arXiv:2601.19663v1 [math.CA] 27 Jan 2026

准福克斯群的定量傅里叶不确定性原理与谱隙

LONG JIN、AN ZHANG 和 HONG ZHANG

Abstract. 我们推导出了由 Cohen [Coh25b], 建立的高维分形不确定性原理（FUP）中指数 β 的显式公式，量化了其对傅里叶支撑的孔隙参数 ν 的依赖性。该定量版本的 FUP 为由准福克斯群产生的凸共紧双曲 3-流形给出了显式的本质谱隙，从而改进了 Tao [Tao25]的结果。我们的结果将 Jin–Zhang [JZ20]此前的工作推广到了高维情形。

1. Introduction

在本文中，我们以定量形式研究高维情形下的分形不确定性原理（FUP），并将其应用于某些双曲流形的谱隙问题。粗略地说，FUP 表明，任何函数都不可能同时在分形集附近的位置和频率上局部化。该原理在量子混沌中有许多引人注目的应用。

1.1. 主要结果。

作为第一个主要结果，我们证明以下定理，它给出了 Cohen 结果 [Coh25b, 定理 1.1] 的一个定量版本。

定理 1.1（定量傅里叶不确定性原理）。 设 $d \geq 1$, $\nu \in (0, 1/3)$ $h \in (0, 1/100)$。假设 ***(1)*** $\mathbf{X} \subset [-1, 1]^d$ 在从尺度 h 到 1的球上是 ν-多孔的。***(2)*** $\mathbf{Y} \subset [-h^{-1}, h^{-1}]^d$ 在从尺度 1 到 h^{-1} 的直线上是 ν-多孔的。那么存在某个常数 $C = C(\nu, d) > 0$，其与 h 和 f 无关，使得

$$\|f\mathbf{1}_{\mathbf{X}}\|_2 \leq Ch^{\beta}\|f\|_2 \tag{1.1}$$

对任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 且满足 $\operatorname{supp} \hat{} f \subset \mathbf{Y}$，上述结论均成立，其中

$$\beta = \beta(\nu, d) = \exp\left[-\exp\left((C_d\,\nu^{-2}|\log\nu|)^{(C_d\,\nu^{-1}|\log\nu|)}\right)\right] \tag{1.2}$$

并且 $C_d > 0$ 是仅依赖于维数 d的一个大常数。

该定理定量地表明，任何 L^2 在分形集附近经过傅里叶局部化的函数，都不可能同时在物理

日期：2026年1月28日。

空间中的另一个分形集附近局部化。(1.1) 的一种更对称的表述为

$$\|\mathbf{1}_{\mathbf{X}}\mathcal{F}_h\mathbf{1}_{\mathbf{Y}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \le Ch^{\beta} \tag{1.3}$$

其中， $\mathcal{F}_h$ 是酉半经典傅里叶变换，定义如下

$$\mathcal{F}_h f(\xi) = (2\pi h)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\,x\cdot\xi/h}\, f(x)dx \qquad f\in L^2(\mathbb{R}^d)\,,$$

$\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{X}\ \subset [-1,1]^d$ 分别在线上及球上是 ν-多孔的，尺度从 h 到 1，常数 C, $\beta>0$ 仅依赖于维数 d 和孔隙参数 ν；具体而言， $\beta=\beta(\nu,d)$ 由 (1.2) 给出。这是将在第3节中使用的恰当形式。

这里，我们考虑满足比经典 Ahlfors–David 正则性更一般的多孔条件的分形集。具体而言，我们在频率空间中施加更强的线上孔隙性 条件，而非球上孔隙性 条件，这主要是由于广为人知的反例： $\mathbb{R}^2$中的直线 在球上是多孔的，但在线上并非如此。详情请参见定义 2.1 及其后续讨论。最后，可以通过几乎正交论证放宽对$\mathbf{X}$ 和$\mathbf{Y}$ 的有界性限制，正如 Dyatlov–Jin–Nonnenmacher [DJN22]所示。

我们着重研究指数 β 对孔隙参数 ν 的依赖，同时暂时搁置其对维数 d 的显式依赖——后者也被认为是可处理的。定理 1.1 中由 (1.2) 给出的 $\beta=\beta(\nu)$ 表达式显然并非最佳，并且可以通过多种方式改进。

注 1.2。 Cohen [Coh25b], 的工作中隐含地包含了这一结果，其依据是 Han–Schlag [HS20] 的一项一般性部分结果。Han 和 Schlag 针对乘积 Ahlfors–David 正则集以及一般集合，在涉及阻尼函数的情形下得到了定量估计，而未对傅里叶空间几何施加特定要求；参见定理 2.6。

众所周知，傅里叶不确定性原理可用于研究开放量子混沌，尤其是研究非紧（凸共紧）双曲流形上拉普拉斯算子的本质谱隙是否存在。利用定量傅里叶不确定性原理——定理 1.1，我们给出拟福克斯双曲3维流形的一个显式 本质谱隙，如下所示。

定理 1.3。设 $M=\Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ 是一个三维凸共紧双曲流形，且 Γ 是一个拟福克斯群。也就是说，相应的极限集$\Lambda=\Lambda(\Gamma)\ \subset\ \mathbb{S}^2$ 是一个豪斯多夫维数为 维数$_H\,\Lambda\in(1,2)$的拟圆。那么预解式

$$R(\lambda)=\left(-\Delta-1-\lambda^2\right)^{-1}$$

存在如下算子族的亚纯延拓： $L^2_{\mathrm{comp}}(X)\to L^2_{\mathrm{loc}}(X)$，从~ ~Im $\lambda>0$到 $\operatorname{Im}\lambda\ge-\beta+\epsilon$，对任意 $\epsilon>0$均成立，且只有有限个极点。这里 β由下式给出

其显式表达式为

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{2}\,\beta(\nu, 2), \quad \nu = \frac{1}{10^8 (10^{11} C_\mu^2)^{1/(\delta-1)} C_{\mathrm{arc}}^2}$$

其中 $\beta(\nu,2)$ 由(1.2) 给出，其中 $d = 2$，而常数 C_μ 和 C_{arc} 分别在(3.6)和 (3.7) 中给出。

此外， $R(\lambda)$ 满足以下截断估计：对于任意 $\chi \in C_c^\infty(M)$ 和$\epsilon > 0$，存在一个依赖于 ϵ的常数 C_ϵ，以及一个依赖于 ϵ 和 χ的常数$C_{\chi,\epsilon}$，使得

$$\|\chi R(\lambda)\chi\|_{L^2(M)\to L^2(M)} \le \tilde{C}_{\chi,\epsilon}\,|\lambda|^{-1-2\min(0,\operatorname{Im}\lambda)+\epsilon}, \quad \operatorname{Im}\lambda \in [-\tilde{\beta}+\epsilon, 1],\ |\operatorname{Re}\lambda| \ge C_\epsilon\,.$$

在陈述中， ν 是直线孔隙率参数，由准福克斯群 Γ决定；量 C_μ 和 C_{arc} 分别表示极限集 Λ所满足的 δ-正则性条件和三点条件 。

注 1.4. Bowen[Bow79] 关于准福克斯群的著名刚性定理表明，准福克斯群的极限集 Λ 要么是真圆，要么是维数满足 $\dim_H \Lambda \in (1,2)$ 的拟圆。由于福克斯群（其极限集为圆）的谱隙是平凡的，因为所有共振都可以显式计算，见第3.3小节，因此定理 1.3 实际上适用于所有 准福克斯群。注意，定理 1.1 不适用于高维中的圆。

注记 1.5。 拟福克斯三维流形存在本质谱隙，这一点已由 Zhongkai Tao 在其博士论文 [Tao25, Corollary 4.7.4] 中确立； $\delta < 1$ 情形另见 [BLT25] 。不过，他的论证相当一般，无法 根据群的几何数据给出明确的谱隙 Γ。

1.2. **文献概述**。 Bourgain 和 Dyatlov 的近期里程碑式工作 [BD18] 为具有孔隙率条件的 $\mathbb{R}$ 中的集合建立了傅里叶不确定性原理，开辟了研究傅里叶不确定性原理各种形式及其在量子混沌问题中的应用的广阔领域。 [BD18], 中的证明处理的是 Ahlfors–David 正则集，但由于这两种概念大致等价，它也蕴含了 Dyatlov–Jin [DJ18b] 的一个针对多孔集的版本，并且高度依赖 Beurling–Malliavin (BM) 定理。相比之下，Dyatlov 和 Jin [DJ18a] 使用 Dolgopyat 方法证明了一个指数为 $\beta > \frac{1}{2} - \delta$ 的傅里叶不确定性原理，提供了另一种思路。

Bourgain-Dyatlov 的一维傅立叶不确定性原理已成功应用于研究其底层经典动力学具有混沌特征的量子系统。通过将傅立叶不确定性原理应用于混沌动力系统产生的分形集，可以控制这类系统上的高频波。傅立叶不确定性原理的应用目前主要分为两类：（1）获得特征函数在 L^2 上的质量下界 [DJ18b, DJN22], 为 Schr¨odinger 方程建立控制，并证明紧致负曲率曲面上阻尼波的指数衰减 [DJN22, Jin18, Jin20], ;

（2）证明非紧双曲曲面上的谱隙、Strichartz估计和波的指数衰减 [DZ16, DZ20, JZ20, Wan19, HSTZ25] 以及维数为 2 [Vac24] 的障碍散射谱隙。另请参阅 [Dya19]，其中对这一主题进行了非常出色的综述。

一个自然的后续问题是，类似的结果是否适用于更高维情形。这个问题变得更加复杂，因为傅里叶不确定性原理所需的基本工具甚至都不易获得。特别是，在 [Coh25b]之前，人们尚不知道布朗-梅西定理的高维类比。Han 和 Schlag [HS20] 证明了一个傅里叶不确定性原理，其中物理集合是多孔的，而傅里叶支撑是由一维多孔集构成的特殊笛卡尔积。他们的证明运用卡尔唐技巧实现 L^2局部化，并利用乘积结构和一维布朗-梅西定理构造阻尼函数。Cladek 和 Tao [CT21] 利用加法能量估计，在奇数维中对带有 δ-正则集证明了一个傅里叶不确定性原理，其中 δ 接近 $d/2$，从而拓展了 Dyatlov–Zahl [DZ16]的工作。

最近，Backus、Leng 和 Tao [BLT25] 通过 Dolgopyat 方法对 δ-正则集证明了一个高维傅里叶不确定性原理，拓展了 [DJ18a]；其条件是$\delta < d/2$，且两个分形集在某种意义上不正交。他们还研究了凸共紧双曲流形上拉普拉斯算子的谱隙；另见 [Tao25]。几乎与此同时，Cohen [Coh25b] 利用定量高维布朗-梅西定理，为沿直线具有孔隙性的集合建立了一个引人注目的傅里叶不确定性原理。

这个 BM 定理的证明分为两部分：拟次调和（PSH）BM 定理和解析（A）BM 定理。A-BM 定理的证明与一维情形类似，采用了基于 H¨ormander 的 L^2 理论的 Bourgain 的思想，而 PSH-BM 定理则更为困难。其主要创新在于运用二进技巧修改权函数，使其海森矩阵沿直线的积分平均具有有限下界。这一直线上的平均条件是新的，也是高维 BM 问题的核心。另请参见 [Vas25]，其中给出了另一个适用于高维的 BM 定理，其权函数可由径向函数控制。然而，由于该结果依赖于非定量的一维 BM 定理，因此无法 给出显式常数。此外，该结果似乎也不适用于高维傅里叶不确定性原理，因为我们所需的权函数无法 由径向函数控制。

结合 Cohen 的 BM 定理与 Han–Schlag 的阻尼判据，可得 d 维傅里叶不确定性原理。由于 Coh25b [中的每一步都是构造性的，因此可以追踪所有常数，从而得到一个定量版本。

Cohen 的傅里叶不确定性原理近期被 Kim 和 Miller [KM25]用于研究紧致双曲（$d+1$）流形上拉普拉斯特征函数的半经典测度的支集，将 Dyatlov 和 Jin [DJ18b]的论证推广到了高维。此外，Athreya、Dyatlov 和 Miller [ADM25] 此前

证明，在一个 $2d$ 维紧致复双曲商流形上，半经典测度的支集必定包含某个紧浸入全测地复子流形的余球丛。他们的论证仅依赖于 [BD18] 沿快速扩张／收缩方向的一维傅立叶不确定性原理。即使在高维，人们也猜想半经典测度仍应具有完整支集，尽管目前看来这一目标仍遥不可及。

一维 BM 定理的原始证明 [BD18] 采用反证法，因此其中的常数并未明确给出。Jin 和 Zhang [JZ20]采用了一种不同但较弱的一维 BM 定理版本，假设希尔伯特变换满足利普希茨条件，从而证明了定量傅里叶不确定性原理。这一做法沿用了 Mashreghi、Mazarov 和 Havin [MNK05]提出的有趣的“第七种证明”中的思路。 [JZ20]还研究了谱隙问题，将他们的定量傅里叶不确定性原理应用于凸余紧双曲曲面，在极限集的豪斯多夫维数接近 1 时得到了一个显式的本质谱隙。我们的主要结果——定理 1.1 和定理 1.3——可视为 [JZ20，定理 1.2 和 1.3]的高维类比。

