arXiv:2601.19576v1 [math.KT] 27 Jan 2026

带角流形族的完全椭圆性几何障碍

Florian Thiry [1]

摘要

本文研究带角流形族的指标理论。特别地，我们研究椭圆算子具有族（Fredholm）指标所面临的K理论障碍。对于余维一角（带边界流形族），该障碍给出了关于与余维 1 面相关指标的预期条件。本文的主定理涉及余维 2 情形：除关于与余维 2 面相关指标的预期条件外，还存在一个额外的组合条件，该条件蕴含了族底空间的拓扑性质。这个新条件通过带有 K理论系数的余法向同调循环来表述。

Contents

引言1 1. 障碍与对角指标 4 1.1. C^* 代数障碍定理 4 1.2. 相对椭圆性 6 2. 带角流形族 9 3. 面向族的 Monthubert 群胚 11 3.1. 面向族的 Monthubert 群胚 11 3.2. 联络计算 13 3.3. 配对 $K_* - H_*^{pcn}$ 184. 低余维嵌入族的障碍计算 20 4.1. 全局嵌入的余维 1 族的边界指标 21 4.2. 全局嵌入的余维 2 族的边界指标 22 5. 附录 26 参考文献 27

Introduction

众所周知，对于带边界流形（分别为带边界流形族），并非每个椭圆算子都有 Fredholm 指数（分别为族指标）。这一事实可追溯至 Atiyah 的研究。例如，在 [AB65] 中，Atiyah 和 Bott 研究了所谓的 Atiyah–Patodi–Singer 条件（APS），并证明某些椭圆算子尽管存在边界，仍是 Fredholm 算子，其中包括狄拉克算子。在 [BC90a] 和 [BC90b] 中，Bismut 和 Cheeger 研究了

[1]图卢兹大学、法国国家科学研究中心、图卢兹数学研究所，法国图卢兹。电子邮箱：florian.thiry@math.univ-toulouse.fr1

带边界流形上的狄拉克算子族。借助锥方法和 Levi-Civita 超联络等工具，他们得以在（APS）条件下计算陈特征的积分公式。Melrose 和 Piazza 在 [MP97] 中将这项工作加以拓展，证明了带边界流形上的狄拉克算子族的指标定理。Carrillo Rouse、Lescure 和 Monthubert 运用群胚方法，将这一结果推广至所有 Fredholm 算子 [CRLM13]。Melrose 和 Piazza 在其研究中还指出，边界上的 K 理论指标映射消失，便可定义（APS）条件，进而得到 Fredholm 算子。这一事实表明，当流形有边界时，椭圆算子成为 Fredholm 算子存在 K 理论障碍。Monthubert 和 Nistor 运用群胚技术，将这项研究推进到更一般的情形（带角流形），并证明：当且仅当某个指标映射在边界上消失时，椭圆算子才能经扰动成为 Fredholm 算子 [MN11]。“边界指标”的消失也在 [DS20]、[NSS08] 和 [NSS10] 中有所讨论。在 [CRL18] 和 [CRL25] 中，Carrillo Rouse 和 Lescure 从几何角度计算了低余维带角流形的边界指标映射。此外，在 [CRLV21] 中，Carrillo Rouse、Lescure 和 Velasquez 采用另一种方法，对所有带角流形的该映射进行了有理计算（即忽略挠元）。

记 Ind_∂ 为边界映射，记 B 为一个光滑流形。带嵌入角的平凡流形族定义在 B 上，即笛卡尔积 $B \times Y$，其自身带有嵌入角，因此 Carrillo Rouse 和 Lescure 的工作仍然适用。在本文中，我们提出将他们的结果推广到一般的族 $\pi:\ X \longrightarrow B$，其典型纤维是带嵌入角的流形 Y。我们将范围限制在以下情形：X 本身是一个余维 1 和 2 的带嵌入角流形。

对于 $Codim(X) = 1$，我们明确计算了障碍空间 $K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(\partial X)) \cong K^1(B)^{\#\mathcal{F}_1(X)}$（即 Ind_∂ 的陪域）以及障碍映射 Ind_∂。

定理 4.2（余维 1 中边界指标的消失）。对于 $X \longrightarrow B$ 一个带嵌入角流形的余维 *1* 族，$[\sigma_T]_0 \in K^0(\Gamma_b^{tan}{}_{,\mathfrak{f}}(X))$，以下命题等价：$Ind_\partial([\sigma_T]_0) = 0$ 当且仅当 $\forall g \in \mathcal{F}_1(X)\ \ Ind_1^g([\sigma_{T|g}]_0) = 0$ 在 $K^1(B)$ 中。

每个余维 1 面都是流形的光滑族，因此算子在其上的限制具有取值于 $K^1(B)$ 的族指标，该指标可通过 Atiyah-Singer 族指标定理在拓扑上计算（例如参见 [CR23，定理 2.2.1]）。在我们的定理中，Ind_1^g 表示该余维 1 面的这个指标的悬挂 g。

在余维 2 情形下，我们能够使障碍空间位于一个短正合列的中间项，其中左右两项都可以通过带有 K 理论系数的余法向同调群显式计算：

定理 4.4 (余维 2 障碍空间估计**)**。障碍空间 $K_0(A_2/A_0) = K^0(G_F)$ 位于以下短正合列中：

$$0 \longrightarrow H_1^{pcn}(X, X_0; K^1(B)) \longrightarrow K_0(A_2/A_0) \longrightarrow H_0^{pcn}(X, X_0; K^0(B)) \longrightarrow 0.$$

接着，我们刻画了边界映射 Ind_∂ 的消失。一个额外的几何条件以余法向循环的形式出现，这就是本文的主定理：

定理　m 4.9 (余维 2 中边界指标的消失)。 设 $[\sigma_T]_0 \in K^0(\Gamma_b^{tan}{}_{,\ f}(X))$。

$$Ind_\partial([\sigma_T]_0) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall f \in \mathcal{F}_2(X), Ind_2^f([\sigma_{T|f}]_0) = 0 \\ \textit{and the induced } \mathcal{F}_2(X)\textit{-relative non commutative symbol } \overset{\circ}{\sigma_T} \textit{ is such that} \\ \left(Ind_{1,nc}^{\overline{g}}([\overset{\circ}{\sigma_{T|\overline{g}}}]_0)\right)_{g\in\mathcal{F}_1(X)} \quad \textit{vanishes in } H_1^{pcn}(X, X_0; K^1(B)). \end{array} \right.$$

这里， Ind_2^f 表示光滑族 f的 2-悬挂族指标，而$Ind_1^g{}_{,\ nc}$ 表示 g 上的 Fredholm 族指标的悬挂，如 [CRLM13] 中对带边流形的定义。⁻

我们的方法类似于谱序列；为了继续进行图表追踪，我们需要截面的存在。它们存在的主要障碍在于挠。在 [CRL18]和 [CRL25]中，作者证明，在他们考虑的情形下（即 $B = \{*\}$），当 $Codim(X) \leqslant 2$时，余法向同调及相关的 K 理论群均无挠。

在 [SV22] 中，研究表明，当 $B = \{*\}$ 且$Codim(X) \geqslant 3$时，同调群 $H_*^{cn}(X)$中可能出现挠。这意味着，本文的策略通常无法推广到余维大于或等于 3 的情形。

另一种策略可以借助 Connes–Thom 同构和 Chern 特征，像 [CRLV21] 中那样，在每个余维下给出有理计算（模去挠）。这将在后续论文中完成。

在第 1 节中，我们引入一个 C^*-代数框架，以便在一般的抽象背景下表达 K 理论障碍。随后，我们将其应用于伪微分演算，构建一种相对演算，其中所提到的障碍对应于能否将一个椭圆算子扰动为全椭圆算子，也就是边界指标。

在第 2 节中，我们介绍带嵌入角的流形及其自同构。将后者选作余循环，我们定义这类流形的族，并给出一些例子。

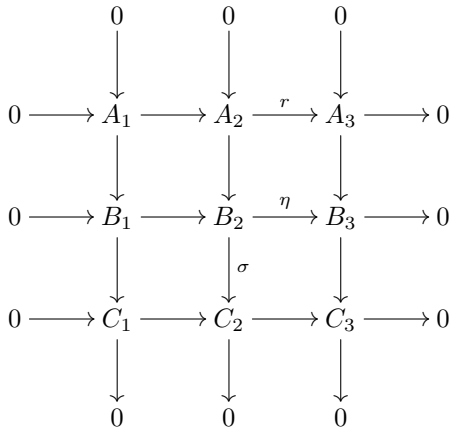
在第 3 节中，我们从这样的族 X 出发，引入一种类似于 Monthubert Puff 群胚的群胚，记作$\Gamma_{b,\ f}(X)$，以及其 C^*-代数的典范滤过 $(A_k)_{k=0}^d$。我们描述其微分结构和一些局部微分同胚。随后，我们利用 $K_*(\frac{A_k}{A_{k-1}})$ 的显式计算，揭示余法向同调与序列$0 \to \frac{A_{k-1}}{A_{k-2}} \to \frac{A_k}{A_{k-2}} \to \frac{A_k}{A_{k-1}} \to 0$的 K 理论连接之间的联系。

在第 4 节中，我们通过比较 K 理论与余法向同调来证明前面陈述的结果。

致谢。 我谨感谢我的导师 Paulo Carrillo Rouse 在本项目中给予我的指导。作者获得了 EUR MINT 博士奖学金资助。

1. Obstruction and diagonal index

1.1. C^* **代数障碍定理**。 在本节中，我们将 C^*–代数图表定义如下:



其中，代数 B_1、B_2、B_3、C_1、C_2 和 C_3 都是含单位代数，且它们之间的态射保单位元。我们还假设每个方块都是交换的，每一列和每一行都是正合列。第二列的 K理论连接映射 $K_1(C_2) \longrightarrow K_0(A_2)$记作 δ。

由这样的图表可以得到一个短正合列,

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow B_2 \xrightarrow{\sigma\oplus\eta} C_2 \underset{C_3}{\oplus} B_3 \longrightarrow 0 \ .$$

我们称之为对角序列。通常记作 $\sigma \oplus \eta := \sigma_{diag}$, η 默认已知。

我们的主要结果建立了 σ-可逆性与 σ_{diag}-可逆性之间的联系。为了证明这一点，我们回顾一个技术引理:

引理 1.1。 设 φ： $A \longrightarrow B$ 是一个满射保单位态射，其定义域和值域为含单位的 C^*-代数。
那么 $\varphi(\mathcal{U}_0(A)) = \mathcal{U}_0(B)$，其中 $\mathcal{U}_0$ 为与恒等映射同伦的酉元集合。

这一结果是连续函数演算的推论。

现在我们可以陈述我们的主要结果。

定理1.2。 设 $T \in B_2$ 为一个 σ-可逆元素（即 $\sigma(T)$ 在 C_2 中可逆），则以下命题等价:

(1) $K_0(r)(\delta[\sigma(T)]_1) = 0$*(2)* $\exists N > 0$, $\exists T' \in M_N(B_2)$ 且 $\sigma(T')$ 可逆，$[\sigma(T)]_1 = [\sigma(T')]_1$并且 $\eta(T')$ 可逆。
特别是，在这种情况下，$\sigma_{diag}(T')$ 将是可逆的。

映射 $K_0(r) \circ \delta$（记作 Ind_∂）由此刻画了一个障碍。对于一个 σ-可逆元素，障碍在于无法将其扰动为一个 σ_{diag}-可逆元素。

证明。 首先，如果 $\sigma(T)$ 可逆，利用极分解 $\sigma(T) = |\sigma(T)|\omega(\sigma(T))$，以及 σ 的满射性，存在 $V \in B_2$ 使得 $[\sigma(T)]_1 = [\omega(\sigma(T))]_1 = [\sigma(V)]_1$，其中 $\sigma(V)$ 是一个酉

元。
那么，只需证明该定理对 σ-酉元成立（即满足 $\sigma(T)$ 在 C_2 中为酉元的元素 $T \in B_2$ ）。

利用方块图的交换性以及连接态射的自然性，(2) $\Rightarrow$ (1) 的推论显而易见。我们重点证明其逆命题。

(1) $\Rightarrow$ (2)：我们需要更精确地描述最后一个图表，现引入以下记号：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{r} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\mu_B} & B_2 & \xrightarrow{\eta} & B_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\alpha & & \downarrow\sigma & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\mu_C} & C_2 & \xrightarrow{\eta_C} & C_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0, & & \end{array}$$

