arXiv:2601.19596v1 [math.FA] 27 Jan 2026

再生核在复合算子中的应用

PREETI KUMARI、P. MUTHUKUMAR 和 ANTTI RASILA

Abstract. 本文展示了再生核希尔伯特空间技巧在研究复合算子时的有效性。对于定义在单位圆盘上的加权 Hardy 空间，我们刻画了其伴随算子仍为复合算子的那些复合算子。借助再生核方法，我们对作用于再生核希尔伯特空间之间的有界加权复合算子进行了分类。我们还表明，再生核技巧能够使若干已知结果的证明更加简洁，凸显了再生核作为分析复合算子的统一结构工具所发挥的作用。

1. Introduction

设 $\mathcal{V}$ 是一个线性空间，其中包含定义在非空集合 X上的复值函数。对于集合 X 上的自映射 φ，复合算子 C_φ 定义为

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \text{ for all } f \in \mathcal{V}.$$

更一般地，对于集合 X 上的自映射 φ 以及定义在集合 X上的复值函数 ψ，加权复合算子$W_{\varphi,\ \psi}$ 定义为

$$W_{\varphi,\psi}(f) = \psi \cdot (f \circ \varphi), \text{ for all } f \in \mathcal{V}.$$

当权函数 ψ 恒等于 1 时，算子 $W_{\varphi,\psi}$ 简化为复合算子。当自映射 φ 是 X 上的恒等函数时，该算子化为乘法算子，记作 M_ψ。此时 $M_\psi(f) = \psi f$。

研究作用在一个或多个变量的全纯函数空间上的复合算子，已经相当成熟。研究人员积极探讨它们的基本特征，例如有界性、紧性和谱性质，涉及众多解析函数空间，如定义在各种区域上的 Hardy 空间、Bergman 空间和 Bloch 空间，例如单位球 $\mathbb{B}_n$ 或单位多圆盘$\mathbb{D}^n$ 中的 $\mathbb{C}^n$，参见 [3, 19, 22] 及其中的参考文献。

在 [7], Jafari 利用 Carleson 测度刻画了 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^n)$ 和加权 Bergman 空间 $A^2_\alpha(\mathbb{D}^n)$ 上复合算子的有界性。正如[3, 第 3 节5]所示，单位球情形也有类似的刻画。经典的 Littlewood 定理（见 [19, 第 16] 页）指出

日期：2026年1月28日。2020 数学学科分类号。主要分类号：47B33，46E22；次要分类号：30H10。关键词和短语。复合算子、再生核希尔伯特空间、Hardy 空间。

C_φ 对于单位圆盘的 Hardy空间 $H^2(\mathbb{D})$ 上的任意解析自映射 φ $\mathbb{D}$，都是一个有界线性算子。此外，

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Hardy 空间和 Bergman 空间是再生核希尔伯特空间（RKHS）的基本例子。以往的研究主要依赖这些空间的算子论和解析框架，而对 RKHS 框架关注较少。其再生核所提供的结构使得原本较为繁复的计算变得简便。例如， [10] 有人仅使用再生核技巧，给出了 $H^2(\mathbb{D})$ 上复合算子有界性的 Littlewood 定理的另一种证明。还得到了不等式

$$\|C_\varphi\| \leq \left\| \frac{\sqrt{1-|\varphi(0)|^2}}{1-\overline{\varphi(0)}\varphi} \right\|_\infty \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

此外，对于更广泛的一类自映射，所得估计比经典估计更精确。

本文采用再生核技巧，推导关于复合算子的新结果，并从更统一的视角重新证明一些已知定理。第 2 节中，我们研究由内函数诱导的经典 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 上的复合算子。在此情形下，复合算子 C_φ 的范数是明确已知的。我们证明，除非 $\varphi(0) = 0$，否则该范数不能由 $H^2(\mathbb{D})$中的任何函数取到；在这种情况下，复合算子是等距算子。我们还构造了一个函数序列 (f_n)，使得 $\|C_\varphi(f_n)\|$ 趋近于 $\|C_\varphi\|$。第 3 节中，我们证明，作用于加权 Hardy 空间 $H^2(\beta)$ 上的复合算子 C_φ 的伴随算子本身也是复合算子，当且仅当 φ 是固定原点的仿射映射，即对某个 $|\delta| \leq 1$，有 $\varphi(z) = \delta z$ 。第 4 节中，我们研究作用于再生核希尔伯特空间之间的加权复合算子，并根据再生核对有界加权复合算子进行分类。最后，第 5 节中，我们对多复变量中的复合算子的一些已知结果给出更简明的证明。

2. Composition operators induced by inner functions

回顾一下，Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 由定义在 $\mathbb{D}$ 上且系数平方可和的解析函数构成，即

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \|f\| := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

这是一个经典的再生核希尔伯特空间，其核函数为

$$\kappa(z,w) = \frac{1}{1-\overline{w}z}, \text{ for } z, w \in (\mathbb{D}).$$

对于 $p \in \mathbb{D}$，本文中我们始终用 α_p 表示交换 p 与 0 的特殊圆盘自同构。也就是说，

$$\alpha_p(z) := \frac{p-z}{1-\overline{p}z},\ z \in \mathbb{D}.$$

注意，对任意 $z \in \mathbb{D}$，我们都有恒等式

$$1-|\alpha_p(z)|^2 = \frac{(1-|p|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{p}z|^2}, \tag{2.1}$$

我们将频繁使用这个恒等式。

设 φ： $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是一个内函数，即 $|\varphi(e^{i\theta})| = 1$ 对几乎所有 $\theta \in [0, 2\pi)$ 成立。1968 年，Nordgren [12]计算了 C_φ 的算子范数，结果为

$$\|C_\varphi\| = \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}. \tag{2.2}$$

此外，若 $\varphi(0) = 0$，则 C_φ 是 $H^2(\mathbb{D})$ 上的等距算子，因此范数$\|C_\varphi\|$ 由 $H^2(\mathbb{D})$中的每个非零函数取到。对于 $\varphi(0) \neq 0$ 的情形，范数 $\|C_\varphi\|$ 是否能由 $H^2(\mathbb{D})$ 中的某个函数取到?

定理 2.1。 设 φ 是一个内函数，且 $\varphi(0) \neq 0$，并且 $f \in H^2(\mathbb{D})$。则

$$\|C_\varphi f\| = \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}\|f\|$$

当且仅当 仅当 $f \equiv 0$。也就是说， $\|C_\varphi\|$ 不会被 $H^2(\mathbb{D}$ 中的任何函数取到).

