arXiv:2601.19670v1 [math.RT] 27 Jan 2026

单位根处量子对称对的表示

JINFENG SONG 和 WEINAN ZHANG

Abstract. 设 θ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个对合，且 $(\mathbf{U}_v, \mathbf{U}_v^\imath)$ 是奇数阶单位根处相应的量子对称对 v。本文推广 De Concini-Kac-Procesi 对量子群所采用的方法，研究 i量子群$\mathbf{U}_v^\imath$的结构及其不可约表示。

我们将 $\mathbf{U}_v^\imath$ 的 Frobenius 中心构造为量子群 $\mathbf{U}_v$的 Frobenius 中心的一个余理想子代数。通过量子 Frobenius 映射，我们证明 $\mathbf{U}_v^\imath$ 的 Frobenius 中心同构于对偶 Poisson-Lie 群 G^*的泊松齐性空间 $\mathcal{X}$ 的坐标代数。我们在 $\mathbf{U}_v^\imath$ 上定义一种滤过，使其伴随分次代数为 q-交换的。利用这一滤过，我们证明 $\mathbf{U}_v^\imath$ 的全中心由 Frobenius 中心和 Kolb-Letzter 中心生成，并确定 $\mathbf{U}_v^\imath$的次数。我们证明，$\mathbf{U}_v^\imath$ 的不可约表示由 θ-扭曲共轭类参数化。我们确定这些不可约表示的最大维数，并证明当相应的扭曲共轭类维数达到最大时，不可约表示的维数也达到最大。我们还研究将不可约 $\mathbf{U}_v$-模限制到 $\mathbf{U}_v^\imath$时的分支问题。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 6 3. i量子群的 Frobenius 中心 12 4. i量子群的退化 17 5. 次数与全中心 24 6. 简单模的参数化 32 7. 简单模的维数 37 8. 分支定律 39 9. 相对辫群对称性 41 参考文献 46

1. Introduction

1.1. **背景**。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个复半单李代数，$\mathbf{U}$ 是相应的 Drinfeld-Jimbo量子群，其量子参数为 q。量子参数 q 为一般值时，量子群理论十分丰富；而当 q 专门化为单位根时，则会出现许多有趣的现象。例如，单位根处的量子群与模表示论密切相关（参见 [Lus90，AJS94]），并提供了一大类 Cayley-Hamilton 代数（参见 [DCPRR05]）。近年来，它们还被应用于几何表示论和朗兰兹纲领（参见 [GK93，ABG04]）。

设 θ 是 $\mathfrak{g}$的李代数对合，$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ 是不动点子代数。已知 $\mathfrak{k}$ 是约化李代数。与对称对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ 相联系的量子对称

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：17B37，17B63。

对(U，U$^\imath$) 是由 Letzter 引入的 [，由02], Drinfeld-Jimbo 量子群 U 和余理想子代数 U$^\imath$ ⊂U 组成，称为*i*量子群。继 Bao 和 Wang 的开创性工作 [BW18a], 之后，人们逐渐认识到，i量子群是量子群的广阔推广，许多关于量子群的深刻理论都可以高度非平凡地推广到量子对称对的情形；参见综述 [Wa23] 及其中的参考文献。

量子群有两种重要的整形式：*Lusztig* 形式和*De Concini-Kac* 形式。至于它们在量子对称对中的推广，Bao-Wang 在构造 i典范基时开启了对 i量子群 Lusztig 型形式的研究 [BW18b], ，而其在单位根处的特化则在 [BS21、BS22]中得到了发展。另一方面，i量子群的 De Concini-Kac 型形式直到最近才由第一作者引入 [So24b]，而其在单位根处的特化仍鲜为人知。

尽管量子对称对的结构理论蓬勃发展，U$^\imath$ 的表示的基本性质仍有许多未解问题。特别是，由于 i量子群缺乏自然的三角分解，迄今为止，不可约模的分类仅在若干特殊类型中建立；参见 [Wat21、Wat25、Wen20]。

本文旨在系统研究奇数阶单位根处 i量子群的 De Concini-Kac 型形式的结构及不可约表示。特别地，对于这些代数，我们得到不可约模的参数化，并描述其维数。这可视为 De Concini-Kac- Procesi [DCK90、DCKP92、DCP93] 关于量子群的一系列工作的推广。当 θ 为平凡对合时，我们的理论可还原为量子群理论。

1.2. **De Concini-Kac 量子群**。下面概述 De Concini-Kac-Procesi 建立的单位根处量子群表示论。设 ℓ 是一个与 $\mathfrak{g}$的根长互素的正奇整数， v 是一个本原 ℓ次单位根。设 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}}$ ⊂U 为 *De Concini-Kac* 整形式，U_v 为由 $q \mapsto v$得到的 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}}$ 的特化。

由 De Concini-Kac-Procesi 的工作可知 [DCK90，DCKP92] U 的不可约表示$_v$ 本质上由相应单连通群 G的共轭类参数化。更明确地，设 (B^+, B^-) 是 G 的一对相反 Borel 子群，并设 $G^* \subset B^+ \times B^-$ 为其对偶 *Poisson-Lie* 群。那么 U Z_0 存在一个中心 Hopf 子代数$_v$，称为 *Frobenius* 中心，它通过量子 Frobenius 映射与 G^* 的坐标代数同构

$$\mathrm{Fr} : \mathbb{C}[G^*] \xrightarrow{\sim} Z_0 \subset \mathrm{U}_v.$$

因此得到一个典范映射

$$\mathrm{Irr}\ \mathrm{U}_v \longrightarrow \mathrm{MaxSpec}\ Z_0 \cong G^*, \tag{1.1}$$

它将 U_v 的一个不可约表示映到其湮灭子 V 在 Z_0 中所构成的极大理想 $\mathrm{Ann}_{Z_0}(V)$。对于 $x \in G^*$，设 $\mathfrak{m}_x \subset Z_0$ 为相应的极大理想，$\mathrm{U}_{v,x} = \mathrm{U}_v/\mathfrak{m}_x\mathrm{U}_v$ 为相应的纤维代数。设 $\varphi_0 : G^* \to G$ 为由 $(g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2$ 给出的映射。则 φ_0 是一个 $2^{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}}$-覆盖映射，映到 G 的开布鲁哈特胞腔。 [DCKP92] 的一个主要结果指出，若 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_0(y)$ 属于 G 的同一个共轭类，则有限维代数 $\mathrm{U}_{v,x} \cong \mathrm{U}_{v,y}$ 同构。特别地，将映射 (1.1) 与 φ_0 复合，可得到一个有限映射

$$\mathrm{Irr}\ \mathrm{U}_v \longrightarrow G$$

其纤维在以下对象的共轭类上同构： G。这一图景后来被公理化为所谓的泊松序，见 [BG03]。

1.3. i量子群的 Frobenius 中心。本文将 De Concini-Kac-Procesi 理论推广到量子对称对。为了研究单位根处 i量子群的表示，我们首先构造它们的 Frobenius 中心。

令 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}} = \mathbf{U}^\imath \cap \mathbf{U}_{\mathcal{A}}$ 为 U 的整形式$^\imath$，它由 [So24b], 引入；令 $\mathbf{U}^\imath_v$ 为 U 的特化$^\imath_{\mathcal{A}}$，通过令 $q \mapsto v$ 得到。令 $K^\perp \subset G^*$ 为子群$\{(g, \theta(g)) \in G^* \mid g \in G\}$的单位连通分支。众所周知（参见 同上），$K^\perp$ 是 G^*的余各向同性子群，因此仿射商

$$\mathcal{X} = K^\perp \backslash G^*$$

自然地是 G^*的泊松齐性空间。文献 [So24b] 证明，当 q 在 1 处特化时，i量子群 $\mathbf{U}^\imath_1$ 与坐标代数 $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ 作为泊松代数同构。

定理 1 (定理 3.2& 命题 3.4)。 映射 Fr 限制为一个代数嵌入

$$\mathrm{Fr}^\imath : \mathbb{C}[\mathcal{X}] \cong \mathbf{U}^\imath_1 \longrightarrow \mathbf{U}^\imath_v,$$

它将坐标代数 $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ 识别为$\mathbf{U}^\imath_v$的一个中心子代数 $Z^\imath_0$ 。此外，在嵌入$\mathbf{U}^\imath_v \hookrightarrow \mathbf{U}_v$下， $Z^\imath_0$ 被识别为 Z_0的一个余理想 *Poisson* 子代数。

我们称 $\mathrm{Fr}^\imath$ 为量子 Frobenius 映射，并称 $Z^\imath_0$ 为 $\mathbf{U}^\imath_v$的 Frobenius 中心。当 θ 为平凡对合时，我们得到 $\mathbf{U}_v$ [的中心子代数 Z_0 的构造 DCK90,DCKP92]。与量子群的情形不同，在量子群中， Z_0 的生成元只是根向量的 ℓ次幂，而 $Z^\imath_0$ 的生成元则涉及 Bao 和 Wang [引入的分割幂变体 BW18a,BW21], ，它们是某些非常非平凡的秩 1 元素。尽管如此，这些元素的首项已有充分了解（参见 LYZ25]），由此可得 $\mathbf{U}^\imath_v$ 作为 $Z^\imath_0$-模的一个显式 PBW 基。

定理 2 (定理 3.9)。 *i*量子群 $\mathbf{U}^\imath_v$ 是一个秩为 $Z^\imath_0$ 的自由模，并且存在一个显式的 *PBW* 基，$\mathbf{U}^\imath_v$ 作为一个 $Z^\imath_0$-模。

1.4. 简单模与扭曲共轭类。 i量子群的 Frobenius 中心 $Z^\imath_0$ 诱导出一个典范映射

$$\mathrm{Irr}\ \mathbf{U}^\imath_v \longrightarrow \mathrm{MaxSpec}\ Z^\imath_0 \cong \mathcal{X} \tag{1.2}$$

将不可约表示 V 映到极大理想 $\mathrm{Ann}^{Z^\imath_0}(V)$，该理想是 V 在 $Z^\imath_0$ 中的湮没子的集合。对于 $x \in \mathcal{X}$，令 $\mathfrak{m}_x \subset Z^\imath_0$ 为相应的极大理想，$\mathbf{U}^\imath_{v,\ x} = \mathbf{U}^\imath_v/\mathfrak{m}_x\mathbf{U}^\imath_v$ 为相应的纤维代数。

对合 θ 积分为 G 的代数群对合。对于 $g \in G$，集合 $\mathcal{C}_\theta(g) = \{hg\theta(h)^{-1} \mid h \in G\}$ 称为 g 的 θ-扭曲共轭类。令

$$\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow G \tag{1.3}$$

是由以下方式给出的映射： $[(g_1,\ g_2)] \mapsto \theta(g_1)^{-1}g_2$。我们在命题 6.3 中证明， φ 是一个 $2^{|\mathbb{I}_\bullet|}$-覆盖映射，其像为其值域。这里，$(\mathbb{I} = \mathbb{I}_\circ \cup \mathbb{I}_\bullet,\ \tau)$ 表示底层的*Satake* 图；参见第 2.2节。

将 (1.2) 和 (1.3) 中的映射复合，可得一个有限映射

$$\Psi : \mathrm{Irr}\ \mathbf{U}^\imath_v \longrightarrow G, \tag{1.4}$$

其像可直接利用命题 6.3确定。下一个结果表明，沿着 Ψ -扭曲共轭类， θ的纤维彼此同构。

定理 3 (定理 6.7)。 对于 $x, y \in \mathcal{X}$，假设 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 属于 G 的同一个 θ-扭曲共轭类。那么，$\mathbf{U}^\imath_{v,x}$ 与 $\mathbf{U}^\imath_{v,y}$ 作为有限维代数同构。

在 [LY08中，Lu14], Lu 和 Yakimov 引入了一种扭泊松结构 π_θ 在 G 上，使得每个 θ-扭曲共轭类都是辛叶的并。利用这一扭泊松结构π_θ，我们在命题6.3 中证明上述映射 φ是泊松映射，进而将辛

叶 $\mathcal{X}$ 与 θ的 G-扭曲共轭类联系起来。一般而言， θ-扭曲共轭类的原像并不连通；不过，我们证明不同连通分支之间存在环面作用，该作用在 i量子群上提升为缩放。结合泊松序 [BG03],的一般理论，我们由此得以证明定理3。

1.5. **简单模的维数。** 在他们的工作 [DCK90], De Concini-Kac 确定了次数 (= 量子群 U 的不可约表示的最大维数v 在单位根处。他们与 Procesi 一起 [DCKP93a], 还证明，若 U 的不可约表示v 所对应的共轭类具有最大维数，则该表示具有最大维数。

我们将他们的结果推广到 i量子群的情形。

定理 *4*（推论 *5.9* 和定理 *7.1*）。设 V 是 $\mathbf{U}_v^\imath$ 的一个不可约表示，并且$N_0 = (\dim \mathfrak{k} - \text{秩 } \mathfrak{k})/2$。那么 V 的维数至多为 ℓ^{N_0}。假设 $\Psi(V)$ 属于维数最大的 θ-扭曲共轭类（$= \dim \mathfrak{g} - \text{秩 } \mathfrak{k}$）。那么 V 的维数恰为 ℓ^{N_0}。

定理的证明 4 基于代数 U 上的一个滤过$^\imath_v$，其伴随分次代数是 q-交换的；关于这一滤过的构造，见第 4 节。这个滤过推广了 De Concini-Kac 量子群上一个重要的滤过，该滤过由 De Concini-Kac 量子群引入，见 [DCK90，§1。7] 这个滤过有助于我们描述 U 的全中心 $^\imath_v$，而且它本身也可能具有独立的研究价值。

此外，当 $\Psi(V)$ 位于一个低维的 θ-扭曲共轭类中时，我们提出以下关于 $\mathbf{U}_v^\imath$ 的一般不可约表示维数的猜想。

猜想 5 (猜想 7.6)。设 V 是 $\mathbf{U}_v^\imath$ 的一个不可约表示，且 $a(V)$ 是包含 $\Psi(V)$ 的 θ-扭曲共轭类的维数。那么 V 的维数可被 $\ell^{(a(V)-\text{维 } \mathfrak{g}+\text{维 } \mathfrak{k})/2}$ 整除。

猜想5 推广了 De Concini-Kac-Procesi 猜想 [DCKP92，猜想 6。8] 该猜想涉及单位根处量子群不可约表示的维数。我们指出，De Concini-Kac-Procesi 猜想已由 Kremnizer 证明 [Kre06] 并由 Sevostyanov 证明 [Sev21]。

1.6. **完整中心。**文献 [DCKP92] 确定了单位根处量子群的完整中心由两个子代数生成：一个是 Z_0 第1.2节讨论的 Frobenius 中心，另一个则由一般参数处的中心特化得到 q （即 Harish-Chandra 中心）。

一般参数处 i量子群 U 的中心$^\imath$ q 由 Kolb 和 Letzter 确定 [KL08],，我们将其称为 *Kolb-Letzter* 中心。特别地，他们证明中心是一个多项式代数，包含 m 个变量，其中 m 是 $\mathfrak{k}$的秩。后来，Kolb 利用通用 K矩阵 [Ko20]为一般参数处的中心给出了一个概念性的基构造。在命题5.1 中，我们证明这些中心基元素属于整形式 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}}$，因此可以考察它们在单位根处的特化。令 $Z_v^\imath$ 为 U 的中心$^\imath_v$，并令 $Z_1^\imath \subset Z_v^\imath$ 为由 Kolb-Letzter 中心特化得到的中心子代数。

定理 6 (定理 5.8 & 定理 5.12)。中心 $Z_v^\imath$ 的 $\mathbf{U}_v^\imath$ 由以下元素生成： $Z_0^\imath$ 和 $Z_1^\imath$ 作为一个$\mathbb{C}$-代数。自然映射 极大谱 $Z_v^\imath \to$ 极大谱 $Z_0^\imath$ 是一个次数为 $\ell^{\text{rank } \mathfrak{k}}$的有限映射。

在量子群情形下，定理6的对应结果由 De Concini- Kac-Procesi [DCKP92]建立。他们的方法依赖于一个显式构造的通用不可约表示族，称为婴儿 *Verma* 模，以及量子 Harish-Chandra 同构。然而，由于 $\mathbf{U}_v^\imath$不存在三角分解，为一般 i量子群构造婴儿 Verma 模的类似物是一个极具挑战性的问题，

并且对于 i量子群，目前尚无量子 Harish-Chandra 同构的自然类似物。

我们对 i量子群的定理 6 的证明更加直接且完全代数化。我们明确计算了 $Z_0^\imath$ 和 $Z_1^\imath$的生成元的首项，并将其与伴随分次代数 GrU 中的中心元$z_v^\imath$进行比较。我们相信，我们的论证也将有助于研究扭曲共轭类的几何。

1.7. **分支问题**。 在 [DCPRR05], 中，发展了一套一般方法，用于研究限制到某些子代数时 Cayley-Hamilton 代数上的模的分解。我们证明，$\mathbf{U}_v^\imath \subset \mathrm{U}_v$与 $Z_0^\imath \subset Z_0$一起满足文献中引入的相容性条件 *loc. cit.*（见命题 8.2），这使我们能够利用他们的方法，获得将 $\mathbf{U}_v$-模限制到 $\mathbf{U}_v^\imath$时分支问题的以下结果。

定理 7 （定理 8.3& 推论 8.5）。 *(1)* 限制到 $\mathrm{U}_v^\imath$时，一般的简单 U_v-模是半单的 $\mathrm{U}_v^\imath$-模。此外，一般的简单$\mathrm{U}_v^\imath$-模中简单U_v-模的重数满足约束条件 （8.2）。

(2) 一般 的简单 $\mathrm{U}_v^\imath$-模是简单 U_v-模限制后的直和项。

当底层对称对为对角型（$\mathbf{U}_v \otimes \mathrm{U}_v$，$\mathrm{U}_v$）时，定理 7 得到了 [DCPRR05] 关于单位根处量子群表示的张量积分解的一项结果。

1.8. **小量子对称对**。由恒等共轭类参数化的 $\mathbf{U}_v$ 简单模尤其值得关注。它们恰好是一个有限维 Hopf 代数的简单模，该代数 $\mathfrak{u}$的维数为 $\mathfrak{u} = \ell^{\dim \mathfrak{g}}$，由 Lusztig [Lus90], 引入，称为小量子群。

我们在定义3.13 中引入一个余理想子代数 $\mathfrak{u}^\imath$，它是 $\mathfrak{u}$维的$\mathfrak{u}^\imath = \ell^{\dim \mathfrak{k}}$，由单位根处的量子对称对（$\mathbf{U}_v$，$\mathrm{U}_v^\imath$）导出。我们称这一对（$\mathfrak{u}$，$\mathfrak{u}^\imath$）为小量子对称对，并称 $\mathfrak{u}^\imath$ 为小 $\imath$ 量子群。根据我们的定义， $\mathfrak{u}^\imath$ 的简单模恰好是由单位元的扭曲共轭类参数化的 $\mathbf{U}_v^\imath$-模。

Ginzburg-Kumar [GK93] 证明了小量子群$^{2*}(\mathfrak{u}, \mathbb{C})$的上同调 $\mathrm{H}\mathfrak{u}$同构于幂零锥 $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ 的坐标代数 $\mathcal{N}$，这一结果随后也应用于几何表示论；例如，参见 [ABG04]。对小 i 量子群进行类似的构造将会很有意义。

1.9. **相对辫群对称性**。 文献 [DCP93] 证明，Lusztig 辫群作用保留 $\mathbf{U}_\mathcal{A}$ ，且量子 Frobenius 映射交织了$\mathbb{C}[G^*]$ 与 U 上的辫群对称性$_v$。在量子对称对理论中，相对辫群对称性$\mathbf{T}_i$由 Wang 和第二作者在文献 [WZ23、WZ25]中系统地发展，它推广了 Lusztig 辫群作用 [SZ25] 证明这些对称性是整的 $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ ，因此它们在$_v^\imath$和 U 上都诱导出对称性。研究量子 Frobenius 映射 $\mathrm{Fr}^\imath$ 与相对辫群对称性$\mathbf{T}_i$之间的相容性是很自然的。

定理8 (定理9.1)。 假设该对称对属于准分裂型。则有

$$\mathbf{T}_i \circ \mathrm{Fr}^\imath = \mathrm{Fr}^\imath \circ \mathbf{T}_i. \tag{1.5}$$

特别地， $Z_0^\imath$ 在$\mathbf{T}_i$的作用下保持闭合。

我们猜想，定理 8 在完全一般的情形下成立。主要障碍在于，目前只有准分裂型的生成元高次幂上的 $\mathbf{T}_i$ 作用公式已知；关于这些公式在准分裂型中的情形，参见 [WZ25] 。

1.10. 文章结构。本文结构如下。第 2 节收集量子代数的必要背景知识。第 3 节构造并研究 i 量子群的 Frobenius 中心。我们在第 3.3 节构造小量子对称对。在第 4 节，我们为 $\mathrm{U}_v^\imath$ 构造一个滤过，使其伴随分次代数为 q-交换的，并研究伴随分次代数的次数和中心。在第5节，我们确定 $\mathrm{U}_v^\imath$的次数和全中心。在第 6 节，我们将 $\mathrm{U}_v^\imath$ 的简单模与 G的 θ-扭曲共轭类联系起来。在第 7 节，我们确定与正则扭曲共轭类相关的不可约模的维数。在第 8 节，我们研究 U_v-模限制到 $\mathrm{U}_v^\imath$-模时的分支问题，并证明一般的 $\mathrm{U}_v^\imath$-简单模是 U_v-简单模的直和项。在第 9 节，我们研究相对辫群对称性与量子 Frobenius 映射之间的相容性。

致谢：作者感谢王伟强分享 Thomas Sale 的论文并进行许多有益的讨论。作者感谢鲍焕辰、卢江华、Gus Schrader 和 Ivan Losev 的有益讨论。JS 得到了旭日慈善基金的资助。WZ 部分得到了新基石科学基金会的资助，资助来源为授予贺旭华的新基石研究员项目。

2. Preliminaries

本节汇集量子群和量子对称对的背景知识。

2.1. 量子群。设 $\mathfrak{g}$ 为一个复半单李代数。设 $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{I}}$ 为相应的 Cartan 矩阵，其中 $\mathbb{I}$ 是一个有限指标集。设 $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ 为一组互质的正整数，使得对于 $i,j\in\mathbb{I}$，有 $\epsilon_i a_{ij}=\epsilon_j a_{ji}$。设 $\mathcal{R}$ 为与该 Cartan 矩阵相应的有限约化根系。设 $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ 和 $\{\omega_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ 分别为单根集和基本权集。于是存在一个 $|\mathbb{I}|$ 维欧几里得向量空间 E，其中包含 $\mathcal{R}$，并带有标准内积 $(\cdot,\cdot)$，使得 $(\alpha_i,\alpha_j)=\epsilon_i a_{ij}$ 且 $(\omega_i,\alpha_j)=\delta_{ij}\epsilon_j$，对于 $i,j\in\mathbb{I}$成立。设 $P=\mathbb{Z}[\omega_i\mid i\in\mathbb{I}]$ 为权格，$Q=\mathbb{Z}[\alpha_i\mid i\in\mathbb{I}]$ 为根格。设 $Q^+=\mathbb{N}[\alpha_i\mid i\in\mathbb{I}]$。对于 $\gamma=\sum_{i\in\mathbb{I}}n_i\alpha_i\in Q$，定义 γ的高度为 $\mathrm{ht}(\gamma)=\sum_{i\in\mathbb{I}}n_i$。对于 $i\in\mathbb{I}$和 $\mu\in P$，记作 $\langle\alpha_i^\vee,\mu\rangle=(\alpha_i,\mu)/\epsilon_i$。设 W为相应的 Weyl 群，其简单反射为 s_i $(i\in\mathbb{I})$，长度函数为 $l(\cdot)$。W作用于 E 并保持内积。用 $\rho\in P$ 表示所有正根之和的一半。

令 q 为不定元，$\mathbb{C}(q)$ 为以$\mathbb{C}$（复数域）为系数的关于 q 的有理函数域。固定 $q^{1/2}$ 为 q 在 $\mathbb{C}(q)$ 的代数闭包中的一个平方根。记

$$q_i:=q^{\epsilon_i},\qquad \forall i\in\mathbb{I}.$$

记，对于 $r,\ m\in\mathbb{N},\ i\in\mathbb{I}$,

$$[r]_i=\frac{q_i^r-q_i^{-r}}{q_i-q_i^{-1}},\quad [r]_i!=\prod_{s=1}^{r}[s]_i,\quad \begin{bmatrix}m\\ r\end{bmatrix}_i=\frac{[m]_i[m-1]_i\dots[m-r+1]_i}{[r]_i!}.$$

单连通 Drinfeld-Jimbo量子群 U 定义为由 E_i,F_i,K_μ 生成的 $\mathbb{C}(q^{1/2})$-代数，其中 $i\in\mathbb{I},\mu\in P$ 满足以下关系:

$$K_\mu K_\nu=K_{\mu+\nu},\ K_0=1, \tag{2.1}$$

$$K_\mu E_i=q^{(\mu,\alpha_i)}E_iK_j,\quad K_\mu F_i=q^{-(\mu,\alpha_i)}F_iK_\mu, \tag{2.2}$$

$$[E_i,F_j]=\delta_{ij}(q_i-q_i^{-1})(K_i^{-1}-K_i), \tag{2.3}$$

其中 $K_i = K_{\alpha_i}$，以及量子Serre关系，即对于 $i \neq j \in \mathbb{I}$,

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_i E_i^r E_j E_i^{1-a_{ij}-r} = 0, \tag{2.4}$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_i F_i^r F_j F_i^{1-a_{ij}-r} = 0. \tag{2.5}$$

代数 $\mathbf{U} = \bigoplus_{\mu \in Q} \mathbf{U}^\mu$ 自然带有 Q分次，其中 $\deg E_i = \alpha_i$、$\deg F_i = -\alpha_i$，且 $\deg K_\mu = 0$，适用于 $i \in \mathbb{I}$和 $\mu \in P$。

代数 $\mathbf{U}$ 具有霍普夫代数结构，其余乘法为 Δ，余单位 ϵ 定义如下：

$$\begin{aligned} \Delta(E_i) &= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, & \epsilon(E_i) &= 0, \\ \Delta(F_i) &= F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, & \epsilon(F_i) &= 0, \\ \Delta(K_\mu) &= K_\mu \otimes K_\mu, & \epsilon(K_\mu) &= 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

对于 $i \in \mathbb{I}$，记作

$$\mathbf{F}_i = \frac{F_i}{q_i^{1/2}(q_i - q_i^{-1})}, \qquad \text{and} \qquad \mathbf{E}_i = \frac{E_i}{q_i^{-1/2}(q_i^{-1} - q_i)}. \tag{2.7}$$

那么 $\mathbf{E}_i$、$\mathbf{F}_i\,(i \in \mathbb{I})$、$K_\mu\,(\mu \in P)$ 与量子群的通常 Chevalley生成元一致；参见 [Lus93，3.1。1]。

令 $T_i = T_i''_{,+1}$、$i \in \mathbb{I}$为 $\mathbf{U}$ 上的辫群对称性，如 [Lus93，37.1。3]。令 $\mathcal{A} = \mathbb{C}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$。De Concini–Kac–Procesi形式 $\mathbf{U}_\mathcal{A}$ (参见 [DCP93]) 定义为包含 $\mathcal{A}$的 $\mathbf{U}$ 的最小子代数，其中 E_i、F_i，K_μ对所有 $i \in \mathbb{I}$，$\mu \in P$成立，并且在所有 T_i、$i \in \mathbb{I}$的作用下封闭。

固定 W 中最长元素 w_0 的一个约化表达式 $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_N}$。对于 $1 \leq k \leq N$，令 $\beta_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$，与 β_k 相关联的根向量定义如下：

$$F_{\beta_k} = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{k-1}}(F_{i_k}), \qquad E_{\beta_k} = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{k-1}}(E_{i_k}). \tag{2.8}$$

对于一个 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_N) \in \mathbb{N}^N$，记

$$F^{\mathbf{a}} = \prod_{1 \leq t \leq N}^{\leftarrow} F_{\beta_t}^{a_t}, \qquad E^{\mathbf{a}} = \prod_{1 \leq t \leq N}^{\leftarrow} E_{\beta_t}^{a_t}. \tag{2.9}$$

