arXiv:2601.19485v1 [math.QA] 27 Jan 2026

关于某些高亏格带框架三维流形的 Kuperberg 不变量的规范不变性

LIANG CHANG、YILONG WANG 和 SAIFEI ZHAI

摘要。 我们证明，Weeks流形在任意框架下的 Kuperberg 不变量都是有限维 Hopf 代数的规范不变量，这为通过双曲三维流形构造一般有限维 Hopf 代数的规范不变量提供了首个实例。我们还证明，三维环面的 Kuperberg 不变量具有规范不变性，这进一步支持了通过拓扑方法系统地构造 Hopf 代数规范不变量这一设想，该方法由 [CNW25]提出。

1. 引言

有限维 Hopf 代数的规范不变量，是将有限维 Hopf 代数映射为数值，并且在 Hopf 代数表示范畴的张量等价下保持不变的量。规范不变量也称为范畴不变量。有限维 Hopf 代数的许多自然不变量都是规范不变量，包括维数、指数[EG99], 准指数 [EG02b]（对于 $\mathbb{C}$上的 Hopf 代数），以及 Kashina、Montgomery 和 Ng 研究的 Frobenius-Schur 指标的推广 [KMN12] 和 Shimizu[Shi15], 。这些规范不变量在有限维 Hopf 代数研究中的重要性，尤其是在其分类研究中的重要性，自然促使我们寻求构造规范不变量的新方法。

受半单 Hopf 代数 H over $\mathbb{C}$ 的 Frobenius-Schur 指标、与范畴 Rep(H) [TV92] 相关的透镜空间 Turaev-Viro 不变量，以及与 H[Kup91, BW95], 相关的透镜空间（对合）Kuperberg 不变量之间密切关系的启发， [CNW25] 的作者开始研究与有限维 Hopf 代数相关的带框架 3-流形的 Kuperberg 不变量的规范不变性。上述文献表明， [KMN12] 中的非半单指标可以实现为某些带框架透镜空间的 Kuperberg 不变量。此外，任意带框架透镜空间的 Kuperberg 不变量都是任意基域上有限维 Hopf 代数的规范不变量。这一结果引出了 [CNW25] 中的问题 1.1：所有带框架的 Kuperberg 不变量都是规范不变量吗? 若答案肯定，这不仅意味着我们可以系统地构造有限维 Hopf 代数的无穷族规范不变量，也表明这类带框架 3-流形不变量可能存在范畴论构造；这对于研究非半单量子不变量和拓扑场论颇为理想 [Lyu95, CGPMT20, DRGG+22, MSWY26]。除了透镜空间外， [CNW25] 还证明了一族亏格 2 带框架 3-流形的 Kuperberg 不变量是规范不变量。人们很快会意识到，[CNW25] 研究的 3-流形都是非双曲的，因此自然会问：带框架 Kuperberg 不变量的规范不变性是否与 3-流形的几何有关? 此外，鉴于大多数 3-流形都是双曲的 [Thu82], , 我们不难认同：若要有力支持 [CNW25, Question 1.1] 对所有 3-流形都成立这一肯定答案，带框架双曲 3-流形的 Kuperberg 不变量具有规范不变性将是重要证据。

本文证明，Weeks流形（带框架）的 Kuperberg 不变量具有规范不变性；Weeks流形是体积最小的唯一双曲 3-流形[GMM09]。更准确地说，我们的主定理如下：

主定理。（定理 2）设 H 是任意基域上的有限维 *Hopf* 代数。对于 *Weeks*流形 f 上的任意框架 W，*Kuperberg* 不变量 $Z(W, f, H)$ 是 H的规范不变量。

这是首个通过双曲三维流形构造一般（不一定是半单的）有限维 Hopf 代数的规范不变量的例子。为证明主定理，我们首先设计了一个带有两个向量场的 Weeks流形的 Heegaard图，并证明它是带框架的Heegaard图（即，它由 Weeks流形上的框架 f_0 给出）。接着，我们证明该带框架的Heegaard图的 Kuperberg 不变量 $Z(W, f_0, H)$ 在规范变换下保持不变，从而证明其规范不变性。最后，我们论证 Weeks流形上所有其他框架对应的 Kuperberg 不变量，都与规范不变量 $Z(W, f_0, H)$ 相差另一个规范不变量的一个倍数，由此完成证明。正如上文所述，本文的结果为所有 3-流形的带框架 Kuperberg 不变量具有规范不变性提供了非常重要的证据。最后，在末节中，我们检验了带框架的三维环面的 Kuperberg 不变量的规范不变性；三维环面是一个属为 3 的 3-流形。

本文结构如下。第2节回顾有限维 Hopf 代数的相关基本概念。第3节回顾带框架的3维流形的 Kuperberg 不变量的定义。第4节证明关于 Weeks流形的 Kuperberg 不变量的规范不变性的主定理。最后，第5节证明带框架的三维环面的 Kuperberg 不变量的规范不变性。

致谢

我们感谢 Siu-Hung Ng 富有成效的讨论。Y. W. 获得国家自然科学基金项目 12301045 和 12571041，以及北京自然科学基金重点项目 Z220002 的资助。

2. Hopf代数与规范不变量

本节回顾 Hopf 代数的基本结构及其规范变换。本文中的所有代数均假设为基域上的有限维代数。

设 H是域 k上的有限维 Hopf 代数，其乘法为 $m\colon H\otimes H\to H$，单位为 $1_H\colon k\to H$，余乘法为 $\Delta\colon H\to H\otimes H$，余单位为 $\varepsilon\colon k\to H$，对跖映射为$S\colon H\to H$。我们将使用 Sweedler记号 $\Delta(x)=\sum_{(x)} x_{(1)}\otimes x_{(2)}$或 $\Delta(x)=x_{(1)}\otimes x_{(2)}$，其中省略求和符号。迭代余乘法归纳定义如下：

$$\Delta^0=\varepsilon\circ 1_H,\quad \Delta^1=\mathrm{id}_H,\quad \Delta^2=\Delta,\quad \Delta^{n+1}=(\mathrm{id}\otimes\Delta^{(n)})\circ\Delta\quad \text{for } n\geq 2.$$

省略的 Sweedler记号为 $\Delta^n(x)=x_{(1)}\otimes\cdots\otimes x_{(n)}$。若元素 $x\in H$ 满足 $\Delta(x)=x\otimes x$，则称其为群状。

A 1在 H 中，左积分（分别为右积分）是满足以下条件的元素 Λ^L（分别为 Λ^R）：

$$x\Lambda^L=\varepsilon(x)\Lambda^L\quad (\text{resp. } \Lambda^R x=\varepsilon(x)\Lambda^R).$$

事实证明，左积分和右积分的空间都是一维的 [Swe69]。对偶空间 H^* 的 H 也是一个 Hopf代数，其结构映射是 H的结构映射的对偶。一个

λ^L 中的左积分（分别地，右积分 λ^R）也称为 H的左余积分（分别地，右余积分），它满足

$$x_{(1)}\lambda^L(x_{(2)}) = \lambda^L(x)1_H,\ \lambda^R(x_{(1)})x_{(2)} = \lambda^R(x)1_H$$

对任意 $x \in H$。由于积分在相差一个标量的意义下存在，因此存在特征群状元 $g \in H$ 和 $\alpha \in H^*$，使得

$$\Lambda^L x = \alpha(x)\Lambda^L, \quad \text{and} \quad \lambda^R(x_{(1)})x_{(2)} = \lambda^R(x)g$$

对所有 $x \in H$。

众所周知，$\lambda^R(\Lambda^L) \neq 0$ [Rad90]。本文固定选取一对归一化积分，即一对积分 $\Lambda^L \in H$ 和 $\lambda^R \in H^*$，使得 $\lambda^R(\Lambda^L) = 1$，并简记为 $\Lambda = \Lambda^L$ 和 $\lambda = \lambda^R$。从归一化积分出发，我们将得到相应的积分

$$\Lambda^R := S(\Lambda),\ \lambda^L := \lambda \circ S = g \rightharpoonup \lambda$$

使得 Λ^R 是 H 的右积分，且 λ^L 是 H^*的左积分，并且 $\lambda(\Lambda^R) = \lambda^L(\Lambda^R) = 1$,$\lambda^L(\Lambda^L) = \alpha(g)$。对于任意 $x \in H$，我们将使用记号 $g \rightharpoonup \lambda \in H^*$, $g \rightharpoonup \lambda(x) = \lambda(xg)$。关于迹函数的下述定理在证明 Kuperberg 不变量的规范不变性时起着重要作用。其证明可见 [Rad94] 和 [CNW25]。

定理 1. 设 H 是有限维 *Hopf* 代数，Λ 和 λ 是一对归一化积分，使得 $\lambda(\Lambda) = 1$, $X \in \mathrm{End}(H)$

(1) $S(a)\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)} = \Lambda_{(1)} \otimes a\Lambda_{(2)}$。(2) $\mathrm{Tr}(X) = \lambda(S \circ X(\Lambda_{(2)})\Lambda_{(1)}) = \lambda(S(\Lambda_{(2)})X(\Lambda_{(1)}))$。(3) $\lambda S(aX(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}) = \lambda S(X(\Lambda_{(1)}S(a))\Lambda_{(2)})$。 □

Hopf 代数的定义性特征是其表示范畴为有限张量范畴。若两个 Hopf 代数 H 和 K 的表示范畴作为幺半范畴等价，则称它们规范等价。若 Hopf 代数 H 和 K 规范等价时，恒有 $Z(H) = Z(K)$，则称量 $Z(H)$ 为规范不变量。

或者，规范等价还具有如下内在刻画。若可逆元 $F = \sum_i f_i^{[1]} \otimes f_i^{[2]} \in H \otimes H$ 满足以下条件，则称其为归一化2-余圈

$$(F \otimes 1)(\Delta \otimes \mathrm{id})(F) = (1 \otimes F)(\mathrm{id} \otimes \Delta)(F), \quad (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1.$$

给定一个2-余循环 F，我们可以在 H [KMN12] 上定义一种新的Hopf代数结构。具体而言，H_F，称为 H 的（ Drinfeld ）扭曲，是一个与 H 具有相同代数结构的 Hopf 代数。其余乘法和对跖映射定义如下:

$$\Delta_F(x) = F\Delta(x)F^{-1},\ \varepsilon_F(x) = \varepsilon(x),\ S_F(x) = uS(x)u^{-1}$$

其中 $u := \sum_i f_i^{[1]} S(f_i^{[2]})$。令 $F^{-1} = \sum_j d_j^{[1]} \otimes d_j^{[2]}$。则 $u^{-1} = \sum_j S(d_j^{[1]})d_j^{[2]}$。此外，$S_F^2(x) = QS^2(x)Q^{-1}$，其中 $Q := uS(u^{-1})$。

迭代余乘法 Δ_F^n 可以用递归定义的 n 重张量 F_n 来计算： $F_1 = 1$, $F_2 = F$, $F_2^{-1} = F^{-1}$ 以及

$$F_{n+1} = (1 \otimes F_n)(\mathrm{id} \otimes \Delta^n)(F),\ F_{n+1}^{-1} = (1 \otimes F_n^{-1})(\mathrm{id} \otimes \Delta^n)(F^{-1}).$$

然后 $\Delta_F^n(x) = F_n\Delta(x)F_n^{-1}$ [KMN12]。

文献 [NS08]（另见 [Sch96、EG02a]）证明了，两个 Hopf 代数 H 和 K 规范等价，当且仅当存在一个归一化2-余圈 F 使得 H_F 与.....同构

K。为了找到 H 的规范不变量，我们需要构造在规范变换下保持不变的 $Z(H)$。也就是说，对于任意 2-余循环 F，都有 $Z(H) = Z(H_F)$。

在下面的命题中，我们汇总了 [CNW25], 中证明的 2-余循环的一些性质，这些性质将在本文余下部分用到（如前所述，为简洁起见，将省略求和符号）。

命题 1 CNW25 引理 5.2。设 F 为 $f_i^{[1]} \otimes \cdots \otimes f_i^{[m]}$ 且 $F^{-1} = d_j^{[1]} \otimes \cdots \otimes d_j^{[n]}$。

(1) $F_{m+n} = (F_m \otimes F_n)(\Delta^m \otimes \Delta^n)(F)$.

