造出下一维的截面。五维情形也类似，可以用同样的方法验证，但出于美观考虑，我们不愿将其完整写出。

4.2. **第 1 步：添加第五个五维棱锥**。为了表示我们要拼接的第五个五维棱锥，我们将使用恒等式

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = 1^2\cdot 1^2+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 3^2+\cdots+n^2\cdot n^2$$

如图30所示。

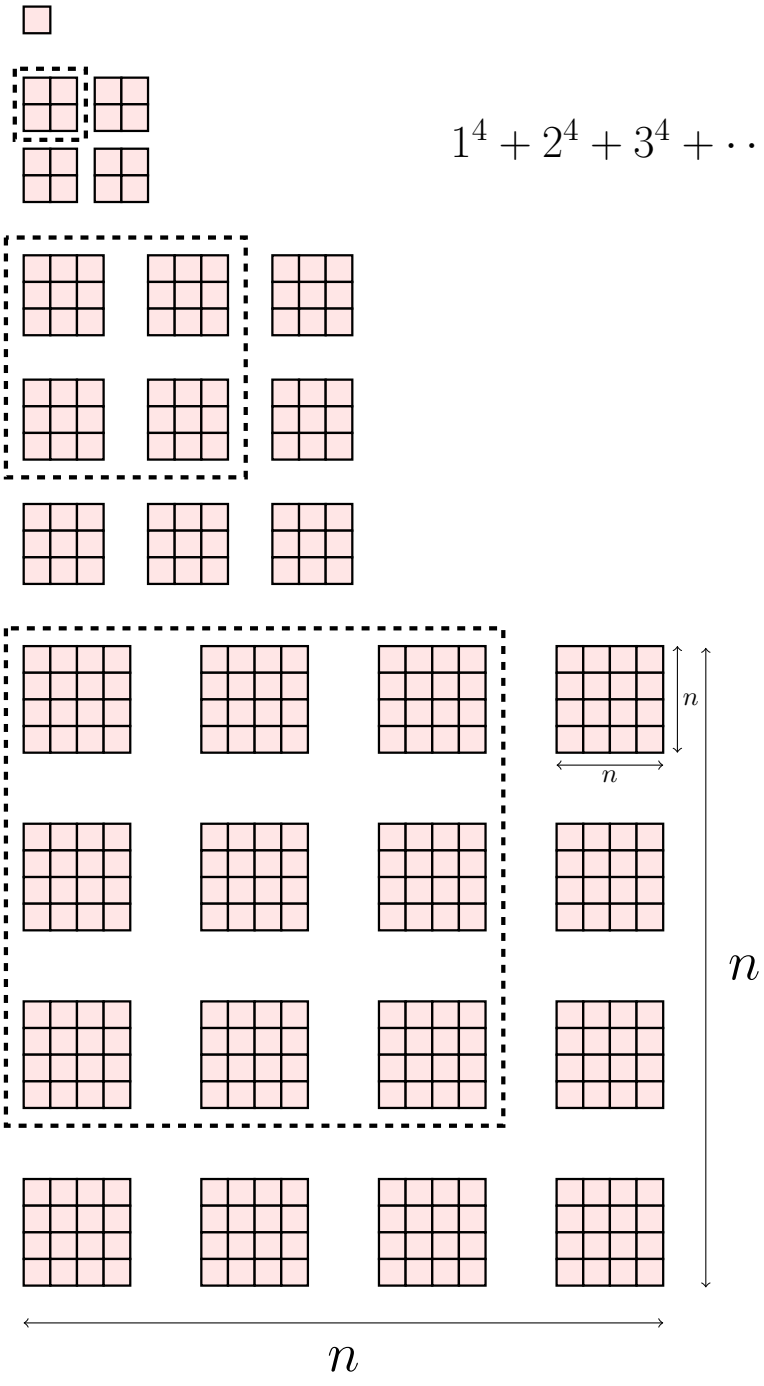


FIGURE 30. 2维截面：第五个五维棱锥

接下来，我们将与图24中相同的视觉填充论证应用于图26–29中的图示。在每个 n 截面中添加绿色单位正方形后，会出现一些方形空隙，随后用图30中以虚线轮廓标出的白色单位正方形填补这些空隙。这样，我们得到图31–34，其中所有拼图都变成了完美长方体。