最后但同样重要的是，离散傅立叶不确定性原理的版本也已得到建立。例如，一维情形在 [DJ17、EH23、HS24], 中得到了处理，而 [Coh25a]研究了二维离散情形。在 [DJ17], 中，利用算术康托集的傅立叶不确定性原理，其维数为 $\delta < 1$ ，从而显著改善了量子开放贝克映射模型中的谱隙。 [EH23、HS24]的工作进一步研究了随机离散康托集的傅立叶不确定性原理，并得到了更优的指数。对于二维离散康托集， [Coh25a]给出了傅立叶不确定性原理成立的一个等价条件，即这些集合不包含任何一对正交直线。

1.3. **论文结构**。 第2节致力于证明定理 1.1，其中对 Cohen 的证明 [Coh25b] 进行了详细重述，并精确追踪了所有常数。第3节包含定理 1.3 的证明，建立了拟福克斯双曲三维流形的显式本质谱隙。证明首先建立极限集的直线孔隙性。这一性质依赖于以下事实：极限集是一条满足 (3.7) 中定义的三点条件的若尔当曲线，该条件阻止它先任意远地游离、再返回到任意接近其起点的位置。随后，我们沿用 [DZ16、BD18、KM25]中发展的论证，推导出本质谱隙。最后，我们还给出了圆的傅立叶不确定性原理以及福克斯群谱隙的显式计算。附录 A 汇总了几个关于孔隙性的有用引理。

记号。 在整篇论文中， C 和 c 分别表示较大的和较小的正常数，其取值可能随直线而变化。 $C(\cdot)$和 $C_{(\cdot)}$ 均表示 C 对$(\cdot)$中参数的依赖关系。我们用 $B_r(x)$或 $B(x,r)$表示 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 $r > 0$ 、中心为 x的球。日式括号记作

$\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$，而 $|x|$ 和 $|x|_1$ 分别表示 $\mathbb{R}^d$中的欧几里得 ℓ_2 范数和 ℓ_1 范数。集合 X 的示性函数记作 $\mathbf{1}_X$。对于任意集合 $X \subset \mathbb{R}^d$和 $r \geq 0$，将 X 的 r-邻域记作 $X(r) = X + B_r(0)$。

2. Quantitative FUP in higher dimensions

本节介绍 Cohen 的分形不确定性原理（FUP）及其显式常数。特别地，我们给出孔隙参数为 $0 < \nu < 1/3$ 时，尺度参数$h < 1/100$ 的指数 $\beta = \beta(\nu) > 0$ 。我们考虑频率支集局限在一个分形集上的函数，该分形集在尺度 h^{-1} 上 ν在线上多孔。

我们首先介绍若干孔隙性概念。

定义 2.1（孔隙性）。（1）若对于每个直径为 $\alpha_0 < R < \alpha_1$ 的球 B，都存在一点 $x \in B$，使得 $B_{\nu R}(x) \cap \mathbf{X} = \emptyset$，则集合 $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ 称为从尺度α_0 到 α_1 上 ν-球上多孔 。

（2）若对于每条长度为 $\alpha_0 < R < \alpha_1$ 的线段 τ，都存在一点 $x \in \tau$，使得 $B_{\nu R}(x) \cap \mathbf{X} = \emptyset$，则集合 $\mathbf{X}$ 称为从尺度 α_0 到 α_1 上（更强的） ν-在线上多孔 。对于 $d = 1$，这两个定义一致。

(3) 如果满足以下条件，则称集合 $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在尺度 $L \geq 3$ 上是（较弱的）盒孔隙的，深度为 n，其中L 是一个整数：设 $\mathcal{C}_n$ 是将 $[-1,1]^d$划分后得到的边长为 L^{-n} 的全等立方体的集合。那么，对于每个满足$Q \cap \mathbf{X} \neq \emptyset$的立方体 $Q \in \mathcal{C}_n$，都存在一个子立方体 $Q' \in \mathcal{C}_{n+1}$，使得 $Q' \subset Q$ 且 $Q' \cap \mathbf{X} = \emptyset$。

例 2.2. 两个一维 $1/3$-Cantor集的乘积在直线上是多孔的，而谢尔宾斯基地毯仅在球上是多孔的。在 $\mathbb{R}^1$中，任何满足 $\delta < 1$ 的 Ahlfors–David δ-正则集合都以上述任意方式具有多孔性，但这在高维情形下一般并不成立。

例 2.3。 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 中的一条直线在球上是多孔的，但在线上并非如此。对于傅里叶支撑而言，直线上的孔隙性条件对于傅里叶不确定性原理至关重要； $\mathbb{R}^2$ 中的一个反例由 $\mathbf{X} = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$，$\mathbf{Y} = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 给出；这些空间配备标准的勒贝格测度，并满足 $\widehat{\mu_{\mathbf{X}}} = \mu_{\mathbf{Y}}$。

例 2.4。 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 中的一个圆对于尺度为 $\alpha_0 > 0$ 、孔隙参数为 $\nu = \nu(\alpha_0)$ 的情形在线上是多孔的， $\to 0$ 当 $\alpha_0 \to 0$ 时。因此，对于 $\alpha_0 \to 0$ 而言，直线上的孔隙性并非一致成立，这表明圆的傅里叶不确定性原理不可能由 Cohen 的定理推出。从命题 3.5 没有意义这一事实中也可以看出这一点，因为当极限集为圆、其豪斯多夫维数为 $\delta = 1$ 时，引理 3.6 中的常数 C_{out} 会发散。我们将在第3.3小节中讨论更多细节。

2.1. 从阻尼条件到傅里叶不确定性原理。

我们首先引入分形集的阻尼性质，它对于建立高维傅里叶不确定性原理至关重要。Han–Schlag [HS20]最先注意到了这一点。

定义 2.5 （阻尼函数）。 (1) 若集合$\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^d$ 存在一个参数为 $c_1, c_2, c_3, \alpha \in (0,1)$ 的 Cohen 阻尼函数，则称该集合满足此性质；也就是说，存在一个函数$\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \hat{\psi} &\subset B(0, c_1)\,, \\ \|\psi\|_{L^2(B(0,1))} &\geq c_2\,, \\ |\psi(x)| &\leq \langle x \rangle^{-d}\,, \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R}^d\,, \qquad (2.1) \\ |\psi(x)| &\leq \exp\left(-c_3 \frac{|x|}{\log(2+|x|)^{\alpha}}\right)\,, \quad \text{for all } x \in \mathbf{Y}\,. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

(2) 如果存在一个函数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 满足以下条件，则称集合 $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^d$ 具有带参数 l_1 的 Han–Schlag l_1 阻尼函数c_1、 c_2、 c_3、 $\alpha \in (0,\ 1)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \hat{\psi} &\subset [-c_1, c_1]^d\,, \\ \|\psi\|_{L^2([-1,1]^d)} &\geq c_2\,, \\ |\psi(x)| &\leq \langle x \rangle^{-d}\,, \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R}^d\,, \\ |\psi(x)| &\leq \exp\left(-c_3 \frac{|x|_1}{(\log(2+|x|_1))^{\alpha}}\right)\,, \quad \text{for all } x \in \mathbf{Y}\,, \end{aligned}$$

其中， $|x|_1$ 是 x 在 $\mathbb{R}^d$ 中的 l_1 范数。

Han–Schlag 在 [HS20，定理 5.1] 中，根据盒孔隙性和 l_1 阻尼建立了以下傅里叶不确定性原理判据。

定理 2.6 ([HS20]从 l_1 阻尼到傅里叶不确定性原理)。 设
(1) $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在尺度 $L \geq 3$ 上是盒孔隙的，深度为 n；对所有满足 $L^{n+1} \leq N$ 和 $N \gg 1$ 的 $n \geq 0$，均成立。

(2) $\mathbf{Y} \subset [-N, N]^d$ 满足：对于所有满足 $L^{n+1} \leq N$ 的 $n \geq 0$，以及所有 $\eta \in [-NL^{-n} - 3, NL^{-n} + 3]^d$，集合

$$L^{-n}\mathbf{Y} + [-4,4]^d + \eta$$

存在一个具有参数 $c_1 =$ 的 l_1 阻尼函数$(2L)^{-1}$ 以及 $c_2, c_3, \alpha \in (0,\ 1)$。假设 $0 < c_3 < c_3^*(d) \ll 1$。那么傅里叶不确定性原理不等式

$$\|f \mathbf{1}_{\mathbf{X}}\|_2 \leq C N^{-\beta} \|f\|_2$$

对任意满足($f \in L^2\mathbb{R}^d)$ 且$\operatorname{supp} \hat{} f \subset \mathbf{Y}$ 和 $N \geq N_0 \gg 1$ 的 $f \in L^2$，均成立，其中 β 由下式给出

$$\beta = -\frac{\log\left(1 - \gamma_0(T)/2\right)}{T \log L} \qquad with \quad \gamma_0(T) = \frac{1 - c_\varphi^2 / L^{2(T-1)}}{2C_*^2}\,, \qquad (2.3)$$

$$T \geq T_0 = \left\lceil \frac{\log(2C_\varphi C_*^2 + \sqrt{4C_\varphi^2 C_*^4 + c_\varphi^2})}{\log L} \right\rceil\,, \qquad (2.4)$$

$$C_* = \exp\left[c_3 (R_1 + 2)(\log(1 + R_1))^{-\alpha}/2\right]\,, \qquad (2.5)$$

$$R_1 = \max\left\{ \left(\frac{2d}{c_3}\right)^2, \exp\left[\left(\frac{16\pi C_d}{c_3}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right], \exp\left[4^{\frac{1}{1-\alpha}}\right], \left[\frac{(d|\log c_1|)^d}{c_3}\right]^8, \left[4\log\left(\frac{2C_d}{c_2^2}\right)\right]^2, (8d)^4 \right\}. \tag{2.6}$$

这里， C_φ、c_φ 仅取决于在 [HS20], 中选取的施瓦茨函数 φ ；若 φ 是径向的，则它实际上仅取决于维数 d。

取 $L = \lceil\sqrt{d/\nu}\rceil$ 和 $N = \lceil h^{-1}\rceil$，并注意到 ν-孔隙性蕴含盒孔隙性（引理 A.1），我们便得到另一个定量傅里叶不确定性原理判据，它以 ν-孔隙性和 l_2 阻尼来表述；这一判据隐含于 Cohen [Coh25b，定理 1.6], 中。

定理 2.7 ([Coh25b] 从 l_2 阻尼到傅里叶不确定性原理)。 假设
(1) $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在从 h 到 1 的尺度上于球上是 ν-多孔的。*(2)* $\mathbf{Y} \subset [-h^{-1}, h^{-1}]^d$ 满足：存在 $c_2, c_3, \alpha \in (0,1)$，使得对于所有 $h < s < 1$和 $\eta \in [-h^{-1}s - 5, h^{-1}s + 5]^d$，集合

$$s\mathbf{Y} + [-4,4]^d + \eta$$

存在一个具有参数 $c_1 = \frac{\nu}{20\sqrt{d}}$、 c_2、 c_3 和 α 的 l^2 阻尼函数。
那么，对于如定理 *2.6* 中那样与 h 无关的 $\beta > 0$ 和 $C > 0$，且满足 $L = \lceil\sqrt{d}/\nu\rceil$,

$$\|f\mathbf{1}_{\mathbf{X}}\|_2 \le Ch^\beta \|f\|_2$$

对任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，若满足 $supp\hat{} f \subset \mathbf{Y}$，则结论成立。

请注意，本小节中<规格>的 l_1 阻尼采用 l_1 欧几里得范数 $|\cdot|_1$。在论文余下部分，阻尼一词专指标准的 l_2 阻尼。

2.2. **从孔隙性到阻尼条件**。 根据定理 2.7 中的阻尼判据，只需定量证明每个 ν-直线上的孔隙性集合都存在一个良好的阻尼函数。为证明这一点，我们需要以下由 Cohen [Coh25b 的定理 1.4] 得出的定量 BM 定理。

定理 2.8 ([Coh25b] QBM). 设 $\omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\le 0}$ 是一个满足以下条件的权函数

$$\omega(x) = 0 \qquad for\ |x| \le 2,$$

$$|D^a\omega(x)| \le C_{\mathrm{reg}}\langle x\rangle^{1-a} \qquad for\ 0 \le a \le 3, \tag{2.7}$$

$$\int_0^\infty \frac{G^*(r)}{1+r^2}\,dr \le C_{\mathrm{gr}}, \tag{2.8}$$

其中

$$G(x) = \int_{1/2}^2 |\omega(sx)|ds, \quad G^*(r) = \sup_{|x|=r} G(x).$$

那么对于任意 $\sigma > 0$，存在一个函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} \hat{f} \subset B_\sigma, \\ &|f(x)| \geq \frac{1}{2} \qquad \textit{for all } x \in B_{r_{\min}}, \\ &|f(x)| \leq C e^{c\sigma\omega(x)} \qquad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{2.9}$$

(2.10)

其中

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{C_d \max(C_{\mathrm{reg}}, C_{\mathrm{gr}})} \\ C &= C_d \max(\sigma^{-C_d}, e^{3\sigma}) \\ r_{\min} &= \frac{1}{C_d} \min(\sigma, \sigma^{-1}) \end{aligned}$$