(2) $f_i^{[1]} S(f_i^{[m]})_{(1)} \otimes \cdots \otimes f_i^{[m-1]} S(f_i^{[m]})_{(m-1)} = uS(d_i^{[m-1]}) \otimes \cdots \otimes uS(d_i^{[1]})$.

(3) $S(d_j^{[1]})_{(1)} d_j^{[2]} \otimes \cdots \otimes S(d_j^{[1]})_{(m-1)} d_j^{[m]} = S(f_j^{[m-1]})u^{-1} \otimes \cdots \otimes S(f_j^{[1]})u^{-1}$.

(4) $\left(\bigotimes_{s=1}^{m-1} f_i^{[s]}\right) \otimes S(f_i^{[m]})u^{-1} f_i^{[m+1]} \otimes \left(\bigotimes_{s=m+2}^{n} f_i^{[s]}\right) = \left(\bigotimes_{s=1}^{m-1} f_i^{[s]}\right) \otimes 1 \otimes \left(\bigotimes_{s=m}^{n-2} f_i^{[s]}\right)$.

(5) $\left(\bigotimes_{s=1}^{m-1} d_j^{[s]}\right) \otimes d_j^{[m]} uS(d_j^{[m+1]}) \otimes \left(\bigotimes_{s=m+2}^{n} d_j^{[s]}\right) = \left(\bigotimes_{s=1}^{m-1} d_j^{[s]}\right) \otimes 1 \otimes \left(\bigotimes_{s=m}^{n-2} d_j^{[s]}\right)$.

(6) $\Delta^n(u) = (d_i^{[1]} \otimes \cdots \otimes d_i^{[n]})(u \otimes \cdots \otimes u)(S(d_j^{[n]}) \otimes \cdots \otimes S(d_j^{[1]}))$.

(7) $\Delta^n(u^{-1}) = (S(f_i^{[n]}) \otimes \cdots \otimes S(f_i^{[1]}))(u^{-1} \otimes \cdots \otimes u^{-1})(f_j^{[1]} \otimes \cdots \otimes f_j^{[n]})$.

(8) $\Delta^n(Q) = (d_i^{[1]} \otimes \cdots \otimes d_i^{[n]})(Q \otimes \cdots \otimes Q)(S^2(f_i^{[n]}) \otimes \cdots \otimes S^2(f_i^{[n]}))$.

(9) *We have*

$$\begin{aligned}&\lambda(S(\Lambda_{(2)})S_F \circ Y \circ \Delta_F^{n-1}(\Lambda_{(1)}))\\ =&\lambda S(d_j^{[1]} Y(f_i^{[1]}\Lambda_{(1)} d_j^{[2]} \otimes \cdots \otimes f_i^{[n-1]}\Lambda_{(n-1)} d_j^{[n]}) f_i^{[n]}\Lambda_{(n)}).\end{aligned}$$

对于任意线性映射 $Y\colon\ H^{\otimes(n-1)} \to H$。 □

3. Kuperberg 不变量

给定一个有限维 Hopf 代数 H，Kuperberg 为任意带框架的闭 3-流形定义了一个拓扑不变量 [Kup96]。当 3-流形 M 配备黎曼度量时，其上的框架 f 由 M 三个正交归一的切向量场$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 在同伦意义下确定。低维拓扑中的一个经典结果是，任意可定向闭 3-流形 M 都可以通过沿边界曲面粘合两个属数相同的把手体而得到 [Rol76]。这种粘合由曲面上的两组互不相交的简单闭曲线描述，其中一组称为下曲线，另一组称为上曲线。上曲线和下曲线也称为 Heegaard圆。这样的可定向闭曲面连同两组互不相交的简单闭曲线称为 M的 Heegaard图，它给出了 3-流形的图示表示。

本文采用平面表示来描述 Heegaard 图。也就是说，将一个亏格为 k 的可定向闭曲面去掉一个点后，视为一个带有 $2k$ 个孔的平面，这些孔被分成 k 对，每对中的孔通过平面上方的把手相连。随后，用带孔平面上的曲线表示 Heegaard 圆；曲线在孔上的端点被视为通过平面上方的把手相连。接下来的两节将分别给出 Weeks 流形和三维环面的例子，它们分别是亏格为二和三的 Heegaard 图。

基于 Heegaard 图，Kuperberg 引入了一种组合方法来描述框架 $f = (b_1, b_2, b_3)$。只需描绘框架中的两个向量场，因为第三个向量场可由右手定则确定。在我们对 Heegaard 图的平面表示中，第一个向量场 b_1 有 k 个指数为 -1 的奇点，每个指数为 -1 的奇点都位于一条 Heegaard 圆上，且其向外指向的向量与该圆相切。指数为 -1 的奇点称为相应 Heegaard 圆的基点。另一个向量场 b_2 与 b_1 正交（不一定与曲面相切），但基点处除外。我们用一些称为扭转前沿的弧来表示 b_2，沿这些弧，b_2 垂直于曲面。扭转前沿上用小三角形标示方向，以指示 b_2 相对于 b_1 按右手定则旋转的方向。

当 Heegaard 图配备了这样两个向量场 b_1 和 b_2时，可以计算 Heegaard 圆相对于向量场的旋转。对所有 Heegaard 圆定向。对于 Heegaard 圆 c上的任意 p，令 $\theta_c(p)$表示从基点到 p，c 的切向量相对于 b_1 的逆时针旋转量，以 $1 = 360°$为单位；令 θ_c 表示回到基点时的总旋转量。注意，θ_c 始终是半整数。令 $\phi_c(p)$表示从基点到 p，b_2 绕 b_1 的向右旋转量，并令 ϕ_c 表示总旋转量。那么，$\phi_c(p)$是 c 与扭转前沿之间带符号交叉的总数。如果 c 的定向与扭转前沿的三角形一致，则符号为正。此外，c 的基点对总旋转量 ϕ_c贡献半个符号。若向量场 b_1 和 b_2满足以下条件，则称它们是可容许的：

$$\theta_\mu = -\phi_\mu \text{ for each upper curve } \mu, \text{ and } \theta_\eta = \phi_\eta \text{ for each lower curve } \eta.$$

具有两个容许向量场的 Heegaard 图称为带框架的 Heegaard图。文献 [Kup96] 指出，带框架的 Heegaard图可以完整描述一个带框架的3维流形。

给定一个带框架的3维流形的带框架的Heegaard图，其下曲线和上曲线分别为$\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$和$\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$，以及一个有限维 Hopf 代数 H和一对归一化积分 Λ 与 λ，Kuperberg 不变量通过结合几何信息和 Hopf代数运算构造而成。定义 $T\colon H \to H$ 为线性映射 $T(x) = g^{-1}S^2(x)g$，其中 $g \in H$ 是特征群状元。设 p 是 η_i 与 μ_j 的一个交点，我们定义 $s(p)$ 和 $t(p)$ 为

$$s(p) = 2(\theta_{\eta_i}(p) - \theta_{\mu_j}(p)) + \frac{1}{2},\ t(p) = \phi_{\eta_i}(p) - \phi_{\mu_j}(p)$$

注意，对于下曲线与上曲线之间的所有交点，$s(p)$ 都是半整数。我们引入扭曲积分：对于任意整数 m

$$\Lambda_{m-\frac{1}{2}} = \alpha^{-m} \rightharpoonup S(\Lambda),\ \lambda_{m-\frac{1}{2}} = g^m \rightharpoonup \lambda.$$

其中第一个作用 $\rightharpoonup$ 是，对于 $x \in H$，$\alpha^{-m} \rightharpoonup x = x_{(1)}\alpha^{-m}(x_{(2)})$。

令 I 为下曲线与上曲线之间所有交点的集合，并令 $n = |I|$、$n_i = |\eta_i \cap I|$。对于每条下曲线 η_i，记 $L^i = \Lambda_{\theta_{\eta_i}}$ 和 $\Delta^{n_i}(L^i) = L^i_{(1)} \otimes \cdots \otimes L^i_{(n_i)}$。随后可通过以下步骤构造 Kuperberg 不变量：

(1) 对每条下曲线 η_i，按照 η_i 的方向，从其基点开始，将 L^i 的余乘子 $L^i_{(m)}$ 赋给交点。

（2）将交点 p 标记为 S^s $^{(p)}T^{t(p)}(L^i_{(m)})$ 当 L 时$^{i}_{(m)}$ 被赋予 p。

(3) 对每条上曲线 μ_j，从基点开始，沿着 μ_j 的方向，将 μ_j 上的标记相乘。于是，对于上曲线 μ_j，得到 $S^{s(p)}T^{t(p)}(L^i_{(m)})$' 的乘积 $w_j \in H$ 。

(4) Kuperberg 不变量由下式给出

$$Z(M,f,H)=\prod_{\mu_j}\langle\lambda_{-\theta(\mu_j)},w_j\rangle$$

注意，由于 L^i 的余乘法是简单张量之和， $Z(M,\ f,\ H)$ 是对 L^i 的所有求和项取乘积后再求和。

4. Weeks流形

本节中，我们考察 Weeks流形的 Kuperberg 不变量。Weeks流形是体积最小的双曲闭3维流形。Weeks流形存在如图 1 [CK20]所示的二属Heegaard图。

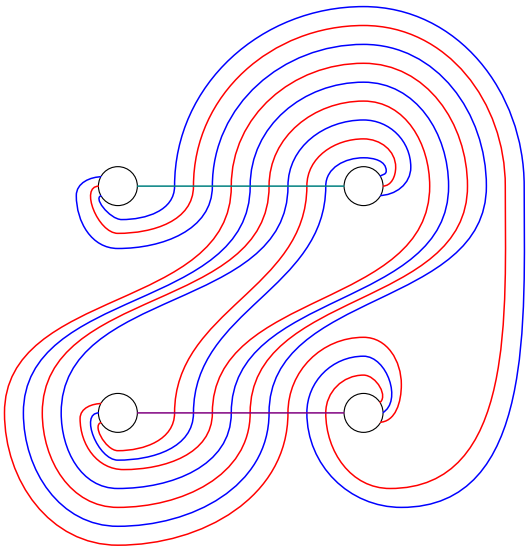

图1. Weeks流形的Heegaard图

在这张 Heegaard图中，每一对水平孔洞都由一个把手连接。因此，蓝色弧通过这两个把手连接起来，构成一条简单闭曲线 μ_1。同样，红色弧也构成一条简单闭曲线 μ_2。它们称为上曲线。两条水平线也构成两条简单闭曲线 η_1 （黄色）和 η_2（绿色），称为下曲线。

我们为这张 Heegaard图设定了图的框架 f_0，如图2所示。在这张带框架的图中，图 1 中的上曲线经过同痕变换后发生了变形，而这些变换不会改变 3- 流形的同胚类型。从各自的基点出发，上曲线向右延伸，下曲线则向下延伸。在下表中，我们记录每个圆的切向量与向量场之间的夹角，以及每个交点处标注的对跖映射的幂 S 。由于所有 Heegaard圆除基点外都不与扭转前沿相交，因此我们只需考虑每个交点处的作用S ，总旋转数为： $\theta_{\eta_1}=\phi_{\eta_1}=\frac{1}{2}$， $\theta_{\eta_2}=\phi_{\eta_2}=\frac{1}{2}$，$\theta_{\mu_1}=-\phi_{\mu_1}=-\frac{1}{2}$和 $\theta_{\mu_2}=-\phi_{\mu_2}=\frac{1}{2}$。