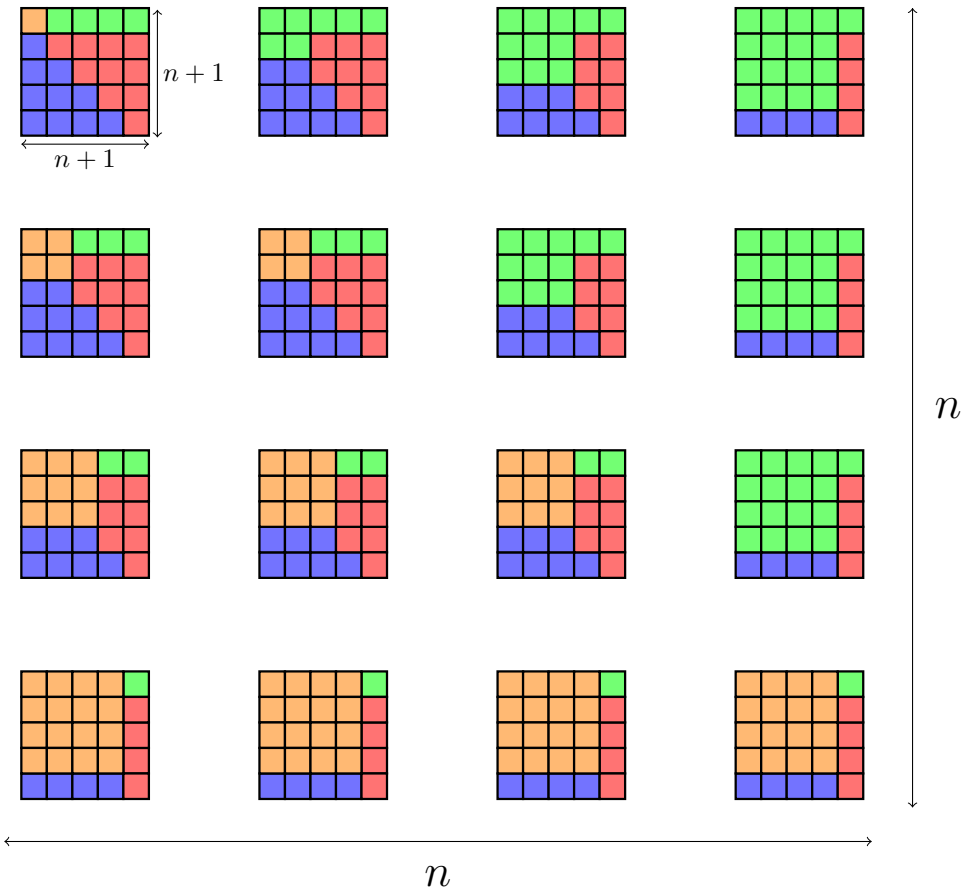


FIGURE 31. 包含五个五维棱锥的第一部分

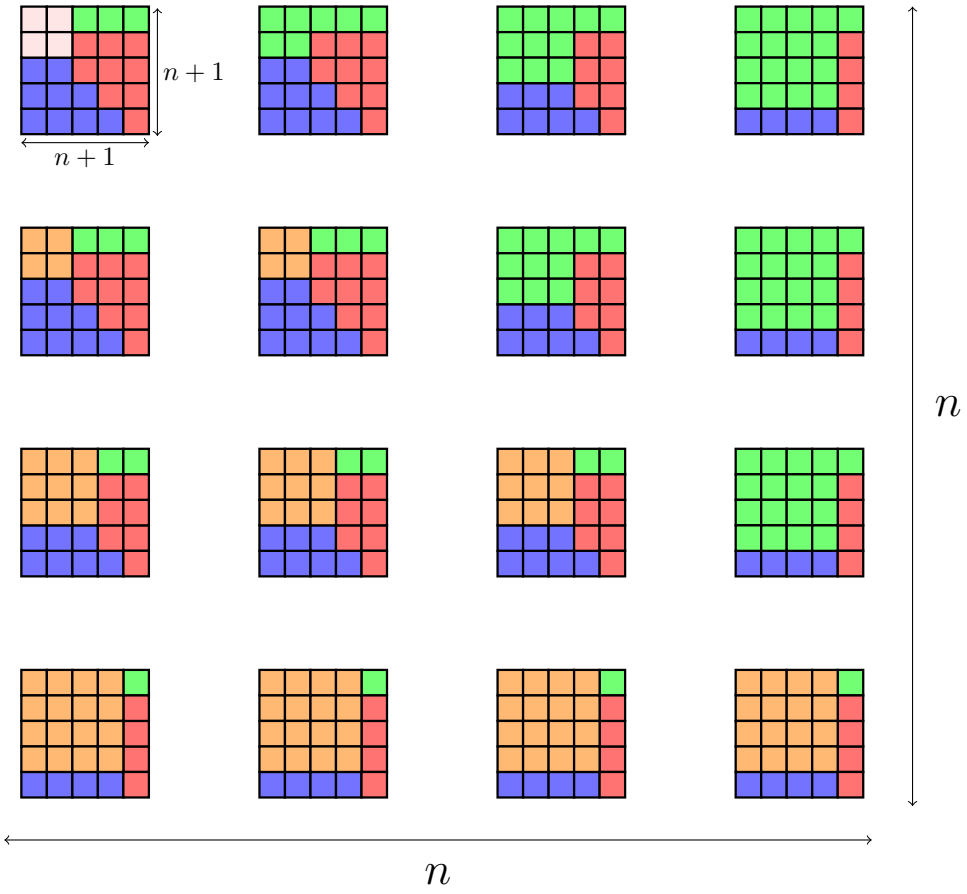


FIGURE 32. 包含五个五维金字塔的第二部分

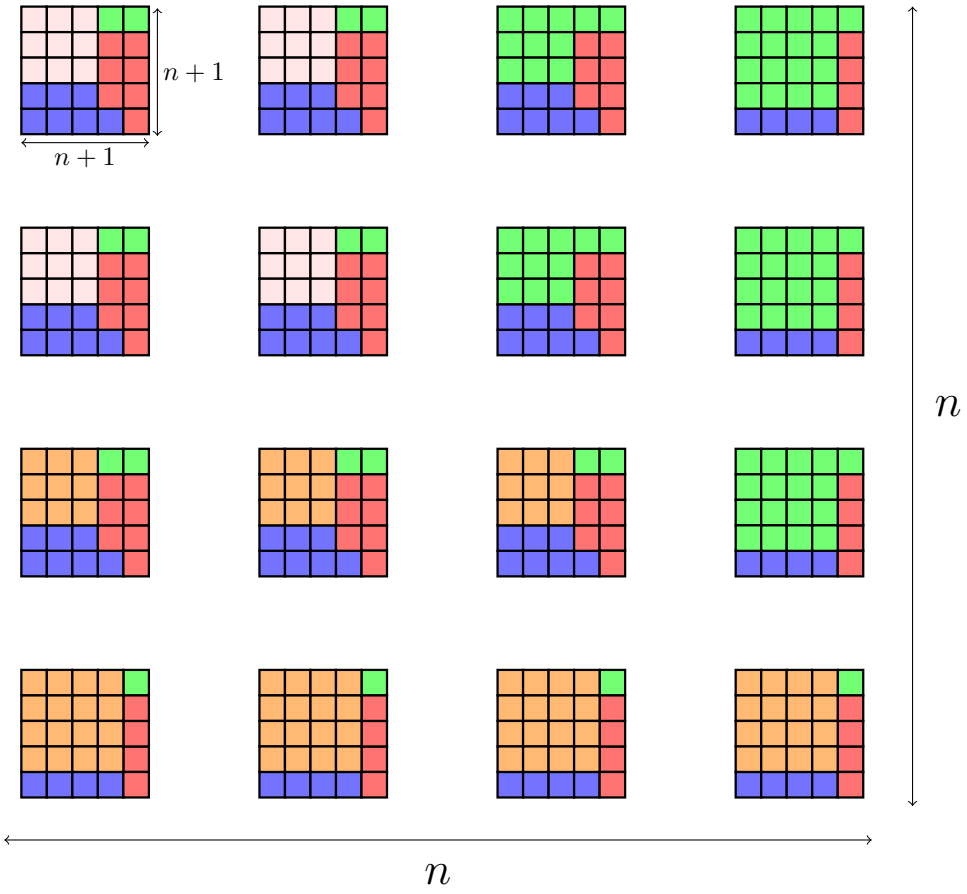
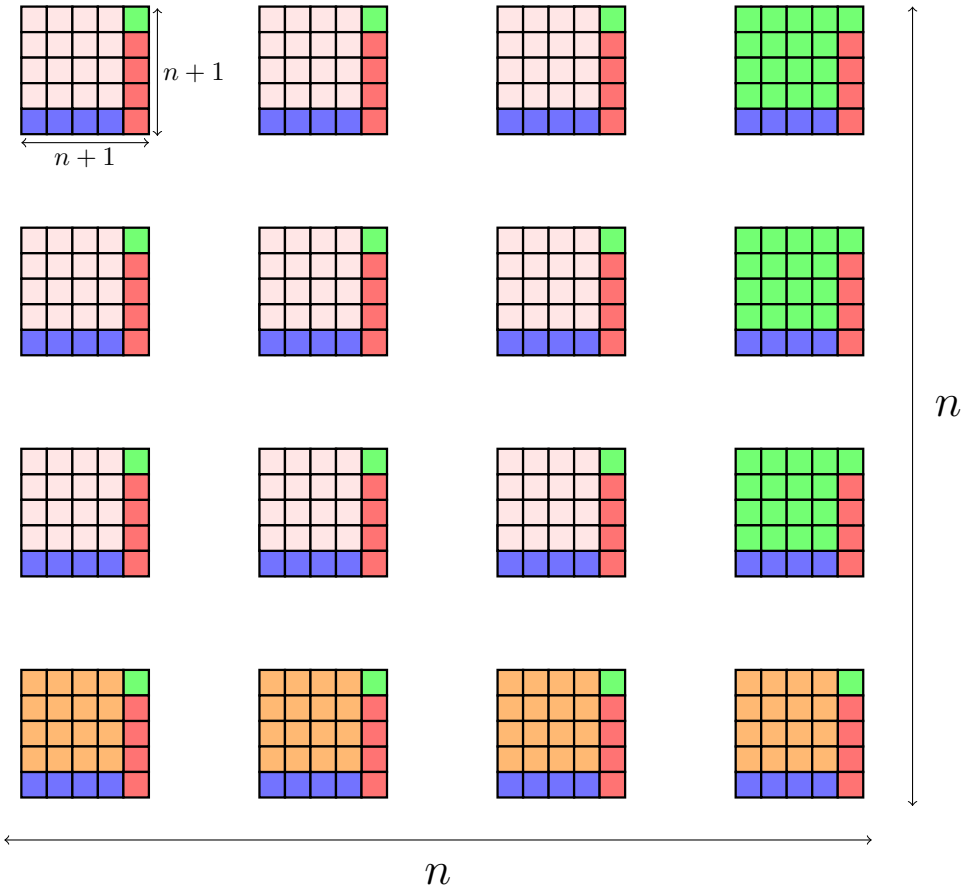


FIGURE 33. 由五个五维棱锥组成的第三部分



带有五维金字塔的第FIGURE 34. n节