且 C_d 是一个仅取决于维数 d 的大常数。

这是一个关于多重次调和函数存在性和解析延拓的深刻定理。这里的常数当然仍有通过各种方式改进的空间，但利用定理 2.7，这已经足以让我们得到一个显式的阻尼性质，并最终得到傅里叶不确定性原理的显式指数。我们首先在 [Coh25b 的命题 1.7]中追踪从孔隙性到阻尼的常数。

定理 2.9 (孔隙性到阻尼)。 设 $\mathbf{Y} \subset [-3h^{-1}, 3h^{-1}]^d$ 在线上从尺度 $\mu > 1$ 到 h^{-1} 是 ν-多孔的，且满足 $\nu < 1/3$ 和 $h < 1/100$。则存在一个仅取决于 d 的常数C_d，以及某个常数

$$\alpha > \alpha(\nu) = 1 - \frac{\nu}{C_d \log|\nu|} < 1$$

使得对于任意 $0 < c_1 < 1$，*Y </style}*都存在一个参数为 α、c_1且满足

$$c_2 = \frac{c_1^{C_d}}{C_d \exp\left(\frac{c_1 \nu \mu}{C_d |\log \nu|}\right)} \quad c_3 = \frac{c_1 \nu}{C_d \,|\log \nu|}.$$

证明。这是 Cohen 的重复论证，我们在 ν 中明确写出每个常数。请注意，在证明中，我们将用 C_d 表示一个仅依赖于维数 d 的极大常数，其值在每次出现时可能不同。

现在，作为第一步，我们希望构造一个良好的权函数 ω，使其满足 BM 定理 2.8 中的正则性与增长条件；同时，它在分形集 $\mathbf{Y}$ 上的取值也受 (2.2) 中的阻尼指数控制，具体如下:

$$\omega(x) \leq -c \frac{|x|}{(\log(2+|x|))^\alpha} + C\,, \quad x \in \mathbf{Y} \quad \text{with } \alpha = 1 - \frac{\nu}{C_d \log|\nu|}\,.$$

对于所有 $k \geq 1$，我们将二进环记为 $A_k = \{x \in \mathbb{R}^d : \ 2^k \leq |x| \leq 2^{k+1}\}$，并取

$$W_k = \frac{2^k}{k^s}$$

其中，$s = 0.2$是一致参数。选择 α 和 s 是为了确保所构造权函数满足 BM 定理中的正则性与增长条件 (2.7) 和 (2.8)。这一点将在后文说明。

考虑由边长为 W_k 的立方体组成的集合 $\mathcal{Q}_k = \{Q\}$，定义如下:

$$\mathcal{Q}_k = \left\{ Q = \prod_{j=1}^{d} \left(W_k \frac{a_j}{3}, W_k(\frac{a_j}{3} + 1) \right) : a_j \in \mathbb{Z},\ Q \cap A_k \neq \emptyset \right\}.$$

于是，对于二进环，我们得到一个有限重叠的立方体覆盖:

$$\begin{aligned} A_k &\subset \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_k} Q/2, \\ \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_k} Q &\subset \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, 2^{k-1} \leq |x| \leq 2^{k+2}\}, \quad k \geq k_0 > \lceil (2d^{1/2})^{1/s} \rceil, \end{aligned}$$

其中，$Q/2$ 是与 Q 具有相同中心且边长为其一半的缩放立方体，k_0 是稍后选取的一个较大整数。注意，对于固定的 k，$\mathbb{R}^d$ 中的每个点至多落在 $\mathcal{Q}_k$ 中的 $C = 3^d$ 个立方体内。

为了控制 $\mathbf{Y}$ 上的权函数 ω，我们只需考虑与 $\mathbf{Y}$ 相交的有效立方体。令

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbf{Y},k} &= \{Q \in \mathcal{Q}_k \,:\, Q \cap (\mathbf{Y} \cap A_k) \neq \emptyset\}, \\ \mathbf{Y}_k &= \bigcup_{Q \in \mathcal{S}_{\mathbf{Y},k}} Q\,. \end{aligned}$$

我们需要构造支集位于这些有效立方体和集合上的光滑函数。设 $\{\eta_Q\}_{Q \in \mathcal{Q}_k}$ 为一组满足以下条件的鼓包函数

$$\begin{aligned} \eta_Q \in [0,1] \qquad & \operatorname{supp} \eta_Q \subset Q\,, \\ \eta_Q(x) = 1 \qquad & \forall\, x \in Q/2, \\ \|D^a \eta_Q\|_\infty \leq C_{d,a}\, W_k^{-a} \qquad & \forall\, a \geq 0, \qquad (2.11) \\ \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \eta_Q(x) \in [1, C_d] \qquad & \forall\, x \in A_k. \qquad (2.12) \end{aligned}$$

实际上，我们可以通过膨胀和平移构造这些 η_Q，使其形式为 $\eta_Q = \eta(W_k^{-1}(x - c_Q))$，其中 η 是一个固定的径向鼓包函数，而 c_Q 是 Q 的中心。现在我们可以构造支集位于有效集 $\mathbf{Y}_k$ 上的负二进制 C_c^∞ 函数，其

高度 $\frac{2^k}{k^\alpha}$ 由

$$\omega_k = -\frac{2^k}{k^\alpha} \sum_{Q \in \mathcal{S}_{\mathbf{Y},k}} \eta_Q$$

具有支集

$$\operatorname{supp} \omega_k \subset \mathbf{Y}_k \subset \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, 2^{k-1} \le |x| \le 2^{k+2}\} \qquad \forall\, k \ge k_0\,.$$

注意，由（2.12）可知

$$\omega_k(x) \le -\frac{2^k}{k^\alpha} \quad \text{for } x \in \mathbf{Y} \cap A_k. \tag{2.13}$$

现在我们设定负的 C^∞ 权函数

$$\omega = \sum_{k \ge k_0} \omega_k, \tag{2.14}$$

支集为 $B^{\complement}_{2^{k_0-1}}$，其中 $k_0 = k_0(d,\mu) \ge 2$ 是满足以下条件的最小整数

$$W_{k_0} > \frac{\mu}{2\sqrt{d}} \ \text{ and } \ k_0^s > 10d. \tag{2.15}$$

实际上，我们可以选择 k_0 使得

$$W_{k_0} = \max\left\{ \frac{\mu}{2\sqrt{d}}, \frac{2^{[(10d)^{1/s}]}}{10d} \right\} + 1.$$

k_0 的选取可由 (2.18) 和引理 A.2 中的条件看出。注意到$\omega(x) = 0$，其中 $|x| \le 2^{k_0-1}$。因此，定理 2.8 中的第一个消失条件自然得到满足。此外，由 (2.14)、(2.13) 和 (2.12)，我们得到 ω 在 Y上的控制

$$\omega(x) \le -\frac{1}{20} \frac{|x|}{\big(\log(2+|x|)\big)^\alpha} \quad \text{for } |x| > 2^{k_0} \text{ and } x \in \mathbf{Y},$$

$$\omega(x) \le -\frac{1}{20} \frac{|x|}{\big(\log(2+|x|)\big)^\alpha} + C(\mu,d) \quad \text{for all } x \in \mathbf{Y}, \tag{2.16}$$

其中，$C(\mu, d)$ 可取为

$$C(\mu,d) = \mu + C_d.$$

实际上，只需满足

$$C(\mu,d) \ge \sup_{|x| \le 2^{k_0}} \frac{|x|}{\big(\log(2+|x|)\big)^\alpha} = \frac{2^{k_0}}{\big(\log(2+2^{k_0})\big)^\alpha} \le \frac{\max\{\mu, C_d\}}{2\sqrt{d}\max\{\log\mu, C_d\}^{\alpha-s}}\,,$$

考虑到 ω 的支集，以及 ω_k，并且由于我们将固定 $s = 0.2$ 和 $\alpha \in$（0。9，1），当 ν 很小时，它非常接近 1，因此我们可以取小得多的常数

$$C(\mu,d) = \frac{1}{C_d}\mu/(\log\mu)^{0.7}.$$

然而，在定量傅里叶不确定性原理中，对数改进不会影响主导项（常数项）。

现在我们开始验证 BM 定理 2.8 中 ω 的正则性与增长条件。我们首先为 ω 建立正则性性质 (2.7)。对于任意 $a \geq 0$、$k \geq 1$，有

$$|D^a \omega_k| \leq C_{a,d}\, W_k^{-a}\, 2^k\, k^{-\alpha} \sum_{Q \in \mathcal{S}_{\mathbf{Y},k}} \mathbf{1}_Q \leq C_{a,d}\, 2^{(1-a)k}\, k^{as-\alpha}\, \mathbf{1}_{\mathbf{Y}_k}, \tag{2.17}$$

其中，第一个不等式使用了 (2.11)，第二个不等式使用了 $\mathcal{Q}$ 中立方体的有限重叠性质 (2.12)。只要 $3s < \alpha$、ω 满足正则性条件 (2.7)，其常数 $C_{\mathrm{reg}} = C_d$ 仅依赖于维数 d（以及固定的径向鼓包函数 η）。

现在我们来验证增长条件 (2.8)。注意到

$$\mathbf{Y}_k \subset (\mathbf{Y} \cap A_k) + B(0, 2W_k\sqrt{d})\,. \tag{2.18}$$

由于 $\mathbf{Y} \subset [-3h^{-1}, 3h^{-1}]^d$，我们可以假设 $2^k(1 - \frac{1}{10\sqrt{d}}) \leq 3h^{-1}\sqrt{d}$，因为 $k \geq k_0$，见 (2.15)；否则 $\mathbf{Y}_k$ 将是空集。由于 $k \geq k_0$ 且 $\mu < 2W_k\sqrt{d} < h^{-1}$，现在我们可以应用引理 A.2，其参数为

$$\nu' = \nu/2, \quad \alpha_0 = \mu, \quad \alpha_1 = h^{-1}, \quad r = 2W_k\sqrt{d}$$

从尺度 $4W_k\sqrt{d}/\nu$ 到 h^{-1} 推出$\mathbf{Y}_k$ 在线上是 $\nu/2$-多孔的（若 $4W_k\sqrt{d}/\nu \geq h^{-1}$，则此结论是空泛的）。

我们首先断言

$$|\mathbf{Y}_k \cap \ell| \leq C_d\, 2^k\, k^{-s\gamma} \quad \text{for all lines } \ell \tag{2.19}$$

对于固定的指数

$$\gamma = \frac{\nu}{C_d |\log \nu|} < 1\,. \tag{2.20}$$

实际上，取$R = \frac{3}{10}\sqrt{d}\, 2^k \leq \alpha_1 = h^{-1}$，则当 $4W_k\sqrt{d}/\nu \geq R$时，我们有 $k^{-s}/\nu \geq \frac{1}{100d}$，而平凡估计

$$|\mathbf{Y}_k \cap \ell| \leq 2^{k+2} \leq 2^{k+2}(k^{-s}/\nu)^\gamma C_d^\gamma \leq C_d \nu^{-\gamma} 2^k k^{-s\gamma}\,.$$

当$4W_k\sqrt{d}/\nu < R$时，我们可以将 $\ell \cap A_k$ 分解为 $C\sqrt{d}$ 条长度为 R的线段。然后对每条线段应用引理 A.5，并利用$\mathbf{Y}_k$，得到

$$|\mathbf{Y}_k \cap \ell| \leq C_d 2^{k+1} \left(\frac{20W_k d}{2^k \nu}\right)^\gamma \leq C_d\, \nu^{-\gamma}\, 2^k\, k^{-s\gamma}.$$

这就证明了

$$|\mathbf{Y}_k \cap \ell| \leq C_d\, \nu^{-\gamma}\, 2^k\, k^{-s\gamma} \quad \text{for all lines } \ell$$

进一步注意到.....后，即可得到所声称的估计式 (2.19)

$$\nu^{-\gamma} = e^{\nu/C_d} \in (1, e^{\frac{1}{C_d}}).$$

对 $\ell = \{tx : t \in \mathbb{R}\}$ 应用 (2.19)，其中它是过原点且方向为 $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ 的直线，我们得到

$$2^{-k} \int_0^\infty |\omega_k(tx)|\, dt \le \|\omega_k\|_{L^\infty} |\mathbf{Y}_k \cap \ell| \le C_d 2^k\, k^{-(\alpha+s\gamma)}\,. \tag{2.21}$$

设 $G^*(r)$ 为 (2.8) 中的增长函数，其中对某个 $k \ge 2$ 有 $r \in [2^k, 2^{k+1})$（注意，对于 $r \le 4$，$G^*(r) = 0$ ）。利用 (2.21)，我们得到逐点界

$$\begin{aligned} G^*(r) &\le C_d \sup_{x\in\mathbb{S}^{d-1}} 2^{-k} \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} |\omega(tx)|\, dt \\ &\le C_d \sup_{x\in\mathbb{S}^{d-1}} 2^{-k} \sum_{k-3\le j\le k+3} \int_0^\infty |\omega_j(tx)|\, dt \\ &\le C_d \frac{r}{(\log(2+r))^{\alpha+s\gamma}}\,. \end{aligned}$$