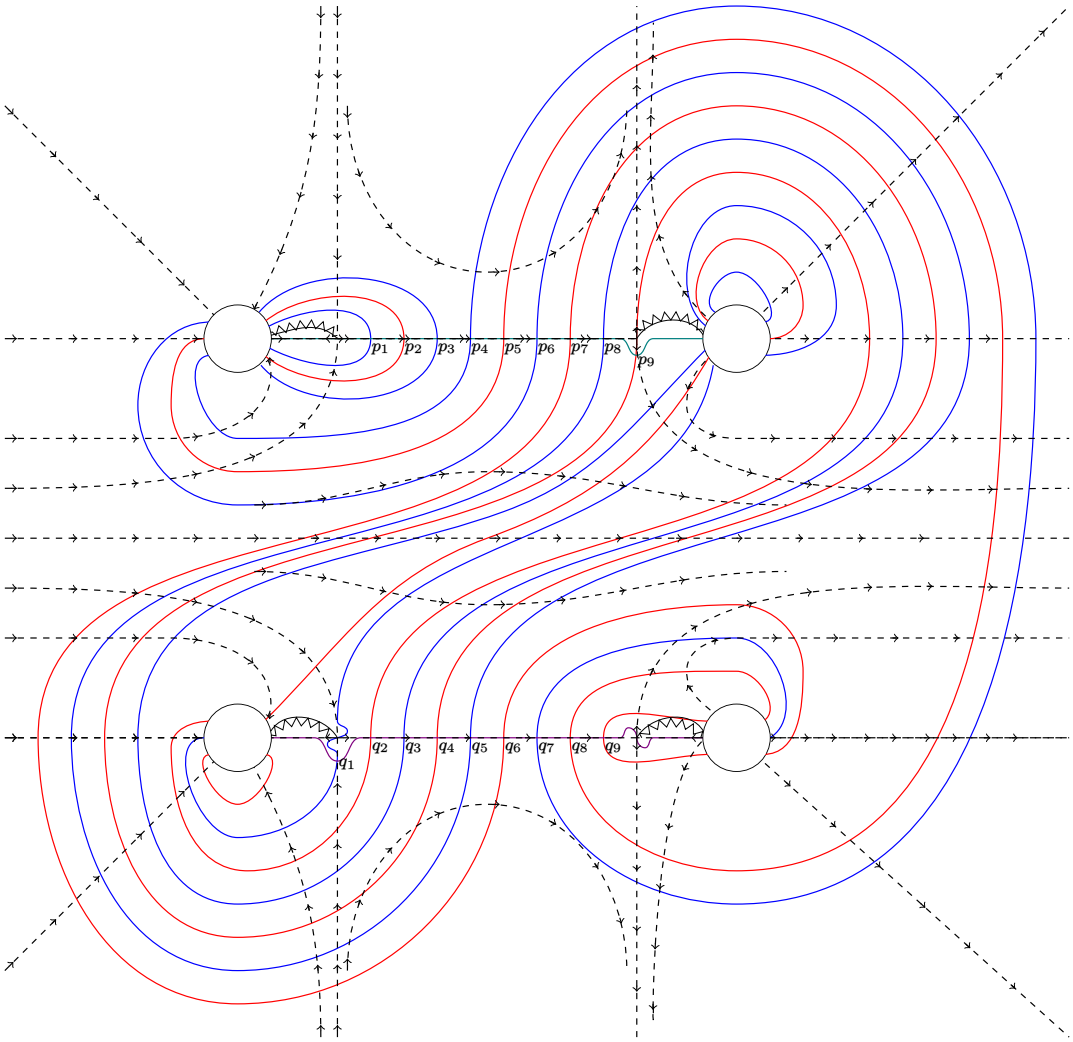

图 2. Weeks流形的带框架的Heegaard图

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
θ_η	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$
θ_μ	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
	S^{-1}	S^0	S^{-1}	S^{-3}	S^{-2}	S^{-3}	S^{-1}	S^{-1}	S^1

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
θ_η	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	0	0	0
θ_μ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	S^{-1}	S^0	S^0	S^0	S^{-2}	S^{-2}	S^{-1}	S^0	S^0

μ_1 上的交点顺序为： $q_1, q_7, p_4, p_1, q_3, p_8, q_5, p_6$ 和 p_3。 μ_2 上的交点顺序为： $p_9, q_4, p_7, q_6, q_9, p_2, p_5, q_8$ 和 q_2。根据上述旋转数据，相应的 Kuperberg 不变量可写为

$$\begin{aligned}Z(W, f_0, H) =&\lambda S^{-1}(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(4)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(3)}S^{-1}(\Lambda^1_{(8)})S^{-2}(\Lambda^2_{(5)})S^{-3}(\Lambda^1_{(6)})\\ &S^{-1}(\Lambda^1_{(3)}))\lambda(S(\Lambda^1_{(9)})\Lambda^2_{(4)}S^{-1}(\Lambda^1_{(7)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}\Lambda^1_{(2)}S^{-2}(\Lambda^1_{(5)})\Lambda^2_{(8)}\Lambda^2_{(2)})\\ =&\lambda S^{-2}(\Lambda^1_{(3)}S^{-2}(\Lambda^1_{(6)})S^{-1}(\Lambda^2_{(5)})\Lambda^1_{(8)}S(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(1)}S^{-2}(\Lambda^1_{(4)})\Lambda^2_{(7)}\Lambda^2_{(1)})\\ &\lambda(S(\Lambda^1_{(9)})\Lambda^2_{(4)}S^{-1}(\Lambda^1_{(7)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}\Lambda^1_{(2)}S^{-2}(\Lambda^1_{(5)})\Lambda^2_{(8)}\Lambda^2_{(2)})\\ =&\alpha(g^{-1})\lambda(\Lambda^1_{(3)}S^{-2}(\Lambda^1_{(6)})S^{-1}(\Lambda^2_{(5)})\Lambda^1_{(8)}S(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(1)}S^{-2}(\Lambda^1_{(4)})\Lambda^2_{(7)}\Lambda^2_{(1)})\\ &\lambda(S(\Lambda^1_{(9)})\Lambda^2_{(4)}S^{-1}(\Lambda^1_{(7)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}\Lambda^1_{(2)}S^{-2}(\Lambda^1_{(5)})\Lambda^2_{(8)}\Lambda^2_{(2)})\end{aligned}$$

由于 $\alpha(g)$ 是规范不变量 [Shi15], 我们只需验证$Z(H)$ 的规范不变性：$= \alpha(g)Z(W, f_0, H)$。

$$\begin{aligned}Z(H) =&\lambda(\Lambda^1_{(3)}S^{-2}(\Lambda^1_{(6)})S^{-1}(\Lambda^2_{(5)})\Lambda^1_{(8)}S(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(1)}S^{-2}(\Lambda^1_{(4)})\Lambda^2_{(7)}\Lambda^2_{(1)})\\ &\lambda(S(\Lambda^1_{(9)})\Lambda^2_{(4)}S^{-1}(\Lambda^1_{(7)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}\Lambda^1_{(2)}S^{-2}(\Lambda^1_{(5)})\Lambda^2_{(8)}\Lambda^2_{(2)})\end{aligned} \tag{1}$$

注意，对于线性映射 $X \in \mathrm{End}(H)$，根据定理 1(2)，其迹可用积分表示。于是 Z 可以写成作用于 $H \otimes H$上的某个线性映射的迹。

$$Z(H) = \mathrm{Tr}((S \otimes S) \circ P_2),$$

其中 $P_2 \in \mathrm{End}(H \otimes H)$ 是

$$\begin{aligned}P_2(x \otimes y) =&S^{-2}(x_{(3)})S^{-4}(x_{(6)})S^{-3}(y_{(4)})S^{-2}(x_{(8)})S^{-1}(y_{(2)})S^{-2}(x_{(1)})S^{-4}(x_{(4)})S^{-2}(y_{(6)})\\ &\otimes S^{-1}(y_{(1)})S^{-1}(x_{(7)})S^{-3}(x_{(5)})S^{-1}(x_{(2)})S^{-1}(y_{(8)})S^{-3}(y_{(5)})S^{-2}(x_{(7)})S^{-1}(y_{(3)}).\end{aligned}$$

由于 $\Lambda^1 \otimes \Lambda^2$ 和 $\lambda \otimes \lambda$ 是 $H \otimes H$ 及其对偶的一对归一化积分，我们可以利用迹公式将 Z 改写为以下形式：

$$\begin{aligned}Z(H) =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\ &\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}).\end{aligned}$$

下面我们证明 $Z(H)$ 在规范变换下保持不变。事实上，进行规范变换后，根据定理1(10)，我们有

$$\begin{aligned}Z_F :=&Z(H_F) = \mathrm{Tr}((S_F \otimes S_F) \circ P_{2F}) = \lambda(S(\Lambda^1_{(2)} \otimes \Lambda^2_{(2)})(S_F \otimes S_F) \circ P_{2F}(\Lambda^1_{(1)} \otimes \Lambda^2_{(1)}))\\ =&\lambda S(d_i^{[1]}S_F^{-1}(f_p^{[1]}\Lambda^2_{(1)}d_q^{[2]})S_F^{-1}(f_p^{[7]}\Lambda^2_{(7)}d_q^{[8]})S_F^{-3}(f_i^{[5]}\Lambda^1_{(5)}d_j^{[6]})S_F^{-1}(f_i^{[2]}\Lambda^1_{(2)}d_j^{[3]})S_F^{-1}(f_p^{[8]}\Lambda^2_{(8)}d_q^{[9]})\\ &S_F^{-3}(f_p^{[5]}\Lambda^2_{(5)}d_q^{[6]})S_F^{-2}(f_i^{[7]}\Lambda^1_{(7)}d_j^{[8]})S_F^{-1}(f_p^{[3]}\Lambda^2_{(3)}d_q^{[4]})f_i^{[9]}\Lambda^1_{(9)})\\ &\lambda S(d_q^{[1]}S_F^{-2}(f_i^{[3]}\Lambda^1_{(3)}d_j^{[4]})S_F^{-4}(f_i^{[6]}\Lambda^1_{(6)}d_j^{[7]})S_F^{-3}(f_p^{[4]}\Lambda^2_{(4)}d_q^{[5]})S_F^{-2}(f_i^{[8]}\Lambda^1_{(8)}d_q^{[9]})S_F^{-1}(f_p^{[2]}\Lambda^2_{(2)}d_q^{[3]})\\ &S_F^{-2}(f_i^{[1]}\Lambda^1_{(1)}d_j^{[2]})S_F^{-4}(f_i^{[4]}\Lambda^1_{(4)}d_j^{[5]})S_F^{-2}(f_p^{[2]}\Lambda^2_{(6)}d_q^{[7]})f_p^{[9]}\Lambda^2_{(9)})\end{aligned}$$