$$1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1)n^2$$

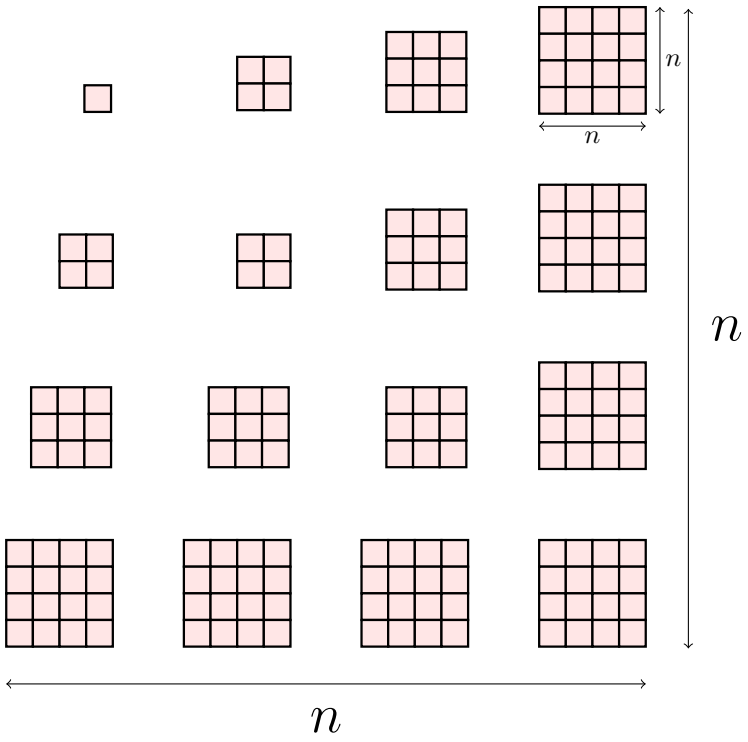


FIGURE 35. 组装五个五维棱锥后产生的多余部分

因此，我们得到 n 个截面，每个截面都由边长为（$n+1$）的正方形 $n \times n$ 排列组成；此外，还有最后一个截面，对应于最后一个五维棱锥中减去用于填补空隙的正方形后所剩下的部分，如图35所示。由于总共有五个五维棱锥，即 $5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4)$，因此我们已经对以下恒等式给出了视觉证明