此处，对于任意有序集合 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，记

$$\prod_{1 \leq t \leq k}^{\leftarrow} A_t = A_k A_{k-1} \cdots A_1$$

表示有序单项式。

文献 [DCP93] 证明，单项式集合 $\{K_\mu F^{\mathbf{a}} E^{\mathbf{c}} | \mu \in P,\ \mathbf{a},\ \mathbf{c} \in \mathbb{N}^N\}$ 构成 $\mathbf{U}_\mathcal{A}$ 的一个$\mathcal{A}$-基，称为 *PBW* 基。

注记 2.1。PBW 基采用（根向量的）反向排序定义，以确保相对于 Lusztig双线性配对的正交性。这一事实将在第 5节中使用。

2.2. **量子对称对**。 对称对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\theta)$ 由半单李代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}$ 上的李代数对合 θ 组成。众所周知，不可约对称对（在共轭意义下）由 Satake 图分类。

Satake 图（$\mathbb{I} = \mathbb{I}_\bullet \cup \mathbb{I}_\circ$， τ）（参见 [Ko14]）由集合 $\mathbb{I}_\bullet \cup \mathbb{I}_\circ$的一个划分 $\mathbb{I}$以及τ 上的一个对合 $\mathbb{I}$ （可能是 τ =恒等映射 Id）组成，使得

(1) $a_{ij} = a_{\tau i,\ \tau j}$ 对于 $i,\ j \in \mathbb{I}$; (2) $\tau(\mathbb{I}_\bullet) = \mathbb{I}_\bullet$; (3) $w_\bullet(\alpha_j) = -\alpha_{\tau j}$ 对于 $j \in \mathbb{I}_\bullet$;

(4) 若 $j \in \mathbb{I}_\circ$ 且 $\tau j = j$，则 $\alpha_j(\rho_\bullet^\vee) \in \mathbb{Z}_\circ$

这里， $w_\bullet$ 是与 $\mathbb{I}_\bullet$ 相关联的 Weyl 群 $W_\bullet$ 中的最长元素， $\rho_\bullet^\vee$ 是由 $\mathbb{I}_\bullet$生成的余根子系中的正余根之和的一半。

对合 τ 自然地扩展为 P 上的一个对合，使得P 与 Q 之间的双线性配对在对合 τ下保持不变。

给定一个 Satake 图 $(\mathbb{I} = \mathbb{I}_\circ \cup \mathbb{I}_\bullet, \tau)$，(单连通)i量子群 $\mathrm{U}^\imath$ 是由以下元素生成的 U 的$\mathbb{C}(q^{1/2})$-子代数

$$\begin{aligned} &B_i = F_i - c_i q^{-\langle \alpha_i^\vee, w_\bullet \alpha_{\tau i}\rangle/2} T_{w_\bullet}(E_{\tau i}) K_i^{-1} \qquad (i \in \mathbb{I}_\circ), \\ &K_\mu \qquad\qquad\qquad\qquad (\mu \in P^\theta), \\ &E_j, \quad B_j = F_j \qquad\qquad (j \in \mathbb{I}_\bullet). \end{aligned} \tag{2.10}$$

这里 $c_i \in \{\pm 1\}$ $(i \in \mathbb{I}_\circ)$ 满足

$$\begin{aligned} c_i c_{\tau i} &= (-1)^{2\alpha_i(\rho_\bullet^\vee)}, \quad \text{for } i \in \mathbb{I}_\circ; \\ c_i &= c_{\tau i}, \quad \text{if } \big(\alpha_i, \theta(\alpha_i)\big) = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

为方便起见，我们假设 $c_i = -1$，若 $\tau i = i$ 或 $w_\bullet(\alpha_i) = \alpha_{i\circ}$

根据 [SZ25]，我们考虑如下局部化

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}[(1+q)^{-1}, [\epsilon_i]!^{-1} \mid i \in \mathbb{I}] \subseteq \mathbb{C}(q^{1/2}).$$

令 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}'} = \mathrm{U}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$ 和 $\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'} = \mathrm{U}_{\mathcal{A}'} \cap \mathrm{U}^\imath$。对于任意 $\mathcal{A}'$-代数 R，记 $\mathrm{U}^\imath_R = R \otimes_{\mathcal{A}'} \mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 和 $\mathrm{U}_R = R \otimes \mathrm{U}_{\mathcal{A}'\circ}$ 根据 [SZ25，定理 3.11] 以及 [LYZ25，推论 4.3]，，$\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 有一个 $\mathcal{A}'$-基，作为自由的 $\mathcal{A}'$-模，其首项由 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}$的 PBW 基的一个子集给出。因此，对于任意$\mathcal{A}'$-代数 R，有自然嵌入 $\mathrm{U}^\imath_R \hookrightarrow \mathrm{U}_R$。在本文其余部分中，我们总是将 $\mathrm{U}^\imath_R$ 视为 U_R的子代数。对于 $x \in \mathrm{U}_{\mathcal{A}'}$ （分别地，$\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$）和一个 $\mathcal{A}'$-代数 R，若无歧义，我们仍用 x 表示其在 U_R （分别地，$\mathrm{U}^\imath_R$）中的像。

2.3. **半经典极限**。 令 $\mathbb{C}_1$ 为 $\mathcal{A}'$代数，其中 $\mathbb{C}_1$ 为复数域，且 $\mathcal{A}'$代数结构由映射 $q^{1/2} \mapsto 1$给出。记作

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_{\mathbb{C}_1} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{U}^\imath_1 = \mathrm{U}^\imath_{\mathbb{C}_1}.$$

记 x 为 $x \in \mathrm{U}_{\mathcal{A}}$ 在 U_1中的像。在 [DCP93] 中已证明，对于任意 $[x, y] \in (q^{1/2} - 1)\mathrm{U}_{\mathcal{A}}$， $x,\ y \in \mathrm{U}_{\mathcal{A}\circ}$ 因此，U_1 是交换的，并且还具有如下泊松结构：

$$\{\underline{x}, \underline{y}\} = \frac{[x, y]}{2(q^{1/2} - 1)}. \tag{2.12}$$

类似地，$\mathrm{U}^\imath_1$ 具有泊松结构，且自然嵌入 $\mathrm{U}^\imath_1 \to \mathrm{U}_1$ 是泊松映射。接下来我们回顾泊松代数 U_1 和 $\mathrm{U}^\imath_1$的几何描述。

令 G 为李代数为 $\mathfrak{g}$的复半单单连通群。令 $(B^+、\ B^-)$ 为一对 Borel 子群，其中 $H = B^+ \cap B^-$ 为极大环面。给定一个 Satake 图

在第 2.2 节中，存在一个群对合 θ： $G \to G$ 它提升了 θ 上的底层对合 $\mathfrak{g}$；参见 [SZ25，第 2 节。7] [Spr09]。对偶 Poisson-Lie 群 G^* 是子群

$$G^* = \{(b_1, b_2) \in B^+ \times B^- \mid \pi_H^+(b_1)\pi_H^-(b_2) = id\} \subseteq B^+ \times B^-, \tag{2.13}$$

其中 $\pi_H^{\pm}$： $B^{\pm} \to H$ 表示典范投影。它带有自然的泊松结构 Π_{G^*}（参见 [Lu14，第 2 节1]）。

令 $K^{\perp}$ 为子群的单位连通分支

$$\{(g, \theta(g)) \in G^* \mid g \in B^+\} \subseteq G^*.$$

根据 [So24b]， $K^{\perp}$ 是 G^*的余各向同性子群，因此仿射商

$$\mathcal{X} = K^{\perp}\backslash G^*$$

带有自然的泊松结构 $\Pi_{\mathcal{X}}$，从而使 $\mathcal{X}$ 成为 G^*的泊松齐性空间。 $\mathcal{X}$ 上的正则函数代数 $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ 可识别为 $\mathbb{C}[G^*]$ 的泊松子代数，其中的函数是左 $K^{\perp}$-不变的。

根据 [DCP93，定理 12，1] 以及 [So24b，定理 1],有典范的泊松代数同构

$$\mathrm{U}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[G^*] \qquad \text{and} \qquad \mathrm{U}_1^{\imath} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathcal{X}],$$

它们构成如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}_1 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[G^*] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{U}_1^{\imath} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[\mathcal{X}] \end{array} \tag{2.14}$$

2.4. 单位根处的量子群。 令 ℓ 为一个正奇整数，且对于 $i \in \mathbb{I}$，它与 ϵ_i 互素。取一个本原的 ℓ次单位根 $\widetilde{v} \in \mathbb{C}$。那么 $v = \widetilde{v}^2$ 也是一个本原的 ℓ次单位根。令 $\mathbb{C}_v$ 为 $\mathcal{A}'$-代数，其中 $\mathbb{C}_v$ 是复数域，且 $\mathcal{A}'$-代数结构由映射 $q^{1/2} \mapsto \widetilde{v}$给出。

定义 $\mathrm{U}_v = \mathbb{C}_v \otimes_{\mathcal{A}'} \mathrm{U}_{\mathcal{A}'}$ 并记 $\pi_v : \mathrm{U}_{\mathcal{A}'} \to \mathrm{U}_v$， $x \mapsto 1 \otimes x$。接下来我们回顾 U 的 Frobenius 中心$_v$ ，依据 De Concini–Kac–Procesi 的工作（参见 [DCK90， DCP93]）。

正如*loc. cit.*所示， E_i^{ℓ}， F_i^{ℓ}， K_{μ}^{ℓ}对于 $i \in \mathbb{I}$， $\mu \in P$在 U_v 中是中心元。这里我们稍微滥用记号，在基变换之后仍用相同的记号表示 U_v 中的元素。

根据 [DCK90,DCP93],，令 Z_0为 U_v的最小子代数，它包含 $E_i^{\ell}, F_i^{\ell}, K_{\mu}^{\ell}$，且在 Lusztig 辫群作用 Br($W$) 下保持不变。根据定义， Z_0 是 U_v的中心子代数。代数 Z_0 具有如下泊松结构（参见 [DCK90, DCKP93b]）：对任意 $x, y \in Z_0$，取 $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathrm{U}_{\mathcal{A}'}$，使得 $\pi_v(\widetilde{x}) = x, \pi_v(\widetilde{y}) = y$；则泊松括号 $\{x, y\}$定义为

$$\{x, y\} = \pi_v\Big(\frac{[\widetilde{x}, \widetilde{y}]}{\ell^2(qv^{-1} - 1)}\Big). \tag{2.15}$$

根据 [DCP93，§19]， Z_0 是 U_v的霍普夫子代数。

命题 2.2. [DCK90， DCP93]

(1) Z_0是由元素 $F_{\beta_k}^{\ell}$、 $E_{\beta_k}^{\ell}$、 $0 \le k \le l$生成的、基于 $\mathbb{C}[K_{\mu}^{\ell} | \mu \in P]$ 的多项式代数。(2) 对于$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_l)$、$\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_l)$，其中 $0 \le a_i$、 $c_i < \ell$ 和 μ 取遍 $P/\ell P$ 的一组代表元，单项式集合 $F^{\mathbf{a}} K_{\mu} E^{\mathbf{c}}$ 构成 Z_0 上的U_v 的一组基。(3) 存在一个泊松霍普夫代数的典范同构 Fr: $\mathrm{U}_1 \to Z_0$ ，使得 $E_i \mapsto -E_i^{\ell}$、 $F_i \mapsto F_i^{\ell}$、 $\big(K_{\mu}\big)^{\pm 1} \mapsto K_{\mu}^{\pm \ell}$。(4) 对于任意 $i \in \mathbb{I}$，有 $\mathrm{Fr} \circ T_i = T_i \circ \mathrm{Fr}$。

2.5. 秩一元素。设 $i \in \mathbb{I}_\circ$。若 $i = \tau i = w_\bullet i$，则在 [BW18a、BeW18、CLW21] 中引入的分割幂 $B_i^{(m)}$，$_p$ 取决于奇偶性 $p \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，我们用 $\mathbf{B}_i^{(m)}$ 表示 $B_i^{(m)}$，$_{m+1}$。若 $\tau i \neq i$，则我们用 $\mathbf{B}_i^{(m)}$ 表示通常的分割幂 $\mathbf{B}_{[m]_i!}$。若 $\tau i = i \neq w_\bullet i$，则我们用 $\mathbf{B}_i^{(m)}$ 表示在 [BW21 第 5]节中引入的分割幂 $b_i^{(m)}$。

在上述三种情形中，我们定义

$$B_i^{[m]} = [m]_i! q_i^{m/2} (q_i - q_i^{-1})^m \mathbf{B}_i^{(m)}. \tag{2.16}$$

元素 $B_i^{[m]}$ 可明确描述如下。

(i) 设 $i = \tau i = w_\bullet i$。元素 $B_i^{[m]}$ 由下式给出

$$\begin{aligned} B_i^{[2k]} &= \prod_{r=1}^{k} (B_i^2 + (q_i - q_i^{-1})^2 [2r-1]_i^2), \\ B_i^{[2k+1]} &= B_i \prod_{r=1}^{k} (B_i^2 + (q_i - q_i^{-1})^2 [2r]_i^2). \end{aligned} \tag{2.17}$$

(ii) 设 $i \neq \tau i$。元素 $B_i^{[m]}$ 由下式给出

$$B_i^{[m]} = B_i^m. \tag{2.18}$$

(iii) 设 $i = \tau i \neq w_\bullet i$。记 $Y_i = -c_i q^{-\langle \alpha_i^\vee, w_\bullet \alpha_{\tau i} \rangle / 2} T_{w_\bullet}(E_{\tau i}) K_i^{-1}$。元素 $B_i^{[m]}$ 由下式给出

$$B_i^{[m]} = \sum_{a=0}^{m} q_i^{-a(m-a)} \begin{bmatrix} m \\ a \end{bmatrix}_i Y_i^a F_i^{m-a}. \tag{2.19}$$

根据 [BW21，引理 5。9]，$B_i^{[m]} \in \mathrm{U}^\imath$。

显然，$B_i^{[m]} \in \mathrm{U}_{\mathcal{A}'}$。因此，对于任意 $B_i^{[m]} \in \mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$，都有 $i \in \mathbb{I}_\circ$，$m \in \mathbb{N}$。将 q 专门化为一个 ℓ次单位根时，元素 $B_i^{[\ell]}$ 将作为 i量子群的 Frobenius 中心的 Poisson生成元；参见定理 3.2的证明。

2.6. **相对辫群对称性**。设 $\mathbb{I}_{\circ,\tau} \subset \mathbb{I}_\circ$ 为 τ-轨道的一组固定代表元。Satake 图（$\mathbb{I} = \mathbb{I}_\bullet \cup \mathbb{I}_\circ$，$\tau$）的实秩定义为 $\mathbb{I}_{\circ,\tau}$的基数。

我们回顾 [WZ23] 中相对魏尔群的定义；另见 [Lus03,DK19]。回顾第 2.2 节，$w_\bullet$ 表示与 $\mathbb{I}_\bullet$ 相关联的 Weyl 群中的最长元素。对于 $i \in \mathbb{I}_\circ$，令 $\mathbb{I}_{\bullet,i} := \mathbb{I}_\bullet \cup \{i, \tau i\}$，并且存在一个实秩为 1 的 Satake 子图 $(\mathbb{I}_{\bullet,i} = \{i, \tau i\} \cup \mathbb{I}_\bullet, {}^\tau|_{\mathbb{I}_{\bullet,i}})$。令 $\mathcal{R}_{\bullet,i}$ 为具有单系 $\{\alpha_j \mid j \in \mathbb{I}_{\bullet,i}\}$的根系。令 $W_{\bullet,i}$ 为由 $s_i, i \in \mathbb{I}_{\bullet,i}$ 生成的 W 的抛物子群，并令 $w_{\bullet,i}$ 为 $W_{\bullet,i}$的最长元素。定义 τ_i 使得$w_{\bullet,i}(\alpha_j) = -\alpha_{\tau_i j}$ 对 $j \in \mathbb{I}_{\bullet,i}$成立。

对于 $i \in \mathbb{I}_\circ$，定义 $\mathbf{r}_i \in W_{\bullet,\, i}$ 使得

$$w_{\bullet,i} = \mathbf{r}_i w_\bullet \, (= w_\bullet \mathbf{r}_i). \tag{2.20}$$

由定义可知，$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\tau i}$。与 $(\mathbb{I} = \mathbb{I}_\bullet \cup \mathbb{I}_\circ,\ \tau)$ 相关联的相对魏尔群 W°，可识别为由 $\mathbf{r}_i$，$i \in \mathbb{I}_{\circ,\tau}$ 生成的 W 的子群。群 W° 本身是一个以 $\mathbf{r}_i$ 为考克斯特生成元的考克斯特群。令 $\boldsymbol{w}_0$ 为 W° 中的最长元素。已知 $w_0 = \boldsymbol{w}_0 w_\bullet = w_\bullet \boldsymbol{w}_0$ 和 $l(w_0) = l(\boldsymbol{w}_0) + l(w_\bullet)$。

命题 2.3。[WZ23，定理 6.1 和 9.9。] 对于 $i \in \mathbb{I}_{\circ,\tau}$，存在代数自同构$\mathbf{T}_i$，作用于$\mathrm{U}^\imath$，并满足 W° 中的辫关系。

命题 2.4。 (1) [BW18b] 对称性 T_j 对于 $j \in \mathbb{I}_\bullet$ 保持$\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$。(2) [SZ25] 相对辫群对称性$\mathbf{T}_i$ 对于 $i \in \mathbb{I}_\circ$，τ 保持$\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$。

2.7. **整闭整环**。 我们汇集将在本文中用到的代数表示背景知识。我们主要遵循 [DCK90]及其中的参考文献。

设 R 是一个结合 $\mathbb{C}$-代数，不一定是交换的。如果 R 没有零因子，我们称 R 为 整环。设 R 是一个整环，且 Z 是 R 的中心。令 $Q(Z)$ 表示 Z 的分式域，并且 $Q(R) := Q(Z) \otimes_Z R$。如果对于满足 $R \subset R' \subset z^{-1}R$ 的 $Q(R)$ 的任意子代数 R'，存在某个 $z \in Z$，$z \neq 0$，均有 $R' = R$，则称 R 是整闭的。

注意，对于整闭整环 R 及其任意中心子代数 Z_0，交换代数 Z_0 按照交换代数通常定义下的意义，是一个整闭整环。

设 R 是一个整闭整环，Z 是 R 的中心。设 $Q(Z)$ 是 $Q(Z)$ 的代数闭包。假设 R 是 Z 上的有限模。众所周知，$Q(Z) \otimes_Z R$ 同构于由 $Q(Z)$ 上的 $d \times d$ 阶矩阵组成的环 $M_d(Q(Z))$。唯一的数 d 称为 R 的次数 。特别地，有

$$\dim_{Q(Z)} Q(R) = d^2. \tag{2.21}$$

由于 R 是整闭的，矩阵的通常迹诱导出一个良定义的迹映射 $\mathsf{tr} : R \to Z$，称为约化迹。若 $\varphi : R \to \mathrm{End}(V)$ 是 R 的有限维表示，且满足 $\mathsf{tr} \circ \varphi = \varphi \circ \mathsf{tr}$，则称该表示与迹映射相容 ，其中左边的 tr 是矩阵的通常迹。

设 $Z_0 \subset Z$ 是 R 的一个有限生成中心子代数，且 R 是 Z_0 上的有限模。令 $\mathrm{Irr}\, R$ 为 R 的不可约表示集合。存在一个典范映射

$$\chi : \mathrm{Irr}\ R \to \mathrm{MaxSpec}\ Z_0$$

将不可约表示 V 映射到其湮没子 $\mathrm{Ann}_{Z_0} V$ 中 Z_0。对于 $x \in$ 极大谱 Z_0，记作 $R_x = R/xR$ ，它是一个有限维代数。注意，纤维 $\chi^{-1}(x)$ 恰好由 R_x的不可约表示组成。

由于 R 没有零因子， R 是 Z_0 上的有限生成无挠模，因此，对于任意 $x \in$极大谱 Z_0，都有$R_x \neq 0$ 。特别地，映射 χ 是满射。

命题 2.5 （参见 [DCKP93a，定理 1。1] [DCP93，定理 4。5]） 。 设 R 是一个有限生成的 $\mathbb{C}$-代数，并且 Z 是 R的中心。假设 R 是一个整闭域，且是 Z上的有限模。假设 R 的次数为 d。则有以下结论。

(1) Z 是有限生成的。对于任意 $x \in$极大谱 Z，存在唯一一个（在等价意义下） R的半单表示 V（x），使得维数V（x）$= d$，且 V（x）与迹映射相容。此外，任何 $W \in$ 不可约表示 R_x 都是 V（x）的直和项。

(2) R 的任意不可约表示的维数至多为 d。

(3) 设 $Z_0 \subset Z$ 是一个有限生成中心子代数，且 R 是一个有限模（以Z_0为基）。那么集合

$$\Omega_R(Z_0) = \{x \in \mathrm{MaxSpec}\ Z_0 \mid \dim V = d \ \textit{for any}\ V \in \mathrm{Irr}\ R_x\}$$

是极大谱 Z_0的一个非空扎里斯基开子集。

根据定义，对于任意 $x \in \Omega_R(Z)$，半单表示 $V(x)$是简单的。

注记 2.6. 当 R 属于一个更一般的族，称为极大序 (参见 [DCP93, §4.6])。在本文的假设下，只需假定 R 是一个整闭整环。

3. The Frobenius center of iquantum groups

设 ℓ 为一个与 ϵ_i 互素的奇整数，对所有 $i \in \mathbb{I}$均如此。取 $\widetilde{v} \in \mathbb{C}^*$ 为一个本原的 ℓ 次单位根，并令 $v = \widetilde{v}^2$。令 $\mathbf{U}_v^\imath = \mathbf{U}_{\mathcal{A}'}^\imath \otimes \mathbb{C}, q^{1/2} \mapsto \widetilde{v}$ 为单位根处的 i量子群。对于$i \in \mathbb{I}$，令 $v_i = v^{\epsilon_i}$。

本节中，我们在定理3.2 中构造单位根处 i量子群 U 的 Frobenius 中心$_v^\imath$并确立其基本性质。我们在第3.2 节中建立 Frobenius 中心的 PBW 基，以及 $\mathbf{U}_v^\imath$ 关于其 Frobenius 中心的一个基。我们在第 3.3 节中引入小量子对称对并研究其基本性质。

3.1. **一个中心子代数 $Z_0^\imath$ 及其泊松结构**。回顾第2.2节，映射 $\iota_v : \mathbf{U}_v^\imath \to \mathbf{U}_v$ 由 $\iota : \mathbf{U}_{\mathcal{A}'}^\imath \hookrightarrow \mathbf{U}_{\mathcal{A}'}$ 经基变换得到，是一个嵌入。回顾第 $\mathbb{C}$-代数 $\mathbf{U}_1^\imath$ （见第 2.3节）。

对于 $i \in \mathbb{I}_\circ$，记作

$$Y_i = -c_i q_i^{-\langle \alpha_i^\vee, w_\bullet \alpha_{\tau i} \rangle/2} T_{w_\bullet}(E_{\tau i}) K_i^{-1} \in \mathbf{U}_{\mathcal{A}}. \tag{3.1}$$

那么 $B_i = F_i + Y_i$。回忆一下第 $B_i^{[m]}$ $\mathbf{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$ 中的元素，对于 $i \in \mathbb{I}_\circ$ 和 $n \in \mathbb{N}$，见第 2.5 .

引理 3.1。（ [Sa20，引理 5.2.1 和引理 5.3.1 和引理 5.4.2 和引理 5.4。3]) 对于 $i \in \mathbb{I}_\circ$和 $k \in \mathbb{N}$，有

$$B_i^{[k\ell]} = (F_i^\ell + Y_i^\ell)^k \qquad in\ \mathbf{U}_v.$$

现在我们可以陈述并证明本节的主要定理了。

定理 3.2。存在唯一的 $\mathbb{C}$-代数嵌入 $\mathrm{Fr}^\imath : \mathbf{U}_1^\imath \to \mathbf{U}_v^\imath$，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}_1^\imath & \xhookrightarrow{\mathrm{Fr}^\imath} & \mathbf{U}_v^\imath \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{U}_1 & \xhookrightarrow{\mathrm{Fr}} & \mathbf{U}_v \end{array} \tag{3.2}$$

交换。

证明。只需证明 $\mathbf{Fr}(\mathbf{U}_1^\imath) \subset \mathbf{U}_v^\imath$。于是，映射 $\mathbf{Fr}^\imath$ 定义为其限制。

令 $\pi_v^\imath : \mathbf{U}_{\mathcal{A}'}^\imath \to \mathbf{U}_v^\imath, x \mapsto x \otimes 1$. 与 (2.15) 类似，$\mathbf{U}_v^\imath \cap Z_0$ 上存在一个泊松结构，其定义如下:

$$\{x, y\} = \pi_v^\imath\Big(\frac{[\widetilde{x}, \widetilde{y}]}{\ell^2(qv^{-1} - 1)}\Big), \tag{3.3}$$

其中，$\widetilde{x}, \widetilde{y}$是 x, y 在基变换 $\pi_v^\imath : \mathbf{U}_{\mathcal{A}'}^\imath \to \mathbf{U}_v^\imath$下于 $\mathbf{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$ 中的原像。由于 $\pi_v \circ \iota = \iota_v \circ \pi_v^\imath$，此泊松结构是良定义的。

根据定义，$\mathbf{U}_v^\imath \cap Z_0$ 自然是 Z_0的泊松子代数。由于 $\mathbf{Fr} : \mathbf{U}_1 \to Z_0$ 是泊松代数的同构，原像 $\mathbf{Fr}^{-1}(\mathbf{U}_v^\imath) = \mathrm{Fr}^{-1}(\mathbf{U}_v^\imath \cap Z_0)$ 是 $\mathbf{U}_1$的泊松子代数。回顾 [So24b] ，$\mathbf{U}_1^\imath \cong \mathbb{C}[K^\perp \backslash G^*]$ 由以下元素生成

$$\underline{B_i},\ (i \in \mathbb{I}_\circ);\ \underline{E_j},\ \underline{F_j},\ (j \in \mathbb{I}_\bullet),\ \underline{K_\mu},\ (\mu \in P^\theta), \tag{3.4}$$

作为泊松代数。因此，只需证明（3.4）中的元素属于 $\mathbf{Fr}^{-1}$（$\mathbf{U}_v^\imath$）.