第三列的连接映射 $K_1(C_3) \to K_0(A_3)$ 记作 δ_3。

设 $T \in B_2$ 是一个酉元，满足 $K_0(r)(\delta[\sigma(T)]_1) = 0$。利用连接的自然性，我们有： $0 = K_0(r)(\delta[\sigma(T)]_1) = \delta_3 K_1(\eta_C)([\sigma(T)]_1)$。
那么，由第三列对应的六项正合列的正合性可知，存在一个经由 $K_1(\gamma)$ 的提升。由于映射 η 是满射，可以选取一个 $V \in M_\infty(B_2)$，使得 $\eta(V)$ 是酉元。对于这样的一个 V，我们有：

$$K_1(\gamma)([\eta(V)]_1) = K_1(\eta_C)([\sigma(T)]_1).$$

利用这一等式，我们可以写出 $[\eta_C(\sigma(T))]_1 = K_1(\eta_C)([\sigma(T)]_1) = K_1(\gamma)([\eta(V)]_1) = [\gamma \circ \eta(V)]_1 = [\eta_C(\sigma(V))]_1$, 这意味着 $\eta_C(\sigma(T))$ 和 $\eta_C(\sigma(V))$ 稳定同伦。

将此同伦乘以 $\eta_C(\sigma(V))^{-1} = \eta_C(\sigma(V))^* = \eta_C(\sigma(V^*))$ 的稳定化，我们得到一个从 $\eta_C \circ \sigma((T \oplus 1_N)(V^* \oplus 1_M)))$ 到单位元 $(N,\ M \in \mathbb{N})$ 的同伦。

由引理 1.1，存在一个酉提升 $W \in \mathcal{U}_0(M_\infty(C_2))$（与单位元同伦） ：

$$\eta_C \circ \sigma((T \oplus 1_N)(V^* \oplus 1_M)) = \eta_C(W).$$

正合性 $(Ker\,\eta_C = Im\,\mu_C)$、 α 满射性和交换性 $(\mu_C \circ \alpha = \sigma \circ \mu_B)$ 给出了另一个提升 $b_1 \in M_\infty(B_1)$, 使得： $\sigma(\mu_B(b_1)) + W = \sigma((T \oplus 1_N)(V^* \oplus 1_M)))$。

由此表达式，我们提取出 $W^*\sigma(T \oplus 1_N) = \sigma((V^* \oplus 1_M) - \mu_B(b_1^*)(T \oplus 1_N))$。

然后我们设定 $\chi_T := \mu_B(b_1^*)(T \oplus 1_N)$，并以这样的方式设定 $T' := (V^* \oplus 1_M) - \chi_T$in，使得现在我们有：

$$W^*\sigma(T \oplus 1_N) = \sigma((V^* \oplus 1_M) - \chi_T) = \sigma(T').$$

这 T' 确实就是我们要找的对象：
(1) $\sigma(T') = W^*\sigma(T \oplus 1_N)$，这确实是一个酉元

(2) 元素 W^* 是酉的且与恒等映射同伦，因此 $[W^*]_1 = 0$，这意味着 $[\sigma(T')]_1 = [W^*]_1 + [\sigma(T \oplus 1_N)]_1 = [\sigma(T)]_1$(3) 最后，由于 $\eta(\chi_T) = \eta(\mu_B(b_1^*)(T \oplus 1_N)) = \big(\eta \circ \mu_B(b_1^*)\big)\big(\eta(T \oplus 1_N)\big) = 0$，因此 $\eta(T') = \eta((V^* \oplus 1_M) - \chi_T) = \eta(V^* \oplus 1_M) = \eta(V^*) \oplus 1_M$，这确实是一个酉元。

□

1.2. **相对椭圆性**。本节中，我们将使用奇异流形 和非奇异流形 这两个术语，但不作定义。这是因为以下讨论可以适用于许多情境。在接下来的章节中，我们将为这些概念给出精确定义，以便开展一些计算。现在，你可以将奇异流形 理解为非闭流形，将非奇异流形 理解为闭流形。

我们回顾一下，李群胚 $G \rightrightarrows G^{(0)}$ 带有一种伪微分演算，使我们能够写出如下序列

$$0 \longrightarrow C^*(G) \longrightarrow \overline{\psi^0}(G) \xrightarrow{\sigma} C_0(S^*G) \longrightarrow 0\ ,$$

其中 σ 表示算子符号。更多详情请参见 [NWX99] 或 [DS20] 。我们假设存在一个与奇异流形相关联的光滑李群胚，并且它具有如下由两个光滑李群胚构成的饱和分解：

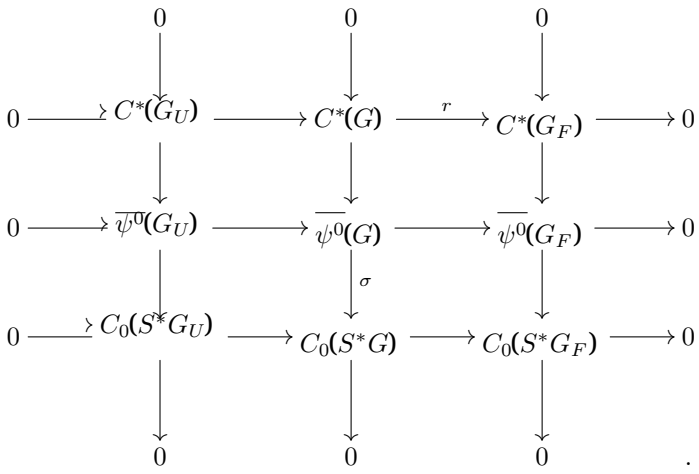
$$\begin{array}{ccccc} G & = & G_U & \sqcup & G_F \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ G^{(0)} & = & U & \sqcup & F, \end{array}$$

其中 U 是 $G^{(0)}$ 的一个开子集，而 F 是一个闭子集。
特别地，这给出了一个短正合列（例如参见 [Wil19]）：

$$0 \longrightarrow C^*(G_U) \longrightarrow C^*(G) \longrightarrow C^*(G_F) \longrightarrow 0.$$

这里的想法是将 G_U 视为描述流形的非奇异部分，而将 G_F 视为描述其奇异部分。这些群胚各自有自己的伪微分演算，彼此之间存在关联，

构成如下交换图:



在这种背景下，回想一下，若算子 $T \in \psi^0(G)$ 满足 $\overline{\sigma}(T)$ 在 $C_0(S^*G)$ 中可逆，则称其在 G 上是椭圆的。现在我们定义相对椭圆性概念。

定义1. 对于如上所述的群胚 $G = G_U \sqcup G_F$，我们可以定义对角序列

$$0 \longrightarrow C^*(G_U) \longrightarrow \overline{\psi^0}(G) \xrightarrow{\sigma_{diag}} A_F \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $A_F = C_0(S^*G) \,{}_{C_0}{}^{\oplus}{}_{(S^*G_F)}\, \overline{\psi^0}(G_F)$。

一个椭圆元，且σ_{diag} 可逆，称为在 G 上（相对于 U和 F）全椭圆。

使用上述术语，我们可以将我们的 C^*-代数结果改述为具有分解的群胚上椭圆算子的框架中的结果:

T定理 1.3。对于 $T \in \psi^0(\overline{G})$ 上的椭圆算子 G，以下条件等价: :

(1) $Ind_\partial([\sigma(T)]_1) = 0$ *(2)* 存在 T'，属于 $\psi^0(G)$，且全椭圆，其中 $[\sigma(T)]_1 = [\sigma(T')]_1$。

注 1。就我们的目的而言，我们需要以更具几何意义的方式实现映射 Ind_∂ 。为此，我们回顾一下：给定李群胚 G $\rightrightarrows G^{(0)}$，可以定义其切群胚~~$G^{tan}$~~ $\rightrightarrows G^{(0)} \times [0,1]$， G^{tan} 是相对于流形 $G^{(0)}$ ~~的流~~形 G 的法锥变形在 $G^{(0)} \times [0,1]$ 上的限制（其中 $G^{(0)}$ 借助典范嵌入被视为 G 的子流形）。

那么，利用这一最后的概念，我们可以从一个椭圆算子 $T \in \psi^0(\overline{G})$ 关联得到一个类 $[\sigma_T]_0 \in K_0(C^*(G^{tan}))$，使得 $Ind_\partial([\sigma(T)]_1) = r \circ e_1([\sigma_T]_0)$，其中 e_1 定义为对子群胚的限制： $K_0(C^*(G^{tan})) \xrightarrow{e_1} K_0(C^*(G))$。在这一额外构造下，边界

指标仅由对 $G^{(0)} \times \{1\}$ 的求值构成。

$$\begin{array}{ccccc} & & K_0(C^*(G)) & \xleftarrow{\quad e_1 \quad} & K_0(G^{tan}) \quad \ni \quad [\sigma_T]_0 \\ & & \uparrow & & \downarrow e_0 \cong \\ [\sigma(T)]_1 & \in & K_1(C_0(S^*G)) & \longrightarrow & K_0(AG) \end{array}$$

映射 Ind_∂ 和 $r_\partial \circ Ind^X := r \circ e_1$ 都称为边界指标。

在本文中，我们将使用最后这个表达式来刻画边界指标 Ind_∂ 消失，以及椭圆算子能够被扰动为全椭圆算子的条件。

注 2. 我们可以进一步采用这种相对方法，构造更多指标映射，如下所示。对于如前所述的 $G = G_U \bigsqcup G_F$ 饱和分解，我们可以定义另一个饱和分解： $G^{tan} = G^{Fred} \bigsqcup G_F$，其中 $G^{Fred} := G^{tan} \setminus (G_F \times \{1\})$。

那么，限制 $G^{tan} \xrightarrow{e_1} G$ 与饱和分解相容，也就是说，它限制到 $\left| \begin{array}{l} G^{Fred} \xrightarrow{e_1} G_U \\ G_F \xrightarrow{Id} G_F \end{array} \right.$。这产生了相关对角序列（定义 *1*）之间的一个态射：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^*(G^{Fred}) & \longrightarrow & \overline{\psi^0}(G^{tan}) & \longrightarrow & A_F^{[0,1]} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow e_1 & & \downarrow e_1 & & \downarrow e_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & C^*(G_U) & \longrightarrow & \overline{\psi^0}(G) & \longrightarrow & A_F & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

where $A_F^{[0,1]} := C_0(S^*G \times [0,1]) \underset{C_0(S^*G_F)}{\oplus} \overline{\psi^0}(G_F)$ *and* $A_F := C_0(S^*G) \underset{C_0(S^*G_F)}{\oplus} \overline{\psi^0}(G_F)$.