证明。 取 $p = \varphi(0)$。令 $\psi = \alpha_p \circ \varphi$，使得 ψ 是一个内函数，且$\psi(0) = 0$。因此， C_ψ 是 $H^2(\mathbb{D})$ 上的等距算子，并且

$$\|C_{\alpha_p} f\| = \|C_\psi(C_{\alpha_p} f)\| = \|C_\varphi f\|. \tag{2.3}$$

假设对于某个 $f \in H^2(\mathbb{D})$，可得

$$\|C_\varphi f\| = \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}\|f\|.$$

将 f 的径向极限函数仍记作 f，我们有

$$\|f \circ \alpha_p\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(\alpha_p(e^{i\theta}))|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

考虑变量替换 $e^{it} := \alpha_p(e^{i\theta})$。由于 α_p 是其自身的逆映射，我们得到 $e^{i\theta} = \alpha_p(e^{it})$。对其求导并稍作计算可得

$$d\theta = \frac{\alpha_p'(e^{it})e^{it}}{\alpha_p(e^{it})}dt = \frac{1-|p|^2}{|1-\overline{p}e^{it}|^2}dt.$$

因此，对于所有 $f \in H^2(\mathbb{D})$，我们有

$$\|f \circ \alpha_p\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \frac{1-|p|^2}{|1-\overline{p}e^{it}|^2} \frac{dt}{2\pi}.$$

鉴于方程（2.3），可得

$$\|f \circ \alpha_p\| = \|C_{\alpha_p} f\| = \|C_\varphi f\| = \sqrt{\frac{1+|p|}{1-|p|}} \|f\|.$$

等价地，

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \left(\frac{1+|p|}{1-|p|} - \frac{1-|p|^2}{|1-\overline{p}e^{it}|^2} \right) \frac{d\theta}{2\pi} = 0.$$

由于 $1-|p|^2 \neq 0$，我们得到

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \left(\frac{1}{(1-|p|)^2} - \frac{1}{|1-\overline{p}e^{it}|^2} \right) \frac{d\theta}{2\pi} = 0. \tag{2.4}$$

根据三角不等式，有 $|1-pe^{it}| \geq 1-|p|$ 因此，方程（2.4）中的被积函数非负。因此，

$$|f(e^{it})|^2 \left(\frac{1}{(1-|p|)^2} - \frac{1}{|1-\overline{p}e^{it}|^2} \right) = 0 \text{ a.e. } \partial\mathbb{D}.$$

但是，当且仅当 $t = \arg(p)$ 时，等式 $|1-pe^{it}| = 1-|p|$ 成立，其中 arg 表示复数的辐角。因此，在 $\partial\mathbb{D}$ 上几乎处处有 $|f(e^{it})|^2 = 0$，从而 $\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = 0$。也就是说，$f \equiv 0$，这证明了所需的结论。这证明了一个方向，逆命题显然成立。□

众所周知，对于任意内函数 φ，我们有

$$\sqrt{\frac{1-|\varphi(0)|}{1+|\varphi(0)|}} \|f\| \leq \|C_\varphi f\|,$$

对所有 $f \in H^2(\mathbb{D})$，参见 [3, 定理 3。8]。

推论 2.2。 设 φ 是一个内函数，满足 $\varphi(0) \neq 0$ 且 $f \in H^2(\mathbb{D})$。那么，

$$\sqrt{\frac{1-|\varphi(0)|}{1+|\varphi(0)|}} \|f\| = \|C_\varphi f\|$$

当且仅当 $f \equiv 0$。

证明。 证明与定理 2.1的证明类似，只需使用不等式$|1-pe^{it}| \leq 1+|p|$ 代替 $|1-\overline{p}e^{it}| \geq 1-|p|$。 □

在文献中，当 φ 是内函数时，范数 $\|C_\varphi\|$ 的计算如下：

$$\|C_\varphi\| = \|C_{\alpha_{\varphi(0)}}\| = \|C^*_{\alpha_{\varphi(0)}}\| = \sqrt{\frac{1-|\varphi(0)|}{1+|\varphi(0)|}}.$$

现在，能否在 $H^2(\mathbb{D})$中得到一个显式序列 $\{f_n\}$，使得

$$\frac{\|C_\varphi(f)\|}{\|f\|} \to \|C_\varphi\| \ ?$$

为了解答这个问题，我们需要以下命题。

命题 2.3. 设 p 是 $\mathbb{D}$中的一个非零元素。那么

(i) $\dfrac{\|C_{\alpha_p}\kappa_w\|}{\|\kappa_w\|} \le \dfrac{\|C^*_{\alpha_p}\kappa_{-w}\|}{\|\kappa_{-w}\|}$ *for all* $w = -\frac{pr}{|p|}$, *where* $0 < r < 1$;

(ii) $\dfrac{\|C^*_{\alpha_p}\kappa_z\|}{\|\kappa_z\|} \le \dfrac{\|C_{\alpha_p}\kappa_{\alpha_p(z)}\|}{\|\kappa_{\alpha_p(z)}\|}$ *for all* $z \in \mathbb{D}$.

证明. (i) 设 $p = |p|e^{i\zeta}$。那么 $w = -e^{i\zeta}r$。考虑旋转映射 $\psi(z) = e^{-i\zeta}z$。那么，

$$\psi \circ \alpha_p \circ \psi^{-1}(z) = \frac{|p| - z}{1 - |p|z},$$

是特殊自同构 $\alpha_{|p|}$。由于 C_ψ 是 $H^2(\mathbb{D})$上的一个酉算子，我们注意到

$$\|C_{\alpha_{|p|}}(\kappa_{-r})\| = \|C_{\psi^{-1}}C_{\alpha_p}C_\psi(\kappa_{-r})\| = \|C_{\alpha_p}(\kappa_w)\|$$

类似地，$\|C^*_{\alpha_{|p|}}(\kappa_r)\| = \|C^*_{\alpha_p}(\kappa_{-w})\|$。因此，不失一般性，我们可以假设对于 $0 < r < 1$，$p > 0$ 且 $w = -r$。

为了证明这一结论，我们先计算 $\|C_{\alpha_p}\kappa_w\|$:

$$C_{\alpha_p}\kappa_w(z) = \frac{1}{1 - \overline{w}\alpha_p(z)} = \frac{1}{1 + r(\frac{p-z}{1-pz})} = \frac{1}{1+rp} \cdot \frac{1 - pz}{1 - \beta z},$$

其中 $\beta = \dfrac{p + r}{1 + pr} = \alpha_p(-r)$。定义 $F(z) = \dfrac{1 - pz}{1 - \beta z}$。于是

$$\|C_{\alpha_p}(\kappa_w)\|^2 = \frac{1}{(1+rp)^2}\|F\|^2. \tag{2.5}$$

Now,

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - 2p\cos\theta + p^2}{1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2} d\theta.$$