对于 $x \in \{E_j, F_j, K_\mu^{\pm 1} \mid j \in \mathbb{I}_\bullet, \mu \in P^\theta\}$，有

$$\mathrm{Fr}(\underline{x}) = x^\ell \qquad \text{in } \mathbf{U}_v.$$

因此 $x \in \mathrm{Fr}^{-1}(\mathbf{U}_v^\imath)$。还需证明 $\mathbf{Fr}(B_i) \in \mathbf{U}_v^\imath$，对于 $\underline{i} \in \mathbb{I}_\circ$。回忆元素 Y_i 来自 (3.1)。显然，

$$\mathrm{Fr}(\underline{B_i}) = F_i^\ell + Y_i^\ell \qquad \text{in } \mathbf{U}_v.$$

另一方面，根据引理 3.1，有 $F_i^\ell + Y_i^\ell = B_i^{[\ell]} \in \mathrm{U}_v^\imath$。因此，$\mathbf{Fr}(B_i) \in \mathrm{U}_v^\imath$。由此我们证明了 (3.4) 中的所有元素都属于 $\mathbf{Fr}^{-1}(\mathrm{U}_v^\imath$。证明完成。□

定义 3.3。U 的*Frobenius* 中心 $Z_0^\imath$ 定义为 $\mathbf{Fr}^\prime$的像。

根据定义，$Z_0^\imath$ 是 $\mathrm{U}_v^\imath$的中心子代数。代数 $Z_0^\imath$ 配备了由（3.3）给出的泊松结构。在此泊松结构下，$Z_0^\imath$ 被识别为 Z_0 的泊松子代数，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathcal{X}] & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Fr}^\imath} & Z_0^\imath \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[G^*] & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Fr}} & Z_0 \end{array} \tag{3.5}$$

命题 3.4。$Z_0^\imath$ 是 Z_0的余理想泊松子代数。

证明。只需证明 $\Delta(Z_0^\imath) \subset Z_0^\imath \otimes Z_0$。回想一下，$G^*$ 的乘法在 $\mathcal{X}$ 上诱导了 G^* 的右作用，该作用满足以下交换图

$$\begin{array}{ccc} G^* \times G^* & \xrightarrow{m} & G^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} \times G^* & \xrightarrow{m} & \mathcal{X} \end{array} \tag{3.6}$$

因此，余态射 $m^*\colon \mathbb{C}[G^*] \to \mathbb{C}[G^*] \otimes \mathbb{C}[G^*]$ 将 $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ 映到 $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \otimes \mathbb{C}[G^*]$。根据 [DCP93]，在同构 $\mathbf{Fr}$ 下，余态射 m^* 被识别为 Z_0上的余乘法 Δ。由（3.5），余态射 $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \to \mathbb{C}[G^*]$ 被识别为嵌入 $Z_0^\imath \hookrightarrow Z_0$。因此，我们证明了 $\Delta(Z_0^\imath) \subset Z_0^\imath \otimes Z_0$。□

3.2. PBW 基。设 $N = l(w_0)$、$M = l(w_\bullet)$ 和 $L = N - M$。回顾第 2.6 节，$\boldsymbol{w}_0 = w_\bullet w_0$ 是相对魏尔群 W° 中的最长元素。固定 $\boldsymbol{w}_0 = \mathbf{r}_{i_1}\mathbf{r}_{i_2}\cdots\mathbf{r}_{i_s}$ 在 W° 中的一个约化表达式，并固定 $w_\bullet = s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_M}$ 在 $W_\bullet$ 中关于 $w_\bullet$ 的一个约化表达式。按照 WZ23 表 1]，中的方式为 W 中的 $\mathbf{r}_i$ 选择约化表达式，我们得到 $\boldsymbol{w}_0 = s_{i_1}\cdots s_{i_L}$ 在 W 中的一个约化表达式。对于 $1 \le t \le L$，令 $\beta_t = s_{i_1}\cdots s_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t})$。对于任意 $j \in \mathbb{I}_\bullet$，令 $j' \in \mathbb{I}_\bullet$ 为满足 $\alpha_{j'} = -w_0(\alpha_{\tau j})$ 的元素。根据第 2.2 节 (3)，对于 $j \in \mathbb{I}_\bullet$，有 $\alpha_{j'} = w_0 w_\bullet(\alpha_j)$。于是 $w_\bullet = s_{j_1'}\cdots s_{j_M'}$ 也是 W 中的一个约化表达式。对于 $1 \le t \le M$，令 $\gamma_t = s_{j_1'}\cdots s_{j_{t-1}'}(\alpha_{j_t'})$。现在，有序集 $\{\beta_1, \cdots, \beta_L, \gamma_1, \cdots, \gamma_M\}$ 在 $\mathcal{R}^+$ 上诱导出与 W 中的约化表达式 $w_0 = s_{i_1}\cdots s_{i_L}s_{j_1}\cdots s_{j_M}$ 相关联的凸序。

对于 $w \in W$，令 $\mathcal{R}^+(w) = \mathcal{R}^+ \cap w(\mathcal{R}^-)$，其中 $\mathcal{R}^- = -\mathcal{R}^+$。则有 $\mathcal{R}^+(\boldsymbol{w}_0) = \{\beta_1, \cdots, \beta_L\}$ 以及 $\mathcal{R}^+(w_\bullet) = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_M\}$

对于 $1 \le t \le L$，回顾在 [SZ25, §3.4] 中定义的 $\mathrm{U}^\imath$ 中的根向量 B_{β_t}。对于 $1 \le t \le M$，令 $F_{\gamma_t} = T_{j_1'}\cdots T_{j_{t-1}'}(F_{j_t'})$ 和 $E_{\gamma_t} = T_{j_1'}\cdots T_{j_{t-1}'}(E_{j_t'})$。对于元组 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_L) \in \mathbb{N}^L$、$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_M) \in \mathbb{N}^M$、$\mathbf{d} = (d_1, \cdots, d_M) \in \mathbb{N}^M$，以及 $\mu \in P^\theta$，令

$$M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} = K_\mu F_{\gamma_M}^{c_M}\cdots F_{\gamma_1}^{c_1} B_{\beta_L}^{a_L}\cdots B_{\beta_1}^{a_1} E_{\gamma_M}^{d_M}\cdots E_{\gamma_1}^{d_1} \tag{3.7}$$

在 $\mathrm{U}^\imath$ 中。

命题 3.5 ([SZ25，定理 3。11])。有序单项式集合

$$\left\{ M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^L, \mathbf{c} \in \mathbb{N}^M, \mathbf{d} \in \mathbb{N}^M, \mu \in P^\theta \right\} \tag{3.8}$$

构成$\mathrm{U}_1^\imath$ 的 $\mathcal{A}'$-基。特别地，这些单项式在基变换下的像构成$\mathrm{U}_1^\imath$ 的$a\mathbb{C}$-基，以及$\mathrm{U}_v^\imath$的 $\mathbb{C}$-基。

我们仍用$M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}}$ 表示其在基变换下于 $\mathrm{U}^\imath_v$ 中的像。

设 $\beta\in\mathcal{R}^+(\boldsymbol{w}_0)$ 和 $m\in\mathbb{N}$。记

$$B_\beta^{[m\ell]}:=\mathrm{Fr}^\imath(\underline{B_\beta^m}). \tag{3.9}$$

根据定义，$B_\beta^{[m\ell]}=\big(B_\beta^{[\ell]}\big)^m$ 和 $B_\beta^{[m\ell]}$ 是 $\mathrm{U}^\imath_v$中的中心元。此外，由于引理3.1，对于 $B_{\alpha_i}^{[m\ell]}$，$i\in\mathbb{I}_\circ$ 与第 $B_i^{[m\ell]}$ 节中定义的元素2.5的特化相同。

下一个命题可由定理3.2 和命题3.5直接推出。

命题 3.6。有序单项式集合

$$K_\mu^\ell\overleftarrow{\prod_{1\le t\le M}}F_{\gamma_t}^{\ell c_t}\overleftarrow{\prod_{1\le t\le L}}B_{\beta_t}^{[\ell a_t]}\overleftarrow{\prod_{1\le t\le M}}E_{\gamma_t}^{\ell d_t},$$

对所有 $\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_L)\in\mathbb{N}^L$, $\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_M)\in\mathbb{N}^M$, $\mathbf{d}=(d_1,\cdots,d_M)\in\mathbb{N}^M$和 $\mu\in P^\theta$ 构成 $\mathbb{C}$-基 $Z_0^\imath$。

对于 $\beta=\sum_{i\in\mathbb{I}}a_i\alpha_i\in\mathcal{R}$，我们将其相对高度 $\mathrm{ht}^\imath(\beta)$ 定义为

$$\mathrm{ht}^\imath(\beta)=\sum_{i\in\mathbb{I}_\circ}a_i. \tag{3.10}$$

我们几乎将 $\mathrm{ht}^\imath$ 延拓到根格 Q。根据定义，对于任意 $\gamma\in\mathcal{R}$，$\mathrm{ht}^\imath(\gamma)=0$.

我们在 $\mathrm{U}^\imath=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{U}^\imath_{\leqslant n}$ 上定义一个 $\mathbb{N}$-滤过：$\mathrm{U}^\imath_{\leqslant n}=\bigoplus_{-\mathrm{ht}^\imath(\mu)\le n}\mathrm{U}^\imath\mu_\circ$。若$x\in\mathrm{U}^\imath_{\leqslant n}\setminus\mathrm{U}^\imath_{\leqslant(n-1)}$，则记作 $h^\imath(x)=n$。特别地，

$$h^\imath(F_i)=1,\qquad h^\imath(E_i)=h^\imath(K_\mu)=h^\imath(x)=0, \tag{3.11}$$

对于 $i\in\mathbb{I}_\circ$，$x\in\mathrm{U}^\imath_{\mathbb{I}_\bullet}$，$\mu\in P$，其中 $\mathrm{U}^\imath_{\mathbb{I}_\bullet}$ 是由 E_j，F_j（$j\in\mathbb{I}_\bullet$）生成的子代数。此滤过在 $\mathrm{U}^\imath$ 上诱导出一个 $\mathbb{N}$-滤过，使得 $\mathrm{U}^\imath_{\leqslant n}=\mathrm{U}^\imath\cap\mathrm{U}^\jmath_{\leqslant n_\circ}$。令 $\mathrm{U}^\jmath_{\mathcal{A}',\leqslant n}=\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'}\cap\mathrm{U}^\jmath_{\leqslant n_\circ}$

令 $1\le t\le L$，并注意到 $h^\imath(F_{\beta_t})=\mathrm{ht}^\imath(\beta_t)$。根据 [LYZ25，推论 4.3] 表明，$\iota(B_{\beta_t})$ 在 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}$ 中的首项为 F_{β_t}，且其 $h^\imath$-值 $\mathrm{ht}^\imath(\beta_t)$ 取最大值。因此，根据命题 3.5，(3.7) 中满足 $\sum_{t=1}^L a_t\mathrm{ht}^\imath(\beta_t)\le n$ 的单项式$M_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}}$ 构成 $\mathrm{U}^\jmath_{\mathcal{A}',\leqslant n}$ 的一组基。

设 R 为一个 $\mathcal{A}'$-代数，并令 $\mathrm{U}^\jmath_{R,\leqslant n}=\mathrm{U}^\jmath_{\mathcal{A}',\leqslant n}\otimes R$。于是我们得到一个滤过 $\mathrm{U}^\imath_R=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{U}^\jmath_{R,\leqslant n}$，使得对于 $i\in\mathbb{I}_\circ$，有 $B_i\in\mathrm{U}^\jmath_{R,\leqslant 1}\setminus\mathrm{U}^\jmath_{R,\leqslant 0}$。类似地，$\mathrm{U}_R=\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}\otimes R$ 上也有一个滤过。特别地，$\mathrm{U}^\imath_1$ 上有一个滤过，$\mathrm{U}^\imath_v$ 上也有一个滤过，并且嵌入$\iota_1:\mathrm{U}^\imath_1\to\mathrm{U}_1$，$\iota_v:\mathrm{U}^\imath_v\to\mathrm{U}_v$ 保持这些滤过。此外，有

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{U}_{1,\leqslant n})\subset\mathrm{U}_{v,\leqslant\ell n},\qquad\text{for } n\in\mathbb{N}. \tag{3.12}$$

引理 3.7. 对于 $\beta\in\mathcal{R}^+(\boldsymbol{w}_0)$，有

$$\mathrm{Fr}^\imath(\underline{B_\beta})=F_\beta^\ell+l.o.t..$$

证明. 由构造可知

$$\mathrm{Fr}^\imath(\underline{B_\beta})=\mathrm{Fr}(\underline{F_\beta}+\mathrm{l.o.t.})=F_\beta^\ell+\mathrm{l.o.t.},$$

其中最后一个等式由命题2.2 (4) 和 (3.12)。 □

引理 3.8. 令 $m\in\mathbb{N}$，并记 $m=k\ell+r$ 为 $k\in\mathbb{N},0\le r<\ell$。令 $\beta\in\mathcal{R}^+(\boldsymbol{w}_0)=\{\beta_1,\dots,\beta_L\}$，则在 $\mathrm{U}^\imath_v$ 中有

$$B_\beta^m=B_\beta^{[k\ell]}B_\beta^r+l.o.t.. \tag{3.13}$$

证明。 根据我们的构造， B_β^k 的首项为 F_β^k，其中 $k\in\mathbb{N}$。因此，只需证明 $\iota_v(B_\beta^{[\ell]})$ 的首项为 F_β^ℓ，对任意 $\beta\in\mathcal{R}^+(\boldsymbol{w}_0$均成立；这由引理 3.7 得出。 □

定理 3.9. 单项式集合

$$M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}}, \tag{3.14}$$

其中所有 a_r、 c_t、 d_t依次取遍0、1..... $\ell-1$， 而 μ取遍 $P^\theta/\ell P^\theta$的一组代表元，构成$\mathrm{U}_v^\imath$ 在 $Z_0^\imath$上的一组基。特别地，$\mathrm{U}_v^\imath$ 是一个秩为 $\ell^{\dim\mathfrak{k}}$ 的自由 $Z_0^\imath$-模，其中 $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}^\theta$。

证明. 设 $\mathcal{M}$ 是形如（3.8）的单项式。根据命题 3.5，所有这类单项式在 π_v 下的像构成 $\mathrm{U}_v^\imath$ 的一个 $\mathbb{C}$-基。由引理 3.8 并对次数作归纳，可将 π_v（$\mathcal{M}$）写成（3.14）中元素的 $Z_0^\imath$-线性组合。因此，（3.14）中的元素构成 $\mathrm{U}_v^\imath$ 在 $Z_0^\imath$上的生成集。

还需证明 (3.14) 中的元素在 $Z_0^\imath$ 上线性无关。根据 [LYZ25]，回忆一下 $\iota(B_\beta)$ 的首项是 F_β，因此 $\iota_v(B_\beta)$ 的首项是 F_β 在 U 中的v。这意味着元素 (3.14) 在 $\mathrm{U}_v^\imath$ 中的首项为

$$K_\mu \overleftarrow{\prod_{1\le t\le M}} F_{\gamma_t}^{c_t} \overleftarrow{\prod_{1\le r\le L}} F_{\beta_r}^{a_r} \overleftarrow{\prod_{1\le t\le M}} E_{\gamma_t}^{d_t}. \tag{3.15}$$

根据命题 2.2，当 a_r、 c_t、 d_t遍历 0， $1\ldots,\ell-1$，且 μ遍历 $P^\theta/\ell P^\theta$ 时，(3.15) 中的这些元素在 Z_0 上线性无关。注意到 $\iota_v(Z_0^\imath)\subset Z_0$，我们得出 (3.14) 中的元素在 $Z_0^\imath$上线性无关。

证明完毕。 □

引理 3.10. 设 $t=\ell^{\dim\mathfrak{g}}$ 和 $s=\ell^{\dim\mathfrak{k}}$。存在一个 $Z_0^\imath$-基 $\{x_1,x_2,\ldots,x_s\}$，它是 $\mathrm{U}_v^\imath$ 的一组基，并可扩充为 U_v 的一组 Z_0-基 $\{x_1,x_2,\ldots,x_t\}$。

证明。 取一个约化表达式 $w_0=s_{i_1}\cdots s_{i_L}s_{j_1}\cdots s_{j_M}$ 以及根向量 B_{β_i}, E_{γ_j}, F_{γ_j} 在 $\mathrm{U}_v^\imath$中，其中 $1\le i\le L$ 且 $1\le j\le M$，如第 3.2 节所示。令 $P_\ell^\theta\subset P^\theta$ 为$P^\theta/\ell P^\theta$的一组代表元。根据定理 3.9，单项式

$$K_{\mu_1} \overleftarrow{\prod_{1\le j\le M}} F_{\gamma_j}^{c_j} \overleftarrow{\prod_{1\le i\le L}} B_{\beta_i}^{a_i} \overleftarrow{\prod_{1\le j\le M}} E_{\gamma_j}^{d_j}, \tag{3.16}$$

其中 $\mu\in P_\ell^\theta$, $0\le a_i,c_j,d_j<\ell$ 构成 $\mathrm{U}_v^\imath$ 的一个 $Z_0^\imath$-基。

为得到 U_v 的一个 Z_0-基，我们令 $E_{\beta_t}=T_{s_{i_1}}\cdots T_{s_{i_{t-1}}}(E_{i_t})$ 属于 U_v，对任意 $1\le t\le L$。记作 $P^{-\theta}=\{\mu\in P\mid\theta\mu=-\mu\}$。固定一组代表元 $P_\ell^{-\theta}\subset P^{-\theta}$，对应于 $P^{-\theta}/\ell P^{-\theta}$。由于 ℓ 为奇数，我们有同构 $P/\ell P\cong P^\theta/\ell P^\theta\oplus P^{-\theta}/\ell P^{-\theta}$，作为 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-模；于是 $P_\ell^\theta+P_\ell^{-\theta}$ 构成 $P/\ell P$ 的一组代表元。

我们声称，这些单项式

$$K_{\mu_1}K_{\mu_2} \overleftarrow{\prod_{1\le j\le M}} F_{\gamma_j}^{c_j} \overleftarrow{\prod_{1\le i\le L}} B_{\beta_i}^{a_i} \overleftarrow{\prod_{1\le j\le M}} E_{\gamma_j}^{d_j} \overleftarrow{\prod_{1\le i\le L}} E_{\beta_i}^{e_i}, \tag{3.17}$$

其中 $\mu_1\in P_\ell^\theta,\mu_2\in P_\ell^{-\theta}$, $0\le a_i,c_j,e_i,d_j<\ell$ 构成 Z_0-基底 U_v。事实上，在第 $_{v,\le n}$ 3.2 节的滤过 U中，式（3.17）中的单项式具有如下首项

$$K_{\mu_1}K_{\mu_2} \overleftarrow{\prod_{1\le j\le M}} F_{\gamma_j}^{c_j} \overleftarrow{\prod_{1\le i\le L}} F_{\beta_i}^{a_i} \overleftarrow{\prod_{1\le j\le M}} E_{\gamma_j}^{d_j} \overleftarrow{\prod_{1\le i\le L}} E_{\beta_i}^{e_i}. \tag{3.18}$$

根据命题 2.2，式（3.18）中的单项式构成 Z_0-基底 U_v，这便推出了所要证明的结论。因此，U Z_0-基底 U_v 由式（3.17）中的单项式构成，其中包含子集（3.16）作为 $Z_0^\imath$-基底 $\mathrm{U}_v^\imath$。证明完毕。□

命题 3.11。我们有 $Z_0^\imath = Z_0 \cap \mathrm{U}_v^\imath$。

证明。显然，$Z_0^\imath \subseteq Z_0 \cap \mathrm{U}_v^\imath$。我们证明反向包含关系。

根据引理 3.10，我们可以取 Z_0-基 MofU_v，其中包含一个子集 $M^\imath$，使得 $M^\imath$ 是 $Z_0^\imath$-基 of $\mathrm{U}_v^\imath$。由引理 3.10 的证明可知，我们可以假设 $1 \in M^\imath$。令 $x \in Z_0 \cap \mathrm{U}_v^\imath$。由于 x 属于 $\mathrm{U}_v^\imath$，我们可以唯一地写成

$$x = \sum_{m \in M^\imath} x_m m, \qquad \text{where } x_m \in Z_0^\imath.$$

由于 $M^\imath$ 也是 Z_0-线性无关的，并且 $x \in Z_0$，我们得出除非 $m = 1$，否则 $x_m = 0$。因此 $x = x_1 \in Z_0^\imath$。证明完毕。□

3.3. **小量子对称对**。对于 $x \in G^*$，我们写作 $\mathrm{U}_{v,\,x} = \mathrm{U}_v/\mathfrak{m}_x\mathrm{U}_v$，其中 $\mathfrak{m}_x \subset Z_0$是对应于 x的极大理想。类似地，对于 $y \in K^\perp\backslash G^*$，定义 $\mathrm{U}_{v,\,y}^\imath = \mathrm{U}_v^\imath/\mathfrak{m}_y^\imath\mathrm{U}_v^\imath$，其中$\mathfrak{m}_y^\imath \subset \underline{Z_0^\imath}$ 是对应于 y的极大理想。对于 $x \in G^*$，我们写作 $x = K^\perp \cdot x \in K^\perp\backslash G^*$。

命题 3.12. 对于 $x \in G^*$，有 $\mathrm{U}_{v,\,x}^\imath \subset \mathrm{U}_{v,\,x}$。对于 $x \in G^*$、$y \in K^\perp\backslash G^*$，余乘法诱导出一个代数同态

$$\Delta_{x,y} : \mathrm{U}_{v,y\cdot x}^\imath \longrightarrow \mathrm{U}_{v,y}^\imath \otimes \mathrm{U}_{v,x}.$$

证明。设 $x \in G^*$。要证明自然嵌入 $\mathrm{U}_v^\imath \hookrightarrow \mathrm{U}_v$ 诱导出一个代数嵌入 $\mathrm{U}_{v,x}^\imath \hookrightarrow \mathrm{U}_{v,x}$，我们需要证明 $\mathfrak{m}_x^\imath\mathrm{U}_v^\imath = \mathrm{U}_v^\imath \cap \mathfrak{m}_x\mathrm{U}_v$。由于 $\mathfrak{m}_x^\imath = \mathfrak{m}_x \cap Z_0^\imath$，显然有$\mathfrak{m}_x^\imath\mathrm{U}_v^\imath \subset \mathrm{U}_v^\imath \cap \mathfrak{m}_x\mathrm{U}_v$。为证明另一个包含关系，我们取任意元素 $X \in \mathrm{U}_v^\imath \cap \mathfrak{m}_x\mathrm{U}_v$。根据引理 3.10，存在一个 Z_0-基 M，它包含 $\mathrm{U}_v^\imath$ 的一个 $Z_0^\imath$-基 M'。我们可以用这个基来表示元素 X

$$X = \sum_{m \in M'} X_m m, \qquad \text{where } X_m \in Z_0^\imath.$$

由于 $X \in \mathfrak{m}_x\mathrm{U}_v$，我们有 $X_m \in \mathfrak{m}_x$，对任意的 $m \in M'$。因此 $X_m \in \mathfrak{m}_x \cap Z_0^\imath = \mathfrak{m}_x^\imath$，这意味着 $X \in \mathfrak{m}_x^\imath\mathrm{U}_v^\imath$。

取 $x \in G^*$ 和 $y \in K^\perp\backslash G^*$。余乘法的存在性源于以下事实：

$$\Delta(\mathfrak{m}_{y\cdot x}^\imath) \subset \mathfrak{m}_y^\imath \otimes Z_v + Z_0^\imath \otimes \mathfrak{m}_x, \qquad \text{and} \qquad \Delta(\mathrm{U}_v^\imath) \subset \mathrm{U}_v^\imath \otimes \mathrm{U}_v.$$

证明完毕。□

令 $e \in G^*$ 为单位元。有限维霍普夫代数 $\mathfrak{u} = \mathrm{U}_{v,\,e}$ 称为小量子群，由 Lusztig 引入 [Lus90]; 另见 [GK93, （1）]。

定义 3.13。给定一个 Satake 图（$\mathbb{I} = \mathbb{I}_\circ \cup \mathbb{I}_\bullet$，$\tau$），代数 $\mathfrak{u}^\imath = \mathrm{U}_{v,\,e}^\imath$称为相应的小$\imath$量子群，而（$\mathfrak{u}$，$\mathfrak{u}^\imath$）称为相应的小量子对称对。

命题 3.14. 代数 $\mathfrak{u}^\imath$ 是 $\mathfrak{u}$的余理想子代数，它满足以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}_v^\imath & \longrightarrow & \mathfrak{u}^\imath \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{U}_v & \longrightarrow & \mathfrak{u} \end{array} \tag{3.19}$$

证明. 由命题 3.12 及其证明可知 $\mathfrak{u}^\imath$ 是 $\mathfrak{u}$ 的余理想子代数，且交换图成立。□

命题 3.15. 有序单项式的集合

$$K_\mu \overleftarrow{\prod_{1\le t\le M}} F_{\gamma_t}^{c_t} \overleftarrow{\prod_{1\le r\le L}} B_{\beta_r}^{a_r} \overleftarrow{\prod_{1\le t\le M}} E_{\gamma_t}^{d_t}, \tag{3.20}$$

其中所有 a_r、c_t、d_t 均遍历 0、1……，$\ell-1$ 且 μ 遍历 $P^\theta/\ell P^\theta$ 的一组代表元，构成 $\mathfrak{u}^\imath$ 的 $\mathbb{C}$ 基。特别地，维数 $\mathfrak{u}^\imath = \ell^{\dim \mathfrak{k}}$。

证明。此维数公式和 PBW 基由定理 3.9 推出。□

注 3.16。在 [BS21], Bao 和 Sale 定义了小量子对称对的修正版。我们的定义有所不同，因为我们得到的是一个实际的 $\mathfrak{u}$ 余理想子代数。

4. Degenerations of iquantum groups

本节中，我们在 $\mathbf{U}_v^\imath$ 上构造一个滤过，使得其伴随分次代数 $\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}_v^\imath$ 是一个局部化扭多项式代数。我们确定 $\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}_v^\imath$ 的次数和中心。

4.1. 扭曲多项式代数。 令 $\mathbb{F}$ 为一个环，$q\in\mathbb{F}$ 为一个可逆元。给定一个由反对称整数矩阵 $H=(h_{ij})$ 定义的 $n\times n$，扭多项式代数 $\mathcal{T}_H$ 是由 x_i、$1\le i\le n$ 生成的结合 $\mathbb{F}$-代数，它们满足以下关系

$$x_ix_j = q^{h_{ij}}x_jx_i, \quad \text{for } 1\le i,j\le n.$$

对于任意子集 $J\subset\{1,\cdots,n\}$，局部化扭多项式代数 $\mathcal{T}_{H,\,J}$ 定义为 $\mathcal{T}_{H,\,J}=\mathcal{T}_H[x_j^{-1}\mid j\in J]$。对于任意 $\mathbf{a}=(a_1,\ \cdots,\ a_n)\in\mathbb{Z}^n$，我们用 $x^{\mathbf{a}}=x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ 表示 $\mathcal{T}_H$ 的分式域中的元素。

我们主要关注 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 且 $q=v$ 为 1 的一个本原 ℓ 次单位根的情形。在本小节余下部分中，假设我们处于这种情形。令 H_ℓ 为线性映射 $H_\ell:\mathbb{Z}^n\to(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$，它由矩阵 H 诱导。令 K 为 H_ℓ 的核，h 为 H_ℓ 的像的基数。

命题 4.1 ([DCKP93a，命题 2。2] [DCP93，命题 7。1])。设 $J\subset\{1,\cdots,n\}$ 为任意子集。

(1) $\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{T}_{H,\,J}$ 是整闭域。(2) 该集合构成 $\mathbb{C}$ 的中心 $\mathcal{T}_H$ 的基，$_{J}$。(3) $\mathcal{T}_H$ 的次数为 $_J$ 是 $\sqrt{h}$。

$$\{x^{\mathbf{a}}\mid \mathbf{a}\in K,\ a_i\ge 0\ \ for\ i\notin J\}$$

—

4.2. **伴随分次代数。** 在本节余下部分，我们沿用第 3.2 节中的记号。特别地，我们固定一个约化表达式 $w_0=s_{i_1}\cdots s_{i_L}s_{j_1}\cdots s_{j_M}$ 使得 $w_\bullet=s_{j_1}\cdots s_{j_M}$。设 $\beta_1<\cdots<\beta_L<\gamma_1<\cdots<\gamma_M$ 为 $\mathcal{R}$ 上的相应凸序。对于 $1\le t\le M$，记 $i_{L+t}=j_t$ 和 $\beta_{L+t}=\gamma_t$。

对于 $\mathbf{a}\in\mathbb{N}^N$，通过 $a_k^\circ=a_k$（针对 $1\le k\le L$）和 $a_k^\bullet=a_{L+k}$（针对 $1\le k\le M$）定义 $\mathbf{a}^\circ\in\mathbb{N}^L$ 以及 $\mathbf{a}^\bullet\in\mathbb{N}^M$。定义两个函数 $\mathrm{ht}_\bullet, h^\imath:\mathbb{N}^N\times\mathbb{N}^M\to\mathbb{N}$，其定义为

$$\mathrm{ht}_\bullet((\mathbf{a},\mathbf{d}))=\sum_{t=1}^M\big(a_t^\bullet\mathrm{ht}(\gamma_t)+d_t\mathrm{ht}(\gamma_t)\big),\quad \text{and}\quad h^\imath((\mathbf{a},\mathbf{d}))=\sum_{i=1}^L a_i\mathrm{ht}^\imath(\beta_i). \tag{4.1}$$

回顾函数 ht，$\mathrm{ht}^\imath$：$Q\to\mathbb{Z}$ 见（2.7）和（3.10）。

对于 $\mu \in P^\theta$，一个 $\in \mathbb{N}^L$，$\mathbf{c}$，$\mathbf{d} \in \mathbb{N}^M$，由（3.7）回顾单项式 $M_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}}$。当 $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^N$时，我们也记作 $M_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{d}} = M_{\mu,\ \mathbf{a}^\circ,\ \mathbf{a}^\bullet,\ \mathbf{d}}$ 以简化记号。根据我们在第 3.2 节中的构造，单项式$M_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{d}}$ 的次数为

$$h^\imath(M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{d}}) = h^\imath((\mathbf{a},\mathbf{d})).$$