注意到 $C_0(S^*G \times [0,1[)$ 是一个可缩的 C^*-代数，我们知道 $e_1 : A_F^{[0,1]} \to A_F$ 在 K 理论中诱导出一个同构。记上行的连接映射为 δ^{tan}，并注意到下方的连接映射 δ^{diag} 是对角序列（定义 *1*）的连接态射，我们有：

$$\begin{array}{ccc} K_1(A_F^{[0,1]}) & \xrightarrow{\delta^{tan}} & K_0(C^*(G^{Fred})) \\ \cong \downarrow & & \downarrow e_1 \\ K_1(A_F) & \xrightarrow{\delta^{diag}} & K_0(C^*(G_U)). \end{array}$$

那么，若我们从一个全椭圆算子 $T \in \psi^0(G)$ 出发，它定义了 $[\sigma_{diag}(T)]_1 \in K_1(A_F)$。随后，通过 $G^{Fred} \xrightarrow{e_1} G_U$ 计算相应的对角指标 $\delta^{diag}[\sigma_{diag}(T)]_1$。特别地，若 G_U 是对偶群胚（分别为纤维化对偶群胚），则它计算的是弗雷德霍姆指标（分别为族指标）。

例如，在第 4 节中，我们定义 $Ind_{nc}^X : K_0(C^*(\Gamma_b^{Fred}, \mathfrak{f}(X))) \xrightarrow{e_1} K_0(C^*(\underset{B}{X \times} X)) \cong K_{top}^0(B)$，将 Fredholm 群胚限制到 $\{1\}$，对应于某个算子的族指标。

2. Family of manifolds with corners

本节定义带嵌入角的流形族的几何背景。我们假定读者已了解带角流形和嵌入角的概念。首先，我们精确定义何谓嵌入角流形定向自同构。

定义 2. 设 Y 为带嵌入角的流形，$(r_j)_{j=1}^m$ 为其定义函数（$\Sigma_j := r_j^{-1}(0)$）。

~ ~我们称带定向自同构的 Y 为微分同胚 $f\colon Y \to Y$ 在 Y 上的限制，并赋予置换 $\sigma \in S_N$，使得对任意 $j \in [\![1, m]\!]$，均有 $f^{-1}(\Sigma_j) = \Sigma_{\sigma(j)}$。

定向条件意味着，对任意 $j \in [\![1, m]\!]$，均有 $f^{-1}(\{r_j > 0\}) = \{r_{\sigma(j)} > 0\}$ 以及 $f^{-1}(\{r_j < 0\}) = \{r_{\sigma(j)} < 0\}$。

定向自同构的集合构成一个群，记作 $Puff_+(Y)$。

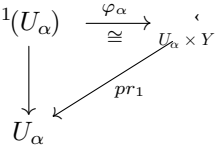
我们将置换 σ 称为 f的组合结构

注 3. 在这种情形下，一个定向自同构 $f \in Puff_+(Y)$ 定义了偶映射~ ~$f\colon (Y, \Sigma_{\sigma(j)}) \to (Y, \Sigma_j)$。这使我们能够定义这些偶对之间法丛的定向态射
∘ ∘。此外，它还诱导出一个光滑微分同胚 $f\colon Y \to Y$。

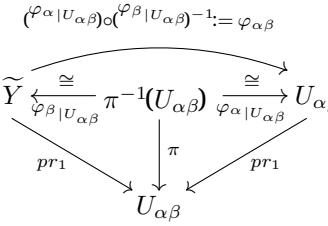
使用这 种自同构概念，我们可以如下定义嵌入角流形族 :

~**定义 3.** 设 B 为一个光滑流形，$(Y,(r_i)_{i=1}^m)$ 为一个带有其定义函数的嵌入角流形。我们称以 B 为底、纤维为 Y 的嵌入角流形族为由以下数据组成的对象~：一个光滑满射下沉 $\pi\colon X \longrightarrow B$，满足：

(1) 我们可以用平凡化开子集 U_α 覆盖 B，使得以下图表可交换
：$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow[\cong]{\varphi_\alpha} U_\alpha \times Y$ ，其中 φ_α 是一个光滑微分同胚。



(2) 过渡映射 $U_{\alpha\beta} \times \widetilde{Y} \xleftarrow[\varphi_{\beta}|_{U_{\alpha\beta}}]{\cong} \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \xrightarrow[\varphi_{\alpha}|_{U_{\alpha\beta}}]{\cong} U_{\alpha\beta} \times \widetilde{Y}$ 满足 $\varphi_{\alpha\beta}(x, y) = (x, \Phi_{\alpha\beta}^x(y))$



其中，对每个 x 属于 U_α，都有 $\Phi_{\alpha\beta}^x \in Puff(\widetilde{Y})$.

注 4. 在给定的平凡化中，过渡态射 $(\Phi_{\alpha\beta}^x)_{x\in U_{\alpha\beta}} \subset Puff_+(Y) \subset$~$Diff(Y)$ 构成一个连续微分同胚族。
映射 $Puff_+(Y \longrightarrow \mathfrak{S}_m)$ 关于诱导拓扑连续，因此在 $U_{\alpha\beta}$ 的每个连通分支上都是常值的。
$f \mapsto \sigma_f$
我们将简单地记作 $\sigma_{\alpha\beta}^x = \sigma_{\alpha\beta}$，并假设 $U_{\alpha\beta}$ 是连通的。

~**命题 2.1.** 此类族 π ： $X \longrightarrow B$ 的全空间是~带角流形（通常不嵌入）的一个典范扩张，记作 $X \subset X$。此外，限制$^{\pi|X}$： $X \longrightarrow B$ 仍然是满射。

证明。要构造 X，只需注意到，在每个平凡化 U_α 中，都有一个从 $U_\alpha \times Y$到 $U_\alpha \times Y$的自然限制。由于过渡映射保持定向，它们也会限制到相应对象上。于是，我们利用限制后的余循环，将局部限制粘合起来，得到 X。

带角流形是一个局部性质，这一点在平凡化中显然成立（带角流形与光滑流形的笛卡尔积仍是余维相同的带角流形）。因此， X 是一个带角流形。

限制映射 $\pi|X : X \longrightarrow B$ 显然是满射。 □

实际上，有些带嵌入角流形的族比其他族具有更好的性质。我们将重点关注总角流形 X 本身也带有嵌入角的情形。事实上，这类流形的面周围可以赋予管状邻域，而一般情形下则不行（参见单角下降或下面的例 3）。

注 5。 沿用 *[PW19* 定理 *2，12]*在满足惠特尼（*B*）条件时，可以相对于淹没映射 π，在 X 中定义相交超曲面 H_I *(*$H_I = \bigcap_{i\in I} H_i$*,* $p := |I|$) 的管状邻域。

也就是说，存在一个包含 H_I 的邻域 V，以及一个微分同胚 φ： $H_I \times \mathbb{R}^p \longrightarrow V$，满足 $\varphi_{|H_I\times\{0\}^p} = Id_{H_I}$ 和 $\pi(\varphi(x,\lambda)) = \pi(x)$。
换句话说，我们有一个带嵌入角流形族的态射：

$$\begin{array}{ccccc} H_i \times \mathbb{R} & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & V & \subset & \widetilde{X} \\ & {\scriptstyle \pi\circ pr_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & & & \\ & B & & & \end{array}$$

从这个意义上说，我们可以说，带嵌入角的族的超曲面交集，在局部是余维更低的带嵌入角族的“悬挂”。

惠特尼（*B*）条件是定义函数正则性条件的推论：对于 $H_I = \bigcap_{i\in I}\{\rho_i = 0\}$ ，我们有 $(\forall i \in I,$ $\rho_i(x) = 0) \Rightarrow ((d_x\rho_i)_{i\in I}$ 独立族）。参见 *[PW19*，定义第 *25]* 页，或其几何等价形式，即 *[Tro78]* 和 *[Tro79]* 中的 (b_S) 条件。

以下是几个例子：

例 1。 平凡族
~每个平凡族都可以赋予嵌入角。若 r： $Y \to \mathbb{R}$ 是 Y 的一个定义函数，则平凡族 $X := Y \times B \to B$ 可以赋予 $r \circ pr_1$。

例 2。 *M¨obius* 带 - 二分之一扭曲平方实心环面
我们可以设置 $Y := [-1, 1] \subset \mathbb{R}$，其定义函数为 $r_1(y) := 1 - y$、 $r_2(y) := 1 + y$、 $B = S^1$。然后，将这些在圆上的 Y 纤维通过过渡函数粘合起来；除一个过渡函数外，其余均为恒等映射，而对于这一个，我们将过渡 $(y \in Y \mapsto -y \in Y) \in Puff_+(Y)$ 设置为。
在这种情况下，莫比乌斯带由一个超曲面全局嵌入，因为在每个局部平凡化中，我们都可以令 $\rho_U(x, y) := r_1(y)r_2(y) = 1 - y^2$。由于该函数在

过渡 这些变换下不变，它粘合成一个满足嵌入角公理的全局定义函数 ρ .

按照相同的步骤，使用定义函数$(y_1, y_2) \mapsto 1 \pm y_1$、$((y_1, y_2) \mapsto 1 \pm y_2$，并令一个过渡函数等于$(y_1, y_2) \mapsto (-y_1, -y_2)) \in Puff_+(Y)$，我们得到同一个所述例子，它也整体带有嵌入角。

例 3。 四分之一扭曲平方实心环面
取与二分之一扭曲平方实心环面情形相同的纤维 Y，但将非恒等过渡函数改为$((y_1, y_2) \mapsto (-y_2, y_1)) \in Puff_+(Y)$，即可得到四分之一扭曲平方实心环面。

由于组合原因，这个例子无法整体赋予嵌入角。作为带角流形，它只有一个余维 *1* 面和一个余维二面。如果这样的定义超曲面存在，那么它必须与自身相交才能形成余维二面。这样一来，它就不再是超曲面了。

3. Monthubert groupoids for families

‹ 从现在起，除非另有明确说明，我们所考虑的族 $\pi : X \longrightarrow B$ 都将其‹全空间 X 赋予嵌入角。

3.1. 族的 Monthubert 群胚。

为介绍下一节的主要工具，我们先给出一些记号：

设 $p \in \mathbb{N}^*$，对于集合 A 和 $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,\ p \rrbracket)$，我们用 A_I^p 表示乘积 $A_1 \times \cdots \times A_p$，其中$A_i := A \setminus \{0\}$ $i \in I$，当且仅当 $i \notin I$。
此外，每个元组 $I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,\ p \rrbracket)$ 均按升序排列。

在包含给定面 $f \in \mathcal{F}_p(X)$ 且其纤维‹是 π-纤维 $U \subset X$ 的子集的管状邻域中（其存在性见 rk 5），对每个面 $g \in \mathcal{F}_k(X)$ 的限制 $k \leqslant p$（满足 $f \subset g$）给出带角流形族的同构 $U \cap g \cong f \times \mathbb{R}_I^{+*p}$ （$I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,\ p \rrbracket,\ |I| = p,\ I$按序排列）。由于已知 f 和该管状邻域后，只需利用 I 就能识别这样的面，因此将这样的面称为 g_I 似乎是合理的。

特别地，使用这些记号：$g_\emptyset = X$ 以及 $g_{\{1,\ldots,p\}} = f$。此外，利用超曲面指标，我们有 $g_I \subset H_I$。

‹ 对于一个带嵌入角的流形族 $\pi :$ 余维为 d 的 $X \longrightarrow B$，我们将其关联的 Monthubert 群胚记为：

$$\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X) := \overset{\circ}{X} \underset{B}{\times} \overset{\circ}{X} \bigsqcup \left(\bigsqcup_{g \in \mathcal{F}_1} (g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{*+}) \right) \bigsqcup \ldots \bigsqcup \left(\bigsqcup_{g \in \mathcal{F}_d} (g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{*+d}) \right)$$

The symbol $\sqcup$ 对应于具有非平凡拓扑和微分结构的 s odnt uhon en owe。

其微分结构描述如下：

令 $f \in \mathcal{F}_p(X)$，在 f周围的管状邻域 U 中，我们有

$$\begin{aligned}
&\bigsqcup_{\substack{\sim \\ k=0}}^{p} \left(\bigsqcup_{I\in\mathcal{P}([\![1,p]\!]),|I|=k} (g_I \cap U) \underset{B}{\times} (g_I \cap U) \times \mathbb{R}^{+p}_{\{1,\dots,p\}\setminus I} \right) \\
&= f \underset{B}{\times} f \times \bigsqcup_{\substack{\sim \\ k=0}}^{p} \left(\bigsqcup_{I\in\mathcal{P}([\![1,p]\!]),|I|=k} \mathbb{R}^{+*p}_I \times \mathbb{R}^{+*p}_I \times \mathbb{R}^{+*p}_{\{1,\dots,p\}\setminus I} \right)
\end{aligned}$$

eac并集中的每个元素都通过以下同胚在拓扑上加以描述:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*p}_I \times \mathbb{R}^{+*p}_I \times \mathbb{R}^{+*p}_{\{1\dots p\}\setminus I} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*}_I \times \mathbb{R}^{+*p} \\ (x,y,\lambda) & \mapsto & (x, a^I(x,y,\lambda)) \end{array} \quad \text{with } a^I_i(x,y,\lambda) = \begin{cases} \lambda_i & \text{if } i \in I \\ \frac{y_i}{x_i} & \text{if } i \notin I \end{cases}$$

其余那些闭包也互不相交的(不交并，赋予平凡的不交并拓扑。)

例4。 例如，在 $p = 2$ （一个面 f 定义为恰好两个其他余维 *1* 面的闭包之交）的情形下，*Monthubert* 群胚局部可写为:

$$(f \underset{B}{\times} f) \times \Big(\bigsqcup_{I\in\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}} \mathbb{R}^{+*2}_I \times \mathbb{R}^{+*2}_I \times \mathbb{R}^{+*2}_{\{1,2\}\setminus I} \Big),$$