我们将定理 1(3) 应用于 $\lambda S(d_i^{[1]} \cdots \Lambda^1_{(9)})$ 和 $S(d_q^{[1]} \cdots \Lambda^2_{(9)})$，然后根据命题 1(3) 和 (4)，可得以下等式。这里我们也代入 $S_F^{-1}(x) = S^{-1}(u^{-1}xu)$。

$$\begin{aligned}Z_F =&\lambda S(f_p^{[8]}S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})d_q^{[8]}f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})d_q^{[2]}S_F^{-2}(f_i^{[4]}S^{-1}(\Lambda^1_{(5)})d_j^{[4]})f_i^{[7]}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d_j^{[7]}f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})d_q^{[1]}\\ &S_F^{-2}(f_p^{[4]}S^{-1}(\Lambda^2_{(5)})d_q^{[4]})S_F^{-1}(f_i^{[2]}S^{-1}(\Lambda^1_{(7)})d_j^{[2]})f_p^{[6]}S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d_q^{[6]}\Lambda^1_{(9)})\\ &\lambda S(S_F^{-1}(f_i^{[6]}S^{-1}(\Lambda^1_{(3)})d_j^{[6]})S_F^{-3}(f_i^{[3]}S^{-1}(\Lambda^1_{(6)})d_j^{[3]})S_F^{-2}(f_p^{[5]}S^{-1}(\Lambda^2_{(4)})d_q^{[5]})S_F^{-1}(f_i^{[1]}S^{-1}(\Lambda^1_{(8)})d_j^{[1]})\\ &f_p^{[7]}S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d_q^{[7]}S_F^{-1}(f_i^{[8]}S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})d_j^{[8]})S_F^{-3}(f_i^{[5]}S^{-1}(\Lambda^1_{(4)})d_j^{[5]})S_F^{-1}(f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda^2_{(6)})d_q^{[3]})\Lambda^2_{(9)})\end{aligned}$$

将定理 1(2) 应用于 $d_q^{[6]}\Lambda^1_{(9)}$ 并根据

$$d_q^{[1]}\otimes\cdots\otimes d_q^{[5]}\otimes d_{q(1)}^{[6]}d_j^{[1]}\otimes\cdots\otimes d_{q(8)}^{[6]}d_j^{[8]}\otimes d_q^{[7]}\otimes\cdots\otimes d_q^{[8]}=d_q^{[1]}\otimes\cdots\otimes d_q^{[15]},$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}Z_F =&\lambda S(f_p^{[8]}S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})d_q^{[15]}f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})d_q^{[2]}S_F^{-2}(f_i^{[4]}S^{-1}(\Lambda^1_{(5)})d_q^{[9]})f_i^{[7]}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d_q^{[12]}f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})d_q^{[1]}\\ &S_F^{-2}(f_p^{[4]}S^{-1}(\Lambda^2_{(5)})d_q^{[4]})S_F^{-1}(f_i^{[2]}S^{-1}(\Lambda^1_{(7)})d_q^{[7]})f_p^{[6]}S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\ &\lambda S(S_F^{-1}(f_i^{[6]}S^{-1}(\Lambda^1_{(3)})d_q^{[11]})S_F^{-3}(f_i^{[3]}S^{-1}(\Lambda^1_{(6)})d_q^{[8]})S_F^{-2}(f_p^{[5]}S^{-1}(\Lambda^2_{(4)})d_q^{[5]})S_F^{-1}(f_i^{[1]}S^{-1}(\Lambda^1_{(8)})d_q^{[6]})\\ &f_p^{[7]}S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d_q^{[14]}S_F^{-1}(f_i^{[8]}S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})d_q^{[13]})S_F^{-3}(f_i^{[5]}S^{-1}(\Lambda^1_{(4)})d_q^{[10]})S_F^{-1}(f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda^2_{(6)})d_q^{[3]})\Lambda^2_{(9)})\end{aligned}$$

类似地，根据 $f_p^{[1]}\otimes\cdots\otimes f_p^{[7]}\otimes f_j^{[1]}f_{p\ 1}^{[8]}()\otimes\cdots\otimes f_j^{[8]}f_{p\ 8}^{[8]}()=f_p^{[1]}\otimes\cdots\otimes f_p^{[15]}$，我们得到

$$\begin{aligned}Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})d_q^{[15]}f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})d_q^{[2]}S_F^{-2}(f_p^{[11]}S^{-1}(\Lambda^1_{(5)})d_q^{[9]})f_p^{[14]}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d_q^{[12]}f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})d_q^{[1]}\\ &S_F^{-2}(f_p^{[4]}S^{-1}(\Lambda^2_{(5)})d_q^{[4]})S_F^{-1}(f_p^{[9]}S^{-1}(\Lambda^1_{(7)})d_q^{[7]})f_p^{[6]}S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\ &\lambda S(S_F^{-1}(f_p^{[13]}S^{-1}(\Lambda^1_{(3)})d_q^{[11]})S_F^{-3}(f_p^{[10]}S^{-1}(\Lambda^1_{(6)})d_q^{[8]})S_F^{-2}(f_p^{[5]}S^{-1}(\Lambda^2_{(4)})d_q^{[5]})S_F^{-1}(f_p^{[8]}S^{-1}(\Lambda^1_{(8)})d_q^{[6]})\\ &f_p^{[7]}S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d_q^{[14]}S_F^{-1}(f_p^{[15]}S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})d_q^{[13]})S_F^{-3}(f_p^{[12]}S^{-1}(\Lambda^1_{(4)})d_q^{[10]})S_F^{-1}(f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda^2_{(6)})d_q^{[3]})\Lambda^2_{(9)})\end{aligned}$$

代入 $S_F^{-1}(x)=S^{-1}(u)S^{-1}(x)S^{-1}(u^{-1})$，$S_F^{-2}(x)=S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(x)S^{-2}(u)S^{-1}(u^{-1})$，

$$S_F^{-3}(x)=S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(x)S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(u^{-1}).$$

$$\begin{aligned}Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})d_q^{[15]}f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})d_q^{[2]}S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[11]})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-2}(d_q^{[9]})S^{-1}(u)\\ &S^{-2}(u^{-1})f_p^{[14]}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d_q^{[12]}f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})d_q^{[1]}S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[4]})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(d_q^{[4]})\\ &S^{-2}(u)S^{-1}(d_q^{[7]})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(f_p^{[9]})S^{-1}(u^{-1})f_p^{[6]}S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\ &\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d_q^{[11]})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f_p^{[13]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[8]})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(f_p^{[10]})\\ &S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[5]})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(d_q^{[5]})S^{-2}(u)S^{-1}(d_q^{[6]})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(f_p^{[8]})S^{-1}(u^{-1})f_p^{[7]}\\ &S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d_q^{[14]}S^{-1}(u)S^{-1}(d_q^{[13]})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f_p^{[15]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[10]})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})\\ &S^{-3}(f_p^{[12]})S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(d_q^{[3]})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(f_p^{[3]})S^{-1}(u^{-1})\Lambda^2_{(9)}).\end{aligned}$$

为了比较 $Z(H)$ 与 Z_F，我们需要以下引理来进一步简化 Z_F。

引理 1. 对于任意 $x \in H$ 和 $Y, Z \in \mathrm{End}(H)$,
(1)

$$\begin{aligned}
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})Y(\Lambda^2_{(7)},\Lambda^1_{(5)},\Lambda^1_{(2)},\Lambda^2_{(8)},\Lambda^2_{(5)},\Lambda^1_{(7)},\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(xZ(\Lambda^1_{(3)},\Lambda^1_{(6)},\Lambda^2_{(4)},\Lambda^1_{(8)},\Lambda^2_{(2)},\Lambda^1_{(1)},\Lambda^1_{(4)},\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})Y(\Lambda^2_{(7)}S(x_{(2)}),\Lambda^1_{(5)}S(x_{(11)}),\Lambda^1_{(2)}S(x_{(14)}),\Lambda^2_{(8)}S(x_{(1)}),\Lambda^2_{(5)}S(x_{(4)}),\Lambda^1_{(7)}S(x_{(9)}),\\
&\Lambda^2_{(3)}S(x_{(6)}))\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(Z(\Lambda^1_{(3)}S(x_{(13)}),\Lambda^1_{(6)}S(x_{(10)}),\Lambda^2_{(4)}S(x_{(5)}),\Lambda^1_{(8)}S(x_{(8)}),\Lambda^2_{(2)}S(x_{(7)}),\Lambda^1_{(1)}S(x_{(15)}),\Lambda^1_{(4)}\\
&S(x_{(12)}),\Lambda^2_{(6)}S(x_{(3)}))\Lambda^2_{(9)})
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\lambda S(Y(\Lambda^2_{(1)},\Lambda^2_{(7)},\Lambda^1_{(5)},\Lambda^1_{(2)},\Lambda^2_{(8)},\Lambda^2_{(5)},\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(Y(\Lambda^1_{(3)},\Lambda^1_{(6)},\Lambda^2_{(4)},\Lambda^1_{(8)},\Lambda^2_{(2)},\Lambda^1_{(1)},\Lambda^1_{(4)},\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(x)\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(Y(x_{(1)}\Lambda^2_{(1)},x_{(14)}\Lambda^2_{(7)},x_{(7)}\Lambda^1_{(5)},x_{(4)}\Lambda^1_{(2)},x_{(15)}\Lambda^2_{(8)},x_{(12)}\Lambda^2_{(5)},x_{(9)}\Lambda^1_{(7)}S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(Z(x_{(5)}\Lambda^1_{(3)},x_{(8)}\Lambda^1_{(6)},x_{(11)}\Lambda^2_{(4)},x_{(10)}\Lambda^1_{(8)},x_{(2)}\Lambda^2_{(2)},x_{(3)}\Lambda^1_{(1)},x_{(6)}\Lambda^1_{(4)},x_{(13)}\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})
\end{aligned}$$

证明。 将定理 1(3) 应用于 $\lambda S(x\cdots\Lambda^2_{(9)})$。

$$\begin{aligned}
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})Y(\Lambda^2_{(7)},\Lambda^1_{(5)},\Lambda^1_{(2)},\Lambda^2_{(8)},\Lambda^2_{(5)},\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(xZ(\Lambda^1_{(3)},\Lambda^1_{(6)},\Lambda^2_{(4)},\Lambda^1_{(8)},\Lambda^2_{(2)},\Lambda^1_{(1)},\Lambda^1_{(4)},\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(x_{(8)}S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})Y(\Lambda^2_{(7)}S(x_{(2)}),\Lambda^1_{(5)},\Lambda^1_{(2)},\Lambda^2_{(8)}S(x_{(1)}),\Lambda^2_{(5)}S(x_{(4)}),\Lambda^1_{(7)},\Lambda^2_{(3)}S(x_{(6)}))\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(Z(\Lambda^1_{(3)},\Lambda^1_{(6)},\Lambda^2_{(4)}S(x_{(5)}),\Lambda^1_{(8)},\Lambda^2_{(2)}S(x_{(7)}),\Lambda^1_{(1)},\Lambda^1_{(4)},\Lambda^2_{(6)}S(x_{(3)}))\Lambda^2_{(9)})
\end{aligned}$$

继续将定理 1(3) 应用于 $\lambda S(x_{(8)}\cdots\Lambda^1_{(9)})$，然后得到 (1)。类似地，使用定理 1(1) 两次即可得到(2)。□