对于 $\mu \in P^\theta$，$\mathbf{a} \in \mathbb{N}^N$ 和 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^M$，将单项式 $M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{d}}$ 的总次数 $d(M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{d}})$ 定义为 $\mathbb{N}^{N+M+2}$ 中的以下元素

$$d(M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{d}}) = \big(a_N,\dots,a_1,d_M,\dots,d_1,\mathrm{ht}_\bullet((\mathbf{a},\mathbf{d})),h^\imath((\mathbf{a},\mathbf{d}))\big). \tag{4.2}$$

我们在 $\mathbb{N}^{N+M+2}$ 上赋予逆字典序。对于 $\gamma \in \mathcal{R}^+_\bullet$，我们有时用$B_\gamma$ 表示 F_γ。

引理 4.2. 设 $1 \le t < k \le L$。我们有

$$B_{\beta_k}B_{\beta_t} - q^{-(\beta_k,\beta_t)}B_{\beta_t}B_{\beta_k} = \sum_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} \rho_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}}, \tag{4.3}$$

其中 $\rho_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} = 0$，除非 $d(M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}}) < d(B_{\beta_t}B_{\beta_k})$。

证明。回顾第3.2 节中的滤过 $\mathbf{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{U}^{\leqslant n}$，以及 B_β 关于此滤过的首项 F_β。因此，在自然同构 $\mathbf{gr}(\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}) \cong \mathbf{U}_{P,\mathcal{A}'}$ 下，等式（4.3）左端在伴随分次代数 $\mathbf{gr}(\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'})$ 中的像为 $F_{\beta_k}F_{\beta_t} - q^{-(\beta_k,\beta_t)}F_{\beta_t}F_{\beta_k}$。对于$\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_L) \in \mathbb{N}^L$，记

$$F^{\mathbf{a}} = F_{\beta_L}^{a_L}\cdots F_{\beta_1}^{a_1}, \qquad B^{\mathbf{a}} = B_{\beta_L}^{a_L}\cdots B_{\beta_1}^{a_1}.$$

根据 [DCK90，引理 1，7] 以及其中的参考文献，由 $\{F^{\mathbf{a}},\mathbf{a} \in \mathbb{N}^L\}$ 张成的子空间是 $\mathbf{U}$ 的子代数，并且我们有

$$F_{\beta_k}F_{\beta_t} - q^{-(\beta_k,\beta_t)}F_{\beta_t}F_{\beta_k} = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^L} \rho'_{\mathbf{a}}F^{\mathbf{a}} \tag{4.4}$$

对于某个 $\rho'_{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}'$，使得 $\rho'_{\mathbf{a}} = 0$，除非 $d_1(F_{\mathbf{a}}) < d_1(F_{\beta_t}F_{\beta_k})$。这里我们在 $\mathbb{N}^L$ 上赋予逆字典序，并且 $d_1(F^{\mathbf{a}})$ 定义为

$$d_1(F^{\mathbf{a}}) = (a_L,\dots,a_1) \in \mathbb{N}^L; \tag{4.5}$$

参见 [DCK90，第 1 节。7]。

取 $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^L$ 使得 $\rho'_{\mathbf{a}} \neq 0$。右侧 (4.4) 中对应的 $F^{\mathbf{a}}$ 必须与 $F_{\beta_k}F_{\beta_t}$ 具有相同的权，因此 $h^\imath(B^{\mathbf{a}}) = h^\imath(B_{\beta_t}B_{\beta_k})$。于是，由 (4.2)，$d_1(F_{\mathbf{a}}) < d_1(F_{\beta_t}F_{\beta_k})$ 蕴含 $d(B^{\mathbf{a}}) < d(B_{\beta_t}B_{\beta_k})$。即，

$$\rho'_{\mathbf{a}} = 0, \qquad \text{unless } d(B^{\mathbf{a}}) < d(B_{\beta_t}B_{\beta_k}). \tag{4.6}$$

另一方面，回顾 $h^\imath(B_\beta) = \mathrm{ht}^\imath(\beta)$。利用同构 $\mathbf{gr}(\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}) \cong \mathbf{U}_{P,\ \mathcal{A}'}$，（4.4）意味着下列元素的首项

$$B_{\beta_k}B_{\beta_t} - q^{-(\beta_k,\beta_t)}B_{\beta_t}B_{\beta_k} - \sum_{\mathbf{a}} \rho'_{\mathbf{a}}B^{\mathbf{a}} \tag{4.7}$$

的次数严格小于 $h^\imath(B_{\beta_t}B_{\beta_k}) = \mathrm{ht}^\imath(\beta_t+\beta_k)$。因此，如果将元素（4.7）用 $\mathbf{U}$ 的 PBW 基 $\{M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} \mid \mu \in P^\theta,\mathbf{a} \in \mathbb{N}^L、\mathbf{c} \in \mathbb{N}^M、\mathbf{d} \in \mathbb{N}^M\}$ 表示$^\imath$

$$B_{\beta_k}B_{\beta_t} - q^{-(\beta_k,\beta_t)}B_{\beta_t}B_{\beta_k} - \sum_{\mathbf{a}} \rho'_{\mathbf{a}}B^{\mathbf{a}} = \sum_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} \rho''_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}}, \tag{4.8}$$

那么 $\rho''_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}} = 0$ 除非 $h^\imath(M_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}}) < h^\imath(B_{\beta_t}B_{\beta_k})$。

因此，由（4.6）和（4.8）可知，$B_{\beta_k}B_{\beta_t} - q^{-(\beta_k,\beta_t)}B_{\beta_t}B_{\beta_k}$是总次数严格小于 $d(B_{\beta_t}B_{\beta_k})$ 的单项式的线性组合，得证。□

引理 4.3. 设 $1 \le t \le L, 1 \le k \le M$。我们有

$$E_{\gamma_k} B_{\beta_t} - B_{\beta_t} E_{\gamma_k} = \sum_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} \rho_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}}, \tag{4.9}$$

其中 $\rho_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}} = 0$ 除非 $d(M_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}}) < d(B_{\beta_t} E_{\gamma_k})$。

证明。 回顾式 (3.11) 中的滤过以及 $\mathbf{U}$ 上的函数 $h^\imath$。根据 [LYZ25], , B_{β_t} 的首项为 F_{β_t}。因此，我们有

$$E_{\gamma_k} B_{\beta_t} - B_{\beta_t} E_{\gamma_k} = E_{\gamma_k} F_{\beta_t} - F_{\beta_t} E_{\gamma_k} + X, \tag{4.10}$$

其中 $h^\imath(X) < h^\imath(B_{\beta_t} E_{\gamma_k})$。注意 $h^\imath(E_{\gamma_k} F_{\beta_t} - F_{\beta_t} E_{\gamma_k}) = h^\imath(B_{\beta_t} E_{\gamma_k})$。然而，利用关系式 (2.3)，我们有

$$E_{\gamma_k} F_{\beta_t} - F_{\beta_t} E_{\gamma_k} = \sum_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} \rho'_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}} M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}},$$

其中 $\rho'_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}} = 0$ 除非 $\mathrm{ht}_\bullet(M_{\mu,\ \mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}}) < \mathrm{ht}_\bullet(B_{\beta_t} E_{\gamma_k})$。因此，式 (4.10) 右侧的总次数严格小于 $d(B_{\beta_t} E_{\gamma_k})$，证毕。 □

对于 $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^{N+M+2}$，记 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}(\le \mathbf{c})$（分别记为 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}(< \mathbf{c})$）为 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 中由 $M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{d}}$ 张成的 $\mathcal{A}'$-子空间，其中 $d(M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{d}}) \le \mathbf{c}$（分别为 $d(M_{\mu,\mathbf{a},\mathbf{d}}) < \mathbf{c}$）。于是 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 成为一个 $\mathbb{N}^{N+M+2}$-过滤代数。令 $\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 为其伴随分次代数，即

$$\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'} = \bigoplus_{\mathbf{c}\in\mathbb{N}^{N+M+2}} \mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}(\le \mathbf{c})/\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}(< \mathbf{c}).$$

定理 4.4. 伴随分次代数 $\mathrm{Gr}\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 是一个由以下元素生成的 $\mathcal{A}'$-代数

$$B_{\beta_k}, E_{\gamma_t}, K_\mu$$

对于 $1 \le k \le N$、$1 \le t \le M$、$\mu \in P^\theta$，满足以下关系：

$$\begin{aligned}
&K_{\mu_1} K_{\mu_2} = K_{\mu_2} K_{\mu_1} = K_{\mu_1+\mu_2},\\
&E_{\gamma_t} B_{\beta_k} = B_{\beta_k} E_{\gamma_t},\\
&K_\mu B_{\beta_k} = q^{-(\mu,\beta_k)} B_{\beta_k} K_\mu, \qquad K_\mu E_{\gamma_t} = q^{(\mu,\gamma_t)} E_{\gamma_t} K_\mu,\\
&E_{\gamma_{t_1}} E_{\gamma_{t_2}} = q^{-(\gamma_{t_1},\gamma_{t_2})} E_{\gamma_{t_2}} E_{\gamma_{t_1}}, \qquad B_{\beta_{k_1}} B_{\beta_{k_2}} = q^{-(\beta_{k_1},\beta_{k_2})} B_{\beta_{k_2}} B_{\beta_{k_1}}, \qquad \text{if } t_1 > t_2, k_1 > k_2.
\end{aligned}$$

证明。 令 $\mathscr{A}$ 为由此表示定义的代数。显然，$\mathscr{A}$ 是一个局部化扭多项式代数，且单项式集合 $\{K_\mu B^{\mathbf{a}} F^{\mathbf{c}} E^{\mathbf{d}} | \mu \in P, \mathbf{a} \in \mathbb{N}^L, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{N}^M\}$ 构成 $\mathscr{A}$ 的一组基。另一方面，$\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 的 PBW 基下降为 $\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 的一组基。因此，只需证明 $\mathscr{A}$ 的定义关系在 $\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 中成立。

很容易 f向前检查 B_β，K_μ 之间的关系，以及 E_γ，K_μ之间的关系。

回顾一下，$\mathcal{R}^+ = \{\beta_1, \cdots, \beta_L, \gamma_1, \cdots, \gamma_M\}$。注意，若 $\mathbf{a} = 0 \in \mathbb{N}^L$，则 $h^\imath(M_{\mu,\ 0,\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}}) = 0$，且 (4.2) 中定义的总次数与 [DCK90]中的总次数相容。因此，由 [DCK90，命题 1.7], , 我们得到 $\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 中关于 $i > j$

$$E_{\gamma_i} E_{\gamma_j} = q^{-(\gamma_i,\gamma_j)} E_{\gamma_j} E_{\gamma_i}, \qquad F_{\gamma_i} F_{\gamma_j} = q^{-(\gamma_i,\gamma_j)} F_{\gamma_j} F_{\gamma_i},$$

由引理 4.2，我们有 $B_{\beta_i} B_{\beta_j} = q^{-(\beta_i,\beta_j)} B_{\beta_i} B_{\beta_j}$，其中 $1 \le j < i \le L$。使用与引理 4.2的证明类似的论证，我们也可以证明 $F_{\gamma_k} B_{\beta_t} = q^{-(\gamma_k,\beta_t)} B_{\beta_t} F_{\gamma_k}$ 在 $\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$中的关系。剩余的关系 $E_\gamma B_\beta = B_\beta E_\gamma$ 由引理 4.3得出。

其中 因此，我们已经证明了 $\mathscr{A}$ 的所有定义关系在 $\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 中成立，正如所希望的那样 . □

注 4.5。 类似于 [DCP93，注 10。1] 和 [DCKP93a，注 4.2(a)], 代数 $\mathrm{GrU}^{\imath}_{\mathcal{A}'}$ 可以看作关于迭代 $\mathbb{N}$ 滤过的伴随分次代数。

我们希望 将 $\mathrm{U}^{\imath}_{\mathcal{A}'}$ 上滤过的基变换应用于此。下面的引理是显然的 .

引理 *4.6.* 设 A 是一个环，$R = \bigcup_{\mathbf{c}} R(\leq \mathbf{c})$ 是一个滤过的 A-代数，且 R 是其伴随分次代数。假设 R 作为一个 A-模存在基 B，使得每个子空间 $R(\leq \mathbf{c})$ 都由 B 的一个子集张成。那么对于任意 A-代数 A'，A'-代数 $R' = A' \otimes_A R = \bigcup_{\mathbf{c}} R'(\leq \mathbf{c})$ 是一个滤过的 A'-代数，其中 $R'(\leq \mathbf{c}) = R' \otimes_R R(\leq \mathbf{c})$。此外，伴随分次代数 $\mathit{Gr}\, A'$ 与 $R' \otimes_R \mathit{Gr}\, A$ 同构。

根据引理 4.6，我们得到一个 $\mathbb{N}^{N+M+2}$-滤过，定义在 $\mathbb{C}$-代数 $\mathrm{U}^{\imath}_{\upsilon}$ 上。令 $\mathbf{GrU}^{\imath}_{\upsilon}$ 表示其伴随分次代数。下面的命题由定理4.4 和引理4.6

命题 4.7。 伴随分次代数 $\mathrm{GrU}^{\imath}_{\upsilon}$ 是一个由元素生成的 $\mathbb{C}$-代数

$$B_{\beta_k}, E_{\gamma_t}, K_\mu$$

对于 $1 \leq k \leq N$，$1 \leq t \leq M$，$\mu \in P^\theta$，它们满足与定理 *4.4* 中相同的关系，只需将q 替换为 υ。

定义斜对称矩阵

$$A = (\mathrm{sgn}(j-i)(\beta_i, \beta_j))_{1 \leq i,j \leq N} \quad \text{and} \quad A' = (\mathrm{sgn}(j-i)(\gamma_i, \gamma_j))_{1 \leq i,j \leq M}, \tag{4.11}$$

其中，当 $k > 0$、$k < 0$ 或 $k = 0$ 时，$\mathrm{sgn}(k)$ 分别为 $= 1$，-1 或 0。

令 $\mathcal{T}_{S_+}$ 为 由生成元 y_{β_1}，$\cdots$，y_{β_N}，x_{γ_1}，$\cdots$，x_{γ_M} 生成的扭多项式代数 assoc

i- 与斜对称矩阵 矩阵

$$S_+ = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

令 $\mathbb{C}[K_\mu | \mu \in P^\theta]$ 为 U 的交换子代数$^{\imath}_{\upsilon}$。由命题 4.7，我们有代数同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}\, \mathrm{U}^{\imath}_{\upsilon} &\cong \mathcal{T}_{S_+} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[K_\mu | \mu \in P^\theta], \\ B_{\beta_i} &\mapsto y_{\beta_i}, E_{\gamma_j} \mapsto x_{\gamma_j}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中右侧的乘法定义为 $K_\mu y_{\beta_i} = \upsilon^{-(\mu,\beta_i)} y_{\beta_i} K_\mu$ 和 $K_\mu x_{\gamma_j} = \upsilon^{(\mu,\gamma_j)} x_{\gamma_j} K_\mu$。

引理 *4.8*（参见 [*DCK90*，命题 *1*.8]）。设 A 为由 r_1、$\cdots$、r_s 作为一个 $\mathbb{C}$-代数生成的交换整闭整环。设 $\mathcal{T}$ 为由 x_1、$\cdots$、x_t 生成的扭多项式代数。设 C 为一个 $\mathbb{N}^K$-过滤代数，使得 $C_0 = A$，且 $\mathit{Gr}\ C = \mathcal{T} \otimes_{\mathbb{C}} A$，其中乘法由 $r_i x_j = \mu_{ij} x_j r_i$、$\mu_{ij} \in \mathbb{C}^\times$ 给出。假设 $\mathcal{T}$ 的每个生成元 x 在 C 中都有一个原像 $\widetilde{x}$，满足

$$\widetilde{x}^\ell = z_x + \mathit{lower\ degree\ terms} \tag{4.14}$$

对于 z_x 中心 Z_C 中的某个 C。则代数 C 是整闭的。

证明。 该引理的证明与 [DCK90，命题 1 的证明平行。8]（另见 [DCP93，定理 6。5]）。□

定理 4.9. 代数$\mathrm{U}^{\imath}_{\upsilon}$ 是一个整闭域。

证明。回顾一下，$\mathbf{U}_v^\imath$ 自然是 $\mathbf{U}_v$ 的一个子代数（参见第 2.2节）。根据 [DCK90，推论 1。8],$\mathbf{U}_v$ 没有零因子。因此，$\mathbf{U}_v^\imath$ 没有零因子。接下来我们证明 $\mathbf{U}_v^\imath$ 是整闭的。

显然，$\mathbb{C}[K_\mu|\mu\in P^\theta]$ 是整闭的，且没有零因子。回忆一下，$\mathbf{U}_v^\imath$ 是 $\mathbb{N}^{L+2M+2}$-滤过的，滤过由（4.2）给出，而 $\mathbf{U}_v^\imath$ 的总次数为 0 的部分恰好是 $\mathbb{C}[K_\mu|\mu\in P^\theta]$。注意，$B_i^{[\ell]}$ 的首项是 B_i^ℓ，因此 $B_{\beta_i}^{[\ell]}$ 的首项是 $B_{\beta_i}^\ell$。由定理 3.2 及其证明可知，$B_{\beta_i}^{[\ell]}$ 是中心元素，因此元素 B_{β_i}，E_{γ_j} 对于 $1\le i\le N$，$1\le j\le M$ 满足条件（4.14）。现在，由（4.13）和引理 4.8即可得到所需结论。□

4.3. GrU 的次数。在本小节中，我们确定 $\mathrm{Gr}\,\mathbf{U}_v^\imath$ 的次数。

回想一下，$\mathbb{I}_{\circ,\tau}\subset\mathbb{I}_\circ$ 是 τ-轨道的一组代表元。子格 $P^\theta\subset P$ 是秩为 $R=|\mathbb{I}\backslash\mathbb{I}_{\circ,\tau}|$ 的自由 $\mathbb{Z}$-模。取 P^θ 的一组 $\mathbb{Z}$-基 $\{\omega_s^0\mid 1\le s\le r\}$。定义

$$B=(-(\omega_s^0,\beta_j))_{1\le s\le r,1\le j\le N}\quad\text{and}\quad B'=(-(\omega_s^0,\gamma_j))_{1\le s\le r,1\le j\le M}.$$

回想一下，斜对称矩阵 A 和 A' 见（4.11）。

由命题4.7，代数 $\mathbf{GrU}_v^\imath$ 可识别为局部化扭多项式代数 $\mathcal{T}_{S,\ J(S)}=\langle y_{\beta_1}、\ldots\ldots、y_{\beta_N}，x_{\gamma_1}、\ldots\ldots、x_{\gamma_M}，t_{\omega_1^0}、\ldots\ldots、t_{\omega_r^0}\rangle$，其中 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$，$q=v$，S 是如下斜对称矩阵

$$S=\begin{pmatrix}A & 0 & -{}^tB\\ 0 & A' & {}^tB'\\ B & -B' & 0\end{pmatrix}\tag{4.15}$$

和 $J(S)=\{t_{\omega_s^0}|1\le s\le r\}$；有关约定请参见第4.1 节。

设 V 是以 $\{u_i\mid 1\le i\le N\}$ 为基的自由 $\mathbb{Z}[2^{-1}]$-模，设 V' 是以 $\{u_i'\mid 1\le i\le M\}$ 为基的自由 $\mathbb{Z}[2^{-1}]$-模。我们将矩阵 $A=(a_{ij})$ 与满足 $u_i\mapsto\sum_{j=1}^N a_{ji}u_j$ 的线性映射 $V\to V$ 等同，并类似地将 A' 与线性映射 $V'\to V'$ 等同。

设 $'P=\mathbb{Z}[2^{-1}]\otimes_{\mathbb{Z}}P$。则 $'P={}'P^\theta\oplus{}'P^{-\theta}$，其中 ${}'P^\theta$（分别地，${}'P^{-\theta}$）是 $\imath\theta$-不变元（分别地，θ-反不变元）构成的子群。设 $B:V\to{}'P$ 是满足对 $1\le i\le N$ 有 $u_i\mapsto\beta_i$ 的线性映射，且 $B'\colon V'\to{}'P$ 是满足对 $1\le i\le M$ 有 $u_i'\mapsto\gamma_i$ 的线性映射。则 ${}^t\widetilde{B}$ 与满足 $\mu\mapsto\sum_{t=1}^N(\mu,\ \beta_t)u_t$ 的线性映射 ${}'P\to V$ 等同，而 ${}^t\widetilde{B}'$ 与满足 $\mu\mapsto\sum_{t=1}^M(\mu,\ \gamma_t)u_t'$ 的 ${}'P\to V'$ 等同。最后，注意到 $B=pr_0\circ\widetilde{B}\colon V\to{}'P^\theta$，其中 $pr_0\colon{}'P\to{}'P^\theta$ 是投影映射，且 ${}^tB={}^t\widetilde{B}\,|_{{}'P^\theta}\colon{}'P^\theta\to V$。类似地，$B'=pr_0\circ\widetilde{B}'\colon V'\to{}'P^\theta$ 且 ${}^tB'={}^t\widetilde{B}'\,|_{{}'P^\theta}\colon{}'P^\theta\to V'$。

回顾约化表达式 $w_0=s_{i_1}\cdots s_{i_L}s_{j_1}\cdots s_{j_M}$，其中 $w_\bullet=s_{j_1}\cdots s_{j_{M_\circ}}$。记 $i_{L+t}=j_t$ 为 $1\le t\le M_\circ$。注意，$\mathcal{R}_\bullet^+$ 中的凸序 $\gamma_1<\cdots<\gamma_M$ 与约化表达式 $w_\bullet=s_{j_1'}\cdots s_{j_M'}$ 相关联，其中 $s_{j_k'}=w_0w_\bullet s_{j_k}w_\bullet w_0$ 对于 $1\le k\le M_\circ$

对于 $\nu\in P$，定义 $\mathbf{c}(\nu)=(c_k(\nu))\in\mathbb{Z}^N$，以及 $\mathbf{c}'(\nu)=c_k'(\nu)\in\mathbb{Z}^M$，如下

$$c_k(\nu)=\langle\alpha_{i_k}^\vee,\nu\rangle,\qquad\text{for } 1\le k\le N;\tag{4.16}$$

and

$$c_k'(\nu)=\langle\alpha_{j_k'}^\vee,\nu\rangle\qquad\text{for } 1\le k\le M.\tag{4.17}$$

定义

$$u(\nu)=\sum_{k=1}^N c_k(\nu)u_k\in V\qquad\text{and}\qquad u'(\nu)=\sum_{k=1}^M c_k'(\nu)u_k'\in V'.\tag{4.18}$$

考虑矩阵

$$M=\begin{pmatrix}A & -{}^t\widetilde{B}\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad M'=\begin{pmatrix}A' & {}^t\widetilde{B}'\end{pmatrix}.\tag{4.19}$$

分别用 $M_\ell\colon\ V\oplus {}'P\to V/\ell V$ 和 $M'_\ell\colon\ V'\oplus {}'P\to V'/\ell V'$ 表示由 M 和 M' 诱导的线性映射。

引理 4.10 ([DCP93，引理 10。4])。 设 ℓ 是一个与 ϵ_i 互素的奇整数，且$i\in\mathbb{I}$。则有：

(1) 对任意 $\mu\in P$，有 $M(u(\mu)+(1+w_0)\mu)=0$。此外，线性映射M_ℓ 的核由向量 $u(\omega_i)+(1+w_0)\omega_i$ *(*$i\in\mathbb{I}$*)* 和 $\ell(V\oplus {}'P)$张成。

(2) 对任意 $\mu\in P$，有 $M'(u'(\mu)-(1+w_\bullet)\mu)=0$。此外，线性映射$M'_\ell$的核由向量 $u'(\omega_i)-(1+w_\bullet)\omega_i$*(*$i\in\mathbb{I}$*)* 和 $\ell(V'\oplus {}'P)$张成。

(3) 对任意 $\mu\in P$，我们有 $B(u(\mu))=(1-w_0)\mu$ 以及 $B'(u'(\mu))=(1-w_\bullet)\mu$。

令 $X=V\oplus V'\oplus {}'P^\theta$，并记 S_ℓ 为由 S诱导的线性 $X\to X/\ell X$。接下来我们确定 S_ℓ的核。我们需要做一些准备。

按照 [KL08], 定义

$$P^\imath=\{\mu\in P\mid \theta(\mu)=\mu+w_0\mu-w_\bullet\mu\},\tag{4.20}$$

并且 ${}'P^\imath=\mathbb{Z}[2^{-1}]\otimes_{\mathbb{Z}}P^\imath$。回顾一下，$\tau_0\colon\ \mathbb{I}\to\mathbb{I}$是满足以下条件的图示对合 $w_0s_iw_0=s_{\tau_0 i}$对任意 $i\in\mathbb{I}$。我们汇总 $P^\imath$ 的基本性质，依据 [KL08，命题 9。2] 以及 [Ko20，引理 4。5]。

引理 4.11。(1) $P^\imath$ 是一个自由阿贝尔群，其秩等于 $\mathfrak{k}$的秩。

(2) </style}有 。(3) 有

$$P^\imath=\{\nu\in P\mid \theta((1+w_0)\nu)=(1+w_0)\nu,\quad \theta((w_0-w_\bullet)\nu)=(w_\bullet-w_0)\nu\}.$$

Let $\{i_1,i_2,\dots,i_m\}\subset\mathbb{I}$是 $\tau\tau_0$-轨道的一组代表元。对于 $1\le k\le m$，取 e

$$\nu_k=\begin{cases}\omega_{i_k}+\omega_{\tau_0\tau i_k} & \text{if } \tau_0\tau i_k\neq i_k,\\ \omega_{i_k} & \text{if } \tau_0\tau i_k=i_k.\end{cases}\tag{4.21}$$

令 $P^\imath_+=P_+\cap P^\imath$。于是，根据 [KL08，命题 9。1], 我们有

$$P^\imath=\bigoplus_{i=1}^m\mathbb{Z}\nu_i\qquad\text{and}\qquad P^\imath_+=\bigoplus_{i=1}^m\mathbb{N}\nu_i.\tag{4.22}$$

特别地，由引理 $m=$秩 $\mathfrak{k}$，可得 4.11 (1)。

回顾 $u(\nu)$ $u'(\nu)$，见 (4.18)。对于 $1\le i\le m$，定义

$$x(\nu_i)=u(\nu_i)+u'(-w_\bullet\nu_i)+(1+w_0)\nu_i.$$

由引理 4.11 (3)，我们有 $(1+w_0)\nu_i\in P^\theta$。特别地 $x(\nu_i)\in X$。

引理 4.12。*(1)* $S_\ell\colon\ X\to X/\ell X$ 的核由向量 $x(\nu_i)$ $(1\le i\le m)$ 和 ℓX张成。*(2)* S_ℓ 的像同构于 $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2N_0}$，其中 $2N_0=$维数为 $\mathfrak{k}$–秩 $\mathfrak{k}$。

证明。我们先证明 (1)。设 $S_\ell(v+v'+\lambda)=0$，其中 $v\in V$、$v'\in V'$和 $\lambda\in {}'P^\theta$。于是有 $M_\ell(v+\lambda)=0$。由引理 4.10 (1)，我们有 $\lambda=(1+w_0)\mu+\ell\lambda_1$ 以及 $v=u(\mu)+\ell v_1$，其中μ、$\lambda_1\in {}'P$ 和 $v_1\in V$。由于 $\lambda\in {}'P^\theta$，用 $\mu+\ell' P$中的某个元素替换 μ后，不妨设 $(1+w_0)\mu\in {}'P^\theta$。类似地，通过求解 $M'_\ell(v'+\lambda)=0$并应用引理 4.10 (2)，我们推出 $v'=u'(\mu')+\ell v'_1$以及 $\lambda=-(1+w_\bullet)\mu'+\ell\lambda_2$，其中 $(1+w_\bullet)\mu'\in {}'P^\theta$、$v'_1\in V'$和 $\lambda_2\in {}'P$。

对于任意的 $\gamma\in {}'P$，记 $\gamma=\gamma_0+\gamma_1$，其中 $\gamma_0\in {}'P^\theta$ 且 $\gamma_1\in {}'P^{-\theta}$。