赋予以下图册的欧几里得部分:

$$\begin{array}{ccccc}
(x_1,x_2), & (y_1,y_2), & (0,0) & \longmapsto & (x_1,x_2,\frac{y_1}{x_1},\frac{y_2}{x_2}) \\
(0,x_2), & (0,y_2), & (\lambda_1,0) & \longmapsto & (x_1,x_2,\lambda_1,\frac{y_2}{x_2}) \\
(x_1,0), & (y_1,0), & (0,\lambda_2) & \longmapsto & (x_1,x_2,\frac{y_1}{x_1},\lambda_2) \\
(0,0), & (0,0), & (\lambda_1,\lambda_2) & \longmapsto & (x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2).
\end{array}$$

局部 Monthubert 群胚也可描述如下:

命题3.1。 前述同胚可扩展为一个群胚同胚

$$\begin{array}{ccc}
\bigsqcup_{\substack{\sim \\ k=0}}^{p} \left(\bigsqcup_{I\in\mathcal{P}([\![1,p]\!]),|I|=k} \mathbb{R}^{+*p}_I \times \mathbb{R}^{+*p}_I \times \mathbb{R}^{+*p}_{\{1,\dots,p\}\setminus I} \right) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^{+p} \rtimes \mathbb{R}^{+*p} \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathbb{R}^{+p} & = & \mathbb{R}^{+p}
\end{array} \tag{1}$$

与由 $t*\lambda := t\lambda$ 定义的右作用 $\mathbb{R}^{+p} \curvearrowleft \mathbb{R}^{+*p}$ 相关联的群胚，其中 $(t\lambda)_i := t_i\lambda_i$。

注6。 我们可以注意到，前述同胚限制在并集的每个成员上 :

$$\mathbb{R}^{+*p}_I \times \mathbb{R}^{+*p}_I \times \mathbb{R}^{+*p}_{\{1,\dots,p\}\setminus I} \cong \mathbb{R}^{+*p}_I \rtimes \mathbb{R}^{+*p}.$$

如此一来，我们便在 $\mathbb{R}^{+p} \rtimes \mathbb{R}^{+*p}$ 的某些闭子空间上诱导出一个拓扑。

假设 Monthubert 群胚具有可和性，我们定义一个滤过 $\emptyset = A_{-1} \subset A_0 \subset \cdots \subset A_d = C^*(\Gamma_{b,\ \mathfrak{f}}(X))$ 的全 C^* 代数由 $A_i := C^*$ Ö $\underset{\sim}{\bigsqcup}_{k\leqslant i}(\underset{g\in\mathcal{F}_k}{\sqcup} g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*k})$è 给出。我们注意到，对于 $i \leqslant j$, $\begin{smallmatrix} A_j \\ A_i \end{smallmatrix} \cong C^*$Ö $\underset{\sim}{\bigsqcup}_{i<k\leqslant j}(\underset{g\in\mathcal{F}_k}{\sqcup} g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*k})$è。

—

3.2. 联络计算。我们仍从一个带有嵌入角的流形族 $\pi : X \longrightarrow B$ 出发，其余维为 d，且其全空间具有嵌入角结构。我们仍为其 Monthubert 群胚赋予先前的滤过 $\emptyset = A_{-1} \subset A_0 \subset \cdots \subset A_d = C^*(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X))$.

设 $p \in [\![1,\ d]\!]$。短正合列 $0 \to \begin{smallmatrix} A_{p-1} \\ A_{p-2} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} A_p \\ A_{p-2} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} A_p \\ A_{p-1} \end{smallmatrix} \to 0$ 给出一个六项正合列：

$$\begin{tikzcd}
K^1(\underset{g\in\mathcal{F}_{p-1}}{\sqcup} g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*(p-1)}) \arrow[r] & K^1\left(\underset{g\in\mathcal{F}_{p-1}}{\sqcup} g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*(p-1)} \underset{\sim}{\sqcup} \underset{f\in\mathcal{F}_p}{\sqcup} f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p}\right) \arrow[r] & K^1(\underset{f\in\mathcal{F}_p}{\sqcup} f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p}) \arrow[d] \\
K^0(\underset{f\in\mathcal{F}_p}{\sqcup} f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p}) \arrow[u] & K^0\left(\underset{g\in\mathcal{F}_{p-1}}{\sqcup} g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*(p-1)} \underset{\sim}{\sqcup} \underset{f\in\mathcal{F}_p}{\sqcup} f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p}\right) \arrow[l] & K^0(\underset{g\in\mathcal{F}_{p-1}}{\sqcup} g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*(p-1)}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

我们有 $K^i(\begin{smallmatrix} g \times g \\ B \end{smallmatrix}) \cong K^i(B)$（$g \underset{B}{\times} g \rightrightarrows g$ 和 $B \rightrightarrows B$ Morita 等价），那么利用 Bott 周期性，连接映射可以写成 δ^i： $K^i(B)^{\#\mathcal{F}_p} \longrightarrow K^i(B)^{\#\mathcal{F}_{p-1}}$, $i \in \{0,1\}$。

本节的目标是利用局部论证逐坐标计算这些映射。设 $f \in \mathcal{F}_p(X)$。

对任意面的限制具有如下自然性：对于 $\mathcal{F}_{p-1}(X)$ 中任意的 g， $\delta^i_{|f}$： $K^i(B) \longrightarrow \bigoplus_{g'\in\mathcal{F}_{p-1}(X)} K^i(B)$ 的值域的 g 分量是受限序列的联络

$$(2) \quad 0 \longrightarrow C^*(g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*(p-1)}) \longrightarrow C^*(g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*(p-1)} \underset{\sim}{\sqcup} f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p}) \longrightarrow C^*(f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p}) \longrightarrow 0\ .$$

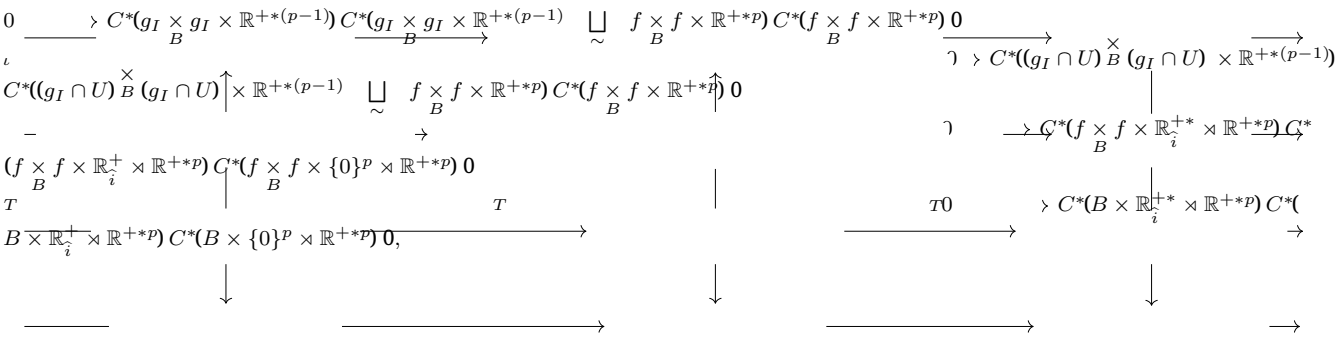
第一种情况是 $f \not\subset g$。在这种情况下，涉及的不交并在拓扑上是平凡的。我们得到 $C^*(g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*(p-1)} \underset{\sim}{\sqcup} f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p}) = C^*(g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*(p-1)} \sqcup f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p}) = C^*(g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{+*(p-1)}) \bigoplus C^*(f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p})$。

那么，短正合列 (2) 实际上是可分裂的，因此在这种情况下，连接是零映射。

为了理解其他面上的情况，我们需要利用一个管状邻域来考察我们的群胚。设 $U \subset X$ 是面 f 周围的这样一个邻域，该邻域是相对于 π-纤维而言的（参见 rk 5）。使用记号 $U \cap g_I \cong f \times \mathbb{R}_I^{+*}$、 $g_I \subset H_I$ 和 $\widehat{i} := \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$，同胚 (1) 给出了一个局部计算：

$$
\begin{aligned}
& (g_{\widehat{i}} \cap U) \underset{B}{\times} (g_{\widehat{i}} \cap U) \times \mathbb{R}^{+*(p-1)} \quad \underset{\sim}{\bigsqcup} \quad f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}^{+*p} \\
\underset{tub.neighb.}{\cong} & f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}_{\widehat{i}}^{+*p} \times \mathbb{R}_{\widehat{i}}^{+*p} \times \mathbb{R}_{\{i\}}^{+*p} \quad \underset{\sim}{\bigsqcup} \quad f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}_{\{1,\dots,p\}}^{+*p} \times \mathbb{R}_{\{1,\dots,p\}}^{+*p} \times \mathbb{R}_{\emptyset}^{+*p} \\
\underset{\text{homeo (1)}}{\cong} & f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}_{\widehat{i}}^{+*p} \rtimes \mathbb{R}^{+*p} \quad \bigsqcup \quad f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}_{\{1,\dots,p\}}^{+*p} \rtimes \mathbb{R}^{+*p} \\
= & f \underset{B}{\times} f \times (\mathbb{R}_{\widehat{i}}^{+*p} \bigsqcup \{0\}^p) \rtimes \mathbb{R}^{+*p} \\
= & f \underset{B}{\times} f \times \mathbb{R}_{\widehat{i}}^{+p} \rtimes \mathbb{R}^{+*p}.
\end{aligned}
$$

那么，我们可以用下面的图表概括：



其中，最后一个短正合列的态射是通过沿纤维积分得到的：$T \colon C^*(f \underset{B}{\times} f) \longrightarrow C_0(B)$ $\varphi \mapsto \left(b \mapsto \int_{\pi^{-1}(B)} \varphi(x,x) dx\right)$，它们在 K 理论中诱导出一个同构。

加入以下引理：

引理 3.2. </style}映射： $C^*((g_I \cap U) \underset{B}{\times} (g_I \cap U) \times \mathbb{R}^{+*(p-1)}) \longrightarrow C^*(g_I \underset{B}{\times} g_I \times \mathbb{R}^{+*(p-1)})$ 在 K 理论中诱导出一个同构。

证明。 除悬挂外，只需证明该结果对 $p = 1$ 成立。

不难验证以下对象的交换性：

$$\begin{array}{ccc} C^*(g_I \underset{B}{\times} g_I) & \xrightarrow{T} & C_0(B) \\ \uparrow{\scriptstyle \iota} & & \uparrow{\scriptstyle Id} \\ C^*((g_I \cap U) \underset{B}{\times} (g_I \cap U)) & \xrightarrow{T} & C_0(B) \end{array}$$

于是，由函子性可知， $K_*(\iota)$ 是一个同构（可识别为 $Id_{K^*(B)}$）。□

现在，我们的问题归结为计算最后一个序列的连接映射：

$$0 \longrightarrow C^*(B \times \mathbb{R}^{+*p}_{\widehat{i}} \rtimes \mathbb{R}^{+*p}) \; C^*(B \times \mathbb{R}^{+p}_{\widehat{i}} \rtimes \mathbb{R}^{+*p}) \; C^*(B \times \{0\}^p \rtimes \mathbb{R}^{+*p}) \; 0, \longrightarrow$$

$i \in [\![1, p]\!]$。我们将这两个连接记为 α_i^*, $* = 0,1$。

重新排列各项 $(x, \lambda) \mapsto (x_k, \lambda_k)_{k=1}^p$ 可得一个同构

$$\mathbb{R}^{+p} \rtimes \mathbb{R}^{+*p} \cong (\mathbb{R}^+ \rtimes \mathbb{R}^{+*})^p, \tag{3}$$

它对每个 $i \in [\![1, p]\!]$ 的限制为：

$$\mathbb{R}^{+p}_{\widehat{i}} \rtimes \mathbb{R}^{+*p} \cong \left(\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*}\right)^{i-1} \times \left(\mathbb{R}^+ \rtimes \mathbb{R}^{+*}\right) \times \left(\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*}\right)^{p-i}.$$