作变量替换 $z = e^{i\theta}$，可得

$$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{p(z-p)(z-\frac{1}{p})}{\beta(z-\beta)(z-\frac{1}{\beta})}\frac{dz}{z}.$$

由于 $\beta \in \mathbb{D}$，利用柯西留数定理可得

$$\begin{aligned}\|F\|^2 &= \frac{p}{\beta}\left(1 + \frac{(\beta - p)(\beta - \frac{1}{p})}{\beta^2 - 1}\right) \\ &= \frac{p(1+pr)}{p+r}\left(1 + \frac{r(1-p^2)}{p(1-r^2)}\right) = \frac{1 - p^2r^2}{1 - r^2}.\end{aligned}$$

将 $\|F\|$ 代入方程（2.5），可得

$$\frac{\|C_{\alpha_p}(\kappa_w)\|^2}{\|\kappa_w\|^2} = \frac{1-p^2r^2}{(1+rp)^2}.$$

接下来，利用方程（2.1，可得

$$\frac{\|C^*_{\alpha_p}(\kappa_{-w})\|^2}{\|\kappa_{-w}\|^2} = \frac{1-r^2}{1-|\alpha_p(r)|^2} = \frac{(1-pr)^2}{1-p^2}.$$

现在，对于任意 $p>0$ 和 $0<r<1$，我们可以看到

$$\frac{\|C_{\alpha_p}(\kappa_w)\|^2}{\|\kappa_w\|^2} \leq \frac{\|C^*_{\alpha_p}(\kappa_{-w})\|^2}{\|\kappa_{-w}\|^2}.$$

这是因为

$$\frac{1-p^2r^2}{(1+rp)^2} \leq \frac{(1-pr)^2}{1-p^2} \text{ if and only if } r \leq 1.$$

(ii) 所需结论由以下观察得出

$$\|C^*_{\alpha_p}\kappa_z\|^2 = \langle C^*_{\alpha_p}\kappa_z, C^*_{\alpha_p}\kappa_z\rangle = \langle C_{\alpha_p}C^*_{\alpha_p}\kappa_z, \kappa_z\rangle \leq \|C_{\alpha_p}C^*_{\alpha_p}\kappa_z\|\|\kappa_z\|.$$

因此，我们有

$$\frac{\|C^*_{\alpha_p}\kappa_z\|}{\|\kappa_z\|} \leq \frac{\|C_{\alpha_p}C^*_{\alpha_p}\kappa_z\|}{\|C^*_{\alpha_p}\kappa_z\|} = \frac{\|C_{\alpha_p}\kappa_{\alpha_p(z)}\|}{\|\kappa_{\alpha_p(z)}\|}.$$

□

注记 2.4. 设 φ是一个内函数，且 $\varphi(0) = p \neq 0$。设 (r_n) 是一个实数序列，使得 $0<r_n<1$ 且 $r_n \to 1$ 当 $n \to \infty$ 时。现在，定义 $w_n = -\frac{p}{|p|}r_n$。由方程 (2.1)，可得

$$\frac{1-|w_n|^2}{1-|\alpha_p(w_n)|^2} = \frac{|1-\overline{p}w_n|^2}{1-|p|^2} = \frac{(1+|p|r_n)^2}{1-|p|^2}.$$

现在，由于 $n \to \infty$,

$$\frac{\|C^*_{\alpha_p}(\kappa_{w_n})\|^2}{\|\kappa_{w_n}\|^2} = \frac{1-|w_n|^2}{1-|\alpha_p(w_n)|^2} \to \frac{(1+|p|)^2}{1-|p|^2} = \frac{1+|p|}{1-|p|}$$

类似地,

$$\frac{\|C^*_{\alpha_p}(\kappa_{-w_n})\|^2}{\|\kappa_{-w_n}\|^2} = \frac{1-|w_n|^2}{1-|\alpha_p(-w_n)|^2} \to \frac{(1-|p|)^2}{1-|p|^2} = \frac{1-|p|}{1+|p|}.$$

因此，由于 $n \to \infty$，根据夹逼定理和定理 2.3，我们得到

$$\frac{\|C_{\alpha_p}\kappa_{\alpha_p(w_n)}\|}{\|\kappa_{\alpha_p(w_n)}\|} \to \sqrt{\frac{1+|p|}{1-|p|}} = \|C_{\alpha_p}\|,$$

以及

$$\frac{\|C_{\alpha_p}(\kappa_{w_n})\|}{\|\kappa_{w_n}\|} \to \sqrt{\frac{1-|p|}{1+|p|}} = \frac{1}{\|C_{\alpha_p}\|}.$$

由于对于每个 $f \in H^2(\mathbb{D})$, $\|C_\varphi(f)\| = \|C_{\alpha_p}(f)\|$ ，我们得到了两列归一化核，使得它们在 C_φ 下的像的范数分别趋近于算子范数 $\|C_\varphi\|$ 的上界和下界。

尽管证明很简单，下一个结果是对 [3, 定理 94]的一个非常有趣的推广。

命题 2.5。设 ψ 是一个内函数，且令 $\varphi(z) = az\psi(z) + b$ 其中$b \in \mathbb{D}$ 且 $|a| + |b| \leq 1$。考虑作用在 $H^2(\mathbb{D})$上的复合算子 C_φ。则，

$$\|C_\varphi\|_{H^2(\mathbb{D})} = \sqrt{\frac{2}{1 + |a|^2 - |b|^2 + \sqrt{(1 - |a|^2 + |b|^2)^2 - 4|b|^2}}}.$$

证明。注意到 $\varphi = az\psi + b = (az + b) \circ z\psi$，因此，

$$C_\varphi = C_{z\psi} C_{az+b}.$$

现在，由 [3, 定理 3.8], 可立即得到， $C_{z\psi}$ 是 $H^2(\mathbb{D})$上的等距算子。因此，

$$\|C_\varphi\| = \sup_{\|f\|=1} \frac{\|C_\varphi(f)\|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} \frac{\|C_{z\psi}(C_{az+b}(f))\|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} \frac{\|C_{az+b}(f)\|}{\|f\|} = \|C_{az+b}\|.$$

现在，所需结果由 [3, 定理 9.4]立即推出。 □

本节最后给出如下推论，它直接由命题2.3 (第 ii 部分)得出。

注记2.6. 设 $H(\kappa)$ 和 $H(\rho)$ 分别是定义在非空集合 X 上、核分别为 κ 和 ρ 的再生核希尔伯特空间，且 φ: $X \to X$ 是一个函数。若复合算子 C_φ : $H(\kappa) \to H(\rho)$ 有界，则

$$\sup_{x \in X} \frac{\|C_\varphi^* \rho_x\|}{\|\rho_x\|} \leq \sup_{x \in X} \frac{\|C_\varphi \kappa_{\varphi(x)}\|}{\|\kappa_{\varphi(x)}\|} \leq \|C_\varphi\|.$$