通过比较 λ 的两个表达式，我们得出

$$(1+w_0)\mu+(1+w_\bullet)\mu'=(1+w_0)\mu_0+(1+w_\bullet)\mu'_0\in\ell' P.\tag{4.23}$$

由引理 4.10（3）可得

$$Bv - B'v' = (\widetilde{B}v - \widetilde{B}'v')_0 = (1-w_0)\mu_0 - (1-w_\bullet)\mu_0'.$$

那么 $S_\ell(v+v'+\lambda) = 0$ 意味着

$$(1-w_0)\mu_0 - (1-w_\bullet)\mu_0' \in \ell({}'P^\theta). \tag{4.24}$$

将（4.23）与（4.24）结合起来，我们得到

$$\mu_0 + w_\bullet\mu_0' \in \ell({}'P^\theta) \quad \text{and} \quad (w_0 - w_\bullet)\mu_0 \in \ell({}'P^\theta). \tag{4.25}$$

因此 $\mu_0 \in \ker(w_0 - w_\bullet) + \ell({}'P^\theta)$。所以我们可以假设 $(w_0 - w_\bullet)\mu_0 = 0$ 且 $\mu_0' = -w_\bullet\mu_{0\circ}$ 我们得出 $(1+w_0)\mu \in {}'P^\theta$ 以及 $(w_0 - w_\bullet)\mu \in {}'P^{-\theta}$，由引理 4.11可知，这意味着 $\mu \in P^\imath$。接着可直接看出，对于某个 $x \in X$，有 $v + v' + \lambda = u(\mu) + u'(-w_\bullet\mu) + (1+w_0)\mu + \ell x$，因此 $v + v' + \lambda$ 属于由（1）中的向量张成的子空间。

反过来，我们证明 $S_\ell(x(\nu_i)) = 0$ 适用于 $1 \le i \le m$。显然，

$$A(u(\nu_i)) - {}^tB((1+w_0)\nu_i) = 0.$$

由引理 4.10 (2)，我们有 $A'(u'(-w_\bullet\nu_i)) + {}^t\widetilde{B}'((1+w_\bullet)\nu_i) = 0$。注意，对于任意的 $\mu \in {}'P^{-\theta}$ 和 $\sim j \in \mathbb{I}_\bullet$，都有 $\langle \alpha_j^\vee, \mu\rangle = 0$。这意味着，由 (4.18) 可得 $u'(\mu) = 0$，并且由 ${}^t\widetilde{B}$ 的定义可得 ${}^tB'(\mu) = 0$。特别地，由引理 4.11 (3)，有 $(w_0 - w_\bullet)\nu_i \in {}'P^{-\theta}$，从而 ${}^t\widetilde{B}'((w_0 - w_\bullet)\nu_i) = 0$。因此，我们有

$$A'(u'(-w_\bullet\nu_i)) - {}^tB'((1+w_0)\nu_i) = A'(u'(-w_\bullet\nu_i)) - {}^t\widetilde{B}'((1+w_\bullet)\nu_i) = 0.$$

最后，由引理 4.10 (3) 和引理4.11 (3)，可得

$$B(u(\nu_i)) - B'(u'(-w_\bullet\nu_i)) = pr_0((1-w_0)\nu_i - (1-w_\bullet)\nu_i) = pr_0((w_\bullet - w_0)\nu_i) = 0.$$

我们完成了（1）的证明。

（2）的证明可由注意到 $P^\imath$ 是 P的一个直和项得出。 □

定理 4.13。 假设 ℓ 是一个与 ϵ_i 互素的奇正整数，其中 $i \in \mathbb{I}$。代数 $\mathrm{GrU}_v^\imath$ 的次数为 ℓ^{N_0}，其中 $N_0 = (dim\ \mathfrak{k} - 秩\ \mathfrak{k})/2$ 是约化李代数 $\mathfrak{k}$的正根数。

证明。 这由引理4.12(2) 和命题 4.1(3) 得出。 □

4.4. Gr U 的中心 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}_v^\imath$。 在本小节中，我们确定 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}_v^\imath$的中心。

回忆元素 $\nu_i \in P_+^\imath$，$1 \le i \le m$，参见（4.21）。回忆（4.16）和（4.17）。特别地，有 $c_k(\nu_i) \ge 0$，对于 $1 \le i \le m$，$1 \le k \le N$。对于 $\nu \in P_+$ 和 $1 \le k \le M$，注意到

$$c_k'(-w_\bullet\nu) = \langle \alpha_{j_k'}^\vee, -w_\bullet\nu\rangle = \langle \alpha_{j_k}^\vee, -(w_\bullet w_0)w_\bullet\nu\rangle = \langle \alpha_{j_k}^\vee, -w_0\nu\rangle. \tag{4.26}$$

特别地，有 $c_k'(-w_\bullet\nu_i) \ge 0$。

命题 4.14。 $\mathrm{GrU}_v^\imath$ 的中心由以下元素生成

$$K_{(1+w_0)\nu_i}\prod_{t=1}^{N} B_{\beta_t}^{\langle \alpha_{i_t}^\vee, \nu_i\rangle}\prod_{t=1}^{M} E_{\gamma_t}^{\langle \alpha_{j_t}^\vee, -w_0\nu_i\rangle}, \quad 1 \le i \le m = rank\ \mathfrak{k}; \tag{4.27}$$

$$B_{\beta_t}^\ell, \quad 1 \le t \le N; \quad E_{\gamma_t}^\ell, \quad 1 \le t \le M; \quad K_{\ell\mu}, \quad \mu \in P^\theta; \tag{4.28}$$

作为一个 $\mathbb{C}$-代数。

证明。 由命题 4.1 和引理 4.12可得。 □

5. The degree and the full center

本节首先回顾 Kolb 的构造 [Ko20] ，即为 i量子群构造中心元，并在命题 5.1 中证明这些元素属于整形式。我们在第 5.3 节确定这些中心元的首项，这些首项与命题 4.14中的元素一致。这使我们能够进一步确定 $\mathrm{U}^\imath_\upsilon$的次数和全中心。

5.1. **Kolb-Letzter 中心**。一般情形下，i量子群 $\mathrm{U}^\imath$ 的 q 中心由 Kolb 和 Letzter 研究 [KL08], 其中，Kolb 给出了一种概念性构造 [Ko20] 基于泛 K-矩阵。本小节回顾 Kolb 的构造。

令 D 为满足对所有 $\mu,\nu\in P$，$(\mu,\nu)\in\frac{1}{D}\mathbb{Z}$ 的最小正整数。为描述 $\mathrm{U}^\imath$ 的中心，我们将基域扩张至 $\mathbb{C}(q^{1/(2D)})$，并将 $\mathcal{A}$ 扩张至 $\mathbb{C}[q^{\pm1/(2D)}]$。稍微滥用一下记号，我们仍用 $\mathrm{U}^\imath$ 表示 $\mathbb{C}(q^{1/(2D)})\otimes_{\mathbb{C}(q^{1/2})}\mathrm{U}^\imath$，并用 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathrm{U}^\imath$ 的 $\mathbb{C}[q^{\pm1/(2D)}]$-形式，该形式由 De Concini-Kac 形式经基变换得到。类似的设定也适用于 $\mathrm{U}^\imath$ 和 $\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}}$。

首先，我们回顾万有 R-矩阵的构造。令 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}$ 为有限维类型 1 U-模范畴，并令 $\mathcal{U}\subset\prod_{V\in Ob(\mathcal{O}_{\mathrm{int}})}\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 为 BK19, § 3.1] 中所考虑的 U 的完备化。对于 $n\in\mathbb{N}$，定义 $\mathcal{U}^{(n)}\subset\prod_{V_1,\dots,V_n\in Ob(\mathcal{O}_{\mathrm{int}})}\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1\otimes\cdots\otimes V_n)$ 为 同上 中所考虑的 U 的 n 重折叠张量的完备化。

令 $\mathrm{f}=\oplus_{\mu\in Q^+}\mathrm{f}_\mu$ 为 Lus93, §1.2.5] 中由生成元 $\theta_i, i\in\mathbb{I}$ 定义的代数。令$r:\mathrm{f}\to\mathrm{f}\otimes\mathrm{f}$ 为满足 $r(\theta_i)=1\otimes\theta_i+\theta_i\otimes1$ 的代数同态；这里 $\mathrm{f}\otimes\mathrm{f}$ 配备了扭乘积（见 Lus93, §1.2.2]）。令 $(\cdot,\cdot)$ 为 Lus93, 命题 1.2.3] 中引入的 f 上的非退化对称双线性形式，使得

$$(1,1)=1,\qquad (\theta_i,\theta_j)=\frac{\delta_{ij}}{1-q_i^{-2}},\qquad (x,y_1y_2)=(r(x),y_1\otimes y_2).$$

存在典范同构 $(\cdot)^\pm:\ \mathrm{f}\to\mathrm{U}^\pm$，使得 $E_i=\theta_i^+$，$F_i=\theta_i^-$.

对于 $\nu\in P_+$，回顾一下，$V(\nu)$ 是具有最高权 ν 以及最高权向量 η_ν的不可约 U-模。令$\mathbf{B}(\nu)$ 为 $V(\nu)$ 的典范基（参见 [Lus93，定理 14.4。11]）。

令 $B=\sqcup_{\mu\in Q^+}B_\mu$ 为 f 的任意线性基，其中 B_μ 是 f_μ的线性基。令 $\widetilde{B}=\{b\mid b\in B\}$为关于 $(\cdot,\cdot)$ 的 B 对偶基；也就是说，对于任意 b、$b'\in B$，有 $(b,b')=\delta_{b,b'}$。按照 [Lus93，定理 4.1，2],U 的拟 R-矩阵 R 具有如下形式

$$R=\sum_{b\in B}c_b b^-\otimes\widetilde{b}^+\in\prod_{\mu\in Q^+}\mathrm{U}^-_\mu\otimes\mathrm{U}^+_\mu,\tag{5.1}$$

其中 $c_b\in\pm q^{\mathbb{Z}}$。

设 $\kappa\in\mathcal{U}^{(2)}$ 为一个元素，使得对于 $\mathcal{O}_{\mathrm{int}}$中任意表示里的权向量$v_\mu$ 和v_λ，其权分别为 μ 和 λ时，满足 $\kappa(v_\mu\otimes v_\lambda)=q^{-(\mu,\lambda)}v_\mu\otimes v_\lambda$。那么该元素

$$\mathcal{R}=R_{21}\cdot\kappa\in\mathcal{U}^{(2)}\tag{5.2}$$

称为 U 的普适 R-矩阵 。

接下来，我们回顾在 [Ko20]中构造的 $\mathrm{U}^\imath$ 的普适 K-矩阵及中心元。设 $\Upsilon=\sum_{\mu\in Q^+}\Upsilon_\mu\in\prod_{\mu\in Q^+}\mathrm{U}^+_\mu$ 是与 i量子群 $\mathrm{U}^\imath$相关的准 K-矩阵 (参见 [BW18a、BK19、WZ23])。

根据 [BW18b、BK19], , 存在函数 $\xi:\ P\to\mathbb{C}(q^{1/(2D)})^\times$ 使得

$$\xi(\mu+\nu)=\xi(\mu)\xi(\nu)q^{-(\mu+\theta\mu,\nu)},\qquad\forall\mu,\nu\in P.\tag{5.3}$$

我们将函数 ξ 视为 $\mathcal{U}$ 中的一个元素，使得对于任意权向量 v_μ（其权为 $\mu\in P$），都有 $\xi(v_\mu)=\xi(\mu)v_\mu$ 。

回顾 (4.20)–(4.22) 中的 $P^\imath$、$P^\imath_+$。对于任意 $\mu \in P^\imath_+$，在 $V(\mu)$ 上存在一个相容的对合 $\tau_0\tau$，使得对于所有 $x \in \mathrm{U}$，都有 $\tau_0\tau(x\eta_\mu) = \tau_0\tau(x)\eta_\mu$。按照 Ko20, (3.22)]（参见 BK19, Corollary 7.7]），$\mathrm{U}^\imath$ 的 1-张量通用 K-矩阵定义为

$$\mathcal{K} = \Upsilon\xi T_{w_\bullet}^{-1} T_{w_0}^{-1} \tau_0\tau. \tag{5.4}$$

T元素 $\mathcal{K}$ 在任何满足 $\mu \in P^\imath$ 的 $V(\mu)$ 上都会诱导一个定义良好的线性算子 $_+$.

根据 [Ko20，(3.36)], 该二阶张量普适 K-矩阵定义为

$$\mathscr{K} = \mathcal{R}_{21} \cdot (1 \otimes \mathcal{K}) \cdot \mathcal{R}.$$

元素 $\mathscr{K}$在任何满足 $\lambda \in P_+$ 的 $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ 上都会诱导一个定义良好的线性算子 $, \mu \in P^\imath_+$。量子迹$\mathrm{tr}^\mu : \mathrm{U} \to \mathbb{C}(q)$ 定义为 $\mathrm{tr}^\mu(u) = \mathrm{tr}^{V(\mu)}(uK_{-\rho})$，其中 $\mathrm{tr}^{V(\lambda)} : \mathrm{U} \to \mathbb{C}(q)$ 是通常的迹映射，而 U 被视为作用于 $V(\mu)$ 上的算子。注意，tr^μ 自然地扩展到 $\mathcal{U}$。

令 $\mu \in P^\imath_+$。根据 [Ko20，定理 4。10], 以下表达式 n

$$d_\mu = (\mathrm{Id} \otimes \mathrm{tr}_\mu)(\mathscr{K}) \tag{5.5}$$

定义了 $\mathrm{U}^\imath$ 的一个中心元 d_μ。我们指出，在 Kolb 的记号中，元素 d_μ 记作 $q^{-(\mu,\mu+2\rho)}\tilde{l}_{1\otimes v\cdot\mathscr{K}}$(tr $_{V(\mu)_+,\ \sigma,\ q}$) 同上。

在接下来的小节中，我们将用 PBW 基给出 d_μ 的一个更具体的表达式。

5.2. **中心元的整性**。从本小节开始，我们沿用第 3.2 节中的记号。特别地，固定一个约化表达式 $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_L} s_{j_1} \cdots s_{j_M}$其中 $w_\bullet = s_{j_1} \cdots s_{j_{M_0}}$。令 $\beta_1 < \cdots < \beta_L < \gamma_1 < \cdots < \gamma_M$为 $\mathcal{R}^+$ 上对应的凸序。设 $i_{L+t} = j_t$并且 $\beta_{L+t} = \gamma_t$，其中 $1 \le t \le M$。设 $N = M + L$。

对于任意$\mathbf{c} = (c_i) \in \mathbb{N}^N$，定义 $L(\mathbf{c}) \in \mathbf{f}$ 为

$$L(\mathbf{c})^+ = T_{s_{i_1}\cdots s_{i_{N-1}}}(\mathbf{E}_{i_N}^{(c_N)}) \cdots T_{i_1}(\mathbf{E}_{i_2}^{(c_2)}) \mathbf{E}_{i_1}^{(c_1)}. \tag{5.6}$$

感谢 [Lus93，37.2。4] 我们有

$$L(\mathbf{c})^- = \lambda_{\mathbf{c}} T_{s_{i_1}\cdots s_{i_{N-1}}}(\mathbf{F}_{i_N}^{(c_N)}) \cdots T_{i_1}(\mathbf{F}_{i_2}^{(c_2)}) \mathbf{F}_{i_1}^{(c_1)}, \qquad \text{where } \lambda_{\mathbf{c}} \in \pm q^{\mathbb{Z}}.$$

这里，元素 $\mathbf{E}_i^{(c)}$、$\mathbf{F}_i^{(c)}$ 分别是分割幂 $\mathbf{E}_{[c]_i^c!}$，$\mathbf{F}_{[c]_i^c!}$。于是，$\{L(\mathbf{c}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{N}^N\}$构成 $\mathbf{f}$ 的一组基（参见 [Lus93，命题 40.2.1]）。回顾一下，$\{L(\mathbf{c}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{N}^N\}$ 表示对偶基。由 [Lus93，命题 38.2.3]，有

$$\widetilde{L(\mathbf{c})} = \lambda'_{\mathbf{c}} \prod_{k=1}^{N} (q_{i_k} - q_{i_k}^{-1})^{c_k} [c_k]_{i_k}! L(\mathbf{c}), \qquad \text{for some } \lambda'_{\mathbf{c}} \in \pm q^{\mathbb{Z}}.$$

结合（2.7），我们有

$$\begin{aligned} \widetilde{L(\mathbf{c})}^+ &= \lambda^+_{\mathbf{c}} T_{s_{i_1}\cdots s_{i_{N-1}}}(E_{i_N}^{c_N}) \cdots T_{i_1}(E_{i_2}^{c_2}) E_{i_1}^{c_1}, \\ \widetilde{L(\mathbf{c})}^- &= \lambda^-_{\mathbf{c}} T_{s_{i_1}\cdots s_{i_{N-1}}}(F_{i_N}^{c_N}) \cdots T_{i_1}(F_{i_2}^{c_2}) F_{i_1}^{c_1}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

对于$\mathbf{c} \in \mathbb{N}^N$和 $\lambda^+_{\mathbf{c}}$，$\lambda^-_{\mathbf{c}} \in \pm q^{\mathbb{Z}}$。

另一方面，由（5.1）可得

$$R = \sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{N}^N} c_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c})^- \otimes \widetilde{L(\mathbf{c})}^+ = \sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{N}^N} c_{\mathbf{c}} \widetilde{L(\mathbf{c})}^- \otimes L(\mathbf{c})^+, \tag{5.8}$$

其中 $c_{\mathbf{c}} \in \pm q^{\mathbb{Z}}$。因此，由（5.2）可得

$$\mathcal{R} = \Big(\sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{N}^N} c_{\mathbf{c}} \widetilde{L(\mathbf{c})}^+ \otimes L(\mathbf{c})^- \Big) \cdot \kappa, \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_{21} = \Big(\sum_{\mathbf{c}\in\mathbb{N}^N} c_{\mathbf{c}} \widetilde{L(\mathbf{c})}^- \otimes L(\mathbf{c})^+ \Big) \cdot \kappa. \tag{5.9}$$

这里，第一个等式由（5.8）中的第一个等式得出，第二个等式由（5.8）中的第二个等式得出。

令 $\nu \in P_+^\imath$。对于 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{N}^N$，令 $|\mathbf{c}| = \sum_{k=1}^N c_k \beta_k \in Q^+$。由（5.9）、（5.5）及直接计算可得

$$d_\nu = \sum_{\substack{b \in \mathbf{B}(\nu),\ \mu \in Q^+ \\ \mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbb{N}^N}} c_{b,\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu} b^* (\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu} \cdot b) K_{\nu_{b,\mathbf{c}',\mu}} \widetilde{L(\mathbf{c})}^- \widetilde{L(\mathbf{c}')}^+, \tag{5.10}$$

其中 $b^* \in V(\nu)^*$ 满足 $b^*(b') = \delta_{b,\,b'}$ 对于 $b' \in \mathbf{B}(\nu)$，$c_{b,\,\mathbf{c},\,\mathbf{c}'} \in \pm q^{\mathbb{Z}/(2D)}$，

$$\nu_{b,\mathbf{c}',\mu} = -\mathrm{wt}(b) - w_\bullet w_0 \tau_0 \tau(\mathrm{wt}(b) - |\mathbf{c}'|) - \mu \in P, \tag{5.11}$$

and

$$\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu} = L(\mathbf{c})^+ \Upsilon_\mu T_{w_\bullet}^{-1} T_{w_0}^{-1} \tau_0 \tau L(\mathbf{c}')^- \tag{5.12}$$

是一个线性 算子，作用于 $V(\nu)$。由权的考虑可知，（5.10) 中的求和是有限的 n.

Pr命题 5.1。对于任意 $\nu \in P_+^\imath$，元素 d_ν 属于 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}}$。因此 $d_\nu \in \mathrm{U}_{\mathcal{A}}^\imath$,.

证明。考虑方程 (5.10)。由 (5.7) 可知，对于 c、$\mathbf{c}' \in \mathbb{N}^N$，$\widetilde{L}(\mathbf{c})^-$、$\widetilde{L}'(\mathbf{c})^+$ 属于 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}}$。只需证明，对于 $b \in \mathrm{B}(\nu)$、c、$\mathbf{c}' \in \mathbb{N}^N$, $\mu \in Q^+$，$b^*(\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu} \cdot b) \in \mathcal{A}$。令 $V(\nu)_{\mathcal{A}} \subset V(\nu)$ 为由 $\mathrm{B}(\nu)$ 张成的 $\mathcal{A}$-子模。于是只需证明线性算子$\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu}$保持 $V(\nu)_{\mathcal{A}}$。

回顾 (5.12) 中 $\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu}$ 的公式。根据 [Lus93, 定理 41.1.3]，$L(\mathrm{c})^+$、$L(\mathrm{c}')^-$ 的作用保持 $V(\lambda)_{\mathcal{A}}$。对合 $\tau_0\tau$ 显然保持 $V(\lambda)_{\mathcal{A}}$。由 [BW18b, 定理 5.3], 可知，Υ_μ 的作用保持 $V(\lambda)_{\mathcal{A}}$。根据 [Lus93, § 5.2.1], , 辫群对称性 $T_{w_\bullet}^{-1}$ 和 $T_{w_0}^{-1}$ 保持 $V(\lambda)_{\mathcal{A}}$。由此可得 $\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu}$ 保持 $V(\lambda)_{\mathcal{A}}$。证明完毕。□

5.3. **中心元的首项**。回顾第4.2 节中的 $\mathbb{N}^{N+M+2}$-滤过 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$ 及伴随分次代数 $\mathrm{GrU}_{\mathcal{A}'}^\imath$。下面我们确定中心元 d_ν 在 Gr U 中的像$_{\mathcal{A}'}^\imath$，其中中心元 d_ν 对应于 $\nu \in P_+^\imath$。

对于 $w \in W$，记 $\eta_{w\nu}$ 为 $\mathbf{B}(\nu)$ 中权为 $w\nu$ 的唯一元素。对于 $\nu \in P_+$，回顾元素 $\mathbf{c}(\nu) = (c_k(\nu)) \in \mathbb{N}^N$ 的定义如下:

$$c_k(\nu) = \langle \alpha_{i_k}^\vee, \nu \rangle, \qquad \text{for } 1 \le k \le N. \tag{5.13}$$

对于 $\mu \in P_+$，回顾 $\tau_0 \mu = -w_0 \mu \in P_+$。

引理 5.2。对于 $\nu \in P_+$，元素 $\mathbf{c}(\tau_0\nu)$ 是 *se* 中的最大元素 t

$$\{\mathbf{c} \in \mathbb{N}^N \mid \eta_\nu^*(L(\mathbf{c})^+ \eta_{w_0\nu}) \neq 0\},$$

其中 $\mathbb{N}^N$ 赋予字典序。此外，$\eta_\nu^*(L(\mathbf{c}(\tau_0\nu))^+ \eta_{w_0\nu}) \in \pm q^{\mathbb{Z}}$。

证明。我们首先证明 $\eta_\nu^*(L(\mathbf{c}(\tau_0\nu))^+ \eta_{w_0\nu}) \in \pm q^{\mathbb{Z}}$。

对于 $1 \le k \le N$，我们有

$$\begin{aligned} T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} \left(\mathbf{E}_{i_k}^{(c_k(\tau_0\nu))} \right) \cdot T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} (\eta_{w_0\nu}) &= T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} (\mathbf{E}_{i_k}^{(c_k(\tau_0\nu))} \cdot \eta_{w_0\nu}) \\ &\in \pm q^{\mathbb{Z}} T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}} T_{i_k} (\eta_{w_0\nu}). \end{aligned} \tag{5.14}$$

回顾 $L(\mathbf{c}(\tau_0\nu))^+$，由（5.6）得出。反复应用（5.14），可得

$$L(\mathbf{c}(\tau_0\nu))^+ \eta_{w_0\nu} \in \pm q^{\mathbb{Z}} T_{i_1} \cdots T_{i_N} (\eta_{w_0\nu}) \in \pm q^{\mathbb{Z}} \eta_\nu.$$

因此，我们有 $\eta_\nu^*(L(\mathbf{c}(\tau_0\nu))^+ \eta_{w_0\nu}) \in \pm q^{\mathbb{Z}}$。

接下来，我们证明对于 $\mathbf{c}' \in \mathbb{N}^N$ 其中 $\mathbf{c}' > \mathbf{c}(\tau_0\nu)$ 按字典序排列时，有$\eta_\nu^*(L(\mathbf{c}')^+\eta_{w_0\nu}) = 0$。由于 $\mathbf{c}' > \mathbf{c}(\nu)$, 存在 $1 \le k' \le N$，使得 $c'_{k'} > c_{k'}$并且 $c'_t = c_t$对于$1 \le t < k'$。应用 (5.14) 可得

$$L(\mathbf{c}')^+\eta_{w_0\nu} \in \pm q^{\mathbb{Z}} \cdot T_{i_1} \cdots T_{i_{N-1}}(\mathbf{E}_{i_N}^{(c'_N)}) \cdots T_{i_1} \cdots T_{i_{k'-1}}(\mathbf{E}_{i_{k'}}^{(c'_{k'})}) \cdot T_{i_1} \cdots T_{i_{k'-1}}(\eta_{w_0\nu}).$$

由于 $\mathbf{E}_{i_{k'}}^{(c'_{k'})} \cdot \eta_{w_0\nu} = 0$ ，根据权重考虑，我们得出 $L(\mathbf{c}')^+\eta_{w_0\nu} = 0$。证明完毕。□

对于 $\mu \in P_+$，定义元素 $\mathbf{c}^\bullet(\nu) = (c_k^\bullet(\nu)) \in \mathbb{N}^M$ 如下:

$$c_k^\bullet(\nu) = \langle \alpha_{j'_k}^\vee, -w_0\nu \rangle = \langle \alpha_{j_k}^\vee, -w_\bullet\nu \rangle \quad \text{for } 1 \le k \le M. \tag{5.15}$$

我们将 $\tilde{\mathbf{c}}^\bullet(\nu) = (\tilde{c}_k^\bullet(\nu)) \in \mathbb{N}^N$ 定义为 $\tilde{c}_k^\bullet(\nu) = 0$ ，其中 $1 \le k \le L$ ，而 $\tilde{c}_{L+k}^\bullet(\nu) = c_k^\bullet(\nu)$ 对于 $1 \le k \le M$。

Lemma 5.3. 对于 $\nu \in P_+$，元素 $\tilde{\mathbf{c}}^\bullet(\tau_0\nu)$ 是集合中的极大元素

$$\{\mathbf{c} \in \mathbb{N}^N \mid \eta_{w_\bullet\nu}^*(L(\mathbf{c})^-\eta_\nu) \ne 0\},$$

其中 $\mathbb{N}^N$ 赋有字典序。此外， $\eta_{w_\bullet\nu}^*(L(\tilde{\mathbf{c}}^\bullet(\tau_0\nu))^-\eta_\nu) \in \pm q^{\mathbb{Z}}$。

证明。 取 $\mathbf{c} = (c_t) \in \mathbb{N}^N$，使得 $\eta_{w_\bullet\nu}^*(L(\mathbf{c})^-\eta_\nu) \ne 0$。根据权重考虑，我们有

$$\sum_{1 \le t \le N} c_t\beta_t = \nu - w_\bullet\nu, \tag{5.16}$$

它是 $\mathcal{R}_\bullet$ 中正根的非负线性组合。对于 $1 \le t \le L$， $\beta_t \in \mathcal{R}^+ \backslash \mathcal{R}_\bullet^+$，因此 (5.16) 可推出 $c_t = 0$。注意 $T_{w_0w_\bullet}T_j = T_{j'}T_{w_0w_\bullet}$ 和 $T_{w_0w_\bullet}(F_j) = F_{j'}$ 对于 $j \in \mathbb{I}_\bullet$成立。因此，我们有

$$L(\mathbf{c})^- = T_{w_0w_\bullet}\big(T_{j_1} \cdots T_{j_{M-1}}(\mathbf{F}_{j_M}^{(c_N)}) \cdots T_{j_1}(\mathbf{F}_{j_2}^{(c_{L+2})})\mathbf{F}_{j_1}^{(c_{L+1})}\big),$$

and

$$\eta_{w_\bullet\nu}^*(L(\mathbf{c})^-\eta_\nu) \in \pm q^{\mathbb{Z}}\eta_{w_0\nu}^*\Big(T_{j_1} \cdots T_{j_{M-1}}(\mathbf{F}_{j_M}^{(c_N)}) \cdots T_{j_1}(\mathbf{F}_{j_2}^{(c_{L+2})})\mathbf{F}_{j_1}^{(c_{L+1})}\eta_{w_\bullet w_0\nu}\Big).$$