只要 $\alpha + s\gamma > 1$，增长条件 (2.8) 就以常数 C_{gr} 得到满足，该常数可计算为

$$C_{\mathrm{gr}} = C_d \int_3^\infty \frac{1}{r(\log r)^{\alpha+s\gamma}} dr = \frac{C_d}{(\alpha+s\gamma-1)(\log 3)^{\alpha+s\gamma-1}} \sim C_d/\gamma\,. \tag{2.22}$$

注意，我们已经普适地固定了 $s = 0.2$ 。我们可以选择 $\alpha \ge 1 - 0.1\gamma$，于是 $-\alpha + 3s \le -0.3$ 和 $\alpha + s\gamma \ge 1 + 0.1\gamma > 1$。

在 ω 上应用谱半径为 $\sigma < 1$ 的 QBM 定理 2.8，其中正则性和增长常数分别取自 (2.17) 和 (2.22)

$$C_{\mathrm{reg}} = C_d, \qquad C_{\mathrm{gr}} = C_d/\gamma,$$

我们可以得出：对于任意 $0 < \sigma < 1$，存在一个函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，满足

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} \hat{f} \subset B_{\sigma/2}, \\ &|f(x)| \ge \frac{1}{2} \quad \text{for } |x| \le \frac{\sigma}{C_d}, \\ &|f(x)| \le C_d \sigma^{-C_d} \exp(\sigma\gamma\,\mu/C_d) \exp\left(-\sigma \frac{\gamma}{C_d} \frac{|x|}{(\log(2+|x|))^\alpha}\right) \quad \text{for } x \in \mathbf{Y}, \\ &|f(x)| \le C_d \sigma^{-C_d} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

最后两个估计由 (2.16) 和 (2.9)（$\omega \le 0$）推得。为满足 $\mathbb{R}^d$ 中的 $(-d)$-衰减 (2.1)，我们将 f 乘以一个施瓦茨函数。现在令 $\varphi_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为一个固定的施瓦茨函数，满足 supp $\hat{}\varphi_0 \subset B(0,1)$ 且 $\varphi_0(0) = 1$。于是存在某个 $r_d \in (0, 1/2)$，使得对所有 $|x| < r_d$ 都有 $\varphi_0(x) \ge 1/2$ 。令 $\varphi(x) := \varphi_0(\sigma r_d x/10)$，于是

supp $\hat{\varphi} \subset B(0, r_d\sigma/10)$ 且 $\int\hat{\varphi} = 1$。令 $f_1 = f\varphi$。于是 $\hat{f}_1 = \hat{f} * \hat{\varphi}$ 且

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{supp} \hat{f}_1 \subset B_\sigma,\\
&|f_1(x)| \geq \frac{1}{2} \quad \text{for } |x| \leq \frac{\sigma}{C_d},\\
&|f_1(x)| \leq C_d\, \sigma^{-C_d}\, \exp(\sigma\gamma\, \mu/C_d)\, \exp\left(-\sigma\frac{\gamma}{C_d}\frac{|x|}{(\log(2+|x|))^\alpha}\right) \quad \text{for } x \in \mathbf{Y},\\
&|f_1(x)| \leq C_d\sigma^{-C_d}\langle x\rangle^{-d} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$

最后一个等式由平凡估计 $|\varphi_0(x)| \leq C_d\langle x\rangle^{-d}$得出。两边除以常数

$$C_d\, \sigma^{-C_d}\, \exp(\sigma\gamma\, \mu/C_d)$$

再利用 (2.20)，我们得到参数为 l_2 的阻尼函数

$$c_1 = \sigma\,, \qquad c_2 = \frac{\sigma^{C_d}}{C_d \exp(\sigma\gamma\, \mu/C_d)} = \frac{\sigma^{C_d}}{C_d \exp(\frac{\sigma\nu\mu}{C_d|\log\nu|})}\,, \qquad c_3 = \frac{\gamma}{C_d}\sigma = \frac{\sigma\nu}{C_d|\log\nu|}\,.$$

至此，定理的证明完成。 □

2.3. **定量傅里叶不确定性原理**。结合前两个小节的结果，我们由孔隙性推出傅里叶不确定性原理。取以下参数应用定理 2.7 和 2.9

$$\mu = 10\sqrt{d}/\nu, \qquad c_1 = \frac{\nu}{20\sqrt{d}}\,,$$

现在我们可以证明定理 1.1 中陈述的定量傅里叶不确定性原理。

定理 *1.1* 的证明。和之前一样，在证明中我们用 C_d 表示一个非常大的常数，它依赖于维数 d，其取值可能因出现位置而异。

设物理空间和傅里叶空间中的两个分形集为

- $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在尺度 h 到 1 上是 ν-多孔的，且以球 为单位。
- $\mathbf{Y} \subset [-h^{-1}, h^{-1}]^d$ 在尺度 1 到 h^{-1} 上是 ν-多孔的，且以直线 为单位。

我们断言，$\mathbf{Y}$ 满足定理 2.7 中的阻尼条件，其参数为

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1 - \frac{\nu}{10C_d\log|\nu|} & c_1 &= \frac{\nu}{20\sqrt{d}}\\
c_2 &= \frac{\nu^{C_d}}{C_d\exp(\frac{1}{C_d}\nu/|\log\nu|)} & c_3 &= \frac{\nu^2}{C_d|\log\nu|}\,.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

事实上，对于 $s \in (h,\ 10h]$，这一结论显然成立，因为

$$\mathbf{Y}_{s,\eta} := s\mathbf{Y} + [-4,4]^d + \eta \subset [-30,30]^d\,.$$

对于所有的 $10h < s < 1$ 和 $\eta \in [-h^{-1}s - 5, h^{-1}s + 5]^d$，集合 $\mathbf{Y}_{s,\ \eta}$ 由引理 A.2 可知，在尺度 $10\sqrt{d}/\nu$ 到 $h^{-1}s$ 上是 $\nu/2$-在线上多孔的，且包含于 $[-3h^{-1}s, 3h^{-1}s]^d$中。因此

将其中的 $\mu = 10\sqrt{d}/\nu$ 和 h 替换为 $\overline{h}^{-1}s$后应用定理 2.9，集合$\mathbf{Y}_{s,\ \eta}$ 存在一个参数为 $c_1 = \frac{\nu}{20\sqrt{d}}$ 的阻尼函数，并且

$$c_2 \geq \frac{c_1^{C_d+2d}}{C_d \exp(\gamma c_1 \mu / C_d)} \geq \frac{\nu^{C_d}}{C_d \exp(\frac{1}{C_d}\,\nu/|\log \nu|)}$$

$$c_3 \geq \frac{\nu^2}{C_d|\log \nu|}, \qquad \alpha \geq 1 - \frac{\nu}{10 C_d \log|\nu|}.$$

这就证明了我们的论断。

因此，我们可以将 (2.23) 中的阻尼参数代入定理 2.7，从而得到

$$\|f\mathbf{1}_{\mathbf{X}}\|_2 \leq C h^{\beta} \|f\|_2$$

其中，利用 Han-Schlag 的公式，

$$\beta = \beta(d, L, c_1, c_2, c_3, \alpha) = \beta(d, \lceil\sqrt{d}/\nu\rceil, c_2, c_3, \alpha)$$

由定理 2.6 中的 (2.3) 给出，而 $C > 0$ 是一个与 h 和 f 无关的常数。

接下来我们显式计算指数 β。我们先计算 (2.6) 中定义的 R_1。由于我们可以将 C_d 取足够大，因此在最大化过程中可以忽略 $(8d)^4$。由于 c_3 和 $1-\alpha$ 都非常小，我们可以假设 $\max\{c_3, 1-\alpha\} < 0.01$，于是得到

$$\max\left\{\exp\left[4^{\frac{1}{1-\alpha}}\right], \left(\frac{2d}{c_3}\right)^2\right\} \leq \exp\left[\left(\frac{16\pi C_d}{c_3}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right].$$

此外，我们有

$$\exp\left[\left(\frac{16\pi C_d}{c_3}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] \leq \exp\left[\left(C_d|\log\nu|\nu^{-2}\right)^{\frac{C_d|\log\nu|}{\nu}}\right],$$

$$\left[4\log\left(\frac{2C_d}{c_2^2}\right)\right]^2 \leq 16(\log 2C_d + 2|\log c_2|)^2 \leq C_d|\log\nu|^2,$$

$$\left[\frac{(d|\log c_1|)^d}{c_3}\right]^8 \leq c_3^{-8} C_d(1 + \log(\nu^{-1})) \leq C_d\,\nu^{-17},$$

因此，按照（2.6）的记号，我们实际上可以取

$$R_1 = \exp\left(\left(C_d|\log\nu|\nu^{-2}\right)^{C_d|\log\nu|\nu^{-1}}\right).$$

然后我们还可以选择

$$C_* = \exp(R_1 + 2)$$

在 (2.5) 中，并在 (2.4) 和 (2.3) 中选择

$$T_0 = \log(C_d C_*^2) \leq C_d R_1, \quad T = \lceil C_d R_1 \rceil, \quad \gamma_0(T) \geq \frac{1 - c_{\nu,d}}{2C_*^2}.$$

因此，我们最终可以将 β 选为

$$\beta \geq \frac{-\log(1-\frac{1-c_{\nu,d}}{4C_*^2})}{T\log L} \geq \frac{1-c_{\nu,d}}{4C_*^2 T\log L} \geq \frac{1}{C_d C_*^2 R_1 |\log\nu|} \geq \frac{1}{C_d \exp(3R_1)}$$
$$\geq \frac{1}{C_d}\exp\left[-3\exp\left((C_d\nu^{-2}|\log\nu|)^{C_d|\log\nu|\nu^{-1}}\right)\right].$$

证明完毕。 □

3. Spectral gap for quasi-Fuchsian 3-manifold

本节将证明定理 1.3。我们首先回顾 Dyatlov– Zahl [DZ16], 的初步工作，他们将谱隙问题归约为一个傅里叶不确定性原理。在本节中，我们考虑特定情形 $d = 2$。下文中，记号 $\beta(\nu)$ 始终表示在 $d = 2$ 条件下，由 (1.2) 定义的常数公式 $\beta(\nu, d)$。

设 $\mathbb{H}^3$ 为三维双曲空间， $\Gamma \subset \mathrm{Iso}(\mathbb{H}^3)$ 为一个克莱因群，$M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ 为相应的双曲三维流形， $\Lambda = \Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{S}^2$ 为 Γ 的极限集。对于 $\alpha > 0$，在 $\mathbb{S}^2$ 上定义 Λ 的 α-邻域为

$$\Lambda(\alpha) = \{\, y \in \mathbb{S}^2 \mid d(y,\Lambda) \leq \alpha \,\},$$

其中， $d(y, y') = |y - y'|$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中限制在 $\mathbb{S}^2$ 上的欧几里得距离。

考虑算子 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\chi(h) : L^2(\mathbb{S}^2) \to L^2(\mathbb{S}^2)$，其定义如下：

$$\mathcal{B}_\chi(h)f(y) = (2\pi h)^{-1}\int_{\mathbb{S}^2} |y-y'|^{2i/h}\,\chi(y,y')\,f(y')\,dy', \tag{3.1}$$

其中， dy' 是 $\mathbb{S}^2$ 和 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{S}^2_\Delta)$上的标准体积形式，满足

$$\mathbb{S}^2_\Delta = \{\,(y,y') \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \mid y \neq y'\,\}.$$

定义 3.1. 若极限集 Λ 满足指数为 $\beta > 0$ 的双曲分形不确定性原理，则称其满足该原理：对于任意 $\varepsilon > 0$，均存在 $\rho \in (0,1)$，使得

$$\|\mathbf{1}_{\Lambda(C_1h^\rho)}\mathcal{B}_\chi(h)\mathbf{1}_{\Lambda(C_1h^\rho)}\|_{L^2(\mathbb{S}^2)\to L^2(\mathbb{S}^2)} \leq Ch^{\beta-\varepsilon}, \quad h \in (0, 1/100) \tag{3.2}$$

对于任意与 h无关的常数 $C_1 > 0$ 以及任意截断函数 χ。这里，常数$C > 0$可以依赖于 $C_1, \varepsilon, \rho, \chi$ 和 Λ； $\mathcal{B}_\chi$ 是式 (3.1) 中定义的傅里叶积分算子。

[DZ16] 将凸共紧双曲流形上本质谱隙的存在性与双曲傅里叶不确定性原理的成立联系起来。根据 [DZ16，定理 3],定理 1.3 可直接由以下命题推出。

命题 3.2。 极限集 Λ 满足双曲傅里叶不确定性原理 (3.2)，其指数为

$$\beta = \frac{1}{2}\beta(\nu), \quad \nu = \frac{1}{10^8(10^{11}C_\mu^2)^{1/(\delta-1)}C_{\mathrm{arc}}^2}, \tag{3.3}$$

其中常数 C_μ 和 C_{arc} 分别由(3.6) 和 (3.7) 给出。

借助单位分解，我们可以假设 χ 的支集包含于 $\Sigma\times\Sigma$中，其中 Σ 是从 $\mathbb{S}^2$ 中去掉立体角为$\pi/2$的球冠后得到的区域。设 $\pi:\ \mathbb{S}^2\ \to\ \mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$ 为立体投影，它将 Σ 映射到 $B_{\mathbb{R}^2}$(0,5)的一个子集。于是，对于 $\mathcal{B}_\chi$ ，具有指数(3.3)的所需 FUP 估计(3.2)可归结为以下关于一个具有特定对数相位的新傅里叶积分算子 $B_\chi:L^2(\mathbb{R}^2)\ \to L^2(\mathbb{R}^2)$的估计。