$$\begin{aligned} &5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4) = \\ &n^3(n+1)^2 + \Big(1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1)n^2\Big). \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.3. 阶梯 2：开始自己动手。因子 $n(n+1)$。 我们或许会以为大部分工作已经完成，因为现在我们有 n 个截面，每个截面都是由尺寸为 $(n+1) \times (n+1)$ 的全等矩形组成的 $n \times n$ 个数组，看起来十分方便。然而，我们的构造中仍有最后一层，其中有 $1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1)n^2$ 个单位正方形；更糟糕的是，我们完全不知道因子 $(n^2 + n - \frac{1}{3})$ 会在哪里出现。本节将进行的调整看似简单，但对于完成我们的二维拼图至关重要。

它基于以下平凡恒等式

$$n^2(n+1)^2 = n(n+1)\,n(n+1).$$

虽然从代数角度看这似乎显而易见，但从视觉上看却意义重大。我们希望将由 $n \times n$ 个尺寸为 $(n+1)\times(n+1)$ 的矩形组成的层，变换为由 $n\times$ 个尺寸为 $n\times(n+1)$ 的 $n+1$ 矩形组成的层。

如图36所示（由于前 n 层由全等矩形组成，我们去掉了颜色），只需从每个矩形中移除一行单位正方形，就能形成一行新的矩形。

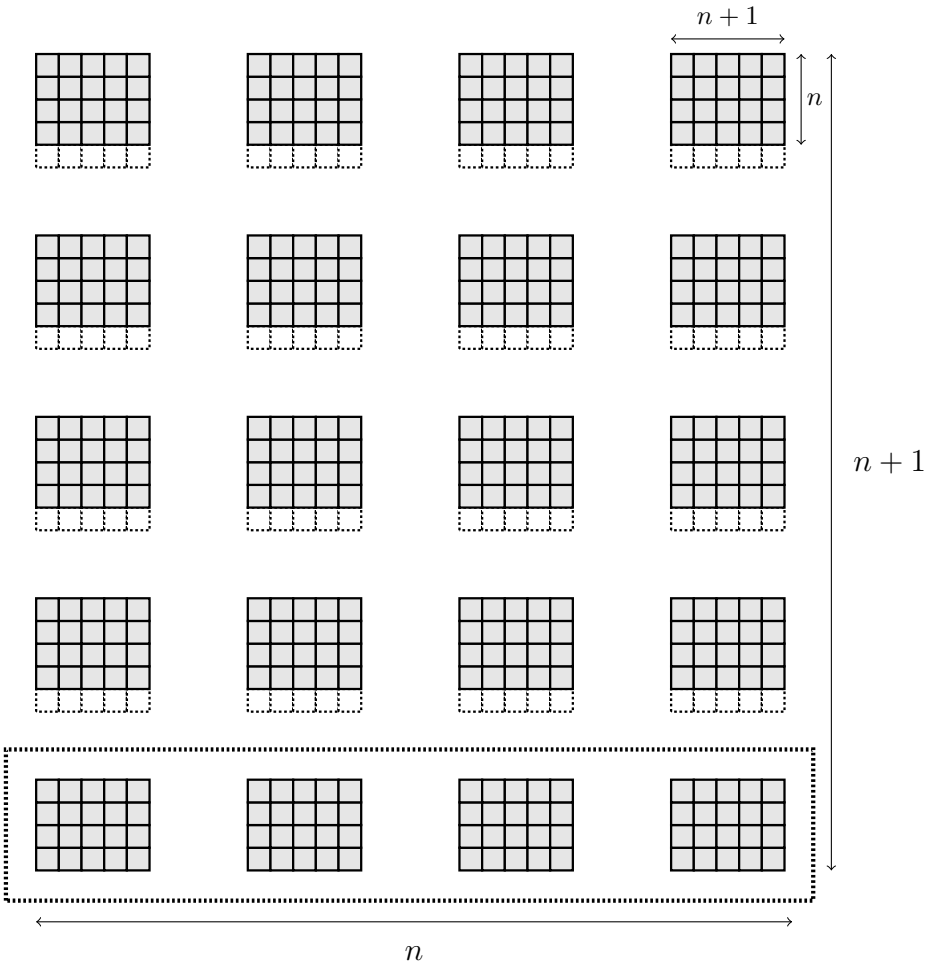


FIGURE 36. 因子 $n(n+1)$ 的视觉解释

进行这一修改的原因是，我们希望因子 $n(n+1)$ 来自每层中矩形的数量，这样，神秘因子 $n^2+n-\frac{1}{3}$ 就会由我们对每个矩形所做的调整产生，正如我们将在下一阶梯中看到的那样。