将 $S^{-1}(u) = f^{[2]}_r S^{-1}(f^{[1]}_r)$ 代入 $\lambda S(S^{-1}(u)\cdots\Lambda^2_{(9)})$，根据引理1（1），即可得到以下等式。

$$\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})d^{[15]}_q f^{[2]}_p f^{[2]}_{r(2)}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})d^{[2]}_q S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[11]}_p)S^{-2}(f^{[2]}_{r(11)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})\\
&S^{-2}(d^{[9]}_q)S^{-2}(u)S^{-1}(u^{-1})f^{[14]}_p f^{[2]}_{r(14)}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[12]}_q f^{[1]}_p f^{[2]}_{r(1)}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})d^{[1]}_q S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})\\
&S^{-2}(f^{[4]}_p)S^{-2}(f^{[2]}_{r(4)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(d^{[4]}_q)S^{-2}(u)S^{-1}(d^{[7]}_q)S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(f^{[2]}_{r(9)})S^{-1}(f^{[9]}_p)\\
&S^{-1}(u^{-1})f^{[6]}_p f^{[2]}_{r(6)}S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_r)S^{-1}(d^{[11]}_q)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f^{[2]}_{r(13)})S^{-1}(f^{[13]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d^{[8]}_q)S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})\\
&S^{-3}(f^{[2]}_{r(10)})S^{-3}(f^{[10]}_p)S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(f^{[5]}_p)S^{-2}(f^{[2]}_{r(5)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(d^{[5]}_q)S^{-2}(u)S^{-1}(d^{[6]}_q)\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(f^{[2]}_{r(8)})S^{-1}(f^{[8]}_p)S^{-1}(u^{-1})f^{[7]}_p f^{[2]}_{r(7)}S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d^{[14]}_q S^{-1}(u)S^{-1}(d^{[13]}_q)S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})\\
&S^{-1}(f^{[2]}_{r(15)})S^{-1}(f^{[15]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d^{[10]}_q)S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(f^{[2]}_{r(12)})S^{-3}(f^{[12]}_p)S^{-3}(u^{-1})\\
&S^{-2}(u)S^{-1}(d^{[3]}_q)S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(f^{[2]}_{r(3)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-1}(u^{-1})\Lambda^2_{(9)}).
\end{aligned}$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})d_q^{[15]}f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})d_q^{[2]}S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[12]})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-2}(d_q^{[9]})S^{-2}(u)\\
&S^{-1}(u^{-1})f_p^{[15]}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d_q^{[12]}f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})d_q^{[1]}S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[5]})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(d_q^{[4]})\\
&S^{-2}(u)S^{-1}(d_q^{[7]})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(f_p^{[10]})S^{-1}(u^{-1})f_p^{[7]}S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f_p^{[1]})S^{-1}(d_q^{[11]})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f_p^{[14]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[8]})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(f_p^{[11]})\\
&S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[6]})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(d_q^{[5]})S^{-2}(u)S^{-1}(d_q^{[6]})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(f_p^{[9]})S^{-1}(u^{-1})f_p^{[8]}\\
&S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d_q^{[14]}S^{-1}(u)S^{-1}(d_q^{[13]})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f_p^{[16]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[10]})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})\\
&S^{-3}(f_p^{[13]})S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(d_q^{[3]})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(f_p^{[4]})S^{-1}(u^{-1})\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})d_q^{[9]}f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})d_q^{[2]}S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[6]})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-2}(d_q^{[5]})S^{-2}(u)\\
&S^{-1}(u^{-1})f_p^{[9]}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d_q^{[8]}f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})d_q^{[1]}S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[5]})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})\\
&S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f_p^{[1]})S^{-1}(d_q^{[7]})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f_p^{[8]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[4]})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f_p^{[10]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[6]})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(f_p^{[7]})\\
&S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(d_q^{[3]})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(f_p^{[4]})S^{-1}(u^{-1})\Lambda^2_{(9)}).
\end{aligned}
$$

在上述方程组的最后一个等式中，使用了命题1（6）。现在我们将定理1（1）两次应用于 $S^{-1}(f_p^{[3]})\ S^{-1}(u^{-1})\ \Lambda^2_{(9)}$，得到

$$
\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(u^{-1}(1))d_q^{[9]}f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-1}(u^{-1}(14))d_q^{[2]}S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[6]})S^{-3}(\\
&\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(u^{-1}(7))S^{-2}(d_q^{[5]})S^{-2}(u)S^{-1}(u^{-1})f_p^{[9]}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(u^{-1}(4))d_q^{[8]}f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-1}(u^{-1}\\
&(15))d_q^{[1]}S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[5]})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-3}(u^{-1}\ (12))S^{-2}(u^{-1}\ (9))S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f_p^{[1]})S^{-1}(d_q^{[7]})S^{-2}(u^{-1}(5))S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f_p^{[8]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[4]})S^{-4}(u^{-1}(8))S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})\\
&S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-3}(u^{-1}(11))S^{-2}(u^{-1}(10))S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(u^{-1}(2))S^{-2}(u^{-1}(3))S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(\\
&f_p^{[10]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[6]})S^{-4}(u^{-1}(6))S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(f_p^{[7]})S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(d_q^{[3]})S^{-2}(u^{-1}\\
&(13))S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(f_p^{[4]})\Lambda^2_{(9)})=\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(u^{-1}(1))d_q^{[9]}f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-1}(u^{-1}(8))d_q^{[2]}S^{-1}(u)\\
&S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[6]})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(u^{-1}(5))S^{-2}(d_q^{[5]})S^{-2}(u)S^{-1}(u^{-1})f_p^{[9]}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(u^{-1}(2))\\
&d_q^{[8]}f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-1}(u^{-1}(9))d_q^{[1]}S^{-1}(u)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f_p^{[5]})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\lambda S(S^{-1}\\
&(f_p^{[1]})S^{-1}(d_q^{[7]})S^{-2}(u^{-1}(3))S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f_p^{[8]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[4]})S^{-4}(u^{-1}(6))S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\\
&\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f_p^{[10]})S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-3}(d_q^{[6]})S^{-4}(u^{-1}(4))S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(f_p^{[7]})\\
&S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(d_q^{[3]})S^{-2}(u^{-1}(7))S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(f_p^{[4]})\Lambda^2_{(9)})
\end{aligned}
$$

根据命题 1(8)，我们有

$$\begin{aligned}Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[1]}_q)S^{-1}(u^{-1})f^{[3]}_pS^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-1}(f^{[8]}_q)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[6]}_p)S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})\\&S^{-3}(f^{[5]}_q)S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(u^{-1})f^{[9]}_pS^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(f^{[2]}_q)S^{-1}(u^{-1})f^{[2]}_pS^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-1}(f^{[9]}_q)\\&S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[5]}_p)S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[3]}_q)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f^{[8]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[6]}_q)\\&S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f^{[10]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-4}(u^{-1})\\&S^{-4}(f^{[4]}_q)S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(f^{[7]}_p)S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(f^{[7]}_q)S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(f^{[4]}_p)\Lambda^2_{(9)})\end{aligned}$$

然后，可以对项 $S^{-1}(f^{[4]}_p)\Lambda^2_{(9)}$ 进行类似的计算。

$$\begin{aligned}Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[4]}_{p(1)})S^{-1}(f^{[1]}_q)S^{-1}(u^{-1})f^{[3]}_pS^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-1}(f^{[4]}_{p(8)})S^{-1}(f^{[8]}_q)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[6]}_p)\\&S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(f^{[4]}_{p(5)})S^{-3}(f^{[5]}_q)S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(u^{-1})f^{[9]}_pS^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(f^{[4]}_{p(2)})S^{-1}(f^{[2]}_q)\\&S^{-1}(u^{-1})f^{[2]}_pS^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-1}(f^{[4]}_{p(9)})S^{-1}(f^{[9]}_q)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[5]}_p)S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[3]}_q)S^{-2}(f^{[4]}_{p(3)})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f^{[8]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[6]}_q)\\&S^{-4}(f^{[4]}_{p(6)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f^{[10]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-4}(u^{-1})\\&S^{-4}(f^{[4]}_q)S^{-4}(f^{[4]}_{p(4)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(f^{[7]}_p)S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(f^{[7]}_q)S^{-2}(f^{[4]}_{p(7)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[4]}_p)S^{-1}(u^{-1})f^{[3]}_pS^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-1}(f^{[11]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[14]}_p)S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})\\&S^{-3}(f^{[8]}_p)S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(u^{-1})f^{[17]}_pS^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(f^{[5]}_p)S^{-1}(u^{-1})f^{[2]}_pS^{-1}(\Lambda^2_{(8)})\\&S^{-1}(f^{[12]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[13]}_p)S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-2}(f^{[6]}_p)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f^{[16]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[9]}_p)\\&S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f^{[18]}_p)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-4}(u^{-1})\\&S^{-4}(f^{[7]}_p)S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(f^{[15]}_p)S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(f^{[10]}_p)S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(f^{[2]}_r)S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(u)S^{-1}(u^{-1})f^{[5]}_rS^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})\\&S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f^{[4]}_r)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[3]}_r)S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})\\&S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f^{[6]}_r)S^{-2}(u^{-1})S^{-3}(u)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[1]}_r)S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\,.\end{aligned}$$

引理 2。 对于任意 $x\in H$ 和 $X,Y\in\mathrm{End}(H)$,

$$\lambda S(X(\Lambda_{(1)}x)Y(\Lambda_{(2)})\Lambda_{(3)})=\lambda S(S^{-1}(x_{(1)})X(\Lambda_{(1)})Y(\Lambda_{(2)}S(x_{(2)}))\Lambda_{(3)}).$$

证明。 根据 $\Lambda_{(1)}x\otimes\Lambda_{(2)}=\Lambda_{(1)}\otimes\Lambda_{(2)}S(x\leftharpoonup\alpha)=\Lambda_{(1)}\otimes\Lambda_{(2)}\alpha(x_{(1)})S(x_{(2)})$，左边等于

$$\begin{aligned}L=&\lambda(S(\Lambda_{(3)})SY(\Lambda_{(2)})SX(\Lambda_{(1)}x)))\\=&\lambda(\alpha(x_{(1)})S(\Lambda_{(3)}S(x_{(2)}))SY(\Lambda_{(2)}S(x_{(3)}))SX(\Lambda_{(1)}))\\=&\lambda(S^2(x_{(1)}\leftharpoonup\alpha)S(\Lambda_{(3)})SY(\Lambda_{(2)}S(x_{(2)}))SX(\Lambda_{(1)}))\end{aligned}$$

由 $\lambda(S^2(b \leftharpoonup \alpha)a) = \lambda(ab)$,

$$\begin{aligned} L =&\lambda(S(\Lambda_{(3)})SY(\Lambda_{(2)}S(x_{(2)}))SX(\Lambda_{(1)})x_{(1)}) \\ =&\lambda S(S^{-1}(x_{(1)})X(\Lambda_{(1)})Y(\Lambda_{(2)}S(x_{(2)}))\Lambda_{(3)}), \end{aligned}$$

由此证明完毕。 □

现在我们可以陈述并证明本文中的主要技术引理了。

引理 3. 对于任意 x, w_1, w_2, $w_3 \in H$,

$$\begin{aligned} &\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})w_2S^{-1}(\Lambda^1_{(2)}x_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)}) \\ &\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)}x_{(3)})w_3S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)}x_{(1)})w_1S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}) \\ =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(x_{(2)}\Lambda^1_{(5)})w_2S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)}) \\ &\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})w_3S^{-4}(x_{(3)}\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})w_1S^{-4}(x_{(1)}\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}) \end{aligned}$$

证明。 应用引理 2 处理 $\Lambda^1_{(1)}x_{(1)} \otimes \Lambda^1_{(2)}x_{(2)} \otimes \Lambda^1_{(3)}x_{(3)}$。左边变为

$$\begin{aligned} L =&\lambda S(S^{-1}(x_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-2}(x_{(5)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})w_2S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)}) \\ &S^{-1}(x_{(3)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)}) \\ &\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})w_3S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-2}(x_{(4)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(x_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})w_1S^{-4}(\Lambda^1_{(4)}) \\ &S^{-3}(x_{(6)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}) \end{aligned}$$