接下来，其余证明可仿照引理 5.2 的证明。 □

回顾 (d 中的总次数4.2)。

引理 5.4。 对于任意 $x \in \mathrm{U}^\imath$，将 x 分别写成 $\mathrm{U}^\imath$ 和 U 的 *PBW* 基的线性组合，即

$$x = \sum_{\mu \in P^\theta, \mathbf{c} \in \mathbb{N}^N, \mathbf{c}' \in \mathbb{N}^M} c_{\mu,\mathbf{c},\mathbf{c}'}K_\mu \overleftarrow{\prod_{1 \le t \le N}} B_{\beta_t}^{c_t} \overleftarrow{\prod_{1 \le t \le M}} E_{\gamma_t}^{c'_t} = \sum_{\mu \in P, \mathbf{d}, \mathbf{d}' \in \mathbb{N}^N} d_{\mu,\mathbf{d},\mathbf{d}'}K_\mu \overleftarrow{\prod_{1 \le t \le N}} F_{\beta_t}^{d_t} \overleftarrow{\prod_{1 \le t \le N}} E_{\beta_t}^{d'_t}.$$

那么，对于任意满足 c_{μ_1} 的 $(\mu_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}'_1) \in P^\theta \times \mathbb{N}^N \times \mathbb{N}^M$，若 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}'_1 \ne 0$，且 $d(M_{\mu_1,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}'_1})$ 在所有满足 $c_{\mu,\mathbf{c},\mathbf{c}'} \ne 0$ 的 $(\mu, \mathbf{c}, \mathbf{c}') \in P^\theta \times \mathbb{N}^N \times \mathbb{N}^M$ 所对应的 $d(M_{\mu,\mathbf{c},\mathbf{c}'})$ 中为最大，则有

$$c_{\mu_1,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}'_1} = d_{\mu_1,\mathbf{c}_1,\tilde{\mathbf{c}}'_1}.$$

这里， $\tilde{\mathbf{c}}'_1 = (\tilde{c}'_{1,k}) \in \mathbb{N}^N$ 定义为 $\tilde{c}'_{1,k} = 0$ 当 $1 \le k \le L$ 且 $\tilde{c}'_{1,L+k} = c'_{1,k}$ 当 $1 \le k \le M$。

证明。 令 $\beta_{L+t} = \gamma_t$表示 $1 \le t \le M$。给定 $\mu \in P^\theta$， $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^N$， $\mathbf{c}' \in \mathbb{N}^M$，根据 [LYZ25，推论 4。3],我们可以写成

$$K_\mu \overleftarrow{\prod_{1 \le t \le N}} B_{\beta_t}^{c_t} \overleftarrow{\prod_{1 \le t \le M}} E_{\beta_{L+t}}^{c'_t} = K_\mu \overleftarrow{\prod_{1 \le t \le N}} F_{\beta_t}^{c_t} \overleftarrow{\prod_{1 \le t \le M}} E_{\beta_{L+t}}^{c'_t} + \widetilde{R},$$

~其中 R 是元素的线性组合

$$K_{\mu_1}\overleftarrow{\prod_{1\le t\le N}}F_{\beta_t}^{d_t}\overleftarrow{\prod_{1\le t\le N}}E_{\beta_t}^{d'_t} \tag{5.17}$$

对于 $\mu_1\in P$，$\mathbf{d}$，$\mathbf{d}'\in\mathbb{N}^N$ 其中

$$\sum_{t=1}^{L}(d_t-d'_t)\mathrm{ht}^\iota(\beta_t)<\sum_{t=1}^{L}c_t\mathrm{ht}^\iota(\beta_t)=h^\iota(M_{\mu,\mathbf{c},\mathbf{c}'}).$$

~ ~ ~ ~因此，我们可以写成 $R=R_1+R_2$，使得 R_1 是如下形式 (5.17) 的元素的线性组合，其中 $d'_t=0$ 对于 $1\le t\le L$ 以及 $\sum_{t=1}^{L}d_t\mathrm{ht}^\iota(\beta_t)<\sum_{t=1}^{L}c_t\mathrm{ht}^\iota(\beta_t)$，而 $\widetilde{R}_2$ 是如下形式 (5.17) 的元素的线性组合，其中 $d'_t\neq 0$ 对于某个 $1\le t\le L$。该引理立即得证。□

现在我们可以计算 d_ν 在 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\iota_{\mathcal{A}'}$ 中的像。

命题 5.5。取 $\nu\in P^\iota_+$。d_ν 在伴随分次代数 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\iota_{\mathcal{A}'}$ 中的像为

$$\overline{d_\nu}=c_\nu K_{-(1+w_0)\nu}\prod_{k=1}^{N}B_{\beta_k}^{\langle\alpha^\vee_{i_k},-w_0\nu\rangle}\prod_{k=1}^{M}E_{\gamma_k}^{\langle\alpha^\vee_{j_k},\nu\rangle},$$

其中 $c_\nu\in\pm q^{\mathbb{Z}/D}$。

证明。对于 $\mathbf{c}\in\mathbb{N}^N$，记作 $|\mathbf{c}|=\sum_{k=1}^{N}c_k\beta_k\in Q^+$。那么 wt $L(\mathbf{c})^+=\mathrm{wt}\ \widetilde{L}(\mathbf{c})^+=|\mathbf{c}|$，并且 wt $L'(\mathbf{c})^-=$ ~wt $L(\mathbf{c})=-|\mathbf{c}|$。回顾（5.12）。首先，我们有如下断言。

断言：$b^*(\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu}\cdot b)=0$ 对于任意 $b\in B(\nu)$ $\mu\in Q^+$，除非 $|\mathbf{c}|<\nu-w_0\nu$，或$|\mathbf{c}|=\nu-w_0\nu$ 且 $|\mathbf{c}'|=\nu-w_\bullet\nu$。在第二种情形下，若 $(\mu,b)\neq(0,\eta_\nu)$，则有 $b^*(\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu}\cdot b)=0$。

我们证明这一断言。若 $|\mathbf{c}|>\nu-w_0\nu$，则由权重考虑可知 $L(\mathbf{c})^+|_{V(\nu)}\equiv 0$，因此 $\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu}|_{V(\nu)}\equiv 0$。因此，只需假设 $|\mathbf{c}|=\nu-w_0\nu$。那么，对于任意满足 wt $x\in Q^+$ 的 $x\in\mathrm{U}$，都有 $L(\mathbf{c})^+x|_{V(\nu)}\equiv 0$。因此，若 $\mu\neq 0$，则 $L(\mathbf{c})^+\Upsilon_\mu|_{V(\nu)}\equiv 0$。还需注意，除非 wt $v=w_0\nu$ 且 wt $L(\mathbf{c})^+\cdot v=\nu$，否则 $L(\mathbf{c})^+\cdot v=0$。因此，除非 $(\mu,b)=(0,\eta_\nu)$，否则 $b^*(\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu})=0$，并且

$$T_{w_\bullet}^{-1}T_{w_0}^{-1}\tau_0\tau L'(\mathbf{c}')^-\eta_\nu=c\eta_{w_0\nu},\quad\text{for } c\in\mathbb{C}(q). \tag{5.18}$$

注意，$\tau\tau_0w_\bullet\nu=w_\bullet\tau\tau_0\nu=w_\bullet\nu$。因此（5.18）等价于 $L(\mathbf{c}')^-\eta_\nu=c'\eta_{w_\bullet\nu}$对于 $c'\in\mathbb{C}(q)$，这意味着 $|\mathbf{c}'|=\nu-w_\bullet\nu$。我们完成了这一断言的证明。

现在假设 $|\mathbf{c}|=\nu-w_0\nu$、$|\mathbf{c}'|=\nu-w_\bullet\nu$，$\mu=0$ 以及 $b=\eta_\nu$。式（5.18）中的系数 c 实际上属于 $\pm q^{\mathbb{Z}}$，这要归功于引理 5.2证明中的 (a)。由上述论证可得

$$b^*(\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu}\cdot b)=\eta_\nu^*(L(\mathbf{c})^+T_{w_\bullet}^{-1}T_{w_0}^{-1}\tau_0\tau L'(\mathbf{c})^-\eta_\nu)=c\eta_\nu^*(L(\mathbf{c})^+\eta_{w_0\nu})\eta^*_{w_\bullet\nu}(L'(\mathbf{c}')^-\eta_\nu), \tag{5.19}$$

其中 $c\in\pm q^{\mathbb{Z}}$。回忆一下，根据（$\nu_{b,\ \mathbf{c}',\ \mu}$ 式（5.11）可知）。直接计算可得，在我们的假设下有 $\nu_{b,\ \mathbf{c}',\ \mu}=-(1+w_0)\nu$。

将 d_ν 写成 U^ι 的 PBW 基的形式，即

$$d_\nu=\sum_{\mu\in P^\theta,\mathbf{c}\in\mathbb{N}^N,\mathbf{c}'\in\mathbb{N}^M}c_{\mu,\mathbf{c},\mathbf{c}'}K_\mu\overleftarrow{\prod_{1\le t\le N}}B_{\beta_t}^{c_t}\overleftarrow{\prod_{1\le t\le M}}E_{\gamma_t}^{c'_t}, \tag{5.20}$$

其中 $c_{\mu,\mathbf{c},\mathbf{c}'}\in\mathcal{A}'$。

根据（5.7）和（5.10），我们可以写成

$$d_\nu = \sum_{\substack{b\in\mathbf{B}(\nu),\ \mu\in Q^+\\ \mathbf{c},\mathbf{c}'\in\mathbb{N}^N}} c'_{b,\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu} b^*(\mathscr{K}_{\mathbf{c},\mathbf{c}',\mu}\cdot b) K_{\nu_{b,\mathbf{c}',\mu}} \prod_{1\le t\le N}^{\longleftarrow} F_{\beta_t}^{c_t} \prod_{1\le t\le N}^{\longleftarrow} E_{\beta_t}^{c'_t}, \tag{5.21}$$

其中$c'_{b,\ \mathbf{c},\ \mathbf{c}',\ \mu}\in\pm q^{\mathbb{Z}/(2D)}$。此外，结合该断言（5.19）、引理 5.2 和引理 5.3，我们得出

$$d_\nu = c'_\nu K_{-(1+w_0)\nu} \prod_{1\le t\le N}^{\longleftarrow} F_{\beta_t}^{c_t(\tau_0\nu)} \prod_{1\le t\le M}^{\longleftarrow} E_{\gamma_t}^{c^\bullet_t(\tau_0\nu)} + \text{l.o.t.}, \tag{5.22}$$

其中 $c'_\nu\in\pm q^{\mathbb{Z}/D}$，且 l.o.t. 是元素的线性组合

$$K_\mu \prod_{1\le t\le N}^{\longleftarrow} F_{\beta_t}^{c_t} \prod_{1\le t\le N}^{\longleftarrow} E_{\beta_t}^{c'_t}$$

对于 $\mu\in P$、$c_t,\ c'_t\in\mathbb{N}$，以及

$$(c_N,\cdots,c_1,c'_N,\cdots c'_{L+1},\mathrm{ht}_\bullet(\mathbf{c},\mathbf{c}'),h^i(\mathbf{c},\mathbf{c}')) < d(M_{-(1+w_0)\nu,\mathbf{c}(\tau_0\nu),\mathbf{c}^\bullet(\tau_0\nu)}) = \mathbf{d}_\nu$$

在 $\mathbb{N}^{N+M+2}$ 中。

由引理 5.4和（5.22），我们得出

$$d_\nu\in \mathrm{U}^i(\le \mathbf{d}_\nu) \quad \text{and} \quad d_\nu - c'_\nu K_{-(1+w_0)\nu}\prod_{t=1}^N B_{\beta_t}^{c_t(\tau_0\nu)}\prod_{t=1}^M E_{\gamma_t}^{c^\bullet_t(\tau_0\nu)}\in \mathrm{U}^i(<\mathbf{d}_\nu).$$

根据定义，我们有 $c_t(\tau_0\nu)=\langle\alpha^\vee_{i_t},\nu\rangle$，对于 $1\le t\le N$；并且 $c^\bullet_t(\tau_0\nu)=\langle\alpha^\vee_{j_t},\nu\rangle=\langle\alpha^\vee_{j_t},w_0w_\bullet\nu\rangle$，对于 $1\le t\le M$。由于 $\nu\in P^i$，由引理 4.11 (3) 可推得 $\nu-w_0w_\bullet\nu$ 是 θ-反不变的。结合 $\theta(\alpha^\vee_{j_t})=\alpha^\vee_{j_t}$，我们得出，对于 $1\le t\le M$，$\langle\alpha^\vee_{j_t},w_0w_\bullet\nu\rangle=\langle\alpha^\vee_{j_t},\nu\rangle$。

证明至此完成。 □

下面的引理由 [KL08中的定理8得到。3]这是命题5.5的直接推论。

引理 5.6. 对于 $\nu\in P^i_+$，元素 $d_\nu\in\mathrm{U}^i$ 可唯一地写成

$$d_\nu = d_{\nu,\overline{\nu}} + \text{l.o.t.},$$

其中 $0\neq d_{\nu,\nu}\in \mathrm{U}_\nu$、$\overline{\nu}=w_0\nu-w_\bullet\nu$ 和低阶项 l.o.t. $\in\sum_{ht^i(\mu)<ht^i(\nu)}\mathrm{U}_{-\mu}$。

证明. 只需证明

$$K_{-(1+w_0)\nu}\prod_{k=1}^N F_{\beta_k}^{\langle\alpha^\vee_{i_k},-w_0\nu\rangle}\prod_{k=1}^M E_{\gamma_k}^{\langle\alpha^\vee_{j_k},\nu\rangle}\in \mathrm{U}_{\overline{\nu}}.$$

由引理 5.2和引理 5.3可得

$$\deg\prod_{k=1}^N F_{\beta_k}^{\langle\alpha^\vee_{i_k},-w_0\nu\rangle} = w_0\nu-\nu, \quad \text{and} \quad \deg\prod_{k=1}^M E_{\gamma_k}^{\langle\alpha^\vee_{j_k},\nu\rangle} = \nu-w_\bullet\nu.$$

因此

$$\deg\left(K_{-(1+w_0)\nu}\prod_{k=1}^N F_{\beta_k}^{\langle\alpha^\vee_{i_k},-w_0\nu\rangle}\prod_{k=1}^M E_{\gamma_k}^{\langle\alpha^\vee_{j_k},\nu\rangle}\right) = w_0\nu-w_\bullet\nu=\overline{\nu},$$

由此完成证明。 □

5.4. **$\mathrm{U}_v^\imath$的次数**。回顾第3.2 节 $Z_0^\imath$ 可知，它是一个（局部化的）多项式代数，而 $\mathrm{U}_v^\imath$ 是 $Z_0^\imath$上的自由模。因此，子模 $Z_v^\imath \subset \mathrm{U}_v^\imath$ 是 $Z_0^\imath$上的自由模。

根据命题 5.1，中心元 d_ν属于 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$，对于任意 $\nu \in P_+^\imath$。对于 $\nu \in P_+^\imath$，我们仍使用记号 d_ν 表示 d_ν 在 U 中的像$_v^\imath$。特别地，d_{ν_i}，$1 \le i \le m$是 U 中的中心元$_v^\imath$。

命题 5.7. 我们有 维数$_{Z_0^\imath}$ $Z_v^\imath \geqslant \ell^m$ 其中 $m =$ 秩 $\mathfrak{k}$。

证明。注意，$P_\ell^\imath = \{\mu = \sum_{i=1}^m k_i\nu_i | 0 \le k_i < \ell\}$ 构成了 $P^\imath/\ell P^\imath$的一组代表元。对于$\mu = \sum_{i=1}^m k_i\nu_i$, 记 $d^\mu = d_{\nu_1}^{k_1} \cdots d_{\nu_m}^{k_m}$。

只需证明集合 $\{d^\mu | \mu \in P_\ell^\imath\}$ 在 $Z_0^\imath$上是线性无关的。记 $\mu = \theta\mu - \mu = w_0\underline{\mu} - \underline{w_\bullet\mu}$为 $\mu \in \overline{P^\imath}$。注意，根据我们对 $P_\ell^\imath$的构造，对于任意$\mu_1 \neq \mu_2$，μ_1，$\mu_2 \in P_\ell^\imath$，都有 $\mu_1 - \mu_2 \notin \ell\overline{P}$。

反之，假设存在不全为 0 的 $c_\mu \in Z_0^\imath$，使得

$$\sum_{\mu \in P_\ell^\imath} c_\mu d^\mu = 0. \tag{5.23}$$

令 $\widetilde{c}_\mu$ 为c_μ 在 U 中的一个提升$_{\mathcal{A}'}^\imath$。回忆一下，$\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$ 是一个自由的 $\mathcal{A}'$-模。于是，(5.23) 意味着在 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$

$$\sum_{\mu \in P_\ell^\imath} \widetilde{c}_\mu d^\mu \in (q-v)\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath. \tag{5.24}$$

不失一般性，假设将 $\widetilde{c}_\mu$ 按 U 的 PBW 基展开时，没有任何非零被加项属于 $(q-v)\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$。特别地，根据 $Z_0^\imath$ 的定义，$\widetilde{c}_\mu$ 的任意权分量的权都属于 ℓP。

考虑权的集合 $\mathscr{P}$，其中的权 λ 满足：权 λ 分量 $\widetilde{c}_\mu d^\mu$ 对某个 $\mu \in P_\ell^\imath$非零。令 $\lambda_0 \in \mathscr{P}$使其相对高度 $\mathrm{ht}^\imath(\lambda_0)$ 最大。根据假设和引理5.6,__λ_0必可写成$\lambda_0 = \mu_0 + \ell\nu_0$，其中 $\mu_0 \in P_\ell^\imath$，$\nu_0 \in P$。

写出 $\mu_0 = p_1\nu_1 + \cdots + p_m\nu_m$。根据引理 5.6，我们有

$$d^{\mu_0} = d_{\nu_1,\overline{\nu_1}}^{p_1} \cdots d_{\nu_m,\overline{\nu_m}}^{p_m} + o_{\mu_0}, \qquad \text{in } \mathrm{U}_{\mathcal{A}'}$$

其中，首项 $d_{\nu_1,\ \nu_1}^{p_1} \cdots d_{\nu_m,\ \nu_m}^{p_m}$在降到 $\mathrm{U}_v^\imath$时非零，并且o_{μ_0} 的权的相对高度严格小于 $\mathrm{ht}^\imath(\mu_0)$。

由于（5.24），其余加项 $\sum_{\mu \in P_\ell^\imath,\ \mu \neq \mu_0} \widetilde{c}_\mu d^\mu$ 必须有一个非零的分量，其权为λ_0。由于对于任意 $\overline{\mu} \in P_\ell^\imath, \mu \neq \mu_0$，$\mu_0 - \mu \notin \ell P$，首项 $\widetilde{c}_\mu d^\mu$的权不可能是任意 $\mu \neq \mu_0$的 λ_0。因此，存在 $\mu \in P_\ell^\imath$，使得 $\widetilde{c}_\mu d^\mu$的低阶项 $\widetilde{c}_\mu o_\mu$ 具有一个权为 λ_0的非零分量。然而，根据引理 5.6，这迫使 $\widetilde{c}_\mu d^\mu$ 具有一个权为 λ_1 的权分量，使得 $\mathrm{ht}^\imath(\lambda_1) > \mathrm{ht}^\imath(\lambda_0)$。这与 λ_0 的选取相矛盾。

因此，我们证明了集合 $\{d^\mu | \mu \in P_\ell^\imath\}$ 在 $Z_0^\imath$上是线性无关的。这意味着 $\dim_{Z_0^\imath} Z_v^\imath \geqslant \ell^m$。□

定理 5.8. $\mathrm{U}_v^\imath$ 的次数为 ℓ^{N_0}，其中 $N_0 = (\dim \mathfrak{k} - \mathrm{rank}\ \mathfrak{k})/2$ 是 $\mathfrak{k}$的正根数量。因此 维数 $_{Z_0^\imath} Z_v^\imath = \ell^m$，其中 $m =$ 秩 $\mathfrak{k}$。

证明. 设 $Q(\mathrm{U}_v^\imath) = Q(Z_v^\imath) \otimes_{Z_v^\imath} \mathrm{U}_v^\imath$。根据定理 3.9 和命题 5.7，我们有

$$\dim_{Q(Z_v^\imath)} Q(\mathrm{U}_v^\imath) = \dim_{Q(Z_0^\imath)} Q(\mathrm{U}_v^\imath) / \dim_{Q(Z_0^\imath)} Q(Z_v^\imath) \le \ell^{2N_0}.$$

因此 $\deg \mathrm{U}_v^\imath \le \ell^{N_0}$。

另一方面，由 [DCKP93a、(1.3.2)] 和定理 4.13，我们得到

$$\deg \mathrm{U}_v^\imath \ge \deg \mathrm{Gr}\, \mathrm{U}_v^\imath = \ell^{N_0}.$$

因此我们得出 $\deg \mathrm{U}_v^\imath = \ell^{N_0}$。特别地，命题 5.7 中的不等式实际上是等式。□

结合命题 2.5，我们立即得到 $\mathrm{U}_v^\imath$ 的不可约表示维数的以下上界。

推论 5.9。 如前所述，设 N_0 为 $\mathfrak{k}$ 的正根数。则有如下结论。

(1) 对于任意 $V \in \mathbf{U}$ 的不可约表示$_v^\imath$，有 维数 $V \le \ell^{N_0}$。(2) 集合

$$\mathcal{X}^0 = \{x \in \mathcal{X} \mid \dim V = \ell^{N_0} \text{ for any } V \in \operatorname{Irr} \mathrm{U}_{v,x}^\imath\}$$

是 $\mathcal{X}$ 的一个非空扎里斯基开子集。

备注 5.10. 当底层对称对为 AI 型时，Wen20 定理 6 构造了一类维数为 ℓ^{N_0} 的 $\mathrm{U}_v^\imath$ 有限维模 [Wen20，定理 6。2]；这些模类似于量子群的婴儿 Verma 模。研究这类模何时不可约很有意思。

5.5. **U 的完整中心** $\mathrm{U}_v^\imath$。 回忆一下， $d_\nu \in$ 命题 5.1 中的 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$。我们仍用 d_ν 表示其在 $\mathrm{U}_v^\imath$中的像。令 $Z_1^\imath$ 表示由 $Z_v^\imath$ 张成的子空间， d_ν 其中 $\nu \in P_+^\imath$。

引理 5.11. 子空间 $Z_1^\imath$ 是由 d_{ν_i}（其中 $1 \le i \le m$）生成的多项式代数 .

证明。根据 [Ko20，推论 4.11 和备注 4.12]， $Z_1^\imath$ 是由 d_{ν_i}（其中 $1 \le i \le m$）生成的子代数。根据 [KL08，定理 9.3] 以及 [Ko20，命题 4.9]，一般 q 下 $\mathrm{U}^\imath$ 的中心由 d_{ν_i}、$1 \le i \le m$ 生成，是一个多项式代数。因此，根据命题 5.1， d_{ν_i}、$1 \le i \le m$ 生成 $\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$ 的一个多项式中心子代数，这意味着 $Z_1^\imath$ 是一个多项式代数。□

我们将 $Z_1^\imath$ 称为 $\mathrm{U}_v^\imath$的 *Kolb-Letzter* 中心。本小节的主要定理如下。

定理 5.12。 $\mathrm{U}_v^\imath$ 的中心 $Z_v^\imath$ 由 $Z_0^\imath$ 和 $Z_1^\imath$生成。

为了证明该定理，我们需要以下引理。

引理 5.13。 设 $R = \cup_{m \in \mathbb{N}} R_m$ 是一个没有零因子的带滤过 $\mathbb{C}$-代数。令 $\operatorname{Gr} R$ 为伴随分次代数。假设存在中心元 $z_i \in Z(R)$、$1 \le i \le n$，使得z_i 作为 $\mathbb{C}$-代数生成 $\operatorname{Gr} R$ 的中心。那么 z_i、$1 \le i \le n$作为$\mathbb{C}$-代数生成中心 $Z(R)$。

证明。 对于 $f \in R$，回顾一下，我们将 $\deg f \in \mathbb{N}$ 写作满足 $f \in R_m$的最小 m。令 Z' 为由 z_i、$1 \le i \le n$生成的 $\mathbb{C}$-代数。

取 $f \in Z(R)$。我们证明 $f \in Z'$。注意 $f \in Z(\operatorname{Gr} R)$。根据我们的假设，有

$$\overline{f} = \sum_{\mathbf{m}=(m_1,\cdots,m_n)\in\mathbb{N}^n} c_{\mathbf{m}} \overline{z_1}^{m_1} \cdots \overline{z_n}^{m_n}, \qquad c_{\mathbf{m}} \in \mathbb{C}.$$

由于 $\overline{f}$ 在 $\operatorname{Gr} R$ 中是次数为 $\deg f$ 的齐次元素。我们可以假设 $c_{\mathbf{m}} = 0$，除非 $\deg(z_1^{m_1} \cdots z_m^{m_n}) = \deg f$。

Let

$$f' = \sum_{\mathbf{m}=(m_1,\cdots,m_n)\in\mathbb{N}^n} c_{\mathbf{m}} {z_1}^{m_1} \cdots {z_n}^{m_n} \qquad \text{in } R.$$

那么显然， $f' \in Z'$和 $f' = f$。因此$\deg(\overline{f} - f') < \deg f$，且 $f - f' \in Z(R)$。然后根据 $\deg f$ 作归纳，得$f \in Z'$。□

定理 5.12 的证明。固定一个约化表达式 $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_L} s_{j_1} \cdots s_{j_M}$，使得 $w_\bullet = s_{j_1} \cdots s_{j_{M_\circ}}$ 令 $\beta_1 < \cdots < \beta_L < \gamma_1 < \cdots < \gamma_M$ 为 $\mathcal{R}^+$上的相应凸序。回顾第 3.2 节中的根向量 B_{β_k}、E_{γ_t}、F_{γ_t}，它们属于 $\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$，其中 $1 \le k \le L$ 且 $1 \le t \le M$。令 $\{\omega_1^0, \cdots, \omega_R^0\}$ 为 P^θ的一个 $\mathbb{Z}$-基。根据命题 3.6，$Z_0^\imath$ 作为一个 $\mathbb{C}$-代数，由 $\mathrm{Fr}^\imath(B_{\beta_k})$、$\mathrm{Fr}^\imath(E_{\gamma_t})$、$\mathrm{Fr}^\imath(F_{\gamma_t})$ 和 $K_{\ell\omega_s^0}$生成，~~其中~~$1 \le k \le L$、$1 \le t \le M$和 $1 \le s \le r$。

由于 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_v$可以通过对 $\mathrm{U}^\imath_v$进行 $N+M+2$步取伴随分次代数得到，其中每一步都有一个 $\mathbb{N}$-滤过代数，由引理 5.11 和引理 5.13，只需证明这些元素

$$\overline{d_{\nu_i}}, \quad 1 \le i \le m; \tag{5.25}$$

$$\overline{\mathrm{Fr}^\imath(\underline{B_{\beta_k}})}, \overline{\mathrm{Fr}^\imath(\underline{E_{\gamma_t}})}, \overline{\mathrm{Fr}^\imath(\underline{F_{\gamma_t}})}, K_{\ell\mu}, \quad 1 \le k \le L, 1 \le t \le M, \mu \in P^\theta; \tag{5.26}$$

生成 GrU 的中心$\mathcal{Z}^\imath_v$ 作为一个 $\mathbb{C}$-代数。由引理 3.7，(5.26) 中的元素与 (4.28) 中的元素相同。注意，τ_0 对集合 $\{\nu_1, \cdots \nu_m\}$进行置换。由命题 5.5，$d_{\tau_0\nu_i}$与 (4.27) 中的元素相差一个非零标量。因此，由命题 4.14，(5.25)-(5.26) 中的元素生成 GrU 的中心$\mathcal{Z}^\imath_v$，这正是所需的。

证明完成。 □

6. Parametrization of simple modules

在本节 中，我们将 $\mathrm{U}^\imath_v$ 的简单模与 G的扭曲共轭类联系起来 .