那么，每个连接映射都可以通过因子置换从其他连接映射推导出来。

引理 3.3. 存在一些同构，将连接映射 α_1^* 识别为 $Id_{K^\diamond(B)}$ ($*, \diamond \in \{0,1\}$，其中 $\diamond = *$ 或 $\diamond = 1 - *$ 取决于与 p 相关的奇偶性）。
更确切地说，存在一些同构，使得这个方块图交换：

$$\begin{array}{ccc} K^{1-*}(B \times \{0\}^p \rtimes \mathbb{R}^{+*p}) & \xrightarrow{\alpha_1^*} & K^*(B \times \mathbb{R}^{+*}_{\widehat{1}} \rtimes \mathbb{R}^{+*p}) \\ \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ K^\diamond(B) & \xrightarrow{Id_{K^\diamond(B)}} & K^\diamond(B) \end{array}$$

P交换图。 对于 $p = 1$，我们要寻找连接映射的序列可以写成：

$$0 \longrightarrow {}_{C_0(B)} \otimes C^*(\mathbb{R}^{+*} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \longrightarrow C_0(B) \otimes C^*(\mathbb{R}^+ \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \longrightarrow C_0(B) \otimes C^*(\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \longrightarrow 0,$$

其中，这些映射在 $C_0(B)$ 分量上是恒等映射。根据 [HR00，命题 4.7.6] $C_0(B)$ 是一个核代数，因此连接的形式为 $\alpha_1^* = Id_{K^*(B)} \otimes \alpha$，其中 α 是以下序列的连接映射：

$$0 \longrightarrow C^*(\mathbb{R}^{+*} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \longrightarrow C^*(\mathbb{R}^+ \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \longrightarrow C^*(\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \longrightarrow 0.$$

由于群胚 $\mathbb{R}^{+*} \rtimes \mathbb{R}^{+*}$ 和 $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ 同构，我们有 $C^*(\mathbb{R}^{+*} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \cong C^*(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}) \cong \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^{+*}))$，并且 $C^*(\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \cong C_0(\mathbb{R}^{+*})$，可以设：

- $p \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^{+*}))$ 一个秩一投影
- $\beta \in K_1(C_0(\mathbb{R}^{+*}))$ 使得 $K_1(C_0(\mathbb{R}^{+*})) \to K_0(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^{+*})))$ 将 β 映射到 $[p]_0$
- 同构 $K_1(C_0(\mathbb{R}^{+*})) \cong \mathbb{Z}$ 由 $\beta \mapsto 1$生成
- 由 $[p]_0 \mapsto 1$ 生成的同构 $K_0(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^{+*}))) \cong \mathbb{Z}$

将它们组合成图表后，我们得到：

$$
\begin{array}{ccc}
K_1(C^*(\{0\}\rtimes\mathbb{R}^{+*})) & \xrightarrow{\alpha} & K_0(C^*(\mathbb{R}^{+*}\rtimes\mathbb{R}^{+*})) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
K_1(C_0(\mathbb{R}^{+*})) & \xrightarrow[\beta\mapsto[p]_0]{} & K_0(\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^{+*}))) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{Id_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z},
\end{array}
\tag{4}
$$

其中诱导同构为 $Id_{\mathbb{Z}}$。然后在左侧将这些空间与 $K^*(B)=K_*(C_0(B))$ 张量化，并将映射与 $Id_{K^*(B)}$ 张量化，再利用 K¨unneth 公式，我们得到以下交换图：

$$
\begin{array}{ccc}
K_{1-*}(C_0(B)\otimes C^*(\{0\}\rtimes\mathbb{R}^{+*})) & \xrightarrow{\alpha_1^*} & K_*(C_0(B)\otimes C^*(\mathbb{R}^{+*}\rtimes\mathbb{R}^{+*})) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
K^*(B) & \xrightarrow{Id_{K^*(B)}} & K^*(B).
\end{array}
$$

然后在此交换图上应用悬挂函子 $p-1$ times（或与 $C_0(\mathbb{R}^{+*p})$ 张量化，二者等价），即可得到所述结果。□

由于连接 α_1^* 是通过同构计算得到的，我们便可通过相同的同构推出另一个 α_i^*。

引理 3.4。对于 $i\in[\![2,p]\!]$，令 $\tau_i\colon \mathbb{R}^{+p}_{\widehat{i}}\rtimes\mathbb{R}^{+*p}\xrightarrow{\cong}\mathbb{R}^{+p}\frown_{i-1}\rtimes\mathbb{R}^{+*p}$ 为群胚同构，它由交换两项中的 i^{th} 因子与 $i-1^{th}$ 因子得到。
映射 τ_i 诱导如下连接映射之间的态射：

$$
\begin{array}{ccc}
K^{1-*}(B\times\{0\}^p\rtimes\mathbb{R}^{+*p}) & \xrightarrow{\alpha_i^*} & K^*(B\times\mathbb{R}^{+*p}_{\widehat{i}}\rtimes\mathbb{R}^{+*p}) \\
{\scriptstyle K_{1-*}(\tau_i)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_*(\tau_i)} \\
K^{1-*}(B\times\{0\}^p\rtimes\mathbb{R}^{+*p}) & \xrightarrow[\alpha_{i-1}^*]{} & K^*(B\times\mathbb{R}^{+*p}_{\widetilde{i-1}}\rtimes\mathbb{R}^{+*p}).
\end{array}
$$

利用 (4) 中相同的同构，以及张量乘以 $\mathcal{K}$ 时的 K 理论稳定性，左侧（分别为右侧）的竖直态射可识别为 $-Id_{K^\diamond(B)}$（分别为 $Id_{K^\diamond(B)}$）。于是，α_i^* 和 α_{i-1}^* 可识别为从 $K^\diamond(B)$ 到 $K^\diamond(B)$ 的相反态射。

证明。同构 (3) 限制为：

$$
\mathbb{R}^{+p}_{\widehat{i}}\rtimes\mathbb{R}^{+*p}\cong\left(\{0\}\rtimes\mathbb{R}^{+*}\right)^{i-2}\times\left(\{0\}\rtimes\mathbb{R}^{+*}\right)\times\left(\mathbb{R}^{+}\rtimes\mathbb{R}^{+*}\right)\times\left(\{0\}\rtimes\mathbb{R}^{+*}\right)^{p-i}
$$

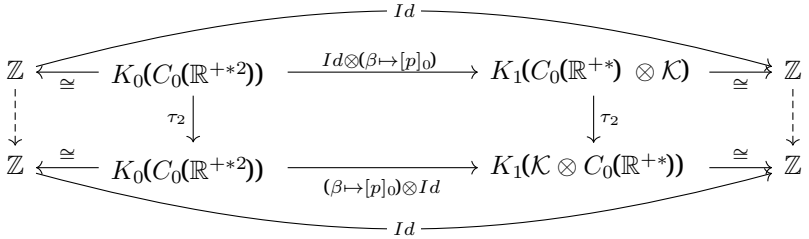
$$
\mathbb{R}^{+p}_{\widetilde{i-1}}\rtimes\mathbb{R}^{+*p}\cong\left(\{0\}\rtimes\mathbb{R}^{+*}\right)^{i-2}\times\left(\mathbb{R}^{+}\rtimes\mathbb{R}^{+*}\right)\times\left(\{0\}\rtimes\mathbb{R}^{+*}\right)\times\left(\{0\}\rtimes\mathbb{R}^{+*}\right)^{p-i}.
$$

于是，在左侧张量化 $C_0(\mathbb{R}^{+*})=C^*(\{0\}\rtimes\mathbb{R}^{+*})$ $i-2$ 次、右侧张量化 $p-1$ 次，并在左侧张量化 $K^*(B)$ 后，我们可以假设 $p=2$。在此证明中，满足这些简化假设的连接映射记为 $\widetilde{\alpha_1}$ 和 $\widetilde{\alpha_2}$。

将同构 (3) 视为已知后， τ_2 可写为 $\tau_2 : (\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \times (\mathbb{R}^+ \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^+ \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \times (\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*})$。它诱导出一个短正合列态射，其连接映射的自然性给出一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} K^0((\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \times (\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*})) & \xrightarrow{\widetilde{\alpha_2}} & K^1((\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \times (\mathbb{R}^{+*} \rtimes \mathbb{R}^{+*})) \\ \downarrow \cong \tau_2 & & \downarrow \cong \tau_2 \\ K^0((\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \times (\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*})) & \xrightarrow[\widetilde{\alpha_1}]{} & K^1((\mathbb{R}^{+*} \rtimes \mathbb{R}^{+*}) \times (\{0\} \rtimes \mathbb{R}^{+*})) \end{array}$$

利用 (4) 上半部分的悬垂纵向同构， $\widetilde{\alpha_1}$ 和 $\widetilde{\alpha_2}$ 可分别与映射 $Id \otimes (\beta \mapsto [p]_0)$ 和 $(\beta \mapsto [p]_0) \otimes Id$ 等同。继续利用 (4) 下半部分同构的悬垂进行识别，我们得到：



其中弯箭头是 $Id_{\mathbb{Z}}$ 在 (4) 中悬挂后的恒等映射。

根据构造， C^*-代数的 K 理论在经 $\mathcal{K}$ 张量化后保持稳定，因此： $K_1(C_0(\mathbb{R}^{+*}) \otimes \mathcal{K}) = K_1(\mathcal{K} \otimes C_0(\mathbb{R}^{+*})) = K_1(C_0(\mathbb{R}^{+*}))$，右侧诱导映射将是 $Id_{\mathbb{Z}}$。左侧的 τ_2映射由翻转自同构 $f(x, y) \mapsto f(y, x)$ 的 K 理论得到，因此左侧诱导映射为 $-Id_{\mathbb{Z}}$ （见附录定理 5.1）。

于是，通过 (4) 中的同构， $\widetilde{\alpha_1}$ 和 $\widetilde{\alpha_2}$ 将被识别为 $\mathbb{Z}$的相反自同构。□

结合最后两个引理，可将 α_i^* 识别为 $(-1)^{i-1} Id_{K^\diamond(B)}$ ，其对应于$\diamond = *$ 或 $\diamond = 1 - *$ ，具体取决于 p 的奇偶性。

于是，将连接 $\delta^*_{|f}$ 视为映射 $\delta^*_{|f} : K^*(B) \longrightarrow \bigoplus_{g' \in \mathcal{F}_{p-1}(X)} K^*(B)$，可以写成 $-Id$、 Id和零映射的组合。为使表述更加流畅，我们将其记为

$$\sigma(f,g) = \begin{cases} (-1)^{k-1} & \text{if } g = g_{\widehat{k}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{5}$$

as [CRL18, eq (5.22)]。

命题 3.5。 序列 $0 \to \begin{smallmatrix} A_{p-1} \\ A_{p-2} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} A_p \\ A_{p-2} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} A_p \\ A_{p-1} \end{smallmatrix} \to 0$ 的连接映射可以写成 $\delta^* : \bigoplus_{f \in \mathcal{F}_p(X)} K^*(B) \longrightarrow \bigoplus_{g \in \mathcal{F}_{p-1}(X)} K^*(B)$:

$$b_f \mapsto \sum_{g \in \mathcal{F}_{p-1}(X)} \sigma(f,g) b_f.$$

。**注记 7.** 当 X 连通时，在 $p = 1$ 的情况下，我们有： $\forall f \in \mathcal{F}_1(X)\ \sigma(f, X) = 1$。于是 $\bigoplus K^*(B) \longrightarrow K^*(B)$最后一个映射变为 $f \in \mathcal{F}_1(X)$ 特别地，这表明连接$b_f \mapsto b_f$。映射 $K^*(A_1/A_0) \to K^{1-*}(A_0)$ 是满射。

3.3. **配对** $K_* - H_*^{pcn}$。 沿着 J.M. Lescure 和 P.Carrillo Rouse 的思路，我们希望找出一种同调行为，以便从先前计算出的连接 $K_*(A_p/A_{p-1}) \longrightarrow K_{1-*}(A_{p-1}/A_{p-2})$出发进行更多计算。与他们的情况一样，关键在于余法向同调，但这里我们需要传递 K理论数据，而不仅仅是整数。

本节将简要定义带系数的余法向同调。由于 J.M. Lescure 和 P.Carrillo Rouse 使用的性质并非在我们的情形下都成立，我们概述了后续所需的性质。

在本节中，我们设 G 为一个阿贝尔群， X 为余维为 d的带嵌入角的流形（它可以是某个族的全空间，也可以不是）。

定义 4。 我们定义如下链复形：

$$\ldots \longrightarrow C_{p+1}(X;G) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(X;G) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(X;G) \longrightarrow \ldots \ ,$$

其中 $C_p(X;G) := C_p(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} G$, $C^p(X)$ 是 *P. Carrillo Rouse* 和 *J.M Lescure* 的 p–链*[CRL18，式 (4.3)]*。