类似地，将引理 2 应用于 $S^{-1}(x_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_1) = S^{-1}_{(}(\Lambda^2_1\ x_{(1)})_{(}$ 于是得到

$$\begin{aligned} L =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})x_{(3)}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-2}(x_{(12)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})w_2S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})x_{(2)}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-2}(x_{(5)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)}) \\ &S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(x_{(10)})x_{(7)}S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)}) \\ &\lambda S(S^{-1}(x_{(1)})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})w_3S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(x_{(11)})S^{-2}(x_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(x_{(9)})x_{(8)} \\ &S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})w_1S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(x_{(13)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(x_{(4)})\Lambda^2_{(9)}) \\ =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})x_{(3)}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-2}(x_{(6)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})w_2S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})x_{(2)}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-2}(x_{(5)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)}) \\ &S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)}) \\ &\lambda S(S^{-1}(x_{(1)})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})w_3S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})w_1S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(x_{(7)}) \\ &S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})S^{-1}(x_{(4)})\Lambda^2_{(9)}) \end{aligned}$$

根据引理 1（2），我们得到

$$\begin{aligned} L =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(x_{(4)})x_{(3)}S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-1}(x_{(17)})S^{-2}(x_{(20)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(x_{(10)})w_2S^{-1}(\Lambda^1_{(2)}) \\ &S^{-1}(x_{(7)})x_{(2)}S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-1}(x_{(18)})S^{-2}(x_{(19)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-3}(x_{(15)})S^{-2}(x_{(12)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)}) \\ &\lambda S(S^{-1}(x_{(1)})S^{-2}(x_{(8)})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})w_3S^{-4}(x_{(11)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-3}(x_{(14)})S^{-2}(x_{(13)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)}) \\ &S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(x_{(5)})S^{-2}(x_{(6)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})w_1S^{-4}(x_{(9)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-3}(x_{(21)})S^{-2}(x_{(16)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}) \\ =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(x_{(2)})w_2S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)}) \\ &\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})w_3S^{-4}(x_{(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})w_1S^{-4}(x_{(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)}) \\ &S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}) \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

命题 2. 设 H 为有限维 *Hopf* 代数。那么，对于图 f_0 2所示的框架， 相应的 *Kuperberg* 不变量 $Z(W, f_0, H)$ 是 H的规范不变量。

证明。 如上所述，只需证明 $Z(H) = Z_F$，其中 $Z(H) = \alpha(g)Z(W, f_0, H)$（见公式（1））。由于 $Q = uS(u^{-1})$，根据上述计算和引理 3，我们得到

$$\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(f^{[2]}_q f^{[1]}_{i(2)})S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(Q)f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^1_{(2)}S(f^{[2]}_i)_{(2)})\\
&S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)}S(f^{[2]}_i)_{(3)})S^{-1}(f^{[1]}_p))S^{-3}(Q)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[3]}_q f^{[1]}_i)_{(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)}S(f^{[2]}_i)_{(1)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-3}(Q)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[1]}_q f^{[1]}_{i(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})\\
&S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(S(f^{[2]}_i)_{(2)})S^{-3}(f^{[2]}_q f^{[1]}_{i(2)})S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(Q)f^{[2]}_p\\
&S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f^{[1]}_p)S^{-3}(Q)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[3]}_q f^{[1]}_i)_{(3)})S^{-4}(S(f^{[2]}_i)_{(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})\\
&S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-3}(Q)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[1]}_q f^{[1]}_{i(1)})\\
&S^{-4}(S(f^{[2]}_i)_{(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)}).
\end{aligned}$$

那么我们可以将 Z_F 化简为

$$\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(f^{[2]}_q u_{(2)})S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(Q)f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})\\
&S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f^{[1]}_p)S^{-3}(Q)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[3]}_q u_{(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})\\
&S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-3}(Q)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(f^{[1]}_q u_{(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-3}(uS(d^{[2]}_q))S^{-3}(u^{-1})S^{-2}(Q)f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})\\
&S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f^{[1]}_p)S^{-3}(Q)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(uS(d^{[1]}))S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})\\
&S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-3}(Q)S^{-4}(u^{-1})S^{-4}(uS(d^{[3]}))S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-2}(d^{[2]}_q)S^{-2}(Q)f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(f^{[1]}_p)S^{-3}(Q)S^{-3}(d^{[1]}_q)S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-3}(Q)S^{-3}(d^{[3]}_q)S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})
\end{aligned}$$

由命题 1(9)，可得

$$\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-2}(Q_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})\\
&S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-3}(Q_{(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-3}(Q_{(3)})\\
&S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-2}(u_{(2)})S^{-1}(u^{-1}_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-2}(u^{-1}_{(3)})S^{-3}(u_{(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})\\
&S^{-2}(u^{-1}_{(1)})S^{-3}(u_{(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-2}(u_{(2)})S^{-1}(d^{[2]}_{j(2)})d^{[1]}_{j(2)}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(d^{[1]}_{j(1)})S^{-2}(d^{[2]}_{j(3)})S^{-3}(u_{(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-1}(d^{[1]}_{j(3)})S^{-2}(d^{[2]}_{j(1)})S^{-3}(u_{(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})
\end{aligned}
$$

由引理 3，可得

$$
\begin{aligned}
Z_F=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-2}(d^{[1]}_{j(2)})S^{-2}(u_{(2)})S^{-1}(d^{[2]}_{j(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})\\
&S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-2}(d^{[2]}_{j(3)})S^{-3}(u_{(1)})S^{-3}(d^{[1]}_{j(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-2}(d^{[2]}_{j(1)})S^{-3}(u_{(3)})S^{-3}(d^{[1]}_{j(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-2}(d^{[1]}_{j(2)}u_{(2)}S(d^{[2]}_{j})_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})\\
&S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-3}(d^{[1]}_{j(1)}u_{(1)}S(d^{[2]}_{j})_{(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})\\
&S^{-3}(d^{[1]}_{j(3)}u_{(3)}S(d^{[2]}_{j})_{(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\
=&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(\Lambda^2_{(7)})S^{-3}(\Lambda^1_{(5)})S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^2_{(8)})S^{-3}(\Lambda^2_{(5)})S^{-2}(\Lambda^1_{(7)})S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})\Lambda^1_{(9)})\\
&\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-4}(\Lambda^1_{(6)})S^{-3}(\Lambda^2_{(4)})S^{-2}(\Lambda^1_{(8)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-2}(\Lambda^1_{(1)})S^{-4}(\Lambda^1_{(4)})S^{-2}(\Lambda^2_{(6)})\Lambda^2_{(9)})\\
=&Z(H).
\end{aligned}
$$

这就完成了证明。 □

一般而言，对于 Weeks 流形 W 上的任意框架 f，其 Kuperberg 不变量 $Z(W,f,H)$ 与 $Z(W,f_0,H)$ 具有如下关系。根据 [Kup96], 中的命题 2.2，Weeks 流形 W 的框架由其在 $H^1(W,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中的自旋结构以及在 $H^3(W,\mathbb{Z})$ 中的度 $=\mathbb{Z}$ 决定。W，$\pi_1(W)$ 的基本群表示 $\cong a,b \mid a^2b^2a^{-1}ba^{-1}b^2=ab^2a^2b^{-1}ab^{-1}a=1$ [CK20], 给出 $H_1(W,\mathbb{Z})=0$。根据泛系数定理，我们有 $H^1(W,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=0$。这意味着 W 的框架在度上有所不同。当度改变 $+1$ 时，不变量 $Z(W,f,H)$ 会增加一个因子 $\alpha(g)$ [Kup96]。由于 $\alpha(g)$ 是一个规范不变量 [Shi15], ，我们可以得出结论：对于 Weeks 流形上的任意框架 f，Kuperberg 不变量 $Z(W,f,H)$ 是一个规范不变量。总之，我们得到了本文的以下主定理。

定理 2。 设 H 为一个有限维 *Hopf* 代数。对于 *Weeks*流形 W上的任意框架 f，*Kuperberg* 不变量 Z（W,f,H）是 H 的规范不变量。□

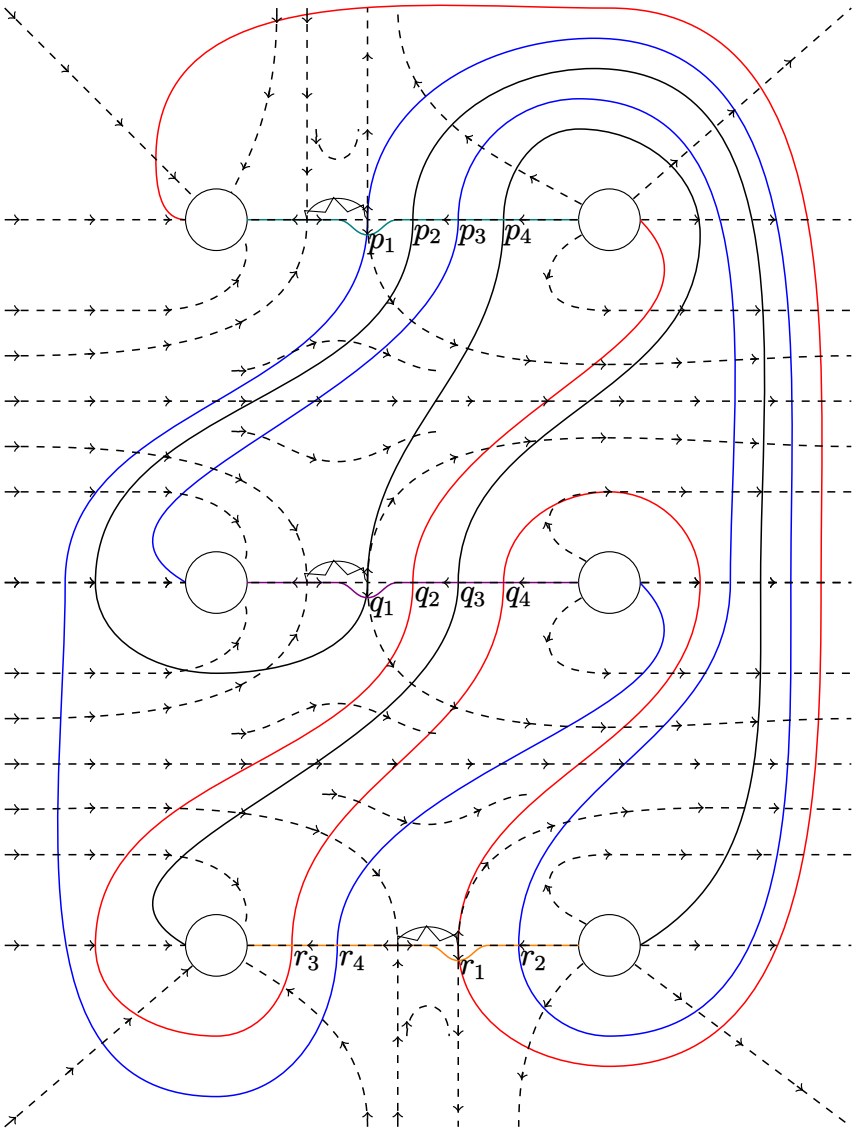

图 3

5. 三维环面

我们将研究的另一个规范不变量是三维环面的 Kuperberg 不变量 T^3。它是通过粘合立方体的相对面得到的闭3-流形。这意味着 T^3 的 Heegaard曲面是一个三亏格闭曲面，它由一个六孔二球面附加三个把手 [GS99]得到。这是 T^3的最小亏格 Heegaard分解。