6.1. **泊松序**。 在 De Concini-Kac-Procesi 的工作中 [DCKP92], Frobenius 中心 $Z_0\mathrm{U}_v$ 在 U 的简单模参数化中发挥着至关重要的作用$_v$。他们方法中的关键结构后来在 [BG03] 中以泊松序之名公理化，我们在此回顾其定义。

泊松序是一个三元组 (R, C, ∂)，其中 R是一个结合 $\mathbb{C}$-代数，C是 R 的中心子代数，且 R 是有限生成的 C- 模；$\partial : C \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(R)$ 是一个 $\mathbb{C}$- 线性映射，使得该映射

$$\{z_1, z_2\} = \partial_{z_1}(z_2), \quad \text{for } z_1, z_2 \in C,$$

定义了 C上的泊松括号。令 $\mathcal{V}$ =MaxSpec C 为与 C关联的泊松簇。

[BG03] 中的主要定理指出，不可约的 R-模由 $\mathcal{V}$的辛核参数化。对于 C中的任意理想 I，I 的泊松核 $\mathcal{P}(I)$ 定义为包含在 I中的 C 的最大泊松理想。在 $\mathcal{V}$ 上定义等价关系 $\sim$：若 $\mathcal{P}(\mathfrak{m}) = \mathcal{P}(\mathfrak{n})$，则令 $\mathfrak{m} \sim \mathfrak{n}$，其中 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathcal{V}$。$\sim$ 的等价类称为 $\mathcal{V}$的辛核。当 $\mathcal{V}$ 是一个具有扎里斯基局部闭辛叶的光滑泊松簇时，[BG03，命题 3.5]表明辛叶与辛核重合。对于 $\mathfrak{m} \in \mathcal{V}$，令 $R_\mathfrak{m} = R/\mathfrak{m}R$。于是，[BG03，定理 4.2] 表明

$$R_\mathfrak{m} \cong R_\mathfrak{n}$$

作为有限维代数，当 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{n}$ 属于 $\mathcal{V}$的同一个辛核时。因此，满射映射

$$\mathrm{Irr}(R) \longrightarrow \mathcal{V},$$

将不可约 R-模 M 映射到其 Z-特征 $\mathrm{Ann}_Z(M)$ 的映射，在 $\mathcal{V}$ 的辛核上具有同构的纤维。

以下命题可由 [BG03第 2 节中讨论的一般例子推得。2]为方便读者，我们在此给出证明。

命题 题 6.1。 $(\mathrm{U}_v^\imath, Z_0^\imath, \partial^\imath)$ 是一个泊松序，其中导子 $\partial^\imath$ 定义为

$$\partial^\imath : Z_0^\imath \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U}_v^\imath), \quad z \mapsto \partial_z^\imath, \qquad \partial_z^\imath(x) = \pi_v^\imath\Big(\frac{[\widetilde{z}, \widetilde{x}]}{\ell^2(qv^{-1}-1)}\Big), \tag{6.1}$$

其中， $\widetilde{z}$、 $\widetilde{x}$ 是 z、 x 在映射 $\pi_v^\imath$下于$\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$ 中的原像。

证明。由定理 3.2 和 3.9， $Z_0^\imath$ 是 $\mathrm{U}_v^\imath$ 的中心子代数，而 $\mathrm{U}_v^\imath$ 是$Z_0^\imath$上的有限维代数。注意，$\mathrm{U}_{\mathcal{A}'}^\imath$ 是 $\mathcal{A}'$上的自由代数， $\pi_v^\imath$ 的核为$(q-v)\mathrm{U}_{\mathcal{A}'^\circ}^\imath$。由于 $z \in Z_0^\imath$ 在 $\mathrm{U}_v^\imath$ 中是中心的，$[z, x] = 0$，因此 $[\widetilde{z}, \widetilde{x}] \in (q-v)\mathrm{U}_{\mathcal{A}'^\circ}^\imath$ 这说明 (6.1) 中的导子定义良好。将 (6.1) 与 (3.3) 比较可知，对于 z_1、 $z_2 \in Z_0^\imath$， $\partial_{z_1}^\imath(z_2) = \{z_1, z_2\}$。□

回顾第3.3 节中的纤维代数 $\mathrm{U}_{v,y}^\imath$，其中 $y \in \mathcal{X}$。

推论 6.2。 设 $x, x' \in \mathcal{X}$。若 x, x'属于 $\mathcal{X}$的同一个辛核，则存在一个同构 $\mathrm{U}_{v,x}^\imath \cong \mathrm{U}_{v,x'}^\imath$，作为 $\mathbb{C}$-代数。

6.2. **辛叶**。 回顾 $\mathcal{X} = K^\perp\backslash G^*$。在本小节中，我们遵循 [LY08] 来研究 $\mathcal{X}$ 的泊松结构，并确定其辛叶。

令 $D = G \times G$ 和 $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ 为相应的李代数。令 $\mathfrak{d}$ 配备非退化对称双线性形式

$$\langle\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle\rangle = \langle\langle x_1, y_1 \rangle\rangle - \langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle, \qquad \text{for } x_1 x_2, y_1, y_2 \in \mathfrak{g},$$

其中 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ 是 $\mathfrak{g}$上的基林形式。令 $\mathfrak{g}_\Delta \subset \mathfrak{d}$ 为对角子代数， $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{b}^+ \oplus \mathfrak{b}^-$为对偶泊松李群 G^*的李代数。于是 $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}_\Delta + \mathfrak{g}^*$ 是标准拉格朗日分解。令

$$R = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \xi_j \wedge x_j \in \wedge^2 \mathfrak{d}$$

为相应的 r-矩阵，其中 $\{x_1, \cdots, x_n\}$是 $\mathfrak{g}_\Delta$的基， $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$是$\mathfrak{g}^*$的对偶基。

设 $G_\theta = \{(g, \theta(g)) \mid g \in G\}$ 是 D的闭子群。其李代数 $\mathfrak{g}_\theta = \{(X, \theta(X)) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ 显然是 $\mathfrak{d}$的拉格朗日子代数，也就是说， $\mathfrak{g}_\theta^\perp = \mathfrak{g}_\theta$ 相对于 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$。 D 在 $G_\theta\backslash D$ 上的右作用诱导出一个线性映射 $\kappa\colon \mathfrak{d} \to \chi^1(G_\theta\backslash D)$，它从 $\mathfrak{d}$ 映射到 $G_\theta\backslash D$上的向量场空间 $\chi^1(G_\theta\backslash D)$。

设 $\Pi_{G_\theta\backslash D} = (\wedge^2\kappa)(R)$ 是 $G_\theta\backslash D$上的双向量场。根据 [LY08，定理 2。3]， $\Pi_{G_\theta\backslash D}$ 是 $G_\theta\backslash D$上的泊松双向量场。存在一个同构

$$G_\theta\backslash D \xrightarrow{\sim} G; \qquad G_\theta(g_1, g_2) \mapsto \theta(g_1)^{-1} g_2, \quad \text{for } g_1, g_2 \in G. \tag{6.2}$$

Let π_θ 是 G上的泊松结构，它是 $\Pi_{G_\theta\backslash D}$ 在该同构下的推前。回忆一下， $K^\perp \subset D$ 是 $G^* \cap G_\theta$的单位连通分支。那么映射

$$\varphi : \mathcal{X} = K^\perp\backslash G^* \longrightarrow G; \qquad K^\perp(b_1, b_2) \mapsto \theta(b_1)^{-1} b_2, \tag{6.3}$$

定义良好。对于 $g \in G$，令 $\mathcal{C}_\theta(g) = \{\theta(h)^{-1} g h \mid h \in G\} \subseteq G$ 为 θ-扭曲共轭类。回忆一下第 $\Pi_{\mathcal{X}}$ 节中 $\mathcal{X}$ 上的泊松结构。若 2.3，记 $g \sim_\theta g'$，当且仅当 $g' \in \mathcal{C}_\theta(g)$。令$H^{\theta 0} = \{t\theta(t) \mid t \in H\}$ 为 $H^\theta = \{t \in H \mid \theta t = t\}$的单位连通分支。

现在我们可以陈述本小节的主要结果了。

命题 6.3。 映射 $\varphi\colon (\mathcal{X}, \Pi_{\mathcal{X}}) \to (G, \pi_\theta)$ 是泊松映射，并且是一个 $2^{|\mathbb{I}_\bullet|}$对1 覆盖映射，其像为 $\theta(U^+)H^{\theta 0}U^-$。 $\mathcal{X}$的辛叶是 $\varphi^{-1}(\mathcal{C}_\theta(g))$在 $g \in G$下的连通分支。

证明。在同构 (6.2) 下， G 是一个 D-齐性空间，其中右侧 D作用由 $g \cdot_\theta (g_1, g_2) = \theta(g_1)^{-1} g g_2$ 给出，其中 $g, g_1, g_2 \in G$。注意， G^* 是 D的子群。映射 φ 显然是 G^*-等变的。赋予 D 与标准分裂相关联的泊松结构（参见 [LY08, (2.7)]）。根据定义， G^* 是 D的泊松子群。 φ 的像是 G中单位元的 G^*-轨道；根据 [LY08, § 2.2]，已知它是 (G, π_θ)的泊松子流形，也是一个 G^*-泊松齐性空间。由定义可知， $\Phi_{\mathcal{X}}(K^\perp \cdot e) = 0$ 且$\pi_\theta(e) = 0$。因此我们得出结论： φ 是泊松映射。

由（2.13）可知， φ的像为 $\theta\left(U^+\right) H^{\theta 0} U^-$。为证明 φ是到像上的一个 $2^{|\mathbb{I}_\bullet|}$对 1 覆盖映射，我们注意到 $\operatorname{Im} \varphi \cong \left(G^* \cap G_\theta\right) \backslash G^*$. 因此， φ 的纤维同构于 $\left(G^* \cap G_\theta\right) / \left(G^* \cap G_\theta\right)^\circ$，即 $G^* \cap G_\theta$的分支群。直接计算可得

$$G^* \cap G_\theta \cong U_{\mathbb{I}_\bullet} \times H_\theta$$

作为代数簇，其中 $U_{\mathbb{I}_\bullet}$ 是与 $\mathbb{I}_\bullet$ 相关联的抛物子群的幺幂根基，且 $H_\theta = \{t \in H \mid \theta\left(t\right) = t^{-1}\}$。接下来我们计算 $H_\theta / H_\theta^\circ$ 的基数，其中 H_θ° 是 H_θ 的单位连通分支。

令 $H_\bullet = \{\alpha_j^\vee\left(a\right) \mid j \in \mathbb{I}_\bullet,\ a \in \mathbb{C}^\times\}$，并令 $E = \{h \in H_\bullet \mid h^2 = 1\}$。显然， $|E| = 2^{|\mathbb{I}_\bullet|}$且 $E \subseteq H_\theta$。根据 [Spr83，命题 2.2]，，我们有 $H_\theta^\circ = \{t\theta\left(t\right)^{-1} \mid t \in H\}$，其由$\alpha_i^\vee\left(\lambda_i\right) \theta\left(\alpha_i^\vee\left(\lambda_i^{-1}\right)\right)$ 生成，其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}^\times$ 且 $i \in \mathbb{I}_{\circ,\tau}$。

取两个元素 h_1， h_2 属于 E，使得 $h_1 \neq h_2$。我们推得 h_1 和 h_2 不在同一个连通分支中。反设如此，则 $h_1 h_2^{-1} \in H_\theta^\circ$。由于 $H_\theta^\circ \cap H_\bullet = \{1\}$，并且对某个 $t' \in H_\bullet$，有 $\theta(\alpha_i^\vee(\lambda_i^{-1})) = \alpha_{\tau i}^\vee(\lambda_i) t'$，这与之矛盾。

另一方面，我们断言， H_θ 中的任意元素 t都可以写成 $t = t_0 e$，其中 $t_0 \in H_\theta^\circ$和 $e \in E$，因此 t 与 e位于同一个连通分支中。记 $t = \prod_{i \in \mathbb{I}} \alpha_i^\vee(\lambda_i)$。那么， $\theta(t) = t^{-1}$ 意味着，对于 $i \in \mathbb{I}_\circ$，有 $\lambda_i = \lambda_{\tau i}$。令 $t_0 = \prod_{i \in \mathbb{I}_{\circ,\tau}} \alpha_i^\vee(\lambda_i') \theta(\alpha_i^\vee(\lambda_i'^{-1})) \in H_\theta^\circ$，其中若 $\tau i \neq i$，则$\lambda_i' = \lambda_i$；若 $\tau i = i$，则 λ_i'是 λ_i的一个平方根。显然， $t t_0^{-1} \in H_\theta \cap H_\bullet = E$。至此，我们完成了该断言的证明。

因此， $H_\theta / H_\theta^\circ$ 的基数等于 $|E| = 2^{|\mathbb{I}_\bullet|}$，正如所需。
关于 $\mathcal{X}$ 的辛叶的最后一个结论 [Lu14，命题 2.1 (3)]。 □

特别地， $\mathcal{X}$ 的辛叶在扎里斯基拓扑下是局部闭的。因此，在 $\mathcal{X}$ 上，我们不区分辛叶和辛核。

令 $H_\theta^\circ = \{t\theta(t)^{-1} \mid t \in H\}$ 为 $\{t \in H \mid \theta(t) = t^{-1}\}$的单位连通分支。

引理 6.4。 设 g、 $g' \in \operatorname{Im}\varphi$和 $g \sim_\theta g'$。那么存在 $t \in H_\theta^\circ$，使得 $t^2 = 1$，且 g和 $tg't$位于(G, π_θ)的同一个辛叶上。

证明。 取 $w = w_\bullet w_0$ 和 $\theta' = \mathrm{Ad}_{\dot{w}^{-1}} \circ \theta$。根据 θ的定义， θ' 稳定 $B^\pm$ 并且 H。根据定义， $H = H^{\theta 0} H_\theta^\circ$ 和 $H^{\theta 0}$ 可与 $T_{w\theta'}$ 在 [Lu14]中识别。注意，泊松同构

$$(G, \pi_\theta) \to (G, \pi_{\theta'}), \qquad g \mapsto \dot{w}^{-1} g,$$

交织了 θ-扭曲共轭与 θ'-扭曲共轭。由（6.3），$\operatorname{Im}\varphi \subset \dot{w} B^+ \dot{w}^{-1} B^-$。应用此同构（参见 [Lu14，第 6]节）以及 [Lu14，命题 3。5], 存在 $t \in H_\theta^\circ$使得 g， $tg'\theta\left(t\right)^{-1} = tg't$ 位于（G， π_θ）的同一辛叶上。

尚需证明 $t^2 = 1$。假设

$$g' = \varphi((u_+' h', h'^{-1} u_-')) = \theta(u_+' h')^{-1} h'^{-1} u_-'.$$

由于 $tg't$ 与 $g \in \operatorname{Im}\varphi$ 和 $\operatorname{Im}\varphi$ 位于同一个辛叶上，且 G, π_θ 是一个泊松子流形，因此我们得出 $tg't \in \operatorname{Im}\varphi$。根据 [So24b，命题 3。2], $\operatorname{Im}\varphi \subset B^+ B^-$，在典范投影 $B^+ B^- \to H$ 下，$\operatorname{Im}\varphi$ 被映射到 $H^{\theta 0}$。因此，对于某个 $t^2 \theta(h')^{-1} h'^{-1} = \theta(h)^{-1} h^{-1}$，我们有

$h \in H$。这意味着 $t^2 \in H^{\theta 0}$。另一方面， $t^2 \in H_\theta^\circ$，因此我们得出结论：$t^2 = 1$。□

前像 $\varphi^{-1}(\mathcal{C}_\theta(g))$ 不一定是连通的。然而，正如命题 6.3 和引理 6.4的证明所示，不同的连通分支可以通过离散群作用相互得到。

命题 6.5。 对于 $x \in \mathcal{X}$，包含 x 的 $\mathcal{X}$ 的辛叶维数为

$$\dim \mathcal{C}_\theta(\varphi(x)) - \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{k}.$$

证明。 根据命题 6.3，所求维数等于包含 $\varphi(x)$ 的辛叶 $G, \pi_\theta)$ 的维数。由 [Lu14，定理 1。1] 并应用 [Lu14，第 6]节中的同构，令 $w = w_0 w_\bullet$，所求维数等于

$$\dim \mathcal{C}_\theta(\varphi(x)) - l(w_0 w_\bullet) - \dim \ker(1+\theta).$$

这里我们将 θ 视为 $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\ H$ 上的线性映射。注意到

$$\dim \mathfrak{k} = l(w_0) + l(w_\bullet) + \dim\ \mathrm{rank}(1+\theta).$$

因此有

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{k} = l(w_0 w_\bullet) + \dim \ker(1+\theta).$$

证明至此完成。 □

对于 $x \in \mathcal{X}$，记 $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{X}$ 为包含 x 的辛叶。

推论 6.6。对于 $x \in \mathcal{X}$，有

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \dim \mathcal{O}_x = \dim \mathfrak{k} - \mathrm{rank}\ \mathfrak{k}.$$

证明。由命题6.5可知，只需证明

$$\max_{g \in G} \dim \mathcal{C}_\theta(g) = \dim \mathfrak{g} - \mathrm{rank}\ \mathfrak{k}.$$

设 B_0 是 θ-稳定的极大 Borel 子群 G，它包含一个 θ-稳定的极大环面 H_0。令 $U_0 \subset B_0$ 为 B_0 的幺幂根基。则 $\theta(U_0) = U_0$。根据 [Spr06，引理 5 (i)]，任意元素 $g \in G$ 都与 θ-共轭于某个 B_0 中的元素。我们不妨设 $g = ut \in B_0$，其中 $u \in U_0$ 且 $t \in H_0$。对于任意 $u't' \in B_0$，其中 $u' \in U_0$ 且 $t' \in H_0$，显然

$$(u't')(ut)\theta(u't')^{-1} \in tH_0^{-\theta}U_0,$$

其中 $H_0^{-\theta} = \{h\theta(h)^{-1} \mid h \in H_0\}$ 是子群 $\{h \in H_0 \mid \theta(h) = h^{-1}\}$ 的单位连通分支。令 $\cdot_\theta$ 表示 θ-扭曲共轭作用。于是有 $B_0 \cdot_\theta g \subset tH_0^{-\theta}U_0$。特别地， $B_0 \cdot_\theta g$ 的维数至多为 $\dim H_0^{-\theta} + \dim\ U_0$。由于子群 $H_0^\theta = \{h \in H_0 \mid \theta(h) = h\}$ 是 K 的极大环面，我们有

$$\dim H_0^{-\theta} = \mathrm{rank}\ \mathfrak{g} - \mathrm{rank}\ \mathfrak{k}.$$

令 $\mathrm{Stab}_{B_0}(g)$（分别为 $\mathrm{Stab}_G(g)$）表示在 B_0（分别为 G）的 θ-扭曲共轭作用下， g 的稳定子。那么有

$$\dim \mathrm{Stab}_G(g) \geq \dim \mathrm{Stab}_{B_0}(g) \geq \dim B_0 - \dim H_0^{-\theta} - \dim U_0 = \mathrm{rank}\ \mathfrak{k}.$$

因此，我们有

$$\dim \mathcal{C}_\theta(g) \leq \dim \mathfrak{g} - \mathrm{rank}\ \mathfrak{k}.$$

接下来我们证明该等式可以达到。设 $\mathcal{R}_0 \subset \mathrm{Hom}(H_0, \mathbb{C}^*)$ 是与 H_0 相关联的根系。取 $\gamma \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, H_0)$，使得对于任意

$\alpha \in \mathcal{R}_0$。设 p 为充分大的奇整数，并令 $h_0 = (\gamma\theta(\gamma))(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}})$。则 $h_0 \in H_0^\theta$ 是 H_0^θ 中的正则元素，使得 $h_0^p = 1$。设 $\mathfrak{h}_0^\theta$ 为 H_0^θ 的李代数。

于是 $\mathrm{Stab}_G(h_0) = \{g \in G | \theta(g)h_0 = h_0 g\}$，其李代数由 $\mathfrak{stab}_\mathfrak{g}(h_0) = \{x \in \mathfrak{g} | \theta(x) = \mathrm{Ad}_{h_0}(x)\}$ 给出。对于任意 $x \in \mathfrak{stab}_\mathfrak{g}(h_0)$，记 $x = x_0 + x_1$，其中 $x_0 \in \mathfrak{k}$，$x_1 \in \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$。由于 $h_0 \in H_0^\theta$，Ad_{h_0} 保持 $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{p}$；特别地，$\mathrm{Ad}_{h_0}(x_0) \in \mathfrak{k}$ 且 $\mathrm{Ad}_{h_0}(x_1) \in \mathfrak{p}$。现在，$x \in \mathfrak{stab}_\mathfrak{g}(h_0)$ 推出

$$x_0 = \mathrm{Ad}_{h_0}(x_0), \qquad -x_1 = \mathrm{Ad}_{h_0}(x_1),$$

由于 h_0 是 K 和 $x_0 \in \mathfrak{k}$ 的极大环面 H_0^θ 中的正则元素，上述第一个恒等式意味着 $x_0 \in \mathfrak{h}_0^\theta$。由于 $h_0^p = 1$，算子 Ad_{h_0} 在 $\mathfrak{p}$ 上不可能有特征值为 -1 的非零特征向量，因此 $x_1 = 0$。由此我们证明了

$$\mathfrak{stab}_\mathfrak{g}(h_0) = \mathfrak{h}_0^\theta.$$

因此，$\dim \mathfrak{stab}_\mathfrak{g}(h_0) = \dim \mathfrak{h}_0^\theta = \mathrm{rank}\ \mathfrak{k}$，如所求。 □

6.3. **块的等价性**。回忆映射 $\varphi: \mathcal{X} \to G$ 在（6.3）中。对于 g，$g' \in G$，若 $g \sim_\theta g'$，g 且 g' 属于同一个 θ-扭曲共轭类，则记作 。本小节将确立推论 6.2 的如下强化版本。

定理 6.7。设 $x, x' \in \mathcal{X}$。若 $\varphi(x) \sim_\theta \varphi(x')$，则存在同构 $\mathrm{U}_{v,\ x}^\imath \cong \mathrm{U}_{v,\ x'}^\imath$ 作为$\mathbb{C}$-代数。

证明。由引理 6.4，存在 $t \in H_\theta^\circ$，满足 $t^2 = 1$，使得 $\varphi(x)$、$t\varphi(x')t$ 属于 $(G,\ \pi_\theta)$ 的同一个辛叶。特别地，对某个 $x'' \in \mathcal{X}$，有 $t\varphi(x')t = \varphi(x'')$。首先，我们证明 $\mathrm{U}_{v,\ x'}^\imath \cong \mathrm{U}_{v,\ x''}^\imath$ 是 $\mathbb{C}$-代数。

定义一个 $\mathbb{C}(q^{1/2})$-代数同构 $c_t : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$，使其满足 $c_t(E_i) = \alpha_i(t)E_i$、$c_t(F_i) = \alpha_i(t)F_i$，以及$c_t(K_\mu) = K_\mu$，其中 $i \in \mathbb{I}$ 和 $\mu \in P$。注意，由于对于 $i \in \mathbb{I}$，c_t 是代数同构，因为 $\alpha_i(t)^2 = \alpha_i(t^2) = 1$。

我们断言 $c_t(\mathrm{U}^\imath) = \mathrm{U}^\imath$。只需证明，对于作为 $\mathrm{U}^\imath$ 的生成元的 x，$c_t(x) \in \mathrm{U}^\imath$。对于 $x \in \{E_i, F_i, K_\mu \mid i \in \mathbb{I}_\bullet, \mu \in P^\theta\}$，显然 $c_t(x) \in \{x, -x\} \subset \mathrm{U}^\imath$。对于 $i \in \mathbb{I}_\circ$，由于 $\mathrm{wt}\,(T_{w_\bullet}(E_{\tau i})) = \theta(\alpha_i)$，我们有

$$c_t(T_{w_\bullet}(E_{\tau i})) = \theta(\alpha_i)(t)^{-1} T_{w_\bullet}(E_{\tau i}) = \alpha_i(\theta(t)^{-1}) T_{w_\bullet}(E_{\tau i}) = \alpha_i(t) T_{w_\bullet}(E_{\tau i}).$$

因此，我们得出 $c_t(B_i) = \alpha_i(t)B_i \in \mathrm{U}^\imath$。断言得证。

显然，c_t 保留整形式 $\mathrm{U}_\mathcal{A}$，因此它诱导出一个 $\mathbb{C}$-代数同构$c_t : \mathrm{U}_v^\imath \to \mathrm{U}_v^\imath$。此外，直接验证可得 $c_t(Z_0^\imath) = Z_0^\imath$，因此它诱导出一个态射$\widetilde{c_t}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$。于是，$c_t$ 诱导出同构 $\mathrm{U}_{v,x'}^\imath \cong \mathrm{U}_{v,\widetilde{c_t}(x')}^\imath$。

另一方面，记 $\widetilde{t} = (t, t) \in G^*$。那么，对于任意 $x \in G^*$，都有 $\widetilde{c_t}(K^\perp x) = K^\perp \mathrm{Ad}_{\widetilde{t}}(x)$。特别地，对于任意 $x \in \mathcal{X}$，有 $\varphi(\widetilde{c_t}(x)) = t\varphi(x)t$。因此，为了证明 $\mathrm{U}_{v,x'}^\imath \cong \mathrm{U}_{v,x''}^\imath$，还需证明以下命题。

(a) 对于 $y, y' \in \mathcal{X}$ 满足 $\varphi(y) = \varphi(y')$ 的情形，我们有 $\mathrm{U}_{v,y}^\imath \cong \mathrm{U}_{v,y'}^\imath$ 作为 $\mathbb{C}$-代数。

根据命题 6.3 的证明，我们可以写成 $y = K^\perp(hu_+, h^{-1}u_-)$ 和 $y' = K^\perp(\delta h u_+, \delta h^{-1} u_-)$，其中 δ，$h \in H, u_\pm \in U^\pm$，$\theta(\delta) = \delta$，且 $\delta^2 = 1$。定义一个 $\mathbb{C}(q^{1/2})$-代数同构r_δ：$\mathrm{U} \to \mathrm{U}$，令 $r_\delta(E_i) = \alpha_i(\delta)E_i$，$r_\delta(F_i) = F_i$，以及 $r_\delta(K_\mu) = \mu(\delta)K_\mu$，其中 $i \in \mathbb{I}$ 和 $\mu \in P$。通过与 c_t 情形类似的考察，我们得出 r_δ 诱导出一个 $\mathbb{C}$-代数同构r_δ：$\mathrm{U}_v^\imath \to \mathrm{U}_v^\imath$，并且 $r_\delta(\mathfrak{m}_y) = \mathfrak{m}_{y'}$。因此，我们得到 $\mathbb{C}$-代数同构 $\mathrm{U}_{v,y}^\imath \cong \mathrm{U}_{v,y'}^\imath$。这就完成了 (a) 的证明。

因此，我们证明了 $\mathrm{U}_{v,x'}^\imath \cong \mathrm{U}_{v,x''}^\imath$，其中 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x'')$ 位于 (G, π_θ) 的同一辛叶上。由命题 6.3 可知，我们可以取 $x''' \in \mathcal{X}$，使得 $\varphi(x''') = \varphi(x'')$，且 x''',x 位于 $\mathcal{X}$ 的同一辛叶上。由 (a)，我们有 $\mathrm{U}_{v,\ x'''}^\imath \cong \mathrm{U}_{v,x''}^\imath$。由命题 6.1，我们

有 $\mathbf{U}^{\imath}_{v,\ x'''} \cong \mathbf{U}^{\imath}_{v,\ x}$。最后，综合以上所有论证，显然 $\mathbf{U}^{\imath}_{v,\ x'} \cong \mathbf{U}^{\imath}_{v,\ x}$ 是 $\mathbb{C}$-代数。□

7. Dimensions of simple modules

回忆推论 5.9 可知，对于任意 $V \in$不可约表示 $\mathbf{U}^{\imath}_{v}$，$\dim V \leq \ell^{(\dim \mathfrak{k} - \operatorname{rank} \mathfrak{k})/2}$。本节的目标是证明以下定理。