4.4. 步骤3：拿出剪刀。不可约因子 ($n^2+n-\frac{1}{3}$)。因子 $n^2+n-\frac{1}{3}$ 所带来的问题是，它在有理数域上不可约，尽管在实数域上可以分解。事实上，我们可以将这个因子写成

$$n^2+n-\frac{1}{3}=(n-x_1)(n-x_2),$$

其中 $x_1=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}$ 和 $x_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{7}{12}}$ 是其实根。因此，$x_2=-1-x_1$，通过设定 $x=x_1$ 我们可以写成

$$n^2+n-\frac{1}{3}=(n-x)(n+1+x). \tag{4.3}$$

这准确地告诉我们，需要对二维拼图前 n 层中的每个尺寸为（$n+1$）$\times n$ 的矩形执行何种DIY操作。具体来说，我们沿每个矩形的长度切割出宽度为 x 的窄条，并在最后一个矩形中，距边缘 x 处再进行一次垂直切割。随后，可以将这些拼块在每个矩形的右端垂直重新排列，形成一个尺寸为（$n+1+x$）$\times$（$n-x$）的新矩形。

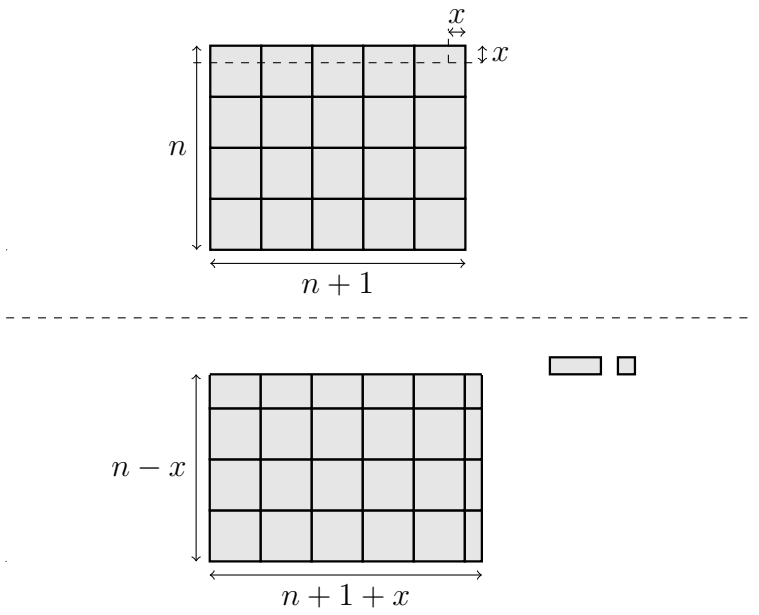


FIGURE 37. 因子（$n^2+n-\frac{1}{3}$）的剪刀DIY解释。

在这个过程中，还剩下两块额外的拼块，我们将它们放入尚待完成的最后一层中（见图35）。

请注意，本节所进行的操作适用于任意$0\le x\le 1$。不过，为什么必须将 x 选为多项式 $n^2+n-\frac{1}{3}$ 的正根，恰好是这个数值，这一点将在下一节中变得清楚。

4.5. 步骤4：完成顶层。因子 ($n+\frac{1}{2}$)。 对因子 ($n+\frac{1}{2}$) 的解释类似于图8中对平方和所执行的DIY操作

换句话说，我们要构造的立体块的顶层，其面积必须等于前 n层面积的一半。

然而，与图示8中进行的操作不同，在我们的情形中，前 n 层已经进行过调整。事实上，在图36中，每个面积为 $n(n+1)$的矩形都移除了一个面积为 $\mathcal{R} = x^2 + x$ 的剩余部分（见图38）。

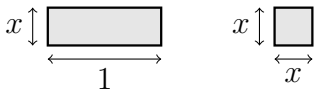


FIGURE 38. 每个矩形中的剩余拼块。

因此，前 n 层各自的面积为

$$n^2(n+1)^2 - \mathcal{R}\, n(n+1).$$

现在我们必须确认，这个面积是否等于将前 n 层的剩余部分之和，即 $\mathcal{R}\, n^2(n+1)$，加到最后一层（图35）上，再将所得数量加倍的结果。

为了以直观的方式验证这个等式，我们需要一个几何论证，可将其视为形数的一种交换性。

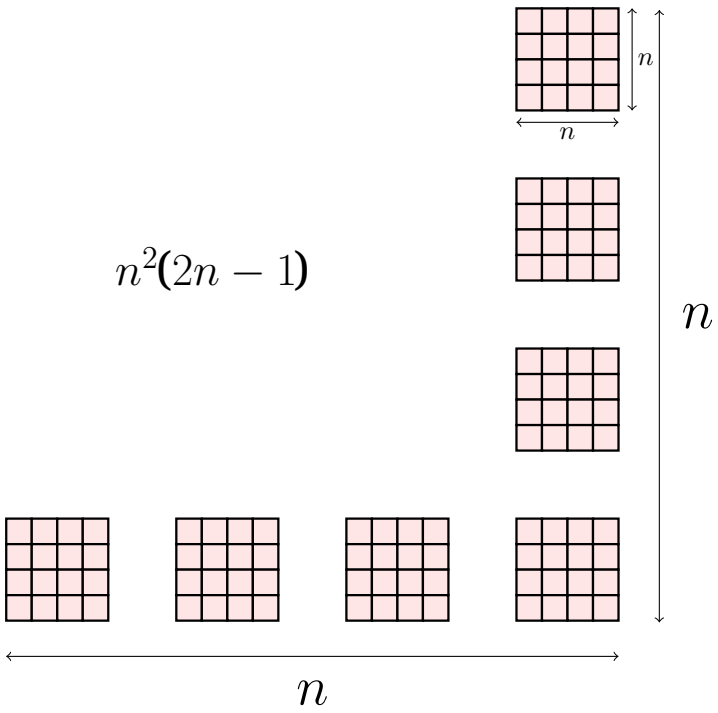


FIGURE 39. 由正方形组成的角形排列

假设我们从一种给定形状（大小为 n）的排列开始，并在该形状的每个“位置”中放入另一类型的形数图案，但大小相同

大小为 n。单位正方形的总数，与从第二种形状的排列开始，并在其每个位置中放入第一种形状的形数图案所得的数量相同。

例如，由正方形组成的角形排列中的单位正方形数量（见图39），与由角形图形组成的正方形排列中的数量相同（见图40）。两种情况下，单位正方形的总数都是 $n^2(2n-1)$。