图 3 是三维环面 T^3 的带框架的Heegaard图。水平的绿色、紫色和橙色线分别是下曲线 η_1， η_2 和 η_3 。蓝色、黑色和红色的弧分别给出了上曲线 μ_1， μ_2 和 μ_3 。除基点处外，所有Heegaard圆均不与扭转前沿相交，总旋转数为： $\theta_{\eta_i} = \phi_{\eta_i} = \frac{1}{2}$ 和 $\theta_{\mu_j} = -\phi_{\mu_j} = -\frac{1}{2}$对应于 i， $j = 1$、2、3。旋转数和对跖映射的幂 S记录在下表中。

	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1	q_2	q_3	q_4	r_1	r_2	r_3	r_4
θ_η	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
θ_μ	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
	S	S^2	S^2	S	S	S	S^2	S^2	S	S^3	S^2	S^2

交点在 μ_1 上的顺序为： p_1、 r_4、 p_3 和 r_2。 μ_2 上的顺序为： q_1、 p_2、 q_3和 p_4。而 μ_3 上的顺序为： r_1、 q_2、 r_3 和 q_4。带有此框架 f_1 的三维环面T^3 的Kuperberg 不变量为

$$\begin{aligned}Z(T^3,f_1,H)=&\lambda S^{-1}(S(\Lambda^1_{(1)})S^2(\Lambda^3_{(4)})S^2(\Lambda^1_{(3)})S^3(\Lambda^3_{(2)}))\lambda S^{-1}(S(\Lambda^2_{(1)})S^2(\Lambda^1_{(2)})S^2(\Lambda^2_{(3)})S(\Lambda^1_{(4)}))\\&\lambda S^{-1}(S(\Lambda^3_{(1)})S(\Lambda^2_{(2)})S^2(\Lambda^3_{(3)})S^2(\Lambda^2_{(4)}))\\=&\lambda(S^2(\Lambda^3_{(2)})S(\Lambda^1_{(3)})S(\Lambda^3_{(4)})\Lambda^1_{(1)})\lambda(\Lambda^1_{(4)}S(\Lambda^2_{(3)})S(\Lambda^1_{(2)})\Lambda^2_{(1)})\\&\lambda(S(\Lambda^2_{(4)})S(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^2_{(2)}\Lambda^3_{(1)})\end{aligned}$$

该不变量是某个线性映射在 $H^{\otimes 3}$上的迹

$$\begin{aligned}Z(T^3,f_1,H)=&\mathrm{Tr}((S\otimes S\otimes S)\circ P_3)\\=&\lambda^1 S(\Lambda^3_{(1)}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\lambda^2 S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\&\lambda^3 S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})\Lambda^3_{(4)}),\end{aligned}$$

其中 $P_3\in \mathrm{H}^{\otimes 3}$ 是

$$\begin{aligned}P_3(x\otimes y\otimes z)=&z_{(1)}S^{-1}(x_{(2)})S^{-1}(z_{(3)})\otimes S^{-2}(x_{(3)})S^{-1}(y_{(2)})S^{-1}(x_{(1)})\\&\otimes S^{-1}(y_{(3)})S^{-1}(z_{(2)})S^{-2}(y_{(1)})\end{aligned}$$

定理 3. 设 H 是一个有限维 *Hopf* 代数。对于图*3*所示的三维环面的框架，*Kuperberg* 不变量

$$Z(T^3,f_1,H)=\lambda(S^2(\Lambda^3_{(2)})S(\Lambda^1_{(3)})S(\Lambda^3_{(4)})\Lambda^1_{(1)})\lambda(\Lambda^1_{(4)}S(\Lambda^2_{(3)})S(\Lambda^1_{(2)})\Lambda^2_{(1)})\lambda(S(\Lambda^2_{(4)})S(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^2_{(2)}\Lambda^3_{(1)})$$

is a gauge invariant of H.

证明。 由命题1(10)，基于扭曲 Hopf 代数 H_F的 Kuperberg 不变量为

$$\begin{aligned}Z_F:=&Z(T^3,f_1,H_F)=\mathrm{Tr}((S_F\otimes S_F\otimes S_F)\circ P_{3F})\\=&\lambda S(d^{[1]}_j f^{[1]}_r\Lambda^3_{(1)}d^{[2]}_t S_F^{-1}(f^{[2]}_i\Lambda^1_{(2)}d^{[3]}_j)S_F^{-1}(f^{[3]}_r\Lambda^3_{(3)}d^{[4]}_t)f^{[4]}_i\Lambda^1_{(4)})\\&\lambda S(d^{[1]}_q S_F^{-2}(f^{[3]}_i\Lambda^1_{(3)}d^{[4]}_j)S_F^{-1}(f^{[2]}_p\Lambda^2_{(2)}d^{[3]}_q)S_F^{-1}(f^{[1]}_i\Lambda^1_{(1)}d^{[2]}_j)f^{[2]}_p\Lambda^2_{(4)})\\&\lambda S(d^{[1]}_t S_F^{-1}(f^{[3]}_p\Lambda^2_{(3)}d^{[4]}_q)S_F^{-1}(f^{[2]}_r\Lambda^3_{(2)}d^{[3]}_t)S_F^{-2}(f^{[1]}_p\Lambda^2_{(1)}d^{[2]}_q)f^{[4]}_r\Lambda^3_{(4)}).\end{aligned}$$

由命题 1(3) 和 (4)，可得

$$\begin{aligned}Z_F=&\lambda S(uS(d^{[3]}_t)\Lambda^3_{(1)}S(f^{[3]}_r)u^{-1}f^{[2]}_i S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_j f^{[1]}_r S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})d^{[1]}_t\Lambda^1_{(4)})\\&\lambda S(S_F^{-1}(f^{[1]}_i S^{-1}(\Lambda^1_{(3)})d^{[1]}_j)f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d^{[2]}_q f^{[3]}_i S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})d^{[3]}_j\Lambda^2_{(4)})\\&\lambda S(f^{[1]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[1]}_q f^{[2]}_r S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})d^{[2]}_t S_F^{-1}(f^{[3]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(1)})d^{[3]}_q)\Lambda^3_{(4)}).\end{aligned}$$

对 定理(1) 应用于 $d^{[1]}_t\Lambda^1_{(4)}$ 和 $d^{[3]}_j\Lambda^2_{(4)}$。

$$
\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(uS(d_t^{[3]})\Lambda_{(1)}^3 S(f_r^{[3]})u^{-1}f_i^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^1)d_{t(2)}^{[1]}d_j^{[2]}f_r^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^3)\Lambda_{(4)}^1)\\
&\lambda S(S_F^{-1}(f_i^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^1)d_{t(1)}^{[1]}d_j^{[1]})f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^2)d_q^{[2]}f_i^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^1)d_{t(3)}^{[1]}d_j^{[3]}\Lambda_{(4)}^2)\\
&\lambda S(f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^2)d_q^{[1]}f_r^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^3)d_t^{[2]}S_F^{-1}(f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^2)d_q^{[3]})\Lambda_{(4)}^3)\\
=&\lambda S(uS(d_t^{[5]})\Lambda_{(1)}^3 S(f_r^{[3]})u^{-1}f_i^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^1)d_t^{[2]}f_r^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^3)\Lambda_{(4)}^1)\\
&\lambda S(S_F^{-1}(f_i^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^1)d_t^{[1]})f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^2)d_q^{[2]}f_i^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^1)d_t^{[3]}\Lambda_{(4)}^2)\\
&\lambda S(f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^2)d_q^{[1]}f_r^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^3)d_t^{[4]}S_F^{-1}(f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^2)d_q^{[3]})\Lambda_{(4)}^3)\\
=&\lambda S(uS(d_t^{[5]})\Lambda_{(1)}^3 S(f_r^{[3]})u^{-1}f_i^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^1)d_t^{[2]}f_r^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^3)\Lambda_{(4)}^1)\\
&\lambda S(S_F^{-1}(f_i^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^1)d_t^{[1]})f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^2)d_{t(2)}^{[3]}d_q^{[2]}f_i^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^1)\Lambda_{(4)}^2)\\
&\lambda S(f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^2)d_{t(1)}^{[3]}d_q^{[1]}f_r^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^3)d_t^{[4]}S_F^{-1}(f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^2)d_{t(3)}^{[3]}d_q^{[3]})\Lambda_{(4)}^3)\\
=&\lambda S(uS(d_t^{[7]})\Lambda_{(1)}^3 S(f_r^{[3]})u^{-1}f_i^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^1)d_t^{[2]}f_r^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^3)\Lambda_{(4)}^1)\\
&\lambda S(S_F^{-1}(f_i^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^1)d_t^{[1]})f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^2)d_t^{[4]}f_i^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^1)\Lambda_{(4)}^2)\\
&\lambda S(f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^2)d_t^{[3]}f_r^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^3)d_t^{[6]}S_F^{-1}(f_p^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^2)d_t^{[5]})\Lambda_{(4)}^3)
\end{aligned}
$$

代入 $S_F^{-1}(x)=S^{-1}(u)S^{-1}(x)S^{-1}(u^{-1})$。

$$
\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(uS(d_t^{[7]})\Lambda_{(1)}^3 S(f_r^{[3]})u^{-1}f_i^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^1)d_t^{[2]}f_r^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^3)\Lambda_{(4)}^1)\\
&\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d_t^{[1]})S^{-2}(\Lambda_{(3)}^1)S^{-1}(f_i^{[1]})S^{-1}(u^{-1})f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^2)d_t^{[4]}f_i^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^1)\Lambda_{(4)}^2)\\
&\lambda S(f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^2)d_t^{[3]}f_r^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^3)d_t^{[6]}S^{-1}(u)S^{-1}(d_t^{[5]})S^{-2}(\Lambda_{(1)}^2)S^{-1}(f_p^{[3]})S^{-1}(u^{-1})\Lambda_{(4)}^3)\\
=&\lambda S(uS(d_t^{[5]})\Lambda_{(1)}^3 S(f_r^{[3]})u^{-1}f_i^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^1)d_t^{[2]}f_r^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^3)\Lambda_{(4)}^1)\\
&\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d_t^{[1]})S^{-2}(\Lambda_{(3)}^1)S^{-1}(f_i^{[1]})S^{-1}(u^{-1})f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^2)d_t^{[4]}f_i^{[3]}S^{-1}(\Lambda_{(1)}^1)\Lambda_{(4)}^2)\\
&\lambda S(f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^2)d_t^{[3]}f_r^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^3)S^{-2}(\Lambda_{(1)}^2)S^{-1}(f_p^{[3]})S^{-1}(u^{-1})\Lambda_{(4)}^3)
\end{aligned}
$$

在最后一个等式中，$d_t^{[5]}uS(d_t^{[6]})$根据命题1（6）进行压缩。然后我们对1（3）应用定理，得到 $\lambda S(u\cdots\Lambda_{(4)}^1)$，并根据命题1（7）得到以下结果。

$$
\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(S(d_t^{[5]})\Lambda_{(1)}^3 S(f_r^{[3]})u^{-1}f_i^{[2]}u_{(2)}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^1)d_t^{[2]}f_r^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^3)\Lambda_{(4)}^1)\\
&\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d_t^{[1]})S^{-2}(\Lambda_{(3)}^1)S^{-1}(u_{(1)})S^{-1}(f_i^{[1]})S^{-1}(u^{-1})f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^2)d_t^{[4]}f_i^{[3]}u_{(3)}\\
&S^{-1}(\Lambda_{(1)}^1)\Lambda_{(4)}^2)\\
&\lambda S(f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^2)d_t^{[3]}f_r^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^3)S^{-2}(\Lambda_{(1)}^2)S^{-1}(f_p^{[3]})S^{-1}(u^{-1})\Lambda_{(4)}^3)\\
=&\lambda S(S(d_t^{[5]})\Lambda_{(1)}^3 S(f_r^{[3]})S(d_i^{[2]})S^{-1}(\Lambda_{(2)}^1)d_t^{[2]}f_r^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^3)\Lambda_{(4)}^1)\\
&\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d_t^{[1]})S^{-2}(\Lambda_{(3)}^1)d_i^{[3]}f_p^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^2)d_t^{[4]}uS(d_i^{[1]})S^{-1}(\Lambda_{(1)}^1)\Lambda_{(4)}^2)\\
&\lambda S(f_p^{[1]}S^{-1}(\Lambda_{(3)}^2)d_t^{[3]}f_r^{[2]}S^{-1}(\Lambda_{(2)}^3)S^{-2}(\Lambda_{(1)}^2)S^{-1}(f_p^{[3]})S^{-1}(u^{-1})\Lambda_{(4)}^3)
\end{aligned}
$$