我们以相同方式定义复形微分，并通过与 G 张量化来获得系数： $\partial\Big(\gamma f \otimes \varepsilon\Big) := \sum_{\gamma \in G,\ g \in \mathcal{F}_{p-1}(X)\ f \subset g} \gamma g \otimes \left(e_{i(g.f)} \lrcorner \varepsilon\right)$。

同调群记作 $H_p^{cn}(X;\ G)$。

并定义周期化同调： $H_i^{pcn}(X;\ G) := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} H_{2p+i}^{cn}(X;\ G)$， $i = 0,\ 1$。

正如 [CRL18, eq (4.9)], 中已经提到的，存在一个自然滤过 $X = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_d = X$, 其中 $X_i = \{x \in X : codim(x) \leqslant i\}$。再次，这使我们能够定义相对复形：

$$0 \longrightarrow C_\bullet(X_m, X_q; G) \longrightarrow C_\bullet(X_l, X_q; G) \longrightarrow C_\bullet(X_l, X_m; G) \longrightarrow 0\ ,\ -1 \leqslant q \leqslant m \leqslant l \leqslant d,$$

采用约定 $X_{-1} = \emptyset$。这将导出一个同调长正合列。将偶数项（在 H_0^{pcn} 中）和奇数项（在 H_1^{pcn} 中）放在一起，我们得到一个六项正合列：

$$\begin{array}{ccccc} H_1^{pcn}(X_m, X_q; G) & \longrightarrow & H_1^{pcn}(X_l, X_q; G) & \longrightarrow & H_1^{pcn}(X_l, X_m; G) \\ \uparrow{\scriptstyle \partial_0} & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_1} \\ H_0^{pcn}(X_l, X_m; G) & \longleftarrow & H_0^{pcn}(X_l, X_q; G) & \longleftarrow & H_0^{pcn}(X_m, X_q; G). \end{array}$$

在适当条件下，这个序列实际上更容易计算：

命题 3.6. 若 X 连通且 $\partial X \neq \emptyset$, 由 $0 \longrightarrow C_\bullet(X_0;\ G) \rightarrow C_\bullet(X;\ G) \rightarrow C_\bullet(X,\ X_0;\ G) \rightarrow 0$ 导出的短正合列满足：

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0} & H_1^{pcn}(X;G) & \hookrightarrow & H_1^{pcn}(X, X_0; G) \\ {\scriptstyle 0}\uparrow\uparrow & & & & \downarrow\downarrow{\scriptstyle \partial_1} \\ H_0^{pcn}(X, X_0; G) & \xleftarrow{\cong} & H_0^{pcn}(X;G) & \xleftarrow{0} & H_0^{pcn}(X_0;G) \end{array}$$

证明。 首先，我们有 $H_1^{pcn}(X_0;G) = 0$。

然后有 g $H_0^{pcn}(X_0;G) = H_0^{cn}(X_0;\ G)$，直接计算可得满射性

of ∂_1： $H_1^{pcn}(X,\ X_0;\ G) \to H_0^{cn}(X_0;\ G)$（因为 X 是具有非空边界的连通空间).

此外，注意到 $\forall k \geqslant 1, H_k^{cn}(X_0;\ G) = 0$，长正合列告诉我们 $\forall k \geqslant 2, H_k^{cn}(X; G) \cong H_k^{cn}(X, X_0; G)$。对于 $k = 0$，由于 ∂_1 的满射性以及 $H_1^{cn}(X_0; G)$ 的消失，这一点也成立。

其余映射的零性可由此推出。 □

特别地，当 X 连通且 $\partial X \neq \emptyset$ 时，我们有短正合列：

$$0 \longrightarrow H_1^{pcn}(X; G) \longrightarrow H_1^{pcn}(X, X_0; G) \longrightarrow H_0^{pcn}(X_0; G) \longrightarrow 0\ .$$

另一个余法向同调六项正合列将在后文派上用场：

定理 3.7. 若 X 是余维为 $d = 2$ 的嵌入角流形，则短正合列

$$0 \longrightarrow C_\bullet(X_1, X_0; G) \longrightarrow C_\bullet(X, X_0; G) \longrightarrow C_\bullet(X, X_1; G) \longrightarrow 0\ ,$$

诱导出一个六项正合列：

$$\begin{array}{ccccc} H_1^{pcn}(X_1, X_0; G) & \longrightarrow & H_1^{pcn}(X, X_0; G) & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ H_0^{pcn}(X, X_1; G) & \longleftarrow & H_0^{pcn}(X, X_0; G) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

证明。该 $H_1^{pcn}(X,\ X_1; G)$ 和 $H_0^{pcn}(X_1,\ X_0;\ G)$ 的消失可以通过直接计算得出。□

现在，我们通过这一同调得到了更多计算数据，尤其是在低余维情形下；我们仍需将其与 K 理论联系起来。

备注 8。我们的计算（见 *(5)*）和余法向同调都定义了相邻两个面的相对符号。由于元组经过排序，两者一致，因此有： $\sigma(f, g) = (-1)^{i(g\cdot f)}$。

利用这一最后的事实，我们可以引入配对：

Theorem 3.8. *$K^* - H^{pcn}$ pairing*
For $k \in \{p-1, p\}$, the maps $\begin{array}{ccc} K^*(B)^{\#\mathcal{F}_k(X)} & \longrightarrow & C_k(X; K^*(B)) \\ b_f & \mapsto & b_f f \otimes e_{I_f}, \end{array}$ *where $|I| = p, f \subset H_{I_f}, * = 0, 1$, makes the diagram:*

$$\begin{array}{ccc} K^*(B)^{\#\mathcal{F}_p(X)} & \xrightarrow{\delta^*} & K^*(B)^{\#\mathcal{F}_{p-1}(X)} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ C_p(X; K^*(B)) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1}(X; K^*(B)) \end{array}$$

交换的。特别地，当 p 和 i 具有相同的奇偶性时， $H_i^{pcn}(X_p, X_{p-1}; G)$ 与 $C_p(X; G)$ 同构，因此我们有：

- *If* $i \equiv p \mod 2$,
$$\begin{array}{ccc} K_i(A_p/A_{p-1}) & \longrightarrow & K_{1-i}(A_{p-1}/A_{p-2}) \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ H_i^{pcn}(X_p, X_{p-1}; K^0(B)) & \longrightarrow & H_{1-i}^{pcn}(X_{p-1}, X_{p-2}; K^0(B)) \end{array}$$
- *If* $i \not\equiv p \mod 2$,
$$\begin{array}{ccc} K_i(A_p/A_{p-1}) & \longrightarrow & K_{1-i}(A_{p-1}/A_{p-2}) \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ H_{1-i}^{pcn}(X_p, X_{p-1}; K^1(B)) & \longrightarrow & H_i^{pcn}(X_{p-1}, X_{p-2}; K^1(B)) \end{array}$$

4. Obstruction computation for embedded families in low codimension

Bef在进行计算之前，我们先给出本文将使用的与指标相关的记号。

我们的所有指标映射都将通过切群胚实现。

若 X 表示光滑基底 B 上一族带嵌入角的流形，且整体嵌入，并以 $d:=codim(X)$ 表示其关联的指标映射:

$$Ind^X := \Big(K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}^{tan}(X)) \xrightarrow{e_1} K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X))\Big).$$

关联的 l 倍悬挂指标映射记为:

$$Ind_l^X := \Big(K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}^{tan}(X)\times\mathbb{R}^{+*l}) \xrightarrow{e_1} K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)\times\mathbb{R}^{+*l})\Big).$$

特别地，当 X 光滑时， Ind^X 是阿蒂亚-辛格定理中计算的经典族指标（例如参见 [CR23], 第14页）。

利用滤过 $\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X) = \bigcup_{k=1}^{d}\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)_{|\mathcal{F}_{\leqslant k}}$ 以及 $\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)_{|\mathcal{F}_{\leqslant k}} := \coprod_{\sim}^{k}\underset{f\in\mathcal{F}_i}{\underset{B}{\sqcup}}(f\underset{B}{\times} f\times\mathbb{R}^{+*i})_{i=0}$，我们在切群胚上给出另一种构造: $\Gamma_b^{tan}{}_{,\mathfrak{f}}(X) = \Gamma_b^{tan}{}_{,\mathfrak{f}}(X)_{|X\times[0,1[}\sqcup\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)$，记为:

$$\Gamma_{b,\mathfrak{f}}^{fred(k)}(X) := \Gamma_{b,\mathfrak{f}}^{tan}(X)_{|X\times[0,1[}\sqcup\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)_{|\mathcal{F}_{\leqslant k}}.$$

$C^*(\Gamma_b^{fred(k)}{}_{,\mathfrak{f}}(X))$ 的元素称为 非交换符号。实际上， $\Gamma_b^{fred(0)}{}_{,\mathfrak{f}}(X)$ 将简记为 $\Gamma_b^{fred}{}_{,\mathfrak{f}}(X)$，并且我们注意到 $\Gamma_b^{fred(d)}{}_{,\mathfrak{f}}(X) = \Gamma_b^{tan}{}_{,\mathfrak{f}}(X)$。

From $\Gamma_b^{fred(k)}{}_{,\mathfrak{f}}(X)$，在 $X\times\{1\}$ 中求值可得到一个非交换指标，记为:

$$Ind_{nc(k)}^X := \Big(K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}^{fred(k)}(X)) \xrightarrow{e_1} K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)_{|\mathcal{F}_{\leqslant k}}) = K_0(A_k)\Big)$$

同样，当 $k=0$ 时，指标映射将简记为 Ind_{nc}^X。。如注释 2 所述，对于带边流形（分别为带边界的族）的情形，此映射可以承载 Fredholm 指标（分别为族指标）。

这些非交换指标也可以悬挂，悬挂指标映射将记为:

$$Ind_{l\ nc(k)}^X := \Big(K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}^{fred(k)}(X)\times\mathbb{R}^{+*l}) \xrightarrow{e_1} K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)_{|\mathcal{F}_{\leqslant k}}\times\mathbb{R}^{+*l}) = K_0(A_k\otimes C_0(\mathbb{R}^{+*l}))\Big).$$

根据注 1，在本节中，我们将考虑与椭圆算子相关联的符号 $\sigma_T \in C^*(\Gamma_b^{tan}, \mathfrak{f}(X))$ T使得 $Ind_\partial([\sigma(T)]_1) = r_\partial \circ Ind^X([\sigma_T]_0)$。

4.1. 全局嵌入的余维 1 族的边界指标。对于该节， $X \to B$ 是一个带嵌入角流形的余维 1 族（X 自身带有嵌入角），且 X 是连通的。

典范滤过化简为 $\emptyset = A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 = C^*(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)$。

根据注记 7， $0 \to A_0 \to A_1 \to A_1/A_0 \to 0$的 K 理论中的连接映射是满射。因此，其六项正合列给出零映射和单射，从而得到以下两个短正合列：

$0 \longrightarrow K_*(A_1) \to K_*(A_1/A_0) \to K_{1-*}(A_0) \to 0$, $* = 0,1.$

特别地，借助 $* = 0$，我们看到 r_∂ 是单射。
我们将其与余法向同调进行比较。

我们利用 $K_* - H_*^{pcn}$ 配对（定理 3.8）与 $H_1^{pcn}(X,\ X_0;\ K^{1-*}(B)) \xrightarrow{\partial} H_0^{pcn}(X_0;\ K^{1-*}(B))$（将其与 $Ker\,\partial = H_1^{cn}(X;\ K^{1-*}(B)) = H_1^{pcn}(X;\ K^{1-*}(B))$ 结合起来）得到一个短正合列。

我们确实得到一个余法向同调短正合列，其中间项和右项分别与 K 理论中的对应项配对：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_*(A_1) & \xrightarrow{r_\partial} & K_*(A_1/A_0) & \longrightarrow & K_{1-*}(A_0) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_1^{pcn}(X;K^{1-*}(B)) & \longrightarrow & H_1^{pcn}(X,X_0;K^{1-*}(B)) & \longrightarrow & H_0^{pcn}(X_0;K^{1-*}(B)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

在这种情况下，我们可以利用五引理补全左侧的图表。该映射自动成为同构（实际上，它是中间同构的限制）。最后，这里的所有内容都可以计算：

Theo注 4.1。对于 X 一个带嵌入角的流形余维 *1* 族，我们有 *:*

- $K_*(A_0) \cong H_0^{pcn}(X_0; K^*(B)) \cong K^*(A_0)_{\#\mathcal{F}_0(X)}$
- $K_*(A_1/A_0) \cong H_1^{pcn}(X, X_0; K^{1-*}(B)) \cong K^{1-*}(B)_{\#\mathcal{F}_1(X)}$
- $K_*(A_1) \cong H_1^{pcn}(X; K^{1-*}(B)) \cong K^{1-*}(B)_{\#\mathcal{F}_1(X)-1}$.