3. Adjoint of the composition operators

复合算子的伴随算子很少是复合算子。Schwarz 在 [18, 定理 2.3] 中证明，对于定义在 $H^2(\mathbb{D})$ 上的复合算子，当且仅当

$$\varphi(z) = \alpha z, \quad |\alpha| \leq 1.$$

在下一个定理中，我们仅利用 $H^2(\mathbb{D})$ 的再生核性质，给出这一结果的一个更简单的证明。

定理 3.1. 设 φ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到自身的全纯映射， $C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ 是相应的复合算子。那么， C_φ^* 是复合算子，当且仅当 $\varphi(z) = \delta z$ 对某个 $|\delta| \leq 1$ 成立。

证明。假设 $C_\varphi^* = C_\psi$，其中 ψ 是 $\mathbb{D}$ 的某个全纯自映射。那么对每个z， $w \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} & C_{\varphi}^{*}(\kappa_w)(z) &=& C_{\psi}(\kappa_w)(z) \\ \iff & \frac{1}{1-\overline{\varphi(w)}z} &=& \frac{1}{1-\overline{w}\psi(z)} \\ \iff & \varphi(w)z &=& \overline{w}\psi(z) \end{aligned}$$

代入 $w=0$ 得到 $\varphi(0)=0$，类似地，代入 $z=0$ 得到 $\psi(0)=0$。因此，

$$\varphi = z\varphi_1 \text{ and } \psi = z\psi_1$$

对于某些定义在 $\mathbb{D}$ 上的全纯映射 φ_1 和 ψ_1。现在，

$$\overline{\varphi_1(w)} = \psi_1(z) \text{ for all } z, w \in \mathbb{D}\backslash\{0\}.$$

这迫使 $\varphi_1 \equiv \delta$，其中 δ 是某个常数。因此，$\varphi(z)=\delta z$，其中 $|\delta| \leq 1$ 为某个值。

反过来，设 $\varphi(z)=\delta z$，其中 $|\delta| \leq 1$ 为某个值。令 ψ 为定义在 $\mathbb{D}$ 上的全纯自映射，其定义为 $\psi(z)=\delta z$。那么，对每个 z，$w \in \mathbb{D}$ 我们有

$$C_{\varphi}^{*}(\kappa_w)(z) = \frac{1}{1-\overline{\varphi(w)}z} = \frac{1}{1-\overline{\delta}\overline{w}z} = \kappa_w(\overline{\delta}z) = C_{\psi}(\kappa_w)(z).$$

因此，$C_{\varphi}^{*} = C_{\psi}$。

□

回顾一下，对于 $\alpha > -1$，定义在 $\mathbb{D}$ 上的加权 Bergman 空间 A_{α}^{2} 是由所有满足下列条件的 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数组成的集合：

$$\|f\|_{A_{\alpha}^{2}}^{2} := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1-|z|^2)^{\alpha} dA(z) < \infty,$$

其中 A 是 $\mathbb{D}$上的归一化面积测度。空间 A_{α}^{2} 是再生核希尔伯特空间，其核定义为

$$\kappa_w(z) = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^{\alpha+2}}.$$

若 $f \in A_{\alpha}^{2}$ 和 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则

$$\|f\|_{A_{\alpha}^{2}}^{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} |a_n|^2.$$

定理 3.2。设 φ 是单位圆盘上的全纯自映射。那么，复合算子 $C_{\varphi}: A_{\alpha}^{2}(\mathbb{D}) \to A_{\alpha}^{2}(\mathbb{D})$ 的伴随算子本身也是一个复合算子，当且仅当对于某个 $|\delta| \leq 1$，有 $\varphi(z) = \delta z$。

证明。假设 $C_{\varphi}^{*} = C_{\psi}$，其中 ψ 是 $\mathbb{D}$ 的某个解析自映射。那么对每个 z，$w \in \mathbb{D}$，

$$\begin{aligned} & C_{\varphi}^{*}(\kappa_w)(z) &=& C_{\psi}(\kappa_w)(z) \\ \iff & \frac{1}{(1-\overline{\varphi(w)}z)^{\alpha+2}} &=& \frac{1}{(1-\overline{w}\psi(z))^{\alpha+2}} \\ \iff & (1-\overline{\varphi(w)}z)^{\alpha+2} &=& (1-\overline{w}\psi(z))^{\alpha+2} \end{aligned}$$

注意，$|1-\varphi(w)z| \geq 1-|\varphi(w)z| > 0$，类似地 $|1-w\psi(z)| > 0$。因此，复对数（Log）的主值分支存在，并且

$$e^{(\alpha+2)\mathrm{Log}(1-\overline{\varphi(w)}z)} = e^{(\alpha+2)\mathrm{Log}(1-\overline{w}\psi(z))} \text{ for all } z, w \in \mathbb{D}.$$

因此，对于每一对（z，w）$\in \mathbb{D}\times\mathbb{D}$，存在一个 n（z，w）$\in \mathbb{Z}$，使得

$$(\alpha+2)\mathrm{Log}(1-\overline{\varphi(w)}z) - (\alpha+2)\mathrm{Log}(1-\overline{w}\psi(z)) = 2\pi i n(z,w).$$

固定 $w \in \mathbb{D}$。那么，全纯映射

$$(\alpha+2)\mathrm{Log}(1-\overline{\varphi(w)}z) - (\alpha+2)\mathrm{Log}(1-\overline{w}\psi(z))$$

的取值属于 $\{2\pi i n : n \in \mathbb{Z}\}$。由开映射定理可知，对于每个固定的 $w \in \mathbb{D}$

$$n(z_1,w) = n(z_2,w) \text{ for all } z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

此外，令 $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，并定义 $\tilde{\varphi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$。于是，$\tilde{\varphi}$ 在 $\mathbb{D}$ 上是全纯的，且 $\varphi(w) = \overline{\tilde{\varphi}(\overline{w})}$。现在，固定 $z \in \mathbb{D}$。那么

$$(\alpha+2)\mathrm{Log}(1-\tilde{\varphi}(\overline{w})z) - (\alpha+2)\mathrm{Log}(1-\overline{w}\psi(z))$$

是从 w 到 $\{2\pi i n$ 的全纯映射，取值属于：$n \in \mathbb{Z}\}$。再次由开映射定理可知，对于每个固定的 $z \in \mathbb{D}$,

$$n(z,w_1) = n(z,w_2) \text{ for all } w_1, w_2 \in \mathbb{D}.$$

注意到 $n(0,0) = 0$。最后，对于所有 z，$w \in \mathbb{D}$ 我们得到 $\mathrm{Log}(1-\overline{\varphi(w)}z) = \mathrm{Log}(1-\overline{w}\psi(z))$，这与 $1-\varphi(w)z = 1-\overline{w\psi(z)}$ 相同。结论由上一条定理中的计算可得。□