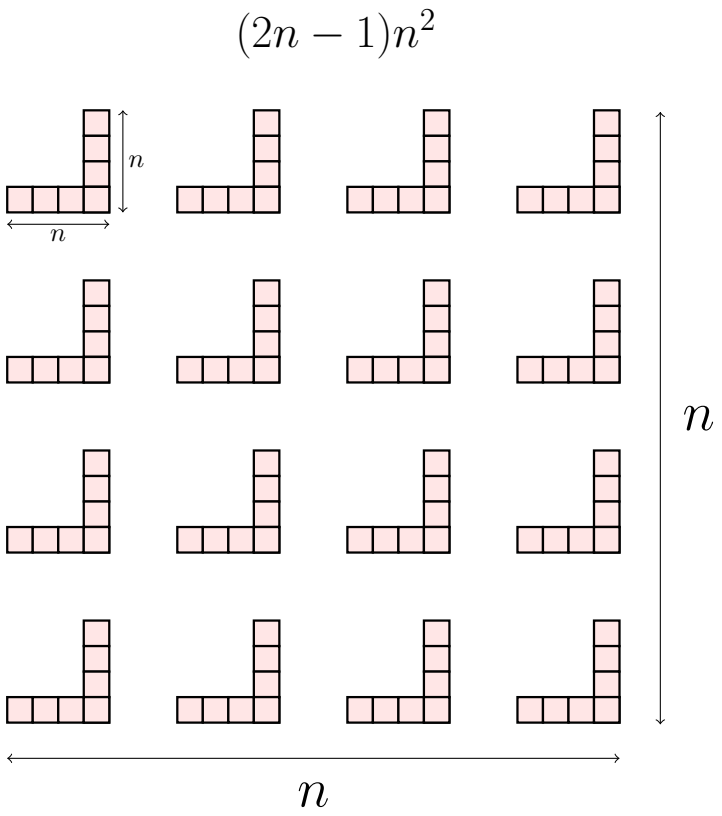


FIGURE 40. 由角形图形组成的正方形排列

因此，最后一层由 $1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1)n^2$ 个单位正方形组成，可以整理成由角形图形构成的正方形排列，如图 41 所示。