应用定理1(3) 于 $\lambda S(S(d_t^{[5]})\cdots\Lambda_{(4)}^1)$ 以及 $\lambda S(f_p^{[1]}\cdots\Lambda_{(4)}^3)$。

$$
\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[3]}_r)S(d^{[2]}_i)S(d^{[5]}_{t(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_t f^{[1]}_r S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_{t(3)}d^{[3]}_i f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d^{[4]}_t uS(d^{[1]}_i)S(d^{[5]}_{t(1)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(f^{[1]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[2]}_r S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-1}(u^{-1})\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[3]}_r)S(d^{[6]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_t f^{[1]}_r S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[7]}_t f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d^{[4]}_t uS(d^{[5]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(f^{[1]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[2]}_r S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-1}(u^{-1})\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[3]}_r)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_t f^{[1]}_r S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(f^{[1]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[2]}_r S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-1}(u^{-1})\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[1]}_{p(3)})S(f^{[3]}_r)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_t f^{[1]}_r f^{[1]}_{p(1)}S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[2]}_r f^{[1]}_{p(2)}S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[3]}_p)S^{-1}(u^{-1})\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[3]}_p)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_t f^{[1]}_p S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(u)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[4]}_p S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[5]}_p)S^{-1}(u^{-1})\Lambda^3_{(4)})
\end{aligned}
$$

将 $u = f^{[1]}_j S(f^{[2]}_j)$ 代入 $\lambda S(S^{-1}(u)\cdots)$，并对 $\lambda S(f^{[2]}_j \cdots \Lambda^2_{(4)})$应用定理1(3)。

$$
\begin{aligned}
Z_F =&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[3]}_p)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_t f^{[1]}_p S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[4]}_p f^{[2]}_{j(2)}S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(f^{[2]}_{j(1)}S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[2]}_p S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[2]}_{j(3)})S^{-1}(f^{[5]}_p)S^{-1}(u^{-1})\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[2]}_{j(3)})S(f^{[3]}_p)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_t f^{[1]}_p f^{[2]}_{j(1)}S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[4]}_p f^{[2]}_{j(4)}S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[2]}_p f^{[2]}_{j(2)}S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[2]}_{j(5)})S^{-1}(f^{[5]}_p)S^{-1}(u^{-1})\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[4]}_j)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_t f^{[2]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[5]}_j S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[3]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[6]}_j)S^{-1}(u^{-1})\Lambda^3_{(4)})
\end{aligned}
$$

同样，将 $u^{-1} = S(d^{[1]}_q)d^{[2]}_q$代入 $\lambda S(\cdots S^{-1}(u)\Lambda^3_{(4)})$ 并对 1(1) 应用定理 $\lambda d^{[1]}_q \Lambda^3_{(4)}$。

$$
\begin{aligned}
Z_F =& \lambda S(S(d^{[1]}_{q(3)})\Lambda^3_{(1)}S(f^{[4]}_j)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_t f^{[2]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})d^{[1]}_{q(1)}\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[5]}_j S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[3]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})d^{[1]}_{q(2)}S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[6]}_j)S^{-1}(d^{[2]}_q)\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(S(d^{[1]}_{q(5)})\Lambda^3_{(1)}S(f^{[4]}_j)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[1]}_{q(2)}d^{[2]}_t f^{[2]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-1}(d^{[1]}_{q(1)})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[5]}_j S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})d^{[1]}_{q(3)}\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_t f^{[3]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})d^{[1]}_{q(4)}S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[6]}_j)S^{-1}(d^{[2]}_q)\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(S(d^{[1]}_{q(7)})\Lambda^3_{(1)}S(f^{[4]}_j)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[1]}_{q(2)}d^{[2]}_t f^{[2]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-1}(d^{[1]}_{q(1)})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[5]}_j S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d^{[1]}_{q(4)}S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[1]}_{q(3)}d^{[3]}_t f^{[3]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})d^{[1]}_{q(6)}S^{-1}(d^{[1]}_{q(5)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[6]}_j)S^{-1}(d^{[2]}_q)\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(S(d^{[1]}_{q(5)})\Lambda^3_{(1)}S(f^{[4]}_j)S(d^{[4]}_t)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[1]}_{q(2)}d^{[2]}_t f^{[2]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-1}(d^{[1]}_{q(1)})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_t f^{[5]}_j S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d^{[1]}_{q(4)}S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[1]}_{q(3)}d^{[3]}_t f^{[3]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[6]}_j)S^{-1}(d^{[2]}_q)\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[4]}_j)S(d^{[4]}_t)S(d^{[1]}_{q(6)})S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[1]}_{q(2)}d^{[2]}_t f^{[2]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-1}(d^{[1]}_{q(1)})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[1]}_{q(7)}d^{[5]}_t f^{[5]}_j S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})d^{[1]}_{q(4)}S(d^{[1]}_{q(5)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[1]}_{q(3)}d^{[3]}_t f^{[3]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[6]}_j)S^{-1}(d^{[2]}_q)\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[4]}_j)S(d^{[4]}_t)S(d^{[1]}_{q(4)})S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[1]}_{q(2)}d^{[2]}_t f^{[2]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_t)S^{-1}(d^{[1]}_{q(1)})S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[1]}_{q(5)}d^{[5]}_t f^{[5]}_j S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[1]}_{q(3)}d^{[3]}_t f^{[3]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[6]}_j)S^{-1}(d^{[2]}_q)\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S(f^{[4]}_j)S(d^{[4]}_q)S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})d^{[2]}_q f^{[2]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(f^{[1]}_j)S^{-1}(d^{[1]}_q)S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})d^{[5]}_q f^{[5]}_j S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})d^{[3]}_q f^{[3]}_j S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})S^{-1}(f^{[6]}_j)S^{-1}(d^{[6]}_q)\Lambda^3_{(4)})\\
=&\lambda S(\Lambda^3_{(1)}S^{-1}(\Lambda^1_{(2)})S^{-1}(\Lambda^3_{(3)})\Lambda^1_{(4)})\lambda S(S^{-2}(\Lambda^1_{(3)})S^{-1}(\Lambda^2_{(2)})S^{-1}(\Lambda^1_{(1)})\Lambda^2_{(4)})\\
&\lambda S(S^{-1}(\Lambda^2_{(3)})S^{-1}(\Lambda^3_{(2)})S^{-2}(\Lambda^2_{(1)})\Lambda^3_{(4)}) = Z(T^3, f_1, H)\,,
\end{aligned}
$$

便完成了证明。 □

参考文献

[BW95] John W. Barrett 和 Bruce W. Westbury。三维流形不变量的相等性。剑桥哲学学会数学论文集，118(3):503–510，1995。[CGPMT20] Francesco Costantino、Nathan Geer、Bertrand Patureau-Mirand 和 Vladimir Turaev。幺模范畴中的 Kuperberg 不变量与 Turaev-Viro 不变量。太平洋数学杂志，306(2):421–450，2020。[CK20] Andrzej Czarnecki 和 Katarzyna Krawiec。每种 Thurston 几何都存在一个 Heegaard genus 为二的例子。*arXiv* 预印本 *arXiv:2011.08394*，2020。

[CNW25] Liang Chang、Siu-Hung Ng 和 YILONG WANG。由 Kuperberg 不变量得到的 Frobenius-Schur 指标的推广。arXiv 预印本 arXiv:2506.07409，2025。[DRGG+22] Marco De Renzi、Azat M. Gainutdinov、Nathan Geer、Bertrand Patureau-Mirand 和 Ingo Runkel。由非半单模范畴构造的三维拓扑量子场论。Selecta Math. (N.S.)，28(2):第 42 号论文，60 页，2022。[EG99] Pavel Etingof 和 Shlomo Gelaki。有限维 Hopf 代数的指数。Math. Res. Lett.，6(2):131–140，1999。[EG02a] Pavel Etingof 和 Shlomo Gelaki。三角 Hopf 代数族。Int. Math. Res. Not.，2002(14):757–768，2002。[EG02b] Pavel Etingof 和 Shlomo Gelaki。有限维 Hopf 代数的准指数。Math. Res. Lett.，9(2-3):277–287，2002。[GMM09] David Gabai、Robert Meyerhoff 和 Peter Milley。体积最小的带尖双曲三维流形。J. Amer. Math. Soc.，22(4):1157–1215，2009。[GS99] Robert E. Gompf 和 András I. Stipsicz。《四维流形与 Kirby 演算》。美国数学会，1999。数学研究生教材，第 20 卷。[KMN12] Yevgenia Kashina、Susan Montgomery 和 Siu-Hung Ng。对跖映射的迹与高阶指标。Israel J. Math.，188:57–89，2012。[Kup91] Greg Kuperberg。对合 Hopf 代数与三维流形不变量。Internat. J. Math.，2(1):41–66，1991。[Kup96] Greg Kuperberg。非对合 Hopf 代数与三维流形不变量。Duke Math. J.，84(1):83–129，1996。[Lyu95] Volodymyr V. Lyubashenko。通过单位根处的量子群构造三维流形不变量与映射类群的射影表示。Comm. Math. Phys.，172(3):467–516，1995。[MSWY26] Lukas Müller、Christoph Schweigert、Lukas Woike 和 Yang Yang。通过非半单弦网构造 Drinfeld 中心的 Lyubashenko 模函子。Adv. Math.，488:第 110770 号论文，2026。[NS08] Siu-Hung Ng 和 Peter Schauenburg。半单拟 Hopf 代数的中心不变量与高阶指标。Trans. Amer. Math. Soc.，360(4):1839–1860，2008。[Rad90] David E. Radford。特征零域上半单 Hopf 代数的自同构群是有限群。Amer. J. Math.，112(2):331–357，1990。[Rad94] David E. Radford。迹函数与 Hopf 代数。J. Algebra，163(3):583–622，1994。[Rol76] Dale Rolfsen。《纽结与链环》。Publish or Perish, Inc.，美国加利福尼亚州伯克利，1976。[Sch96] Peter Schauenburg。Hopf 双 Galois 扩张。Comm. Algebra，24(12):3797–3825，1996。[Shi15] Kenichi Shimizu。关于 Hopf 代数的指标。Israel J. Math.，207(1):155–201，2015。[Swe69] Moss E. Sweedler。Hopf 代数。W. A. Benjamin, Inc.，纽约，1969。数学讲义系列。[Thu82] William P. Thurston。三维流形、Kleinian 群与双曲几何。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)，6(3):357–381，1982。[TV92] V. G. Turaev 和 O. Ya. Viro。三维流形的态和不变量与量子 6j-符号。Topology，31(4):865–902，1992。

南开大学数学科学学院和 LPMC，中国天津电子邮箱： changliang996@nankai.edu.cn

北京数学与应用数学研究院（BIMSA），中国北京电子邮箱： wyl@bimsa.cn

南开大学数学科学学院和 LPMC，中国天津电子邮箱： saifeizhai@mail.nankai.edu.cn