注意到，上述考虑的两个空间，即 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 和加权 Bergman 空间 $A^2_\alpha(\mathbb{D})$，都是加权 Hardy 空间，其定义如下：设 $(\beta)_{n>0}$ 是一个满足 $\beta_0 = 1$、$\beta_n > 0$（对所有 n）且 $\liminf \beta_n^{1/n} \geq 1$ 的序列，则加权 Hardy 空间 $H^2(\beta)$ 定义为

$$H^2(\beta) = \left\{ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 \right\}$$

其中 $\langle f, g\rangle = \sum_n a_n \overline{b_n}\beta_j^2$。众所周知，$H^2(\beta)$ 是一个再生核希尔伯特空间，由定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数组成，其核为

$$\kappa_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{w}^n}{\beta_n^2} z^n$$

下一个定理表明，前两个定理的结论确实普遍适用于所有加权 Hardy 空间。

定理 3.3。设 $H^2(\beta)$ 是 $\mathbb{D}$ 上的加权 *Hardy* 空间，其权为 $\beta = (\beta_j)$。设 φ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的全纯自映射，且复合算子 $C_\varphi : H^2(\beta) \to H^2(\beta)$ 有界。那么，C_φ^* 本身是复合算子，当且仅当对于某个 $|\delta| \leq 1$，$\varphi(z) = \delta z$。

证明。 假设对于某个自映射 ψ of $\mathbb{D}$， $C_\varphi^* = C_\psi$。 那么对每个 $z, w \in \mathbb{D}$,

$$C_\varphi^*(\kappa_w)(z) = C_\psi(\kappa_w)(z). \tag{3.1}$$

特别地，当 $w = 0$ 时，我们得到 $\kappa_{\varphi(0)} = 1$，因此， $\varphi(0) = 0$。类似地，当$z = 0$ 时，我们得到 $\psi(0) = 0$。于是，对于定义在 $\mathbb{D}$ 上的某些全纯映射 φ_1 和 ψ_1 ，

$$\varphi = z\varphi_1 \text{ and } \psi = z\psi_1.$$

定义 $f(z, w) = \kappa_{\varphi(w)}(z) - \kappa_w(\psi(z))$。于是，利用对每个 $(z, w) \in \mathbb{D}^2$ 都有 $\kappa_w(z) = \kappa_z(w)$ 这一事实， f是定义在 $\mathbb{D}^2$ 上的解析函数。现在，将 κ, φ 和 ψ 的值代入，得到

$$f(z, w) = zw\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(wz)^{n-1}\overline{\varphi_1(\overline{w})}^n}{\beta_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(wz)^{n-1}\psi_1(z)^n}{\beta_n}\right).$$

由 (3.1)， $f \equiv 0$。因此,

$$g(z, w) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(wz)^{n-1}\overline{\varphi_1(\overline{w})}^n}{\beta_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(wz)^{n-1}\psi_1(z)^n}{\beta_n} = 0 \text{ for all } z \neq 0, w \neq 0.$$

由于 g 也是定义在 $\mathbb{D}^2$上的解析函数，根据多变量恒等定理（参见 [17,结论 1.212]），我们得出 $g \equiv 0$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(wz)^{n-1}\overline{\varphi_1(\overline{w})}^n}{\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(wz)^{n-1}\psi_1(z)^n}{\beta_n} \text{ for all } (z, w) \in \mathbb{D}^2.$$

特别是,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{w}z)^{n-1}\overline{\varphi_1(w)}^n}{\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{w}z)^{n-1}\psi_1(z)^n}{\beta_n} \text{ on } \mathbb{D}^2.$$

代入 $z = 0$ ， 可得

$$\frac{\overline{\varphi_1(w)}}{\beta_1} = \frac{\psi(0)}{\beta_1} \text{ for all } w \in \mathbb{D}.$$

因此，对于某个常数 δ，有 $\varphi_1 \equiv \delta$。于是，对于某个 $|\delta| \leq 1$，有 $\varphi(z) = \delta z$。

反过来，设 $\psi(z) = \delta z$。我们注意到，对每个 $w \in \mathbb{D}$,

$$C_\varphi^*(\kappa_w) = C_\psi(\kappa_w).$$

因此， $C_\varphi^* = C_\psi$ 在 $H^2(\beta)$ 上。 □

4. Weighted composition operators

在 [8], Jury 重新证明了作用于 $H^2(\mathbb{D})$ 上的复合算子的有界性，所用方法是再生核技巧。此后，在 [1], Chu 根据再生核给出了复合算子作用于双圆盘上的 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 时有界的若干充分条件（定义见第5 节）。与复合算子和乘法算子不同，加权复合算子在这方面受到的关注有限。尽管已有研究通过 Carleson 测度条件刻画了加权复合算子在若干函数空间之间作用时的有界性，参见 [2], [4], [5], [21] 及其中的参考文献，但 Carleson 测度往往难以显式计算;

即使对于内函数这类性质良好的函数也是如此。因此，我们希望找到其他刻画方式。本节将利用各自的再生核，刻画作用于再生核希尔伯特空间之间的有界加权复合算子。我们首先证明，在加权复合算子作用下，再生核希尔伯特空间的像本身也是一个再生核希尔伯特空间，其核经过了适当的修正。

在陈述主要定理之前，我们先回顾再生核的一些基本概念。关于再生核希尔伯特空间的更全面介绍，请参阅 [13]。

命题 4.1。 设 X 和 S 是非空集合。若 κ_1 和 κ_2 是 X上的核函数，则

(i) 和函数 $\kappa_1+\kappa_2$ 以及逐点乘积 $\kappa_1\cdot\kappa_2$ 都是X上的核函数。(ii) 若 $\varphi: S\to X$ 是一个函数，则 $\kappa_1(\varphi(\cdot)\ \varphi(\cdot))$ </style}是 S 上的核函数。(iii) 对于 X 上的任意复值映射 f，映射 $(x,y)\mapsto f(x)f(y)$ 是 X上的核函数。 ——

定理 4.2。 [13, 定理 3。11] 设 $H(\kappa)$ 是非空集合 X上的再生核希尔伯特空间，其再生核为 κ，并设 $f: X\to\mathbb{C}$ 是一个函数。那么， $f\in H(\kappa)$ </style}具有，当且仅当 (x,y) $-f(x)f(y)$ *</style* 是 X 上的核函数。