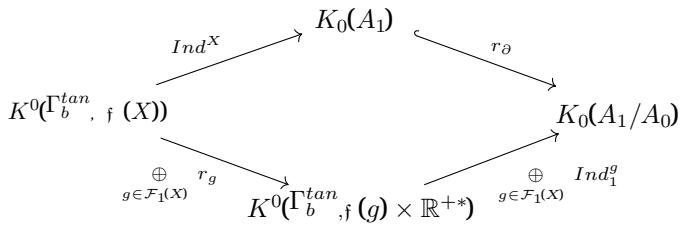
证明。 $K_*(A_1) \cong H_1^{pcn}(X; K^{1-*}(B)) \cong H_1^{cn}(X;\ K^{1-*}(B)) = Ker\partial_1$，其中 ∂_1 计算为 $(b_1, \ldots, b_N) \in K^{1-*}(B)^{\#\mathcal{F}_1}(x) \mapsto b_1 + \cdots + b_N \in K^{1-*}(B)$。于是 $Ker\partial_1 \cong <(0, \ldots, 0, b, -b, 0, \ldots, 0) >_{b \in K^{1-*}(B)} \cong K^{1-*}(B)^{\#\mathcal{F}_1(X)-1}$。 □

下一步是刻画 $r_\partial \circ e_1$的消失。

$$\begin{array}{ccc} K_0(A_1) & \xrightarrow{r_\partial} & K_0(A_1/A_0) \\ {\scriptstyle Ind^X}\uparrow & & \\ K^0(\Gamma^{tan}_{b,\mathfrak{f}}(X)) & & \end{array}$$

映射 e_1 和 r_∂ 仅仅是限制。现在，我们换一种方式来表达它们的复合。我们不再先将切群胚限制到其切片 $\{1\}$，再限制到其边界，而是先将切群胚限制到一个与边界相关联的子切群胚，然后再将其限制到相关的 $\{1\}$ 切片。这个子切群胚将可识别为一个光滑流形族的切群胚，从而得到可由 Atiyah Singer 计算的族指标。

这些限制之间的相互作用如下：



我们得到等式：$Ind_\partial([\sigma_T]_0) = r_\partial(Ind^X([\sigma_T]_0)) = \left(Ind_1^g([\sigma_{T|g}]_0)\right)_{g\in\mathcal{F}_1(X)}$。注意，映射 Ind_1^g 可计算为族指标的悬挂。于是我们得到以下结果：

定理 4.2（余维 1 时边界指标的消失）。对于 $X \longrightarrow B$ 一个带嵌入角流形的余维 *1* 族，$[\sigma_T]_0 \in K^0(\Gamma^{tan}_{b,\mathfrak{f}}(X))$，以下条件等价：$Ind_\partial([\sigma_T]_0) = 0$ 当且仅当 $\forall g \in \mathcal{F}_1(X)\ Ind_1^g([\sigma_{T|g}]_0) = 0$ 属于 $K^1(B)$。

我们可以注意到以下推论：

定理 4.3。余维 *1* 时边界指标的消失：情形 $K^1(B) = 0$当 $K^1(B) = 0$ 时，映射 Ind_∂ 恒为零。

4.2. 整体嵌入的余维 2 族的边界指标。本节刻画了整体带有嵌入角的余维 2 族的边界指标消失。现在 $\pi : X \longrightarrow B$ 表示一个带嵌入角的流形的余维 2 族（X 自身也带有嵌入角），并假设 X 是连通的。

。 。再次，其 Monthubert 群胚 $\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X) = X \underset{B}{\times} X \bigsqcup\limits_{\sim} \bigsqcup\limits_{g\in\mathcal{F}_1} (g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{*+}) \bigsqcup\limits_{\sim} \bigsqcup\limits_{g\in\mathcal{F}_2} (g \underset{B}{\times} g \times \mathbb{R}^{*+2})$ 将赋予其完整的、假定可和的 C^*- 代数的显然滤过：$\emptyset = A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 = C^*(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X))$。

首先我们回顾一下，根据短正合列 $0 \to \frac{A_1}{A_0} \to \frac{A_2}{A_0} \to \frac{A_2}{A_1} \to 0$，我们可以构造一个包含 6 项的短正合列

$$\begin{array}{ccccc} K_1(A_1/A_0) & \longrightarrow & K_1(A_2/A_0) & \longrightarrow & K_1(A_2/A_1) \\ {\scriptstyle d_{2,0}}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle d_{2,1}} \\ K_0(A_2/A_1) & \longleftarrow & K_0(A_2/A_0) & \longleftarrow & K_0(A_1/A_0) \end{array}$$

其中，态射 $d_{2,*}, * = 0,1$ 可用余法向同调显式计算。由此，我们可以强制得到短正合性:

$$0 \longrightarrow \frac{K_0(A_1/A_0)}{Im\, d_{2,1}} \longrightarrow K_0(A_2/A_0) \longrightarrow Ker\, d_{2,0} \longrightarrow 0. \tag{6}$$

利用余法向同调中的六项正合列（定理 3.7）和 $K_* - H_*^{pcn}$配对（定理 3.8），可以计算左右两项，并将对应关系扩展如下:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Ker\, d_{2,*} & \longrightarrow & K_*(A_2/A_1) & \longrightarrow & K_{1-*}(A_1/A_0) & \longrightarrow & \frac{K_{1-*}(A_1/A_0)}{Im\, d_{2,*}} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow\cong & & \cong\uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & H_0^{pcn}(X, X_0; K^*(B)) & \longrightarrow & H_0^{pcn}(X, X_1; K^*(B)) & \longrightarrow & H_1^{pcn}(X_1, X_0; K^*(B)) & \longrightarrow & H_1^{pcn}(X, X_0; K^*(B)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

应用五引理可得两个同构，它们只是我们已知同构的限制和商映射。将它们应用于序列 (6)，便得到第一个障碍结果:

定理 4.4 (余维 2 障碍空间估计)。 障碍空间 $K_0(A_2/A_0) = K^0(G_F)$ 包含于以下短正合列中:

$$0 \longrightarrow H_1^{pcn}(X, X_0; K^1(B)) \longrightarrow K_0(A_2/A_0) \longrightarrow H_0^{pcn}(X, X_0; K^0(B)) \longrightarrow 0.$$

为了表述我们要寻找的障碍，我们将用较小的指标和余法向同调来刻画边界指标 $r_\partial \circ Ind^X$ 的消失: $K^0(\Gamma_b^{tan}, \mathfrak{f}(X)) \longrightarrow K_0(A_2/A_0)$。

为了刻画 Ind_∂ 的消失，我们首先注意到限制态射 $C^*(A_2/A_0) \longrightarrow C^*(A_2/A_1)$ 给出了交换三角形:

$$\begin{array}{ccc} K_0(A_2) & \xrightarrow{r_\partial} & K_0(A_2/A_0) \\ & \searrow^{r_2} & \downarrow \\ & & K_0(A_2/A_1) \end{array} \tag{7}$$

备注 9. 映射 $r_\partial : K_0(A_2) \hookrightarrow K_0(A_2/A_0)$ 是单射，因为在短正合列态射中:

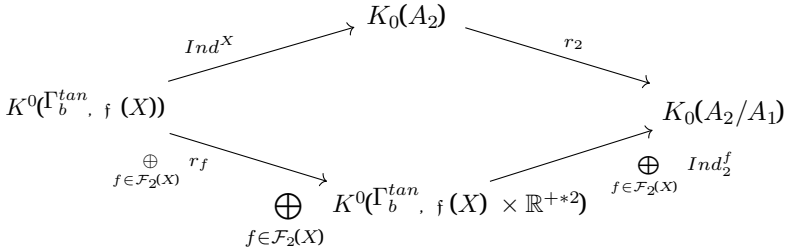
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_2/A_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_1/A_0 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

根据注记 7，我们知道下行具有满射连接映射。因此，上行也如此。由上行对应的六项正合列即可得到单射性。

由于 X 的余维为 2，余维 2 面的闭包互不相交，因此可以逐面计算 r_2；此外，我们还能明确得到 $K_0(A_2/A_1) \cong K^0(B)^{\mathcal{F}_2(X)}$。由此得到以下引理：

引理 4.5. $r_2(Ind^X([\sigma_T]_0)) = \left(Ind_2^f([\sigma_{T|f}]_0)\right)_{f\in\mathcal{F}_2(X)}$。

证明。 该表达式来自以下图表的交换性：



□

借助 r_2，我们可以得到一个可计算指标。图表 (7) 告诉我们，$Ind_\partial([\sigma_T]_0) = r_\partial(Ind^X([\sigma_T]_0)) = 0$ 意味着 $r_2(Ind^X([\sigma_T]_0)) = 0$。为了考察其逆命题，我们来看看 $r_2(Ind^X([\sigma_T]_0))$ 的消失会带来什么。

开闭分解，见第 1 节中的 (1.2)，$\Gamma_b^{tan,\mathfrak{f}}(X) = \Gamma_b^{fred(1),\mathfrak{f}}(X) \sqcup \Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)_{|\mathcal{F}_2(X)}$ 与分解 $\Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X) = \Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)_{|\mathcal{F}_{\leqslant 1}(X)} \sqcup \Gamma_{b,\mathfrak{f}}(X)_{|\mathcal{F}_2(X)}$ 相容，在切片 $X \times \{1\}$ 上的求值给出了一个正合列之间的态射：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A_1) & \longrightarrow & K_0(A_2) & \xrightarrow{r_2} & K_0(A_2/A_1) \\ {\scriptstyle Ind^X_{nc(1)}}\uparrow & & {\scriptstyle Ind^X}\uparrow & & \| \\ K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}^{fred(1)}(X) & \longrightarrow & K^0(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}^{tan}(X)) & \longrightarrow & K_0(A_2/A_1) \end{array} .$$

由行的正合性可推出以下性质：

命题 4.6. 记 . 为零延拓映射 $\underline{C}^*(\Gamma_b^{fred(1),\mathfrak{f}}(X)) \longrightarrow C^*(\Gamma_b^{tan,\mathfrak{f}}(X))$：

$$r_2(Ind^X([\sigma_T]_0)) = 0 \Leftrightarrow \exists \phi \in C^*(\Gamma_{b,\mathfrak{f}}^{fred(1)}(X)) \text{ such that } \underline{\phi} = \sigma_T.$$

下文将这样的提升 ϕ 记为 $\overset{\circ}{\sigma_T}$。特别地 $\overset{\circ}{\sigma_T} = \sigma_T$。

r_2 的消失使我们得到一个到非交换符号 $\overset{\circ}{\sigma_T}$的提升，接下来要理解 $Ind^X([\overset{\circ}{\sigma_T}]_0)$ 的消失。这正是以下引理的目的：

引理 4.7。 令 $\phi \in C^*(\Gamma_b^{fred(1),\mathfrak{f}}(X))$ 为一个非交换符号。则：

$$r_\partial \circ Ind^X([\underline{\phi}]_0) = 0 \Leftrightarrow \left[r_1 \circ Ind^X_{nc(1)}([\phi]_0)\right]_{H_1^{pcn}(X,X_0;K^1(B))} = 0 \text{ (a cycle for that homology).}$$

证明。 由交换图可得：

$$\begin{array}{ccccc} K_1(A_2/A_1) & \xrightarrow[d_{2,1}]{} & K_0(A_1/A_0) & \longrightarrow & K_0(A_2/A_0) \\ & & \uparrow{\scriptstyle r_1} & & \uparrow{\scriptstyle r_\partial} \\ & & K_0(A_1) & \longrightarrow & K_0(A_2) \\ & & \uparrow{\scriptstyle Ind^X_{nc(1)}} & & \uparrow{\scriptstyle Ind^X} \\ & & K^0(\Gamma^{fred(1)}_{b,\mathfrak{f}}(X)) & \longrightarrow & K^0(\Gamma^{tan}_{b,\mathfrak{f}}(X)) \end{array}$$