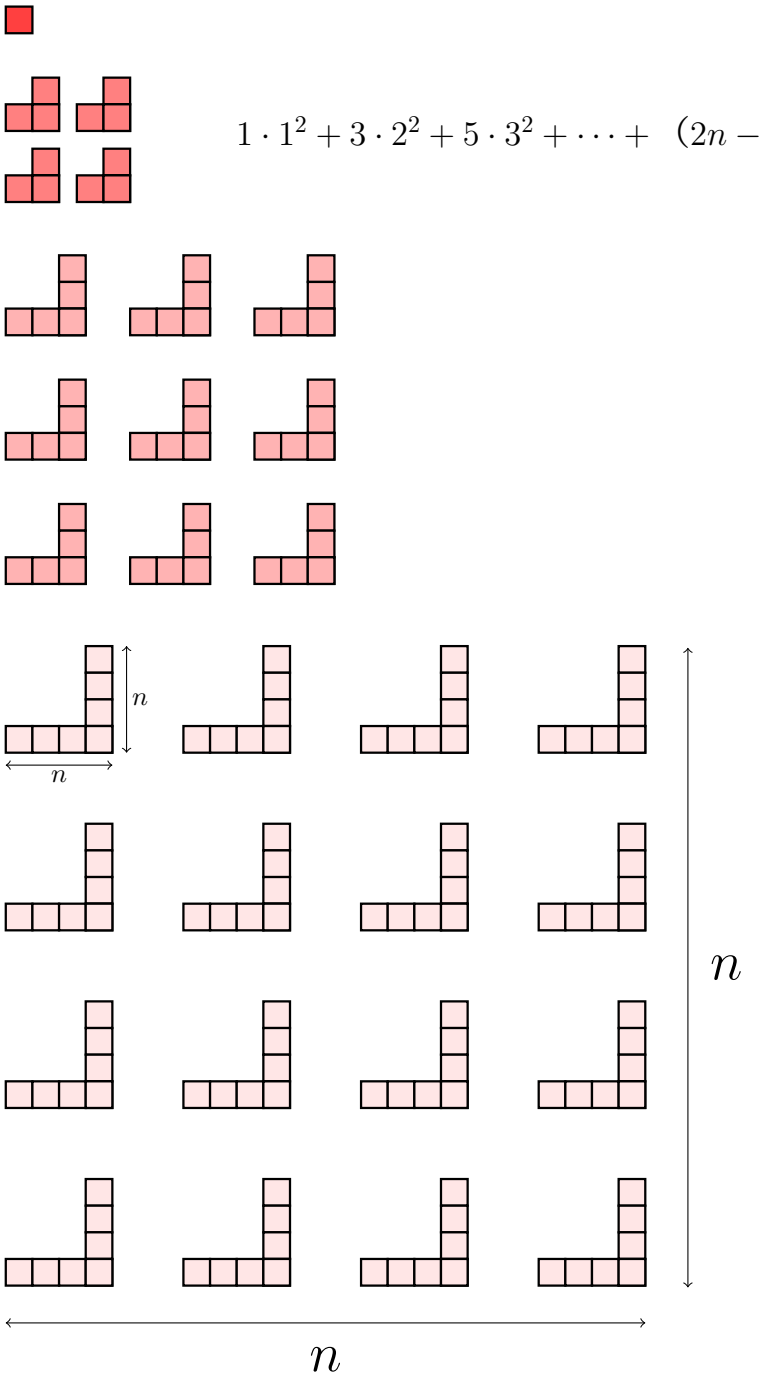


FIGURE 41. 对偶方形–角表示中的最后一层

利用连续奇数之和为一个正方形这一事实（见图1），我们可以用更凝缩的形式表示最后一层的对偶平方–角分解，如图42所示。

$$1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + \ (2n-1)\ n^2$$

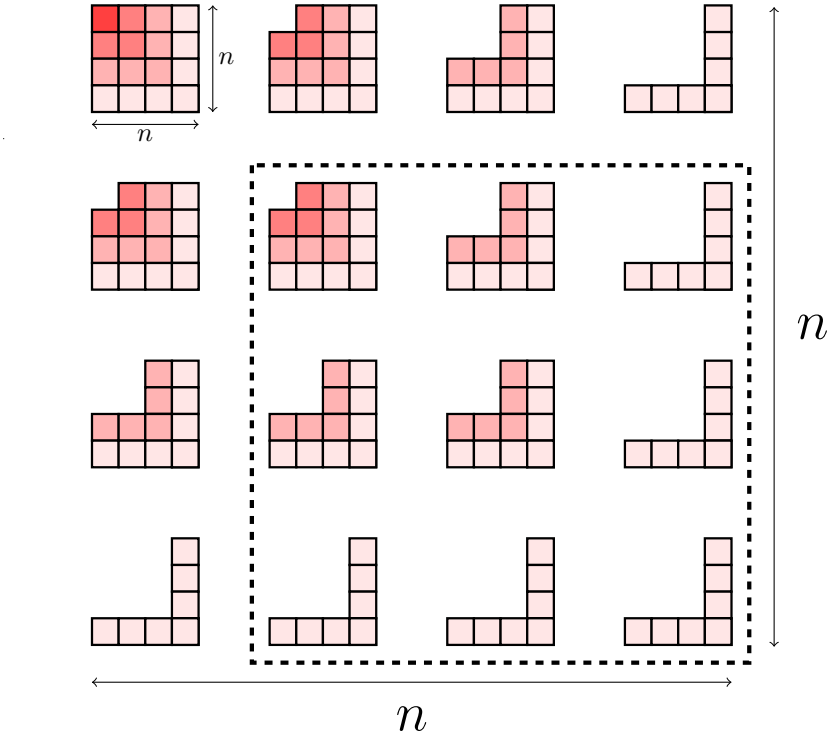


FIGURE 42. 顶层的凝缩对偶形式

在上一幅图示中，一个正方形用虚线轮廓标出。由于必须复制最后一层，我们将此构型与其原始角–平方形式中的同一层重叠，如图43再次所示。虚线正方形标示了要重叠的区域，有助于直观地理解这一论证。

$$1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1)n^2$$

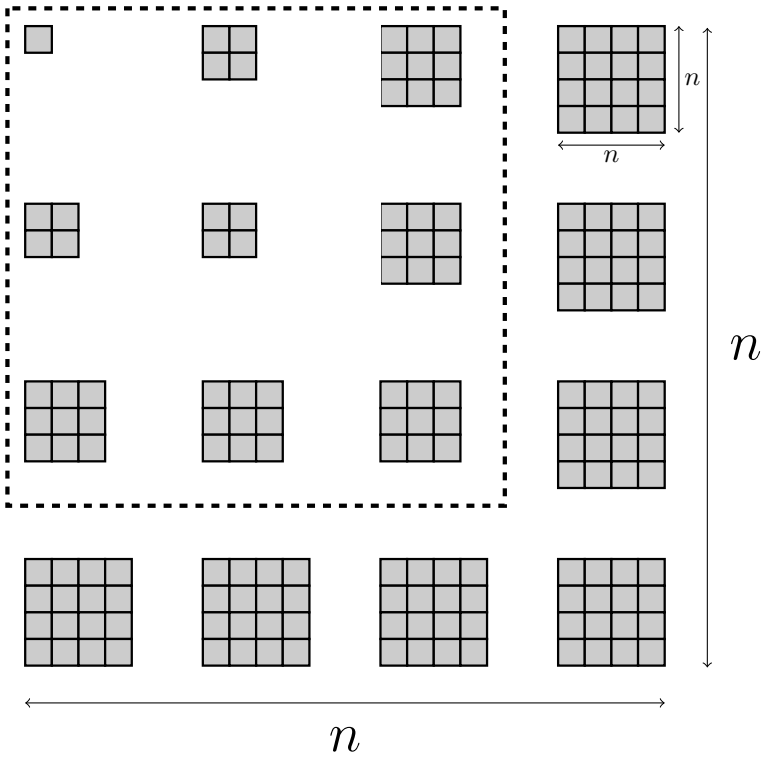


FIGURE 43. 重新审视顶层

这样，复制后的最后一层构成一个边长为 $n+1$ 的正方形排列，由边长为 n 的正方形组成，并从中减去两次平方和 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，如图44所示。

现在，由于每一层中面积为 $\mathcal{R}n(n+1)$ 的剩余部分必须先加到顶层，然后再将其复制，并考虑平方和公式 (1.2)，我们得到：

$$\begin{aligned}
&2\mathcal{R}n^2(n+1) + n^2(n+1)^2 - 2\Big(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\Big) \\
&= 2\mathcal{R}n^2(n+1) + n^2(n+1)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \\
&= n(n+1)\Big[2\mathcal{R}n + n(n+1) - \frac{2n+1}{3}\Big]
\end{aligned}$$