再生核希尔伯特空间上的复合算子可以通过考虑集合 $\{\kappa_x:\ x\in X\}$ 来刻画，如下述定理所示。

定理 4.3。 [3, 定理 1。4] 设 T 是一个将再生核希尔伯特空间映射到自身的有界线性算子，则 T 是复合算子，当且仅当集合 $\{\kappa_x:\ x\in X\}$ 在 T^* 下是不变的。此外，当 $T=C_\varphi$ 时， $T^*(\kappa_x)=\kappa_{\varphi(x)}$。

定理 *4.4*。设 κ 是集合 X 上的一个核， ψ 是集合 S 上的复值映射，且 φ*:* $S\to X$ 是一个映射。那么， $\rho(x,y):=\psi(x)\psi(y)\kappa(\varphi(x)\ \varphi(y))$ 是 S 上的一个核函数，相应的再生核希尔伯特空间 $H(\rho)$ 是通过加权复合算子 $W_{\varphi,\psi}$ 将 $H(\kappa)$ 映射所得的像。此外，对于每个 $g\in H(\rho)$，我们有 $\|g\|_{H(\rho)}=\min\{\|f\|_{H(\kappa)}: g=W_{\varphi,\psi}(f)\}$。

证明。由命题 4.1 可知， ρ 是定义在 S上的核函数。固定$f\in H(\kappa)$。于是由定理 4.2,

$$\|f\|^2_{H(\kappa)}\kappa(x,y)-f(x)\overline{f(y)}\geq 0.$$

因此，由命题 4.1的第 (iii) 部分可知,

$$\|f\|^2_{H(\kappa)}\kappa(\varphi(s),\varphi(t))-f(\varphi(s))\overline{f(\varphi(t))}\geq 0.$$

现在，将其与另一个核函数 $\psi(s)\psi(t)$ 相乘，可得

$$\|f\|^2_{H(\kappa)}\psi(s)\overline{\psi(t)}\kappa(\varphi(s),\varphi(t))-(\psi\cdot(f\circ\varphi))(s)\overline{(\psi\cdot(f\circ\varphi))(t)}\geq 0.$$

因此，对所有 $f\in H(\kappa)$,

$$\psi\cdot(f\circ\varphi)\in H(\rho)\text{ with }\|\psi\cdot(f\circ\varphi)\|_{H(\rho)}\leq\|f\|_{H(\kappa)}.$$

由此可得 $W_{\varphi,\psi}(H(\kappa))\subseteq H(\rho)$ 。

反过来，为证明另一方向的包含关系，考虑如下定义的线性映射 $T : V \subset H(\rho) \to H(\kappa)$:

$$T(\rho_t) = \overline{\psi(t)}\kappa_{\varphi(t)},$$

其中 $V = \text{span}\{\rho_t : t \in S\}$。对于任意函数 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_{t_i} \in V$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_{t_i}\right)\right\|^2_{H(\kappa)} &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\rho_{t_i}), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(\rho_{t_j}) \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \left\langle \overline{\psi(t_i)}\kappa_{\varphi(t_i)}, \overline{\psi(t_j)}\kappa_{\varphi(t_j)} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \psi(t_j)\overline{\psi(t_i)}\kappa(\varphi(t_j), \varphi(t_i)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \rho(t_j, t_i) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_{t_i} \right\|^2_{H(\rho)}.
\end{aligned}$$

因此， T 是 $H(\rho)$ 的稠密子空间 V 上的等距算子。由此， T 可扩张为 $H(\rho)$ 上的线性等距算子。我们仍用 T 表示此扩张。现在，$W_{\varphi,\psi} \circ T$: $H(\rho) \to H(\rho)$ 是线性的，并且对于每个 $t \in S$,

$$(W_{\varphi,\psi} \circ T)(\rho_t) = W_{\varphi,\psi}(\overline{\psi(t)}\kappa_{\varphi(t)}) = \overline{\psi(t)}\psi \cdot (\kappa_{\varphi(t)} \circ \varphi) = \rho_t.$$

因此，$W_{\varphi,\psi} \circ T$ 是 V 上的恒等映射，故也是 $H(\rho)$ 上的恒等映射。最后，对于每个$g \in H(\rho)$,

$$g = (W_{\varphi,\psi} \circ T)(g) = W_{\varphi,\psi}(T(g)) \in W_{\varphi,\psi}(H(\kappa)) \text{ with } \|g\|_{H(\rho)} = \|T(g)\|_{H(\kappa)}.$$

由此可得

$$H(\rho) = W_{\varphi,\psi}(H(\kappa)) \text{ and } \|g\|_{H(\rho)} = \min\{\|f\|_{H(\kappa)} : g = W_{\varphi,\psi}(f)\}.$$

□

上述定理得证后，只需证明算子 $W_{\varphi,\psi}$ 的值域包含于目标空间，即可得到其有界性，因为加权复合算子本质上是闭算子。下一个定理给出了一个再生核希尔伯特空间包含于另一个再生核希尔伯特空间的条件。

定理 4.5. [13, 定理 5.1] 设 X 是一个非空集合， κ_1、 κ_2 是定义在 X上的核。那么 $H(\kappa_1) \subseteq H(\kappa_2)$ 且 $\|f\|_{H(\kappa_2)} \leq c\|f\|_{H(\kappa_1)}$ 对所有 $f \in H(\kappa_1)$成立，当且仅当 $c^2\kappa_2 - \kappa_1$ 是定义在 X 上的核函数。

现在，利用前面两个定理的结果，我们可以如期通过相关核的性质给出有界加权复合算子的刻画。

定理 4.6。 设 $X_i, i = 1,2$ 是非空集合， $\varphi : X_2 \to X_1$ 和 $\psi : X_2 \to \mathbb{C}$ 是函数，且 κ_i 是定义在 $X_i, i = 1,2$ 上的核。那么 $W_{\varphi,\psi} : H(\kappa_1) \to H(\kappa_2)$，定义为 $W_{\varphi,\psi}(f) = \psi \cdot (f \circ \varphi)$，是一个有界算子，且 $\|W_{\varphi,\psi}\| \leq c$ 当且仅当

$$c^2\kappa_2(x, y) - \psi(x)\overline{\psi(y)}\kappa_1(\varphi(x), \varphi(y)) \tag{4.1}$$