命题 3.3。设 β 属于 (3.3)。对于任意 $\epsilon>0$，存在某个 $\rho\in(0,1)$ ，使得对于任意 $C_1>0$，存在 $C>0$，且与 h无关，使得

$$\|\mathbf{1}_{X(C_1h^\rho)}B_\chi(h)\mathbf{1}_{X(C_1h^\rho)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^2)}\leq Ch^{\beta-\varepsilon},\quad h\in(0,1/100) \tag{3.4}$$

其中

$$\begin{aligned} X=&\pi(\Lambda)\cap B(0,5),\\ B_\chi(h)f(x)=&(2\pi h)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}e^{i\Phi(x,x')/h}\chi(x,x')f(x')dx', \\ \Phi(x,x'):=&2\ln(|\pi^{-1}(x)-\pi^{-1}(x')|)=2\ln\left(\frac{2|x-x'|}{\sqrt{(1+|x|^2)(1+|x'|^2)}}\right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

and $\chi(x,x')\in C_c^\infty(B(0,10)^2)$ 是任意一个支集避开对角线的截断函数 *l.*

3.1. 的直线疏松条件。我们首先考察在我们的情形下极限集 $\Lambda=\Lambda(\Gamma)$ 的性质。标准的帕特森–沙利文理论（例如参见[Sul79，定理 7]）表明，$\Lambda\subset\mathbb{S}^2$ 是 δ-正则的 对于

$$\delta=\dim_H(\Lambda)\in(1,2).$$

也就是说，存在一个定义在 $\mathbb{S}^2$ 上的博雷尔测度 μ 和一个常数 $C_\mu>0$ ，使得

$$\frac{1}{C_\mu}r^\delta\leq\mu(B_{\mathbb{S}^2}(x_0,r)\cap\Lambda)\leq C_\mu r^\delta,\quad\forall\,x_0\in\Lambda,r\in[0,1]\,. \tag{3.6}$$

这一 δ-正则条件适用于一般凸共紧双曲流形的极限集。这里 Λ 的特殊之处在于，它是一个拟圆；也就是说，它是单位圆在某个 K-拟共形映射下的像：$\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$，其中我们将 $\mathbb{S}^2$ 与 $\widehat{\mathbb{C}}$等同起来（定义见 [GH12，第 1 章，1] 或 [Ahl06，第 2] 章）。因此，Λ同胚于 S^1 ，并满足以下三点条件：存在一个常数 C_{arc} ，使得对于任意一对点 $z_1,\ z_2\in\Lambda$

$$\min_{j=1,2}\operatorname{diam}(\gamma_j)\leq C_{\text{arc}}|z_1-z_2| \tag{3.7}$$

其中 $\gamma_1,\ \gamma_2$ 是连接 z_1 和 z_2的 Λ 两条不同的弧；参见 [GH12，定理 2.2.5]，另请参见图 1 中的示例。

注 3.4。 C_{arc} 的一个具体取值可设为 $C_{\mathrm{arc}} = 10e^{8K}$。事实上， [GH12，注 2.2.6] 之后的讨论表明，若 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$在一个固定 ∞的 K-拟共形映射 $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 下的像，则对于欧几里得距离 $d_{\mathbb{R}^2}$，(3.7) 中可取 $C_{\mathrm{arc}} = 2e^{8K}$。球面上的不等式可通过应用立体投影得到。

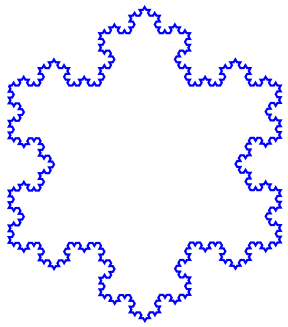


FIGURE 1. 我们分析中的主要例子是著名的科赫雪花。该集合是（$\log_3 4$）-正则的，并且显然满足三点条件。

本节的主要内容是以下命题。

命题 3.5。 $X = \pi(\Lambda) \cap B(0,\ 5)$ 是 ν-在线上多孔，尺度范围为 $\alpha_0 = 0$ 至$\alpha_1 > 0$ ，且

$$\nu = \frac{1}{200 C_{\mathrm{out}} \tilde{C}_{\mathrm{arc}}^2} \qquad \alpha_1 = \frac{1}{10 C_{\mathrm{out}} \tilde{C}_{\mathrm{arc}}}\,, \tag{3.8}$$

其中 $\tilde{C}_{\mathrm{arc}}$ 定义于(3.11) ， 而 C_{out} 定义于(3.12)。

更确切地说，该定理指出，对于任意长度为$r \in [0, \alpha_1]$的线段 $I \subset \mathbb{R}^2$ ，存在一个半径为 νr 的球 B ，其球心位于 I上的某一点，使得$B \cap X = \emptyset$。

我们首先将 Λ 上的 δ正则性和三点条件 (3.6)、(3.7) 解释为 $\pi(\Lambda)$ 上的局部欧几里得版本（为简便起见，我们仍沿用球面上的相同记号）

$$\frac{1}{\tilde{C}_\mu} r^\delta \le \mu(B_{\mathbb{R}^2}(x_0, r) \cap \pi(\Lambda)) \le \tilde{C}_\mu r^\delta, \quad \forall\, x_0 \in \pi(\Lambda) \cap B(0,10), r \in [0,1]\,, \tag{3.9}$$

$$\min_{j=1,2} \mathrm{diam}_{\mathbb{R}^2}(\pi(\gamma_j) \cap B(0,10)) \le \tilde{C}_{\mathrm{arc}} |z_1 - z_2| \quad \forall\, z_1, z_2 \in \pi(\Lambda) \cap B(0,10)\,, \tag{3.10}$$

其中新的常数 C_μ 和 C_{arc} 可以取为

$$\tilde{C}_\mu = 20000 C_\mu, \quad \tilde{C}_{\mathrm{arc}} = 200 C_{\mathrm{arc}}\,. \tag{3.11}$$

我们以下述引理开始证明。该引理表明，由于带有 $\delta > 1$ 的 δ-正则性， X 不可能集中在线的一个小邻域内。

引理 3.6。 存在一个常数 $C_{\mathrm{out}} \geq 1$，使得对于任意点 $x \in X$、任意直线$L \subset \mathbb{R}^2$ 以及任意 $r \in (0, 1/2)$，我们都可以找到一点 $y \in B(x, r) \cap \pi(\Lambda)$，使得

$$\operatorname{dist}(y, L) \geq r/C_{\mathrm{out}} .$$

实际上，我们可以取

$$C_{\mathrm{out}} = 2(4 \cdot 5^{\delta} \tilde{C}_{\mu}^{2})^{\frac{1}{\delta - 1}} , \tag{3.12}$$

其中 $\delta = \text{维数}_H \Lambda \in (1,2)$ 是 Λ 的正则性参数。

证明。 这里的论证受到 [MS09, 引理 2.1] 的启发。对于每个 $r' \in (0, r]$，我们可以应用标准覆盖引理（例如参见 [Mat95, 定理 2.1]），得到一族互不相交的球 $\{B(x_i, r')\}_{1 \leq i \leq m}$，使得对所有 i

$$x_i \in B(x, r) \cap \pi(\Lambda) \subset \bigcup_i B(x_i, 5r) .$$

利用 δ-正则性条件 (3.9) 以及关系式

$$\sum_i \mu(B(x_i, r') \cap \pi(\Lambda)) \leq \mu(B(x, 2r) \cap \pi(\Lambda))$$

$$\mu(B(x, r) \cap \pi(\Lambda)) \leq \sum_i \mu(B(x_i, 5r') \cap \pi(\Lambda)) ,$$

我们知道这些球的数量 m 有限，且满足

$$\frac{1}{5^{\delta} \tilde{C}_{\mu}^{2}} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\delta} \leq m \leq \tilde{C}_{\mu}^{2} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\delta} . \tag{3.13}$$

我们断言，当 r' 足够小时，必定存在某个 $y = x_{i_0}$，其到直线 L 的距离至少为 $\frac{\sqrt{3}}{2} r'$。事实上，反证，若每个 x_i 到直线 L 的距离都至多为 $\frac{\sqrt{3}}{2} r'$，那么 $B(x_i, r')$ 与 L 的交集是 L 的一个开区间，长度至少为 r'。我们注意到，所有这类区间彼此不相交，且都包含在 $B(x, 2r)$ 中。这就迫使区间的数量 m 满足

$$mr' \leq 4r,$$

从而，如果我们取，就会与 (3.13) 矛盾。

$$r' = \frac{0.99r}{(4 \cdot 5^{\delta} \tilde{C}_{\mu}^{2})^{\frac{1}{\delta - 1}}} .$$

这就证明了该引理，其中

$$C_{\mathrm{out}} = 2(4 \cdot 5^{\delta} \tilde{C}_{\mu}^{2})^{\frac{1}{\delta - 1}} .$$

□

我们还将用到以下初等引理，可通过逐一计算所有情形加以验证。此处省略证明。

引理 3.7. 设 $a_1, \ldots, a_5$ 是 1、2、3、4、5 的一个排列。那么存在指标$i_1 < i_2 < i_3$，使得 $a_{i_1} < a_{i_2} < a_{i_3}$ 或 $a_{i_1} > a_{i_2} > a_{i_3}$。

现在我们准备好证明命题 3.5。

命题 *3.5* 的证明。 用反证法，假设集合 X 未能 在某条长度为 $r \in [0, \alpha_1]$ 的线段 $I \subset \mathbb{R}^2$ 上成为 ν-多孔的，其中 ν 和 α_1 如 (3.8) 中所给。

令 L 表示延伸 I的直线。由引理 3.6，我们可以选取一点 $q \in \pi(\Lambda) \cap B(0,6)$, 使得

$$\operatorname{dist}(q, L) \geq \frac{1}{2C_{\text{out}}}.$$

由于 X 在 I 上不是 ν-多孔的，因此在 I 中至少存在五个不同的点 $\{p_i\}_{1 \leq i \leq 5}$，使得:

- 两两之间的距离满足
$$\operatorname{dist}(p_i, p_j) \geq \frac{r}{10} \qquad \forall\, i \neq j,$$
- 每个开球 $B(p_i, \nu r)$ 都包含一个点 $q_i \in X$。

注意，每个 q_i 都相对靠近 L，而 q 则远得多。

于是，三点条件 (3.10) 与引理 3.7 保证，在五个点 $\{p_i\}$ 中，存在三个点 —— 舍弃另外两个点 p_4，p_5及其对应的 q_4，q_5后，仍记作 p_1，p_2，p_3 ——使得:

- 对每个 $j = 1$，2、3，都存在一个点 $q_j \in B(p_j, \nu r) \cap X$。
- 点 q_1，q_2，q_3，q按照循环顺序排列在 $\pi(\Lambda)$ 上 r
$$q_1 \to q_2 \to q_3 \to q \to q_1, \tag{3.14}$$

回想一下，Λ 同胚于 S^1。

在线段 I 上，点 p_2 位于 p_1 和 p_3 之间。

现在，我们将每个 p_i 替换为 q_i 在 L 上的正交投影；这一替换不会改变 p_1、p_2、p_3 的相对位置。

辅助点 q 的作用是将弧条件局部化，从而控制弧在 I 附近的行为。在下文中，我们将 $\pi(\Lambda)$ 上连接 q_i 和 q_j 且不 经过 q 的弧记为 $[q_i, q_j]$ 。我们还使用记号 $q \to q_i$ 或 $q_i \to q$ 表示连接这两点的定向弧，该记号与 (3.14) 中的循环顺序一致。

接下来，我们将引理 3.6 应用于直线 L 和以 q_2 为中心、半径为 $\frac{r}{15\tilde{C}_{\text{arc}}}$ 的球—— $B_{\frac{r}{15\tilde{C}_{\text{弧}}}}(q_2)$。因此，我们得到球 $q_4 \in \pi(\Lambda) \cap B_{\frac{r}{15\tilde{C}_{\text{弧}}}}(q_2)$ 上的一点，该点到 L 的距离至少为 $\frac{r}{15\tilde{C}_{\text{arc}}C_{\text{out}}}$，而 $|q_2 - q_4| \leq \frac{r}{15\tilde{C}_{\text{arc}}}$。

因此，三点条件 (3.10) 要求 q_4 位于弧 $[q_1, q_3]$ 上。事实上，如果 $q_4 \in [q, q_1]$（或 $q_4 \in [q_3, q]$），那么对于点对

$(q_2,\ q_4)$，三点条件就会失效，因为连接 q_2 和 q_4 的弧必须经过 q_1 （或 q_3）或 $q_\circ$ 要看出这一点，请注意

$$\begin{aligned}
|q_2-q_1| &\geq |p_2-p_1|-|q_2-p_2|-|q_1-p_1| \\
&\geq \frac{r}{10}-2\nu r \geq \frac{r}{15}, \\
|q_2-q_3| &\geq \frac{r}{15} \qquad \text{(by the same argument as for } |q_2-q_1|), \\
|q_2-q| &\geq \operatorname{dist}(q,L)-\nu r \\
&\geq \frac{1}{2C_{\text{out}}}-\nu r \gg 100r.
\end{aligned}$$