现在我们来考察：最后一层加上剩余部分，再将其复制一份后，是否与前 n 层中的每一层相等；这些层的面积均为

$$n^2(n+1)^2 - \mathcal{R}n(n+1) = n(n+1)\Big[n(n+1) - \mathcal{R}\Big].$$

如果下列等式成立，情况便是如此：

$$\frac{2n+1}{3} = \mathcal{R}(2n+1),$$

这等价于

$$\mathcal{R} = \frac{1}{3}.$$

由于 $\mathcal{R} = x^2 + x$，其中 $x^2 + x = \frac{1}{3}$，因此每一层中的单位正方形数量都必须乘以 $n + \frac{1}{2}$。此外，上述计算表明，数值 x 决定了必须从前 n 层的每个矩形中移除的条带宽度；为了恰好得到因子（$n + \frac{1}{2}$），它必须是方程 $x^2 + x - \frac{1}{3} = 0$ 的正解。

$$n^2(n+1)^2 - 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

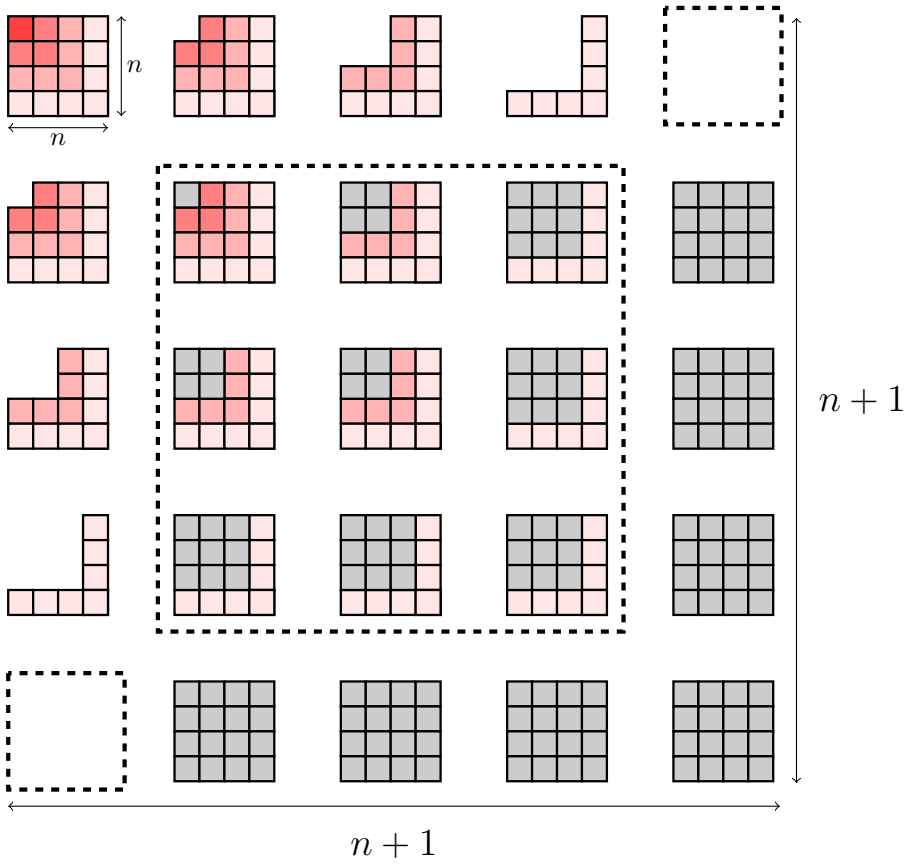


FIGURE 44. 顶层的两个副本

References

[1] E. A. Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, Seeley & Co.（1884）。[2] T. Arakawa、T. Ibukiyama、M. Kaneko、D. Zagier, *Bernoulli numbers and Zeta Functions*, 施普林格，2014。[3] 阿基米德，T. L. Heath, 《阿基米德全集》，剑桥大学出版社（韦尔斯利学院图书馆）（1897）。[4] 阿耶波多，W. E. Clark, 《阿耶波多历数书：一部古印度数学与天文学著作》，芝加哥大学出版社（1930）；Kessinger 出版社（2006）。[5] J. Beery, 《正整数的幂和：Pierre de Fermat（1601–1665）》，法国， *Con-vergence*，美国数学协会（2010），https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers-pierre-de-fermat-1601-1665-france。[6] J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*，E. D. Sylla 译，约翰·霍普金斯大学出版社，巴尔的摩（2006）。[7] J. Conway、R. K. Guy, 《数之书》。纽约州纽约市：施普林格（1996）[8] M. L. D'Ooge、F. E. Robbins、L.C. Karpinski, 《尼科马库斯算术入门》。麦克米伦（1926）。[9] J. Faulhaber, *Academia Algebrae*，Johann Ulrich Sch¨onigs Erben，乌尔姆（1631）。[10] N. Gulley、L. Shure，尼科马库斯定理，Matlab Central（https://blogs.mathworks.com/loren/2010/03/04/nichomachuss-theorem/）。[11] T. L. Heath, 《希腊数学史：第一卷（从泰勒斯到欧几里得）》，牛津大学出版社（1921）。[12] S. Kalajdzievski, *Some evident Summation formulas*, 《数学智者》，（**22**），47–49，（2000）。[13] V. J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*，第3版，Addison–Wesley，波士顿（2009）。[14] D. E. Knuth，Johann Faulhaber 与幂和， *Mathematics of Computation* **61**（1993），277–294。[15] M. S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（1973）。[16] R. B. Nelsen, *Proof without words: Exercises in visual thinking*。美国数学协会（1993）。[17] B. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*，Guillaume Desprez，巴黎（1654）。[18] D. Pengelley, 《离散数学中的幂和：阿基米德在沙地上求平方和》，Convergence（2013 10 4169 003986），DOI：。/loci M. K. Siu，无字证明：[19] 平方和， *Math. Mag.* 57第2期（1984）

Departamento de Algebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga, Ap. 59, 29080 Málaga, Spain*Email address*: ubuijs@uma.es