是定义在 X_2 上的核函数。

证明。 定义 $\kappa_3(x,\ y) = \psi(x)\overline{\psi(y)}f(\varphi(x))\overline{f(\varphi(y))}$。由定理 4.4,

$$H(\kappa_3) = W_{\varphi,\psi}(H(\kappa_1))$$

并且对于每个 $g \in H(\kappa_3)$，都存在一个 $f \in H(\kappa_1)$，使得 $g = \psi \cdot (f \circ \varphi)$，其中 $\|f\|_{H(\kappa_1)} = \|g\|_{H(\kappa_3)}$。现在，若 $W_{\varphi,\ \psi}$ 关于 $\|W_{\varphi,\ \psi}\| \leq c$ 有界，则 $W_{\varphi,\ \psi}(H(\kappa_1)) = H(\kappa_3) \subseteq H(\kappa_2)$ 也成立，以及

$$\|g\|_{H(\kappa_2)} \leq c\|f\|_{H(\kappa_1)} = c\|g\|_{H(\kappa_3)} \text{ for all } g \in H(\kappa_3).$$

因此，定理4.5 表明

$$c^2\kappa_2(x,y) - \psi(x)\overline{\psi(y)}\kappa_1(\varphi(x),\varphi(y)) \geq 0.$$

对于反方向，假设 4.1 中给出的映射是某个常数 $c > 0$ 的核函数。对于 $f \in H(\kappa_1)$，由定理 4.2，可得

$$\|f\|^2_{H(\kappa_1)}\kappa_1(x,y) - f(x)\overline{f(y)} \geq 0.$$

那么命题4.1表明

$$\|f\|^2_{H(\kappa_1)}\psi(x)\overline{\psi(y)}\kappa_1(\varphi(x),\varphi(y)) - \psi(x)\overline{\psi(y)}f(\varphi(x))\overline{f(\varphi(y))} \geq 0. \tag{4.2}$$

将4.1 乘以 $\|f\|^2$ 并将结果加到4.2 可得

$$\|f\|^2_{H(\kappa_1)}c^2\kappa_2(x,y) - \psi(x)\overline{\psi(y)}f(\varphi(x))\overline{f(\varphi(y))} \geq 0.$$

因此，$\psi \cdot (f \circ \varphi) \in H(\kappa_2)$，并且

$$\|\psi \cdot (f \circ \varphi)\|_{H(\kappa_2)} \leq c\|f\|_{H(\kappa_1)} \text{ for every } f \in H(\kappa_1).$$

因此，$W_{\varphi,\ \psi} : H(\kappa_1) \to H(\kappa_2)$ 是一个有界算子，且满足 $\|W_{\varphi,\ \psi}\| \leq c$。 □

不过，一般而言，要证明式（4.1）中的二元函数对于给定的 φ 和 ψ是一个核函数，并非易事。然而，当 $W_{\varphi,\ \psi}$ 有界时，它确实是一个核函数，为我们提供了一个宝贵的例子来源。例如，若 ψ 将 $\mathbb{D}^n$ 映射到 $\mathbb{D}$，那么

$$(1 - \overline{\psi(w)}\psi(z))\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\overline{w_i}z_i}$$

它是 $\mathbb{D}^n$上的一个核函数。

5. Composition operators in several variables

令 $\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$（n 重）表示 $\mathbb{C}^n$ 中的单位多圆盘，$H(\mathbb{D}^n)$ 表示 $\mathbb{D}^n$ 上所有全纯函数的集合。Hardy空间 $H^2(\mathbb{D}^n)$ 定义为满足以下条件的所有 $f \in H(\mathbb{D}^n)$ 的集合:

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D}^n)} := \sup_{0\leq r<1}\int_{\mathbb{T}^n}|f(rz)|^2 dm_n(z) < \infty,$$

其中， $\mathbb{T}^n$ 是 $\mathbb{D}^n$ 的特征边界，而 m_n 表示 $\mathbb{T}^n$上的归一化勒贝格面积测度。空间 $H^2(\mathbb{D}^n)$ 是一个再生核希尔伯特空间，参见 [14, 第 4], 页，其核函数为

$$\kappa(z,w)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\overline{w_i}z_i}.$$

对于一个 $\alpha>-1$，加权 Bergman 空间 $A^2_\alpha(\mathbb{D}^n)$ 定义为所有满足以下条件的 $f\in H(\mathbb{D}^n)$ 的集合，

$$\|f\|^2_{A^2_\alpha(\mathbb{D}^n)}:=\int_{\mathbb{D}^n}|f(z)|^2\prod_{i=1}^{n}(1-|z_i|^2)^\alpha dA_n(z)<\infty,$$

其中， A_n 是 $\mathbb{D}^n$ 上的归一化勒贝格体积测度。对于每个 $\alpha>-1$，$A^2_\alpha(\mathbb{D}^n)$ 是一个再生核希尔伯特空间，参见 [20, 第 821], 页，其核函数为

$$\kappa(z,w)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-\overline{w_i}z_i)^{\alpha+2}}.$$

在上述空间上作用的复合算子的有界性已经得到了充分研究。这里我们利用再生核结构，给出几个结果的更简洁证明。

有界复合算子的下界 $H^2(\mathbb{D}^n)$ 已在[7,命题 7]中给出。利用命题2.6可以很容易地得到这一结果，并且可以为 $A^2_\alpha(\mathbb{D}^n)$ 得到类似的下界。

推论 5.1。 设 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$: $\mathbb{D}^n\to\mathbb{D}^n$ 为全纯的。

- 如果 C_φ 在 H^2（$\mathbb{D}^n$）上有界，则

$$\sup_{z\in\mathbb{D}^n}\left\{\prod_{i=1}^{n}\frac{1-|z_i|^2}{1-|\varphi_i(z)|^2}\right\}\le\|C_\varphi\|^2.$$

- 如果 C_φ 在 A^2_α（$\mathbb{D}^n$）上有界，则

$$\sup_{z\in\mathbb{D}^n}\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-|z_i|^2}{1-|\varphi_i(z)|^2}\right)^{\alpha+2}\right\}\le\|C_\varphi\|^2.$$

对于 $f(z)=\sum\hat{}f(s)z^s\in A^2_\alpha$（$\mathbb{D}^n$），定义$_{s\in\mathbb{N}_0^n}$

$$\|f\|^2_*=\sum_{s\in\mathbb{N}_0^n}|\hat{f}(s)|^2\prod_{i=1}^{n}(s_i+1)^{-1-\alpha}.$$

那么， $\|\cdot\|_*$在 $A^2_\alpha(\mathbb{D}^n)$ 上定义了一个等价范数，而 $(A^2_\alpha(\mathbb{D}^n)\ \|\cdot\|_*)$ 是一个再生核希尔伯特空间，其核函数为

$$\kappa(z,w)=\sum_{|s|=0}^{\infty}(\overline{w}z)^s\prod_{i=1}^{n}(s_i+1)^{1+\alpha}.$$