因此，在可能的情况下交换 q_1 和 q_3 的角色后，我们可以假设 $q_4 \in [q_1,q_2]_\circ$ 我们规定，沿着 I，点 p_1 位于 p_2 的左侧，而 p_3 位于 p_2 的右侧。

定义 q_5 为集合中的点

$$[q_4,q_3]\cap\left\{q\in\mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(q,L)\leq 2\nu r\right\}$$

其在 L 上的正交投影（记为 p_5）位于 p_1 和 p_2 之间，且距离 p_2 最远。注意，该集合非空且紧致；根据我们对条带宽度 ν 的选择，它包含 q_2 ；此外， q_5 可能与 q_2 重合。

应用 将三点条件 (3.10) 应用于有序三元组 $q_1\to q_4\to q_5$ ，得到

$$\begin{aligned}
|q_1-q_5| &\geq \tilde{C}_{\text{arc}}^{-1}|q_4-q_1| \geq \frac{r}{20\tilde{C}_{\text{arc}}}, \\
|p_1-p_5| &\geq |q_1-q_5|-|q_5-p_5|-|q_1-p_1| \\
&\geq |q_1-q_5|-\operatorname{dist}(q_5,L)-\nu r \\
&\geq \frac{r}{100\tilde{C}_{\text{arc}}}.
\end{aligned}$$

令 p_6 为从 p_5 沿着 L 向左移动距离 $2\nu r$ 后得到的点。上述估计表明，沿着 I，点 p_1、 p_6、 p_5 和 p_2 从左到右依次出现。所有选取点的配置见图2。

我们断言 以 p_6 为中心、半径为 $2\nu r$ 的开球 B 不 与$\pi(\Lambda)$相交，因此也不与 X 相交——这就产生了矛盾。事实上：

- 对于任意 $x\in B$，其在 L 上的投影都位于 p_5 左侧；根据 p_5 的构造，我们有 $[q_4,q_3]\cap B=\emptyset_\circ$
- 如果 $x\in B$ 位于弧 $q\to q_1\to q_4$上，那么由于 q 距离很远， q_4 必定位于较短的弧 $[x,q_5]$上。然而，

$$|q_4-q_5| \geq d(q_4,L)-d(q_5,L) \geq \frac{r}{16\tilde{C}_{\text{arc}}C_{\text{out}}}$$

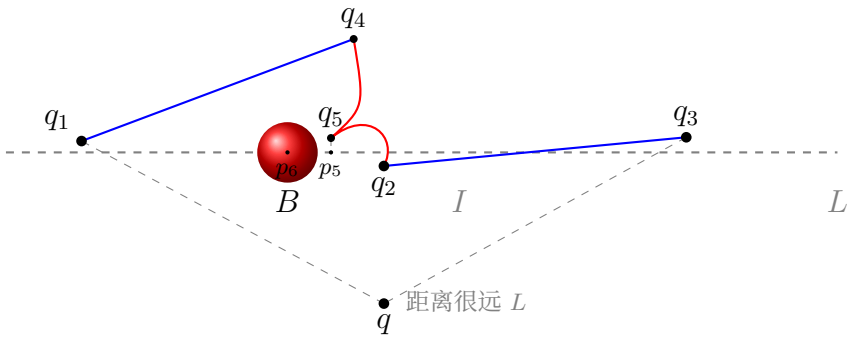


FIGURE 2. 命题 3.5 证明中论证的示意图。水平虚灰线是 L，由线段 I 延伸而来，大致经过 q_1 和 q_3之间。每个 q_i 都位于 X中，而每个 p_i 都位于I上。点 q 属于 X ，但距离 L很远。红球 B连同点 q_1、 q_2、 q_3和 q_5，都非常接近 L（νr）。点 q_4 与 q_2 较为接近，但并未达到中等程度的极近 L。点 p_5 是弧 $[q_4, q_3]$ 的投影下确界，位于 B的边界上；B是 X中的一个孔洞。

and

$$|x - q_5| \le |x - p_6| + |p_6 - p_5| + |p_5 - q_5| \le 6\nu r \le \frac{r}{30\tilde{C}_{\mathrm{arc}}^2 C_{\mathrm{out}}},$$

这与三点条件相矛盾。

- 如果 $x \in B$ 位于弧 $q_3 \to q$上，那么

$$|q_5 - q_3| \ge |q_2 - q_3| - 4\nu r \ge \frac{r}{11}, \qquad |x - q_5| \le 6\nu r \le \frac{r}{30\tilde{C}_{\mathrm{arc}}^2 C_{\mathrm{out}}},$$

这与应用于 $q_5 \to q_3 \to x$的三点条件矛盾。

因此，存在一个半径为 $2\nu r$ 、以 p_6 为中心且位于 I 上的球，它与 X 不相交，由此得到矛盾。因此，在任意长度为 $r \in [0, \alpha_1]$ 的线段 $I \subset \mathbb{R}^2$ 上， X 都必定是 ν-多孔的，证明至此完成。□

3.2. 定理 1.3 的证明。 按照 [DZ16 中的论证，定理 3], 只需证明命题 3.2 中陈述的双曲傅里叶不确定性原理。通过立体投影，我们进一步将问题化简为证明命题 3.3——其指数为 (3.3) 中 β 所给出的双曲傅里叶不确定性原理的欧几里得版本。从标准傅里叶不确定性原理 (1.1) 及其对称形式 (1.3) 推导出双曲傅里叶不确定性原理 (3.2) 及其欧几里得对应形式 (3.4)，现在已是常规步骤；一维情形参见 [BD18 第 4] 节，高维情形参见[KM25 第 4] 节。核心思路是将标准傅里叶不确定性原理推广到傅里叶积分算子。为方便读者，我们在下文列出这一化简中的关键引理，完整细节请参见 [BD18、KM25] 。

回顾对称不确定性原理 (1.3)。设 $X_+,\ X_- \subset B_{\mathbb{R}^2}(0,\ R)$ 是两个集合，它们在从 0 到 1 的所有尺度上都ν-线上多孔，其中 $R>0$ 是一个较大的常数。那么，定量傅里叶不确定性原理给出

$$\|\mathbf{1}_{X_-(h)}\mathcal{F}_h\mathbf{1}_{X_+(h)}\|_{L^2\to L^2}\le Ch^{\beta},$$

其中 $\mathcal{F}_h$ 是半经典傅里叶变换

$$\mathcal{F}_hf(\xi)=(2\pi h)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i\,x\cdot\xi/h}f(x)\,dx,$$

指数 $\beta=\beta(\nu)$ 有显式表达式，常数 C 仅依赖于 R 和 ν。

第一个引理是关于变振幅算子的傅里叶不确定性原理；它本质上与 [BD18，命题 4.2] 以及 [KM25，引理 4.13]相同（证明也类似）。考虑如下形式的算子 $A=A_a(h):L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^2)$

$$A_a(h)f(x)=(2\pi h)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-ix\cdot\xi/h}\,a(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi,$$

其中 $a(x,\ \xi)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 满足

$$\sup|\partial_x^ka|\le C_{k,a},\qquad \operatorname{diam}\big(\operatorname{supp}a\big)\le C_a$$

对每个多重指标 k，以及某些常数 $C_{k,\ a},\ C_a$。

引理3.8。设 $\beta=\beta(\nu)$ 且 $C_1>0$。对于每个 $\rho\in(1/2,1]$，存在一个常数C，它仅取决于 $C_{k,a},C_a,R,\nu,\rho$ 和 C_1，使得对于所有 h

$$\|\mathbf{1}_{X_-(C_1h^\rho)}A(h)\mathbf{1}_{X_+(C_1h^\rho)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^2)}\le Ch^{\beta-2(1-\rho)}.$$

注 3.9。指数损失 $2(1-\rho)$ 是因为我们需要使用 $h^{\rho-1}$个尺度为 h 的集合来覆盖 $X_\pm(C_1h^\rho)$。

接下来，我们需要考虑具有一般相位的傅里叶积分算子。设$B=B_{\Phi,\chi}(h):L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^2)$ 具有如下形式

$$B_{\Phi,\chi}(h)f(x)=(2\pi h)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2}e^{i\Phi(x,x')/h}\chi(x,x')f(x')\,dx',$$

其中我们假设

$$\Phi(x,x')\in C^\infty(B(0,R);\mathbb{R}),\quad \chi\in C_c^\infty(B(0,R)),\quad \det\,(\partial^2_{xx'}\Phi)\neq0\text{ on }B(0,R).$$

注意，我们使用记号

$$\partial^2_{xx'}\Phi=\begin{pmatrix}\partial^2_{x_1x_1'}\Phi & \partial^2_{x_1x_2'}\Phi\\ \partial^2_{x_2x_1'}\Phi & \partial^2_{x_2x_2'}\Phi\end{pmatrix}.$$

于是我们得到算子 B 上的如下傅里叶不确定性原理，这与[BD18, 命题 4.3]和 [KM25, 命题 4.14]基本相同。证明与 [KM25, 命题 4.14]完全相同。

命题 3.10. 假设存在常数 $C_2 \geq 1$ 和一个邻域 U，使得$\operatorname{supp} b$ 满足

$$\max(\|\partial^2_{xx'}\Phi\|, \|(\partial^2_{xx'}\Phi)^{-1}\|) \leq C_2 \quad in\ U \tag{3.15}$$

其中，$\|\cdot\|$ 是矩阵 2×2 在 $\mathbb{R}^2$的 ℓ^2 范数下的算子范数。于是，对于$\rho \in (3/4,1)$，并且

$$\beta = \beta\left(\frac{\nu}{2C_2^2}\right)$$

存在一个与 h无关的常数 $C>0$，使得对所有 h

$$\|\mathbf{1}_{X_-(C_1h^\rho)}B(h)\mathbf{1}_{X_+(C_1h^\rho)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Ch^{\beta/2-2(1-\rho)}.$$

注 3.11。 根据 KM25 命题 4.14], 之后的评注，在命题 3.10 的一维版本中，指数β 仅依赖于 ν，而与 Φ无关；这一点已由 BD18 命题 4.3]证明。在高维情形下，由于在 $\partial'_x\Phi$ 下的变换会改变多孔常数 ν，指数 β 依赖于相位函数 Φ。

然而，我们不能直接应用命题 3.10 来证明 (3.4)，因为对于 (3.5) 中的特定 Φ，$\partial^2_{zw}\Phi$ 的范数在对角线 $z=w$附近非常大。幸运的是，我们可以使用 BD18 命题 4.3] 证明中采用的缩放技巧，从而得到一个相对一致的指数 β，同时放宽对相位的限制。

命题 3.12. 假设存在常数 $C_3 \geq 1$ 和支集支集 b 的一个邻域 U，使得

$$\frac{s_{\max}(\partial^2_{xx'}\Phi)}{s_{\min}(\partial^2_{xx'}\Phi)} \leq C_3 \quad in\ U \tag{3.16}$$

其中 $s_{\max}$ 和 $s_{\min}$ 分别是最大和最小奇异值。则对于 $\rho \in (3/4,\ 1)$，并且

$$\beta = \beta\left(\frac{\nu}{4C_3}\right)$$

存在一个与 h 无关的常数 $C>0$，使得对于所有 h

$$\|\mathbf{1}_{X_-(C_1h^\rho)}B(h)\mathbf{1}_{X_+(C_1h^\rho)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Ch^{\beta/2-2(1-\rho)}.$$

证明. 我们首先用有限个小球覆盖支集。对于每个 $(x_0,\ x_0') \in$ 支集 b，我们都可以找到一个小邻域球 $B_0 = B(x_0,\ x_0') \subset \mathbb{R}^4$，使得对于所有 $(x,\ x') \in B_0$，都有

$$M/\sqrt{2} < s_{\max}(\partial^2_{xx'}\Phi(x,x')) < \sqrt{2}M, \quad m/\sqrt{2} < s_{\min}(\partial^2_{xx'}\Phi(x,x')) < \sqrt{2}m$$

其中 $M := s_{\max}(\partial^2_{xx'}\Phi(x_0,\ x_0'))$ 且 $m := s_{\min}(\partial^2_{xx'}\Phi(x_0,\ x_0'))$。令 $\lambda := \sqrt{Mm} \geq \overline{c_\Phi} > 0$。现在，我们考虑定义为 $\tilde{\Phi} = \lambda^{-1}\Phi$ 的新相位函数 $\tilde{\Phi}$。我们有$B(h) = \lambda^{-1}\tilde{B}(\lambda^{-1}h)$，其中新算子 $\tilde{B}(h)$ 定义为

$$\tilde{B}(h)f(x) = (2\pi h)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\tilde{\Phi}(x,x')/h}\chi(x,x')f(x')\,dx',$$

对于任意支集于 B_0 上的 b。由于 $\tilde{\Phi}$ 满足条件 (3.15)，且$C_2 = \sqrt{2}C_3$ 和˜，通过对一般的 b 应用单位分解，我们得到 $B(h)$ 的所需估计，进而得到 $B(h)$ 的估计，其中指数为 $\beta = \beta(\frac{\nu}{4C_3})$，且常数 C 非常大，并且与 h 无关，但依赖于 Φ。□