（第一行是精确的）我们有如下等价关系：

$$r_\partial \circ Ind^X([\underline{\phi}]_0) = 0 \Leftrightarrow r_1 \circ Ind^X_{nc(1)}([\phi]_0) \in Im\, d_{2,1}$$

现在，为了刻画 $Im\, d_{2,\ 1}$ 我们考虑以下正合列态射：

$$\begin{array}{ccccc} C_2(X;K^1(B)) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X;K^1(B)) & \xrightarrow{[.]_{H_1^{pcn}}} & H_1^{pcn}(X,X_0;K^1(B)) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow \\ K_1(A_2/A_1) & \xrightarrow[d_{2,1}]{} & K_0(A_1/A_0) & \longrightarrow & K_0(A_2/A_0) \end{array}$$

左侧和中间的同构由 $K-H^{pcn}$ 配对（定理 3.8）得到，而单射则利用态射 $K_0(A_1/A_0) \longrightarrow K_0(A_2/A_0)$ 上的同构定理得到。

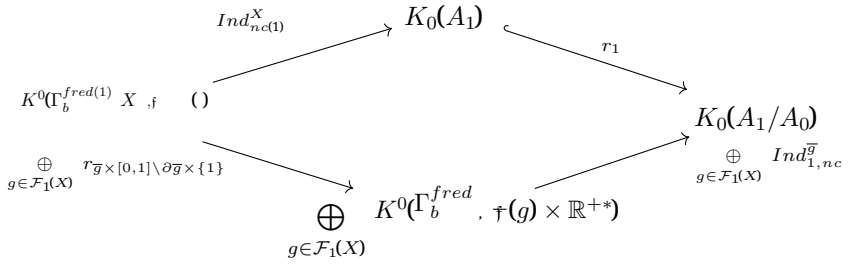
由此图表可知，通过配对的（典范）同构，有 $Im\, d_{2,\ 1} \cong Ker\,[.]_{H_1^{pcn}}$。□

于是， $r_1 \circ Ind^X_{nc(1)}([\phi]_0)$ 的余法向同调为提升符号 ϕ 的边界指标消失提供了一个组合条件。为了更明确地表述这个条件，我们使用余维 1 结果。

关键在于注意到，对于每个 $g \in \mathcal{F}_1(X)$，闭包 g 是一个带嵌入角的余维 1 流形族。还要注意，$\Gamma^{fred(1)}_{b,\ \mathfrak{f}}(X)$ 包含了这些 g 的悬挂 Fredholm 群胚。在此背景下逐面进行计算可得：

命题 4.8。 令 $\phi \in C^*(\Gamma^{fred(1)}_{b,\ \mathfrak{f}})$ 为一个非交换符号。
$Then\ r_1 \circ Ind^X_{nc(1)}([\phi]_0) = \left(Ind^{\overline{g}}_{1,nc(1)}([\phi_{|\overline{g}}]_0)\right)_{g\in\mathcal{F}_1(X)}$.

证明。 这个计算源于以下关系的交换性：



□

现在，我们可以将这些要素汇总起来，得出主要结果：

定理 4.9 (余维 2 中边界指标的消失)。 设 $[\sigma_T]_0 \in K^0(\Gamma_{b^{tan},\mathfrak{f}}^{}(X))$。

$$Ind_\partial([\sigma_T]_0) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall f \in \mathcal{F}_2(X), Ind_2^f([\sigma_{T|f}]_0) = 0 \\ \textit{and the induced } \mathcal{F}_2(X)\textit{-relative non commutative symbol } \overset{\circ}{\sigma_T} \textit{ is such that} \\ \left(Ind_{1,nc}^{\overline{g}}([\overset{\circ}{\sigma_{T|\overline{g}}}]_0)\right)_{g\in\mathcal{F}_1(X)} \textit{ vanishes in } H_1^{pcn}(X, X_0; K^1(B)). \end{array} \right.$$

我们可以注意到，不同余维的情况表现不同。对于闭包互不相交的余维 2 面，我们只要求其悬挂关联指标消失。余维 1 面的闭包则可能相交，因此它们之间可能发生相消现象。

组合性质通过系数取自 $K^1(B)$ 的同调群来表达。在许多情况下，这个群为零（例如单成员族：$B = \{*\}$；在这种情况下，我们重新得到 [CRL18] 和 [CRL25]的结果）。

定理 4.10. ind_∂ 的消失刻画——情形 $K^1(B) = 0$

$$K_0(A_2/A_0) \cong H_0^{pcn}(X, X_0; K^0(B)) \textit{ and } Ind_\partial([\sigma(T)]_0) = 0 \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{F}_2(X),\, Ind_2^f([\sigma_{T|f}]_0) = 0$$

5. Appendix

命题 5.1. 设 F： $C_0(\mathbb{R}^2) \to C_0(\mathbb{R}^2)$ 为翻转自同构，其定义为 $F(f)(x, y) = f(y, x)$。则在同构 $K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) \cong \mathbb{Z}$, $K_0(F)$ 下，它与 $-Id_{\mathbb{Z}}$ 相对应。

证明。 翻转自同构 F 是对合，因此 $K_0(F)$ 也是对合。通过同构 $K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) \cong \mathbb{Z}$，它将给出 $\mathbb{Z}$ 的一个对合，即 $\pm Id_{\mathbb{Z}}$。于是 $K_0(F) = \pm Id_{K_0(C_0(\mathbb{R}^2))}$。

。令 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 为闭单位圆盘。该同构 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{D}$ 诱导一个 C^*-代数同构

。 。借此，态射 F 可写为 $C_0(\mathbb{D}) \to C_0(\mathbb{D})\ f \mapsto if$。在整个单位圆盘上使用该态射 $\mathbb{D}$，可得到一个短正合列态射：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_0(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & C_0(\mathbb{D}) & \longrightarrow & C(S^1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_0(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & C_0(\mathbb{D}) & \longrightarrow & C(S^1) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

□

其中 $G(g) = i\overline{g}$。

利用连接映射的自然性，只需知道 $K_1(G)$： $K_1(C(S^1)) \to K_1(C(S^1))$ 对应于 $-Id_{K_1(C(S^1))}$ 即可得出结论。

利用 $K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$，并且 G 也是对合的，再次得到 $K_1(G) = \pm Id_{K_1(C(S^1))}$。令$g \in C(S^1)$为由 $g(z) = z$ 定义的函数，其类在 $K_1(C(S^1))$ 中不消失。

我们有：$[g]_1 + [g]_{\overline{1}} = [g \oplus g]_{\overline{1}} \underset{Wh.\,lem.}{=} [gg \oplus 1]_1 = [1 \oplus 1]_1 = 0_{K_1(C(S^1))}$，然后是 $\overline{\ }[g]_1 = -[g]_1$。The

常数函　　数等于 i与常数 1 函数同伦，因此我们也有 $[i]_1 = [1]_1 = 0$　　.

最后 $K_1(G)([g]_1) = [ig]_1 = [i]_1 + [g]_1 = -[g]_1$。那么 $K_1(G)$ 不可能等于恒等映射，由此得出结论。

References

[AB65] MF Atiyah 和 Bott。“带边界流形的指标定理”。载于：阿蒂亚-辛格指标定理研讨班附录 *I*，《数学研究纪事》。第 57 卷。1965 年，第 337–351 页。[BC90a] Jean-Michel Bismut 和 Jeff Cheeger。“带边界流形的族指标、超联络与锥。I. 带边界流形族与 Dirac 算子”。载于：《泛函分析杂志》89.2（1990 年），第 313–363 页。[BC90b] Jean-Michel Bismut 和 Jeff Cheeger。“带边界流形的族指标、超联络与锥。II. 陈特征”。载于：《泛函分析杂志》90.2（1990 年），第 306–354 页。[CR23] Paulo CarrilloRouse。“通过变形群胚研究指标理论”。保罗·萨巴蒂耶大学

r

(图卢兹 3)，2023。[CRL18] Paulo Carillo Rouse 和 Jean-Marie Lescure。《带角流形 Fredholm 边界条件的几何障碍》。英文。载于：《K理论年刊》3.3（2018），第 523–563 页。ISSN：2379-1683。DOI：10.2140/akt.2018.3.523。[CRL25] Paulo Carrillo Rouse 和 Jean-Marie Lescure。低余维带角流形上的 Fredholm 异常与余法角循环。预印本，arXiv:2501.05071[math.KT]（2025）。2025。URL：https://arxiv.org/abs/2501.05071。[CRLM13] Paulo Carrillo Rouse、Jean-Marie Lescure 和 Bertrand Monthubert。带边界流形上阿蒂亚-帕托迪-辛格指标的上同调公式。2013。arXiv：1207.3514 [math.OA]。URL：https://arxiv.org/abs/1207.3514。[CRLV21] Paulo Carrillo Rouse、Jean-Marie Lescure 和 Mario Vel´asquez。《带角流形上的 Fredholm 边界条件 I：整体角循环障碍》。载于：《K理论年刊》6.4（2021 年 12 月），607–628。ISSN：2379-1683。DOI：10.2140/akt. 2021.6.607。URL：http://dx.doi.org/10.2140/akt.2021.6.607。[DS20] Claire Debord 和 Georges Skandalis。《李群胚、伪微分演算与指标理论》。载于：《非交换几何进展：值 Alain Connes 70 岁生日之际》。施普林格，2020 年，第 245–289 页。[HR00] Nigel Higson 和 John Roe。《解析K同调》。英文。牛津数学专著。牛津：牛津大学出版社，2000 年。ISBN：0-19-851176-0。[MN11] Bertrand Monthubert 和 Victor Nistor。《带角流形的拓扑指标定理》。载于：《数学汇刊》148.2（2011 年 11 月），640–668。ISSN：1570- 5846。DOI：10 . 1112/s0010437x11005458。URL：http : / / dx . doi . org / 10 . 1112 / S0010437X11005458。[Mon05] Bertrand Monthubert。《非交换几何对奇异流形指标理论的贡献》。指导研究资格论文，保罗·萨巴蒂耶大学，2005 年 12 月 2 日答辩。2005 年。URL：https://www.math.univ-toulouse.fr/~monthube/articles/habilitation.pdf。[MP97] Richard B Melrose 和 Paolo Piazza。《带边界奇数维流形上狄拉克算子族的指标定理》。载于：《微分几何杂志》46.2（1997），第 287–334 页。

[NSS08] Vladimir Nazaikinskii、Anton Savin 和 Boris Sternin。《带角流形上的椭圆理论：II. 同伦分类与K-同调》。载于：《C*-代数与椭圆理论 II》。施普林格，2008 年，第 207–226 页。[NSS10] Vladimir Evgen'evich Nazaikinskii、A Yu Savin 和 B Yu Sternin。《分层流形上的 Atiyah–Bott 指数》。载于：《数学科学杂志》170.2（2010），第 229–237 页。[NWX99] Victor Nistor、Alan Weinstein 和 Ping Xu。《微分群胚上的伪微分算子》。英文。载于：《太平洋数学杂志》189.1（1999），第 117–152 页。 ISSN：1945-5844。DOI：10.2140/pjm.1999.189.117。[Obs21] Lennart Obster。李群胚与李代数丛的爆破。预印本，arXiv:2110.12247[math.DG]（2021）。2021。 URL：https://arxiv.org/abs/2110.12247。[PW19] Markus J. Pflaum 和 Graeme Wilkin。等变控制数据与邻域变形收缩。2019 年。arXiv：1706.09539 [math.SG]。 URL：https://arxiv. org/abs/1706.09539。[SV22] Thomas Schick 和 Mario Velasquez。带角流形的余法向同调。2022 年。arXiv：2111.13601 [math.KT]。 URL：https://arxiv.org/abs/2111.13601。[Tro78] David J. A. Trotman。《Whitney 条件的拓扑学，诠释》。载于：Ast ´erisque 59.60（1978），第 233–248 页。[Tro79] David J. A. Trotman。《光滑分层中 Whitney 正则性的几何版本》。英文。载于：《法国高等师范学院科学年刊》12.4（1979），第 453–463 页。 URL：http://eudml.org/doc/82040。[Wil19] Dana P. Williams。《群胚 C*-代数工具箱》。载于：《数学调查与专著》（2019）。 URL：https://api.semanticscholar.org/CorpusID: 216570405。