在 [7, 命题 11] Jafari 指出，如果 C_φ 在 $(A^2_\alpha(\mathbb{D}^n)\ \|\cdot\|_*)$ 上有界，则$\|C_\varphi\|^2 \geq A$，其中

$$A = \sup_{z\in\mathbb{D}^n} \frac{\sum\limits_{|s|=0}^{\infty} |\varphi(z)|^{2s} \prod\limits_{i=1}^{n} (s_i+1)^{-1-\alpha}}{\sum\limits_{|s|=0}^{\infty} |z|^{2s} \prod\limits_{i=1}^{n} (s_i+1)^{1+\alpha}}.$$

现在我们给出此情形下一个更好的下界。

命题5.2。 若 C_φ 在 $(A^2_\alpha(\mathbb{D}^n)\ \|\cdot\|_*)$ 上有界，则

$$A \leq \sup_{z\in\mathbb{D}^n} \left\{ \frac{\sum\limits_{|s|=0}^{\infty} |\varphi(z)|^{2s} \prod\limits_{i=1}^{n} (s_i+1)^{1+\alpha}}{\sum\limits_{|s|=0}^{\infty} |z|^{2s} \prod\limits_{i=1}^{n} (s_i+1)^{1+\alpha}} \right\} \leq \|C_\varphi\|^2.$$

证明。 给定 $\alpha > 0$ 和 $s_i \geq 0$，可得

$$(s_i+1)^{-1-\alpha} \leq 1 \leq (s_i+1)^{1+\alpha}.$$

因此，第一个不等式成立。第二个不等式由命题2.6推出。 □

Figura 在 [6, 引理 5′]中给出了球的 Hardy空间的一个下界，而利用命题 2.3可以直接改进这一结果。

命题5.3。 如果 C_φ 在 $H^2(\mathbb{B}_n)$ 上有界，则 $\|C_\varphi\| \geq (1-|\varphi(0)|^2)^{\frac{-n}{2}}$。 —

Proof. $\|C_\varphi\| \geq \dfrac{\|C^*_\varphi \rho_0\|}{\|\rho_0\|} = \dfrac{\|\rho_{\varphi(0)}\|}{\|\rho_0\|} = (1-|\varphi(0)|^2)^{\frac{-n}{2}} \geq \{2(1-|\varphi(0)|)\}^{\frac{-n}{2}}.$ □

本文的结果凸显了再生核希尔伯特空间技术在分析复合算子和加权复合算子方面的有效性。这些方法为进一步研究提供了有希望的方向，尤其是在其他函数空间和多变量情形下。

致谢： 第一作者感谢总理研究奖学金计划（PMRF编号2303407）提供的支持。第三作者获得了李嘉诚基金会 STU-GTIIT 联合研究基金（资助编号 2024LKSFG06）和广东省自然科学基金（资助编号 2024A1515010467）的部分资助。

References

[1] C. Chu，双圆盘上某些再生核希尔伯特空间的有界复合算子与乘子，《Complex Analysis and Operator Theory》，**13** (2019), 879–892.[2] M. D. Contreras 和 A. G. Hern´andez-D´ıaz，*Hardy* 空间上的加权复合算子，J. Math. Anal. Appl.，**263** (2001), 224–233.[3] C. C. Cowen 和 B. MacCluer，解析函数空间上的复合算子，CRC出版社，纽约，1995。[4] Z. ˇCuˇckovi´c 和 R.Zhao，*Bergman*空间上的加权复合算子，《Journal of the London Mathematical Society》，**70** (2004),499–511.

[5]*K. Esmaeili* 和 *K. Kellay*，加权 *Bergman* 空间与 *Dirichlet* 空间上的加权复合算子，*Canad. Math. Bull.*，*66 (2023), 286–302.*[6] *B. D. Figura*，多复变量 *Hardy* 空间上的复合算子，*J. Math. Anal. Appl.*，*109 (1985), 340–354.*[7] *F. Jafari*，关于多圆盘上的有界复合算子与紧复合算子，*Canad. J. Math.*，*42 (1990), 869–889.*[8] *M. T. Jury*，再生核、*de Branges–Rovnyak* 空间与加权复合算子的范数，*Proc. Amer. Math. Soc.*，*135 (2007), 3669–3675.*[9] *L. Kosi´nski*，多圆盘上的复合算子，*J. Funct. Anal. 284 (2023), 109801.*[10] *P. Kumari*、*P. Muthukumar* 和 *J. Sarkar*，复合算子的新范数估计，预印本，*2025*，*19*页，*https://arxiv.org/abs/2509.14655v2* .[11] *J. Littlewood*，函数论中的不等式，*Proc. London Math. Soc. 23 (1925), 481–519.*[12] *E. Nordgren*，复合算子，*Canad. J. Math. 20 (1968), 442–449.*[13] *V. I. Paulsen* 和 *M. Raghupathi*，再生核希尔伯特空间理论导论，剑桥大学出版社，剑桥，*2016.*[14] *W. Rudin*，多圆盘上的函数论，*Benjamin*，纽约，*1969.*[15] *W. Rudin*，$\mathbb{C}^n$单位球上的函数论，*Springer-Verlag*，纽约，*1980.*[16] *J. Ryff*，从属的 H^p 函数，*Duke Math. J. 33 (1966), 347–354.*[17] *V. Scheidemann*，多变量复分析导论，*Birkh¨auser*，巴塞尔，*2005.*[18] *H. J. Schwartz*，H^P上的复合算子，*ProQuest LLC*，安娜堡，*MI*，*1969.*[19] *J. H. Shapiro*，复合算子与经典函数论，*Springer*，纽约，*1993.*[20] *M. Stessin*、*K. Zhu*，由多圆盘上定义的符号诱导的复合算子，*J. Math. Anal. Appl.*，*319 (2006), 815–829.*[21] *S. Stevi´c* 和 *S. Ueki*，单位球上从加权 *Bergman* 空间到加权 *Hardy* 空间的加权复合算子，*Appl. Math. Comput.*，*215 (2010), 3526–3533.*[22] *K.Zhu*，单位球上的全纯函数空间，*Springer-Verlag*，纽约，*2005.*Preeti Kumari,
Department of Mathematics and Statistics, Indian Instituteof Technology, Kanpur- 208016, India.电子邮箱：*preetisharma8274@gmail.com, preetik22@iitk.ac.in*P. Muthukumar, Department of Mathematics and Statistics, Indian Instituteof Technology, Kanpur- 208016, India.电子邮箱：*pmuthumaths@gmail.com, muthu@iitk.ac.in*Antti Rasila,
Department of Mathematics with computer Science, Guangdong Technion-Israel Institute of Technology, Shantou, Guangdong 515063, P. R. China; and Department of Mathematics, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa 3200003, Israel.电子邮箱：*antti.rasila@iki.fi, antti.rasila@*[g]tiit.edu.cn