注 3.13。 注意这里 β 也依赖于 Φ。

我们现在可以证明定理 1.3 了。

命题 *3.3* 和定理 *1.3* 的证明。 只需证明 (3.4)，其中指数 β由 (3.3) 给出。我们将针对特定的相位使用命题 3.12。根据 (3.5) 中相位函数 Φ 的定义，我们可以直接计算

$$\partial^2_{xx'}\Phi = \frac{1}{R^2}(-I + 2vv^T)$$

其中

$$R = |x - x'| > 0, \quad v = (x - x')/R \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2.$$

注意到这个二阶导数矩阵在对角线上发散。然而，它仍满足相位条件 (3.16)，其中 $C_3 = 1$。

现在，我们对算子 $B = B_\chi(h)$ 应用命题 3.12，其中特定相位Φ 取自 (3.5)，并且满足相位条件 (3.16)，其中

$$C_3 = 1,$$

以及集合

$$X_- = X_+ = 10C_{\text{out}}\tilde{C}_{\text{arc}}X$$

根据命题 3.5，该集合在从尺度 0 到 1 的范围内在线上是 ν-多孔的，其中孔隙参数 ν 由 (3.8) 给出。由此得出 FUP 估计 (3.4)，其中 $\beta = \frac{1}{2}\beta(\nu/4)$。

根据 (3.12) 和 (3.11)，我们有估计

$$\nu > \frac{1}{2 \cdot 10^7 (10^{11} C_\mu^2)^{1/(\delta-1)} C_{\text{arc}}^2}.$$

因此我们实际上可以取

$$\beta = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{1}{10^8 (10^{11} C_\mu^2)^{1/(\delta-1)} C_{\text{arc}}^2}\right),$$

其中， C_μ 和 C_{arc} 的定义见（3.6）和（3.7）。

至此，双曲傅里叶不确定性原理的证明完成——即指数为 β 的命题 3.3（见 (3.3)），因此也完成了定理 1.3，其具有相同的显式谱隙 β。□

3.3. 圆上的傅里叶不确定性原理与福克斯群的共振。我们从例 2.4 中回顾到，圆上的傅里叶不确定性原理不能由定理 1.1 推出。因此，前面几个小节中的论证不适用于福克斯群。本小节通过变量分离显式确定预解式的所有极点，从而证明福克斯双曲 3-流形存在本质谱隙。当极限集为真圆时，此分析适用；此时商流形 $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ 与一个扭曲积空间等距。

扭曲乘积结构。设 Γ 是第一类凸余紧福克斯群，因此其极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 是整个圆 $\mathbb{S}^1 \subset \partial\mathbb{H}^3$。令 $CH(\Lambda)$ 表示 $\Lambda(\Gamma)$ 在 $\mathbb{H}^3$ 中的凸包。如 Rat06 第 6.1–6.2] 节所示， [$CH(\Lambda)$ 是一个与 $\mathbb{H}^2$ 等距的全测地双曲平面。由于 Γ 保持 $CH(\Lambda)$ 不变，商空间

$$\Sigma := \Gamma\backslash CH(\Lambda)$$

是一个紧双曲曲面（ Γ 中不存在抛物元素，保证了其紧致性）。 Σ 在 M 中的法向指数映射给出一个全局微分同胚

$$\exp : N\Sigma \simeq \Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow M,$$

其中 $N\Sigma$ 是 Σ 的法丛。由于 Σ 是全测地的， M 上的诱导度量具有如下明确的扭曲乘积形式

$$M \cong \big(\mathbb{R}_t \times \Sigma_x,\ dt^2 + \cosh^2 t\ dS(x)\big), \tag{3.17}$$

其中 dS 是 Σ 上的黎曼度量。详情另见 [DD13，附录 A] 。

预解式与变量分离。扭曲积结构 (3.17) 使我们能够通过变量分离，显式计算 $-\Delta$ 上 M 的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的共振。考虑预解式

$$\mathcal{R}(s) = \big(-\Delta - s(2-s)\big)^{-1},$$

最初定义于 $\mathrm{Re}\, s > 1$ ，随后亚纯延拓至 $\mathbb{C}$。在扭曲积坐标 $(t,\ x)$ 中，拉普拉斯算子写作

$$-\Delta = -\partial_t^2 - 2\tanh t\,\partial_t + \frac{1}{\cosh^2 t}(-\Delta_\Sigma), \tag{3.18}$$

其中， Δ_Σ 是紧双曲曲面 Σ上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子。

令 $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $L^2(\Sigma)$ 的标准正交特征基，满足

$$-\Delta_\Sigma \phi_k = \mu_k \phi_k, \qquad 0 = \mu_0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \to +\infty.$$

将任意函数 $u(t,\ x) \in C^\infty(M)$ 展开为 $u(t,\ x) = \sum_k u_k(t)\phi_k(x)$，并利用乘积表示式 (3.18)，方程 $(-\Delta - s(2-s))u = v$ 对于每个 k 都化为

常微分方程

$$-u_k''(t) - 2\tanh t\, u_k'(t) + \Big(-s(2-s) + \frac{\mu_k}{\cosh^2 t}\Big)u_k(t) = v_k(t). \tag{3.19}$$

代换 $u_k(t) = (\cosh t)^{-1} f_k(t)$ 将 (3.19) 变换为

$$-f_k''(t) + \frac{\mu_k}{\cosh^2 t}\, f_k(t) + (s-1)^2 f_k(t) = v_k(t). \tag{3.20}$$

方程 (3.20) 是一个一维薛定谔方程，其势为 Pöschl–Teller 势 $V_k(t) = \mu_k/\cosh^2 t$，能量参数为 $E = -(s-1)^2$（参见 [Bor16，第 5.1] 节）。记

$$\mathcal{R}_k(\lambda) := \big(-\partial_t^2 + V_k - \lambda^2\big)^{-1}, \qquad \lambda = i(s-1),$$

薛定谔算子 $-\partial_t^2 + V_k$ 在 $\mathbb{R}$ 上的亚纯延拓预解算子。其散射极点是经典结果：对于 $k \geq 1$，它们位于

$$\lambda = \pm\sqrt{\mu_k - \tfrac{1}{4}} - i\big(n + \tfrac{1}{2}\big), \qquad n \in \mathbb{N},$$

而对于 $k = 0$，唯一的极点位于 $\lambda = 0$（即 $s = 1$）。由于 M 上的完整预解式 $\mathcal{R}(s)$ 可分解为直和

$$\mathcal{R}(s) = (\cosh t)^{-1} \bigoplus_k \mathcal{R}_k(i(s-1))\,,$$

其共振由这些一维数据得出。对于 $k \geq 1$，极点 $s_{k,n}^{\pm}$ 可明确写为

$$s_{k,n}^{\pm} = \frac{1}{2} - n \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \mu_k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

连同可能出现在 $s = 1$（源自 $k = 0$）处的简单极点，这些构成了 $-\Delta$ 在 M上的全部共振。

谱隙。由于特征值 $\mu_k \to \infty$ 如 $k \to \infty$，公式 (3.21) 表明，除 $s = 1$ 外，所有共振都满足 $\operatorname{Re} s \leq \frac{1}{2}$。因此，算子 $-\Delta$ 具有本质谱隙：满足 $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ 的共振只有有限个。将谱参数转换为定理 1.3 中采用的约定 $-\Delta - 1 - \lambda^2$，可得以下结果。

命题 3.14。设 $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ 是一个凸共紧双曲3维流形，其极限集 $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{S}^2$ 是真圆。那么亚纯预解式

$$R(\lambda) = \big(-\Delta - 1 - \lambda^2\big)^{-1}$$

在半平面 $\operatorname{Im}\lambda > -\frac{1}{2}$ 中至多有一个极点 $\lambda = 0$。也就是说，M具有大小为 $\beta = \frac{1}{2}$ 的本质谱隙。

注 3.15。该命题与定理 1.3 一起解决了所有 准福克斯群的谱隙问题。类比定理 1.3，我们预期有如下截断预解式估计：

$$\big\|\chi R(\lambda)\chi\big\|_{L^2(M)\to L^2(M)} \le \widetilde{C}_{\chi,\epsilon}\,|\lambda|^{-1-2\min(0,\operatorname{Im}\lambda)+\epsilon}, \qquad \operatorname{Im}\lambda \in \big[-\tfrac{1}{2}+\epsilon,\ 1\big],\ |\operatorname{Re}\lambda| \ge C_\epsilon.$$

因子 $|\lambda|^{-1-2\min(0,\operatorname{Im}\lambda)+\epsilon}$ 反映了预解式在指定条带中的多项式衰减，误差至多为任意小的 ϵ。虽然纯粹的谱论论证可以给出预解式界（指数或许不是最优的），但下面我们将给出针对圆的直接双曲傅里叶不确定性原理，从而得到最优的谱隙。

针对圆的双曲傅里叶不确定性原理。假设极限集是赤道

$$\Lambda = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ z=0\big\}.$$

引入球坐标 $w = w(\theta,\ \phi)$，其中 $\theta \in (-\pi/2,\ \pi/2)$，且 $\phi \in (0,\ 2\pi)$，定义如下

$$x = \cos\theta\cos\phi, \qquad y = \cos\theta\sin\phi, \qquad z = \sin\theta.$$

对于 $w' = w'(\theta',\ \phi') \in \Lambda_{(Ch^\rho)} \subset \mathbb{S}^2$，我们记

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\chi(h)\big(\mathbf{1}_{\Lambda(Ch^\rho)}f\big)(w) &= (2\pi h)^{-1}\int_{\mathbb{S}^2} |w-w'|^{2i/h}\,\chi(w,w')\,\mathbf{1}_{\Lambda(Ch^\rho)}(w')\,f(w')\,dw' \\ &= (2\pi h)^{-1}\int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho}\int_0^{2\pi} |w-w'|^{2i/h}\,\chi(w,w')\,\mathbf{1}(|\sin\theta'| \le Ch^\rho) \\ &\qquad\qquad \times f(\theta',\phi')\,\cos\theta'\,d\phi'\,d\theta'.\end{aligned}$$

在 $\theta = \theta' = 0$ 附近展开 χ，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\chi(h)\big(\mathbf{1}_{\Lambda(Ch^\rho)}f\big)(w) &= (2\pi h)^{-1}\int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho}\int_0^{2\pi} |w-w'|^{2i/h}\,\chi_0(\phi,\phi')\,\mathbf{1}(|\sin\theta'| \le Ch^\rho) \\ &\qquad\qquad \times f(\theta',\phi')\,d\phi'\,d\theta' \ +\ R(h)f \\ &= h^{-1/2}\int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} T(h,\theta,\theta')\big(f(\theta',\cdot)\big)(\phi)\,\mathbf{1}(|\sin\theta'| \le Ch^\rho)\,d\theta' \ +\ R(h)f,\end{aligned}$$

其中 $\chi_0(\phi,\ \phi') = \chi(\theta=0,\ \theta'=0,\ \phi,\ \phi')$、$R(h) = \mathcal{O}(h^\rho)_{L^2(\mathbb{S}^2)\to L^2(\mathbb{S}^2)}$ 以及 $T(h,\ \theta,\ \theta')$ 是一个一维傅里叶积分算子，对 $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ 定义如下：

$$T(h,\theta,\theta')f(\phi) = (2\pi)^{-1}h^{-1/2}\int_0^{2\pi} \exp\big(i\Phi_{\theta,\theta'}(\phi,\phi')/h\big)\,\chi_0(\phi,\phi')\,f(\phi')\,d\phi',$$

其相位为

$$\begin{aligned}\Phi_{\theta,\theta'}(\phi,\phi') = \ln\big[&(\sin\theta-\sin\theta')^2 + (\cos\theta\cos\phi-\cos\theta'\cos\phi')^2 \\ &+ (\cos\theta\sin\phi-\cos\theta'\sin\phi')^2\big].\end{aligned}$$

算子 T 在充分小的 θ,θ' 下是一致 $L^2(\mathbb{S}^1_{\phi'}) \to L^2(\mathbb{S}^1_\phi)$ 有界的。事实上，当 $\theta = \theta' = 0$ 时，它可化为 [DZ16 中的模型算子 (1.6)]，其中 $n = 2$;

当 θ, θ' 较小时，相位在 χ_0 的支集上仍然非退化，并且由标准的 TT^* 论证可得一致的 L^2-有界性。

令 $g(w) = \mathbf{1}_{\Lambda(Ch^\rho)} \mathcal{B}_\chi(h) \mathbf{1}_{\Lambda(Ch^\rho)} f(w) - R(h) f(w)$。根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 &\le \int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} \int_0^{2\pi} |g(\theta,\phi)|^2 \, d\phi \, d\theta \\
&\le \int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} h^{-1} \int_0^{2\pi} \Big(\int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} \big| T(h,\theta,\theta') f(\theta',\cdot)(\phi) \big| \, d\theta' \Big)^2 d\phi \, d\theta \\
&\le \int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} 2Ch^{-1+\rho} \int_0^{2\pi} \int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} \big| T(h,\theta,\theta') f(\theta',\cdot)(\phi) \big|^2 d\theta' \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} 2Ch^{-1+\rho} \int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} \big\| T(h,\theta,\theta') f(\theta',\cdot) \big\|_{L^2(\mathbb{S}^1_\phi)}^2 d\theta' \, d\theta \\
&\lesssim \int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} h^{-1+\rho} \int_{-2Ch^\rho}^{2Ch^\rho} \int_0^{2\pi} |f(\theta',\phi')|^2 \, d\phi' \, d\theta' \, d\theta \\
&\lesssim h^{-1+2\rho} \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2.
\end{aligned}$$

因此，估计式 (3.2) 对指数 $\beta = 1/2$ 及任意 $\epsilon > 0$成立。综上，

命题 3.16。若 $\Lambda = \mathbb{S}^1$，则

$$\big\| \mathbf{1}_{\Lambda(C_1 h^\rho)} \mathcal{B}_\chi(h) \mathbf{1}_{\Lambda(C_1 h^\rho)} \big\|_{L^2(\mathbb{S}^2) \to L^2(\mathbb{S}^2)} \le C h^{1/2-\varepsilon}, \qquad h \in (0, 1/100).$$

Co因此，预解式具有大小为 $1/2$ 的谱隙，并满足

$$\big\| \chi R(\lambda) \chi \big\|_{L^2(M) \to L^2(M)} \le \widetilde{C}_{\chi,\epsilon} \, |\lambda|^{-1-2\min(0, \operatorname{Im}\lambda)+\epsilon},$$

对所有满足虚部 $\lambda \in [-\frac{1}{2} + \epsilon, 1]$ 且 $|$实部 $\lambda| \ge C_\epsilon$的 λ，

注记 3.17。仅凭圆周测度的粗略傅里叶衰减无法得到傅里叶不确定性原理的尖锐指数。尽管如此，同样的分离变量技巧表明，对于任意 $C_1 > 0$，存在 $C > 0$，使得当 $X = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ 时，

$$\big\| \mathbf{1}_{X(C_1 h)} \mathcal{F}_h \mathbf{1}_{X(C_1 h)} \big\|_{L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)} \le C h^{-1/2}.$$

Appendix A. Some useful lemmas

为方便读者，我们列出 [Coh25b], 中关于多孔集的关系、变换、限制与测度的若干技术引理。

引理 A.1 ([Coh25b] 引理 A.3)。设 $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在从尺度h 到 1 的球上是 ν-多孔的。那么，对于所有满足$L^{-n} \ge h$的 $n \ge 0$，$\mathbf{X}$ 在尺度 $L = \lceil \nu^{-1} \sqrt[]{d} \rceil$ 上是深度为 n 的盒孔隙的。

引理 A.2 ([Coh25b] 引理 A.5). 设$\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ 在从尺度 α_0到 α_1的范围内是 ν-线上多孔的。

(a) 设 $\alpha_0 < r < \alpha_1$ 且 $\nu' < \nu$。则$\mathbf{X} + B_r$ 在从尺度$r/(\nu - \nu')$ 到 α_1的范围内是 ν'-线上多孔的。*(b)* 对任意 $s > 0$，膨胀后的 $s \cdot \mathbf{X}$ 在从尺度 $s\alpha_0$ 到 $s\alpha_1$的范围内是 ν-线上多孔的。*(c)* 设 $\ell \subset \mathbb{R}^d$ 为一条直线。令$\mathbf{X}|_\ell = \mathbf{X} \cap \ell$，并将$\mathbf{X}|_\ell$ 视为 $\mathbb{R}$的子集。则$\mathbf{X}|_\ell$在从尺度 α_0 到 α_1的范围内是 ν-多孔的。

引理 A.3 ([Coh25b] 引理 A.6)。 设 $\mathbf{X} \subset [-1,1]^d$ 在尺度 L 上是盒孔隙的，深度为 n，对所有 $0 \le n < N$均成立。那么勒贝格测度

$$|\mathbf{X}| \le 2^d (1 - L^{-d})^N .$$

引理 A.4 ([Coh25b] 引理 A.7)。 设 $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^d$ 在从尺度 α_0到 α_1的球上是 ν-多孔的。那么对于任意半径为 $\alpha_0 < R < \alpha_1$的球 B，

$$|\mathbf{X} \cap B| \le C_d R^d \left(\frac{\alpha_0}{R}\right)^\gamma .$$

其中 γ 可取为

$$\gamma = \frac{\nu^d}{C_d(1 + |\log \nu|)}$$

证明。 我们使用引理 A.1，将问题归结为证明盒孔隙集的情形。设Q 是包含 B的一个 $2R$-立方体。令 $\mathbf{X}' = R^{-1} \cdot (Q \cap \mathbf{X}) \subset [-1,1]^d$ 为 $\mathbf{X}$ Q ∩的一个平移和缩放副本。那么 $\mathbf{X}'$ 在从尺度 $\frac{\alpha_0}{R}$到 1 的球上是 ν-多孔的，因此它在尺度 $L = \lceil \nu^{-1}\sqrt{d} \rceil$ 上也是盒孔隙的，深度为 n，对所有满足 $L^{-n} \ge \frac{\alpha_0}{R}$的 $n \ge 0$ 均成立。设$N > 0$ 为满足 $L^{-N} < \frac{\alpha_0}{R}$的最小整数。根据引理 A.3

$$|\mathbf{X} \cap B| \le R^d |\mathbf{X}'| \le 2^d R^d \left(1 - L^{-d}\right)^N .$$

设 $\gamma = \gamma(\nu, d) > 0$ 满足 $L^{-\gamma} = 1 - L^{-d}$。那么

$$|\mathbf{X} \cap B| \le 2^d R^d L^{-N\gamma} \le 2^d R^d \left(\frac{\alpha_0}{R}\right)^\gamma .$$

Then

$$\gamma = \frac{\log\left(\frac{1}{1-L^{-d}}\right)}{\log L} \ge \frac{L^{-d}}{C_d \log L} \ge \frac{\nu^d}{C_d(1 + \log \nu^{-1})}$$

□

引理 A.5 ([Coh25b] 推论 A.8)**.** 设 $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^d$ 在从 α_0 到 α_1 的尺度上是 ν-线上多孔的。设 τ 为长度 $\alpha_0 < R < \alpha_1$ 的线段。那么存在某个 $C, \gamma > 0$，仅依赖于 ν，使得

$$|\tau \cap \mathbf{Y}| \le CR \left(\frac{\alpha_0}{R}\right)^\gamma .$$

其中 γ 可取为

$$\gamma = \frac{\nu}{C(1 + |\log \nu|)}$$

证明。设 τ 位于直线 ℓ上。由引理 A.2，$\mathbf{X}|_\ell$ 是 ν-多孔的。由$d=1$ 中的引理 A.4 可得所需结果。□

致谢。 LONG JIN 和 HONG ZHANG 获得国家重点研发计划项目（编号：2022YFA1007400）的资助。LONG JIN 还获得国家自然科学基金项目（编号：12525106）和新基石研究员项目（编号：100001127）的资助。AN ZHANG 部分获得国家重点研发计划项目（编号：2024YFA1015300）、北京市自然科学基金项目（编号：1242009）、国家自然科学基金项目（编号：11801536）、国家留学基金管理委员会项目（编号：202506020208）以及中央高校基本科研业务费的资助。作者谨向 Kiril Datchev、Semyon Dyatlov 和 Ruixiang Zhang 致以谢意，感谢他们给予的启发性讨论。

声明。 作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。由于本文未使用任何数据集，因此不适用数据共享。

References

[ADM25] Jayadev Athreya、Semyon Dyatlov 和Nicholas Miller。复双曲商空间上的半经典测度。《几何与泛函分析》，35(4):979–1050，2025。[Ahl06] Lars V. Ahlfors。拟共形映射讲义，《大学讲座丛书》第 38 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，第二版，2006 年。附有 C. J. Earle、I. Kra、M. Shishikura 和 J. H. Hubbard 撰写的补充章节。[BD18] Jean Bourgain 和 Semyon Dyatlov。无压力条件下的谱隙。《数学年刊》（第二辑），187(3):825–867，2018。[BLT25] Aidan Backus、James Leng 和 Zhongkai Tao。高维中的分形不确定性原理：通过 Dolgopyat 方法。《偏微分方程分析》，18(7):1769–1804，2025。[Bor16] David Borthwick。无限面积双曲曲面的谱理论，《数学进展丛书》第 318 卷。Birkh¨auser/Springer，[Cham], 第二版，2016 年。[Bow79] Rufus Bowen。拟圆的豪斯多夫维数。《高等科学研究院科学出版物：数学》，(50):11–25，1979。[Coh25a] Alex Cohen。离散二维康托集的分形不确定性。《偏微分方程分析》，18(3):743–772，2025。[Coh25b] Alex Cohen。高维中的分形不确定性。《数学年刊》（第二辑），202(1):265–307，2025。[CT21] Laura Cladek 和 Terence Tao。一维及高维正则测度的加性能量与分形不确定性原理。《分析中的艺术》，页码：论文编号 1，38 页，2021。[DD13] Kiril Datchev 和 Semyon Dyatlov。渐近双曲流形的分形 Weyl 定律。《几何与泛函分析》，23(4):1145–1206，2013。[DJ17] Semyon Dyatlov 和 Long Jin。开放量子映射的共振与分形不确定性原理。《数学物理通讯》，354(1):269–316，2017。[DJ18a] Semyon Dyatlov 和 Long Jin。Dolgopyat 方法与分形不确定性原理。《偏微分方程分析》，11(6):1457–1485，2018。

[DJ18b] Semyon Dyatlov 和 Long Jin。双曲曲面上的半经典测度具有满支集。《数学学报》，220(2):297–339，2018。[DJN22] Semyon Dyatlov、Long Jin 和 St´ephane Nonnenmacher。变曲率曲面上特征函数的控制。《美国数学会杂志》，35(2):361–465，2022。[Dya19] Semyon Dyatlov。分形不确定性原理导论。《数学物理杂志》，60(8):081505，31 页，2019。[DZ16] Semyon Dyatlov 和 Joshua Zahl。谱隙、加性能量与分形不确定性原理。《几何与泛函分析》，26(4):1011–1094，2016。[DZ20] Semyon Dyatlov 和 Maciej Zworski。转移算子的分形不确定性。《国际数学研究通知》，(3):781–812，2020。[EH23] Suresh Eswarathasan 和 Xiaolong Han。具有随机字母表的离散康托集的分形不确定性原理。《数学研究快报》，30(6):1657–1679，2023。[GH12] Frederick W. Gehring 和 Kari Hag。《无处不在的拟圆盘》，《数学调查与专著》第 184 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012 年。[HS20] Rui Han 和 Wilhelm Schlag。高维 Bourgain-Dyatlov 分形不确定性原理。《偏微分方程分析》，13(3):813–863，2020。[HS24] Xiaolong Han 和 Pouria Salekani。随机康托尔集的分形不确定性原理。arXiv 预印本 arXiv:2404.15434，2024。[HSTZ25]Xiaoqi Huang、Christopher D Sogge、Zhongkai Tao 和 Zhexing Zhang。非紧流形上的无损 Strichartz 估计与谱投影估计。arXiv 预印本 arXiv:2504.07238，2025。[Jin18] Long Jin。双曲曲面上的 Schr¨odinger 方程控制。《数学研究快报》，25(6):1865–1877，2018。[Jin20] Long Jin。紧双曲曲面上的阻尼波方程。《数学物理通讯》，373(3):771–794，2020。[JZ20] Long Jin 和 Ruixiang Zhang。具有显式指数的分形不确定性原理。《数学年刊》，376(3-4):1031–1057，2020。[KM25] Elena Kim 和 Nicholas Miller。双曲流形上的半经典测度。arXiv 预印本 arXiv:2503.01528，2025。[Mat95] Pertti Mattila。欧几里得空间中的集与测度的几何：分形与可整性，《剑桥高等数学研究》第 44 卷。剑桥大学出版社，1995 年。[MNK05] Dzh. Mashregi、F. L. Nazarov 和 V. P. Khavin。Beurling-Malliavin 乘子定理：第七种证明。《代数与分析》，17(5):3–68，2005。[MS09] Pertti Mattila 和 Pirjo Saaranen。Ahlfors-David 正则集与双利普希茨映射。《芬兰科学院数学年刊》，34(2):487–502，2009。[Rat06] John G. Ratcliffe。双曲流形基础，《研究生数学丛书》第 149 卷。施普林格纽约，纽约州纽约，第二版，2006 年。[Sul79] Dennis Sullivan。双曲运动离散群在无穷远处的密度。《高等科学研究院科学出版物：数学》，(50):171–202，1979。 ´Tao[Zhongkai Tao。双曲动力系统中的散射共振。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2025 年。博士学位论文——加利福尼亚大学伯克利分校。25] Vac[Lucas Vacossin。二维障碍散射的谱隙。《偏微分方程分析》，17(3):1019–1126，2024。24] Vas[Ioann Vasilyev。多维中的 Beurling-Malliavin 定理。《数学年刊》，391(4):6057–6072，2025。

[Wan19] 王健。凸余紧双曲曲面上的Strichartz估计。美国数学会会刊,147(2):873–883,2019.

Yau Mathematical Sciences Center, Jingzhai, Tsinghua University, Haidian Dis-trict, Beijing, 100084, P.R.China电子邮箱地址: jinlong@mail.tsinghua.edu.cn电子邮箱地址: yuukizaizh@gmail.com
School of Mathematical Sciences, Beihang University, 37 Xueyuan road, Haidian district, Beijing, 100191, P.R.China电子邮箱地址: anzhang@buaa.edu.cn