定理 7.1. 设 $x \in \mathcal{X}$ 和 $V \in$不可约表示 $\mathbf{U}^{\imath}_{v,x}$。若 θ-扭曲共轭类 $\mathcal{C}_\theta(\varphi(x))$ 具有最大维数（= 维数 $\mathfrak{g} -$ 秩 $\mathfrak{k}$），则 维数 $V = \ell^{(\dim \mathfrak{k} - \operatorname{rank} \mathfrak{k})/2}$。

7.1. 泊松中心。 对于交换泊松代数 R 在 $\mathbb{C}$上，我们记

$$\mathcal{Z}(R) = \{f \in R \mid \{f, g\} = 0, \forall g \in R\}$$

表示卡西米尔元构成的子代数。子代数 $\mathcal{Z}(R)$ 称为R的泊松中心 。

给定一个 $n \times n$ 反对称整数矩阵 $H =$ (h_{ij})，（对数正则）泊松代数$\mathcal{P}_H = \mathbb{C}[x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ 定义为变量 x_i、$1 \leq i \leq n$的多项式代数，视为交换代数，其泊松括号定义如下：

$$\{x_i, x_j\} = h_{ij} x_i x_j, \quad \text{for } 1 \leq i, j \leq n.$$

对于任意子集 $J \subset \{1, \cdots, n\}$，记$\mathcal{P}_{H,\ J} = \mathcal{P}_H[x_j^{-1} \mid j \in J]$。

泊松代数$\mathcal{P}_{H,\ J}$是第$\mathcal{T}_{H,\ J}$节中4.1 的 $\mathbb{F} = \mathcal{A}$局部化扭多项式代数的半经典极限。因此有典范同构

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{T}_{H,J} \cong \mathcal{P}_{H,J}$$

作为泊松代数。这里 $\mathbb{C}$ 视为一个 $\mathcal{A}$-模，其作用为 $q^{1/2} \mapsto 1$，左端的泊松括号由式（2.12）给出。

对于任意$\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$，记$x^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$为 $\mathbb{C}[x_i^{\pm 1} \mid 1 \leq i \leq n]$中的元素。将 H 视为一个线性函数 $H: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$。令 K 为 H的核。以下引理很容易证明。

引理 7.2. 设 $J \subset \{1, \cdots, n\}$ 为任意子集。集合

$$\{x^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in K,\ a_i \geq 0 \ \ for\ i \notin J\}$$

构成 $\mathbb{C}$的基，属于 $\mathcal{Z}(\mathcal{P}_{H,J})$。

泊松代数上可以定义滤过。一个（$\mathbb{N}$-）滤过泊松代数 $R = \cup_{i \in \mathbb{N}} R_i$是一个交换的 $\mathbb{C}$-泊松代数 R，带有子空间 R_i, $i \in \mathbb{N}$，使得 $\{R_i, R_j\} \subset R_{i+j}$ 并且$R_i R_j \subset R_{i+j}$，对于 $i, j \in \mathbb{N}$。对于滤过泊松代数 $R = \cup_{i \in \mathbb{N}} R_i$，其伴随分次代数 $\operatorname{Gr} R = \oplus_{i \in \mathbb{N}} R_i / R_{i-1}$ 具有自然的泊松结构。对于 $r \in R$，记 $\deg r$ 为满足 i 的最小数 $r \in R_i$，并记 $r \in R_i / R_{i-1}$ 表示其在 $\operatorname{Gr} R$ 中的像，一如既往。下述定理是引理5.13的泊松类比，其证明略去。

引理 7.3。 设 $R = \cup_{i \in \mathbb{N}} R_i$ 是一个滤过泊松代数，且为整环。设 $z_i \in \mathcal{Z}(R)$，其中 $1 \leq i \leq n$。假设 z_i、$1 \leq i \leq n$ 生成 $\mathcal{Z}(\operatorname{Gr} R)$ 作为一个 $\mathbb{C}$-代数。则 z_i、$1 \leq i \leq n$ 生成 $\mathcal{Z}(R)$ 作为一个 $\mathbb{C}$-代数。

7.2. **与正则类相关的维数。** 在本小节中，我们沿用第 3.2 节中的记号。回顾第 $d_{\nu_i} \in Z(\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'})$ 的元素 $1 \le i \le m =$ 秩 $\mathfrak{k}$，见第 5 节，以及第 2.3 节中的交换泊松代数 U。记 $d_i = d_{\nu_i}$ 为 d_{ν_i} 在 $\mathrm{U}^\imath_1$ 中的像。显然，$d_i \in \mathcal{Z}(\mathrm{U}^\imath_1)$ 对于 $1 \le i \le m$。 —

命题 7.4. 代数 $\mathcal{Z}(\mathrm{U}^\imath_1)$ 由 d_i, $1 \le i \le m$ 生成，作为一个 $\mathbb{C}$-代数。

证明。回顾第 4.2 节中 $\mathrm{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$ 上的 $\mathbb{N}^{N+M+2}$-滤过。由引理 4.6 和 (2.12)，它在泊松代数 $\mathrm{U}^\imath_1$ 上诱导出一个 $\mathbb{N}^{N+M+2}$-滤过。于是，伴随分次代数 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_1$ 是泊松代数 $\mathcal{P}_{S,J(S)}$，其中 S 是 (4.15) 中定义的斜对称矩阵，且 $J(S) = \{t_{\omega^0_s} | 1 \le s \le r\}$。根据注 4.5 和引理 7.3，只需证明 d_i, $1 \le i \le m$ 生成泊松中心 $\mathcal{Z}(\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_1)$。事实上，这由引理 7.2、命题 5.5 以及引理 4.12 的证明可得。□

回顾第 2.3 节，$\mathrm{U}^\imath_1$ 被认作泊松簇 $\mathcal{X} = K^\perp \backslash G^*$ 的坐标代数 $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$。

命题 7.5。 令 $x \in \mathcal{X}$ 和 $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{X}$ 为包含 x 的辛叶。设维数 $\mathcal{O}_x =$ 维数 $\mathfrak{k} -$ 秩 $\mathfrak{k}$。则 $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{X}$ 由以下方程定义

$$d_i = d_i(x) \in \mathbb{C}, \quad for\ 1 \le i \le m = rank\ \mathfrak{k}. \tag{7.1}$$

证明。令 $V_x \subset \mathcal{X}$ 为由 (7.1) 定义的子簇。由于 d_i 属于 $\mathcal{Z}(\mathrm{U}^\imath_1)$，它在每个辛叶上均为常数。因此 $\mathcal{O}_x \subset V_x$。另一方面，考虑 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_1$ 中 $1 \le i \le m$ 对应的元素 d_i。根据命题 5.5，元素 d_i、$1 \le i \le m$ 是关于 $\mathbb{C}[P^\theta]$ 的单项式，且涉及互不相交的不定元集合。特别地，它们在 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_1$ 中构成正则序列。根据 [DCKP93a，命题1.4(a)],，元素 d_i、$1 \le i \le m$ 在 $\mathrm{U}^\imath_1$ 中构成正则序列。因此 $V_x \subset \mathcal{X}$ 是余维为 $m =$ 秩 $\mathfrak{k}$ 的不可约闭子簇。因此维数 $\mathcal{O}_x =$ 维数 V_x。我们得出 $\mathcal{O}_x = V_x$。□

现在我们可以证明定理 7.1。

定理的证明 *7.1* 。令 $N_0 =$ (维数 $\mathfrak{k} -$ 秩 $\mathfrak{k}$)/2。回顾推论 5.9 指出

$$\mathcal{X}^0 = \{x \in \mathcal{X} \mid \dim V = \ell^{N_0},\ \text{for any } V \in \mathrm{Irr}\ \mathrm{U}^\imath_{v,x}\}.$$

是 $\mathcal{X}$的一个非空扎里斯基开子集。取一个元素 $x \in \mathcal{X}$，使得维数 $\mathcal{C}_\theta(\varphi(x))$ 最大。于是，辛叶 $\mathcal{O}_x$ 的维数在所有辛叶中最大，这由命题 6.5可知。我们需要证明 $x \in \mathcal{X}^0$。根据推论 6.2， $\mathcal{X}^0$ 是辛叶的并。因此，只需证明

$$\overline{\mathcal{O}_x} \cap \mathcal{X}^0 \ne \emptyset. \tag{7.2}$$

令 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_1$ 为命题 7.4证明中所述的相关分次泊松代数。回顾式（3.12）可知，$\mathrm{Fr}^\imath : \mathrm{U}^\imath_1 \to \mathrm{U}^\imath_v$ 与 $\mathbb{N}^{N+M+2}$-滤过相容，因此它诱导出代数嵌入 $\mathrm{Fr}^\imath : \mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_1 \to \mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_v$，该嵌入将 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_1$ 映为 $Z^\imath_0 = \{\underline{z} \mid z \in Z^\imath_0\}$ $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_v$的中心子代数。令 $\mathcal{X} =$ 极大谱 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_1$，并令

$$\overline{\mathcal{X}}^0 = \{x \in \overline{\mathcal{X}} \mid \dim V = \ell^{N_0}, \text{for any } V \in \mathrm{Irr}\ (\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_v)_x\}.$$

令 $I \subset \mathrm{U}^\imath_1$ 为 $\mathcal{O}_x$ 的定义理想，并令 $\overline{I} \subset \mathrm{GrU}^\imath_1$ 为相关分次理想。令$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{X}$为 I 的零点集。根据定理 5.8 和定理 4.13，我们有 $\deg \mathrm{U}^\imath_v = \deg(\mathrm{GrU}^\imath_v)$。感谢 [DCKP93a，引理 1。5], 只需证明

$$\mathcal{O}_1 \cap \overline{\mathcal{X}}^0 \ne \emptyset. \tag{7.3}$$

根据命题 7.5，理想 I由元素 $d_i - c_i$生成，其中 $c_i \in \mathbb{C}$，$1 \le i \le m$。正如命题 7.5的证明中所指出的，元素 d_i（$1 \le i \le m$）在 $\mathrm{Gr}\,\mathrm{U}^\imath_1$中构成一个正则序列。根据 [DCKP93a，命题 1.4 (b)],，理想 I 由 d_i生成，其中 $1 \le i \le m$。

Rec均来自 [SZ25，命题 4。1]$\mathbf{U}_1^\imath$ 是一个生成元为以下元素的多项式代数 rs

$$\underline{B_{\beta_k}}, \underline{E_{\gamma_t}}, \underline{K_{\omega_s^0}^{\pm 1}}, \qquad 1 \le k \le N, 1 \le t \le M, 1 \le s \le r.$$

对于 $1 \le i \le m$，由命题5.5，存在 $1 \le k_i \le N$ 使得 $B_{\beta_{k_i}}$ 整除单项式d_i 在 $\mathbf{GrU}$ 中$_1^\imath$。令 $\mathcal{O}_1' \subset \mathcal{X}$ 为 $B_{\beta_{k_i}}$ 关于 $1 \le i \le m$的零点集。则 $\mathcal{O}_1' \subset \mathcal{O}_1$ 是一个不可约分支。只需证明

$$\mathcal{O}_1' \cap \overline{\mathcal{X}}^0 \neq \emptyset. \tag{7.4}$$

令 $P = \mathbf{Gr}\, \mathbf{U}_v^\imath / J$，其中 $J \subset \mathbf{Gr}\, \mathbf{U}_v^\imath$ 是由 $B_{\beta_{k_i}}$ 生成的双边理想，$1 \le i \le m$。那么 P 又是一个局部化扭曲多项式，包含一个与 $\mathbb{C}[\mathcal{O}_1']$ 同构的中心子代数。此外，对于任意 $x \in \mathcal{O}_1'$，都有 $P_x \cong (\mathbf{GrU}_1^\imath)_x$。因此

$$\mathcal{O}_1' \cap \overline{\mathcal{X}}^0 = \{x \in \mathcal{O}_1' \mid \dim V = \ell^{N_0}, \text{for any } V \in \operatorname{Irr} P_x\}.$$

由命题4.1，只需证明 $\deg P = \ell^{N_0}$。

设 S_P 为与局部化扭多项式代数 P 相关联的斜对称矩阵。回顾第4.3 节中与 $\mathbf{Gr}\, \mathbf{U}_v^\imath$ 相关联的斜对称矩阵 S，以及 $\mathbb{Z}[2^{-1}]$-模 $W = V \oplus V' \oplus {}'P^\theta$。我们将 S_ℓ 视为由 S 诱导的、取值于 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的 W 上的斜对称双线性形式。设 V_P 为由 u_t 张成的 V 的 $\mathbb{Z}[2^{-1}]$- 子模，其中 $1 \le t \le N$ 和 $t \notin \{k_1, \cdots, k_m\}$。记 $W_P = V_P \oplus V' \oplus {}'P^\theta \subset W$。我们将 $S_{P,\ell}$ 视为由 S_P 诱导的、取值于 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 的 W_P 上的斜对称双线性形式。于是 $S_{P,\ell} = S_\ell|_{W_P}$。由此很容易看出

$$\ker S_{P,\ell} = \ker S_\ell \cap W_P = \ell W_P.$$

第二个等式由引理 4.12 以及我们对 W_P 的选择得到。因此，将 $S_{P,\ell}$ 视为线性算子 $S_{P,\ell}\colon W_P \to W_p/\ell W_P$ 时，有 $\operatorname{im} S_{P,\ell} \cong W_P/\ell W_P$。由于 W_P 的秩为 $2N_0$，由命题 4.1 得出 $\deg P = \ell^{N_0}$。证明至此完成。□

对于一般的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $V \in$ 不可约表示 $\mathbf{U}_{v,\ x}^\imath$，我们猜想 ℓ 的维数由包含 x的辛叶的维数所控制。回顾命题6.5，其中给出了 $\mathcal{X}$的辛叶维数公式。

猜想 7.6。设 $x \in \mathcal{X}$ 和 $V \in$ 不可约表示 $\mathbf{U}_{v,\ x}^\imath$。设 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\theta(\varphi(x))$ 为包含 $\varphi(x)$ 的 θ-扭曲共轭类。那么

$$\ell^{(\dim \mathcal{C} - \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{k})/2} \mid \dim V.$$

注7.7。以下是这一猜想已知的特殊情形。

(1) 定理 7.1表明，当 $\mathcal{C}_\theta(\varphi(x))$ 的维数达到最大值时，该猜想成立。(2) 当 θ 是平凡对合时，猜想 7.6 与 [DCKP92中的 De Concini-Kac-Procesi 猜想 6 相同8]。他们的猜想已在 [Kre06、Sev21]中得到证明。

8. Branching laws

本节研究 $\mathbf{U}_v$ 表示限制到 $\mathbf{U}_v^\imath$ 时的分支问题。特别地，我们证明一般的简单 $\mathbf{U}_v^\imath$-模是简单 $\mathbf{U}_v$-模的直和项。

8.1. **相容对**。我们首先回顾[DCPRR05]中的约化迹与相容对的概念。令 R 为一个有限生成的 $\mathbb{C}$-代数。假设 R 是一个整闭整环，且是其中心 Z上的有限模。令 $A \subset Z$ 为一个中心子代数。假设 A 有限生成且整闭。存在一个有限映射 t: 极大谱 $Z \to$ 极大谱 A。对于

$x \in$ 极大谱 A，假设 $t^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{s} h_i y_i$ 是 x 的纤维，按重数计数。定义半单 R-模 $V(x)$ 如下：

$$V(x) = \bigoplus_{i=1}^{s} V(y_i)^{\oplus h_i},$$

其中 $V(y_i)$ 是命题 $R2.5$ 中定义的半单 -模。

我们进一步假设 Z 是一个投射 A-模。定义迹映射 $\mathrm{tr}^{Z/A} : Z \to A$，令 $\mathrm{tr}^{Z/A}(z)$ 等于 A-线性映射 $Z \to Z,\ x \mapsto zx$ 的迹。回忆第 $^{R/Z}$ 2.7 $R \to Z$ 节中的约化迹 tr:。按照 [DCPRR05第 5 节1], ，定义 在 R 上的约化迹 A如下

$$\mathrm{tr}_{R/A} = \mathrm{tr}_{Z/A} \circ \mathrm{tr}_{R/Z} : R \to A,$$

以及 R 在 A上的次数为

$$[R : A] = \deg R \cdot \dim_{Q(A)} Q(Z).$$

注意 $[R\colon\ Z] = \deg R$。根据 [DCPRR05第 5], 节，对于 $x \in$极大谱 A， $V(x)$ 是唯一的$[R : A]$维半单表示，且与迹 tr R 相容$^{R/A}$。

设 $R_1 \subset R_2$ 是两个有限生成的 $\mathbb{C}$-代数，且均为整闭整环；设$A_i \subset R_i$ 是中心子代数，使得 A_i 有限生成，且 R_i 是有限 A_i-模，其中$i = 1$ 为 2。假设 A_1、 A_2 是整闭的，并且中心 $Z($ $R_1)$、 $Z(R_2)$ 分别是 A_1、 A_2 上的投射模。按照 [DCPRR05，定义 5.8 和注 5.9] ，称 $R_1 \subset R_2$ 与 $A_1 \subset A_2$ 相容，如果显然的映射 $R_1 \otimes_{A_1} Q(A_2) \to R_2 \otimes_{A_2} Q(A_2)$ 是单射，其中 $Q(A_i)$ 是 A_i 的分式域。令 π : MaxSpec $A_2 \to$MaxSpec A_1 为由嵌入 $A_1 \subset A_2$ 诱导的态射。

命题 8.1 ([DCPRR05，定理 5.11 和定理 5.12])。 沿用上述记号。假设 $R_1 \subset R_2$ 与 $A_1 \subset A_2$相容。那么存在正整数 r 和一个非空的扎里斯基开子集 Ω ⊂极大谱 A_2，使得下列性质成立。

(1) 有

$$r[R_1 : A_1] = [R_2 : A_2], \qquad r\mathrm{tr}_{R_1/A_1} = \mathrm{tr}_{R_2/A_2} \quad on\ R_1.$$

(2) 限制到 R_1 时，有 $V(x) \cong V(\pi(x))^{\oplus r}$，对任意 $x \in \Omega$。

8.2. **量子对称对的分支定律**。 让我们回到量子对称对的情形。

命题 8.2。 代数 $\mathrm{U}_v^\imath \subset \mathrm{U}_v$ 与 $Z_0^\imath \subset Z_0$相容。此外有

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{U}_v/Z_0} = \ell^{N-N_0+\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}-\mathrm{rank}\,\mathfrak{k}} \mathrm{tr}_{\mathrm{U}_v^\imath/Z_0^\imath}. \tag{8.1}$$

证明。令 $Q(Z_0)$ 和 $Q(Z_0^\imath)$ 分别表示 Z_0 和 $Z_0^\imath$的分式域。由引理 3.10， $Q(Z_0) \otimes_{Z_0} \mathrm{U}_v$ 有一个 Q (Z_0)-基，其中包含 $Q(Z_0^\imath) \otimes_{Z_0^\imath} \mathrm{U}_v^\imath$的一个 $Q(Z_0^\imath)$-基。因此，映射 $Q(Z_0^\imath) \otimes_{Z_0^\imath} \mathrm{U}_v^\imath \to Q(Z_0) \otimes_{Z_0} \mathrm{U}_v$ 是单射，第一个断言得证。为证明第二个断言，众所周知， $[\mathrm{U}_v\colon\ \ Z_0] = \ell^{N+\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}}$ （参见 [DCK90]）。由定理 5.8，有 $[\mathrm{U}_v^\imath\colon\ \ Z_0^\imath] = \ell^{N_0+}$秩$^{\mathfrak{k}}$。于是（8.1）由命题 8.1 (1) 得出。□

定理 8.3. </style}存在 的一个非空扎里斯基开子集 Ω，使得对于任意 $x \in \Omega$ 以及$V \in \mathrm{U}$ 的不可约表示$_{v,\ x}$，限制到 $\mathrm{U}_v^\imath$ 后有

$$V \cong \bigoplus_{W \in \mathrm{Irr}\ \mathrm{U}_{v,\overline{x}}^\imath} W^{\oplus h_{V,W}},$$

对于某个 $h_{V,W}\in\mathbb{N}$，使得

$$\sum_{W\in\operatorname{Irr}\mathrm{U}^{\imath}_{v,\overline{x}}} h_{V,W}=\ell^{N-N_0},\qquad \sum_{V\in\operatorname{Irr}\mathrm{U}_{v,x}} h_{V,W}=\ell^{N-N_0+\operatorname{rank}\mathfrak{g}-\operatorname{rank}\mathfrak{k}}, \tag{8.2}$$

其中 N（分别地，N_0）是 $\mathfrak{g}$（分别地，$\mathfrak{k}$）的正根个数。

证明。令 $Z\subset\mathrm{U}_v$ 为 U_v 的中心。令 $\Lambda:\operatorname{MaxSpec} Z\to\operatorname{MaxSpec} Z_0$ 为由代数嵌入诱导的自然映射。由定理 5.8，Λ 是次数为 $\ell^{\operatorname{rank}\mathfrak{g}}$ 的有限映射，并且存在一个非空的扎里斯基开子集 $\Omega_1\subset G^*$，使得对于 $x\in\Omega_1$，纤维 $\Lambda^{-1}(x)$ 由 $\ell^{\operatorname{rank}\mathfrak{g}}$ 个互不相同的点组成。由命题 2.5 (3)，我们可以选取 Ω_1，使得对于任意 $x\in\Omega_1$ 以及 $V\in\operatorname{Irr}\mathrm{U}_v$，$\dim V=\ell^N$。于是对于任意 $x\in\Omega_1$,，有 $V(x)=\oplus_{i=1}^t V(y_i)$，其中 $t=\ell^{\operatorname{rank}\mathfrak{g}}$,$\{y_1,\cdots,y_t\}=\Lambda^{-1}(x)$，且 $V(y_i)\in\operatorname{Irr}\mathrm{U}_{v,x}$ 的维数为 ℓ^N。类似地，存在一个非空的扎里斯基开子集 $\Omega_2\subset\mathcal{X}$，使得对于任意 $y\in\Omega_2$，有 $V(y)=\oplus_{i=1}^s V(z_i)$，其中 $s=\ell^{\operatorname{rank}\mathfrak{k}}$ 和 $V(z_i)\in\operatorname{Irr}\mathrm{U}^{\imath}_{v,y}$ 是维数为 ℓ^{N_0} 的互不相同的不可约 $\mathrm{U}^{\imath}_v$-模。

令 $\pi:G^*\to\mathcal{X}$ 为自然投影。由命题 8.2 和命题 8.1可知，存在一个非空的扎里斯基开子集 $\Omega_0\subset$ 极大谱 $Z_0\cong G^*$，使得对于任意 $x\in\Omega_0$,，$V(x)\cong V(\pi(x))^{\oplus r}$ 作为 $\mathrm{U}^{\imath}_v$-模成立，其中 $r=\ell^{N+\operatorname{rank}\mathfrak{g}-(N_0+\text{秩 }\mathfrak{k})}$。

令 $\Omega:=\Omega_0\cap\Omega_1\cap\pi^{-1}(\Omega_2)$。根据上述构造，对于任意 $x\in\Omega$，我们有

$$\bigoplus_{V\in\operatorname{Irr}\mathrm{U}_{v,x}} V\cong\bigoplus_{W\in\operatorname{Irr}\mathrm{U}^{\imath}_{v,\overline{x}}} W^{\oplus r},$$

作为 $\mathrm{U}^{\imath}_v$-模。现在，该命题由克鲁尔–施密特定理和维数计数得证。□

注 8.4。当对称对为对角型时，即 $G=G'\times G'$ 和 $\theta:(g_1,g_2)\mapsto(g_2,g_1)$，[DCPRR05的定理 7.7]证明了一个更强的结果，即重数 $h_{V,W}$ 可以取为相等。这对于一般的量子对称对并不成立。例如，当 $\theta=id$时，只有 $h_{V,V}$ 等于 1，其余重数均等于 0。

推论 8.5. 存在一个非空的扎里斯基开子集$\Omega^{\imath}\subset\mathcal{X}$，使得对任意 $x\in\Omega^{\imath}$ 以及$W\in$U 的不可约表示$^{\imath}_{v,x}$ 满足 W 是某个 $V\in\mathrm{U}$ 的不可约表示$_v$ 的直和项（作为$\mathrm{U}^{\imath}_v$-模）。

证明. 取 $\Omega\subset G^*$ 为定理8.3证明中所述的开子集。回忆一下，$\pi:\ G^*\to\mathcal{X}$ 是投影映射。取 $\Omega^{\imath}=\pi(\Omega)$。那么 $\Omega^{\imath}$ 是开集，因为 π 是商映射。对于任意 $x\in\mathcal{X}$和 $W\in\mathrm{U}$ 的不可约表示$^{\imath}_{v,\ x}$取 $x'\in\pi^{-1}(x)\cap\Omega$。由（8.2）的第二个等式，存在 $V\in\mathrm{U}$ 的不可约表示$_{v,\ x'}$使得 $h_{V,\ W}>0$，因此 W 是 V的直和项。证明完毕。□

9. Relative braid group symmetries

仅在本节中，我们假设 Satake 图 $(\mathbb{I}=\mathbb{I}_\bullet\cup\mathbb{I}_\circ,\tau)$ 是准分裂的；也就是说，$\mathbb{I}_\bullet=\emptyset$。根据 [SZ25，定理 3。7], 相对 braid 群对称 $\mathbf{T}_i$ 保持 $\mathrm{U}^{\imath}_{\mathcal{A}'}$ 不变，因此它在 $\mathrm{U}^{\imath}_1$ 和 $\mathrm{U}^{\imath}_v$上诱导代数自同构；我们也将这两个诱导映射记为$\mathbf{T}_i$。本节的目标是证明量子 Frobenius 映射 $\mathrm{Fr}^{\imath}:\mathrm{U}^{\imath}_1\to\mathrm{U}^{\imath}_v$与 $\mathbf{T}_i$的相容性。

9.1. 相容性定理。

定理 9.1. 设 $(\mathbb{I}=\mathbb{I}_\bullet\cup\mathbb{I}_\circ,\tau)$ 是一个准分裂 *Satake* 图。我们有

$$\mathbf{T}_i\circ\mathrm{Fr}^{\imath}=\mathrm{Fr}^{\imath}\circ\mathbf{T}_i.$$

特别地，$Z_0^{\imath}$ 在$\mathbf{T}_i$的作用下是闭的。

证明。 由 [SZ25],诱导映射$\mathbf{T}_i$ 在 U 上$_1^\imath$ 是一个 Poisson自同构。另一方面，由于$\mathbf{T}_i \circ \pi_v^\imath = \pi_v^\imath \circ \mathbf{T}_i$, $\mathbf{T}_i(\ker \pi_v^\imath) \subset \ker \pi_v^\imath$并且我们有

$$\mathbf{T}_i\{x,y\} = \mathbf{T}_i\pi_v^\imath\left(\frac{[\widetilde{x},\widetilde{y}]}{\ell^2(qv^{-1}-1)}\right) = \pi_v^\imath\left(\frac{[\mathbf{T}_i\widetilde{x},\mathbf{T}_i\widetilde{y}]}{\ell^2(qv^{-1}-1)}\right) = \{\mathbf{T}_i x, \mathbf{T}_i y\}, \quad \forall x,y \in Z_0^\imath,$$

其中， $\widetilde{x}$， $\widetilde{y}$是 x， y在 $\pi_v^\imath\colon \mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'} \to \mathbf{U}_v^\imath$ 下的原像。

因此，只需验证

$$\mathbf{T}_i \circ \mathrm{Fr}^\imath(x) = \mathrm{Fr}^\imath \circ \mathbf{T}_i(x), \tag{9.1}$$

当 x 属于 U 的 Poisson生成元集合$_1^\imath$时。回顾 [So24b，引理 34]， $\mathbf{U}_1^\imath$ 作为泊松代数由 B_j， $k_j^{\pm 1}$, $j \in \mathbb{I}_\circ = \mathbb{I}$生成。

根据 [WZ23，命题 63] (另见 [WZ25，命题 213])，我们在 $\mathbf{U}^\imath_{\mathcal{A}'}$

$$\mathbf{T}_i(B_i) = q_i^{a_{i,\tau i}/2-1} B_{\tau_i\tau(i)} k_{\tau_i(i)}^{-1}, \qquad \mathbf{T}_i(B_{\tau i}) = q_i^{a_{i,\tau i}/2-1} B_{\tau_i(i)} k_{\tau_i\tau(i)}^{-1}.$$

因此，在 $\mathbf{U}_v^\imath$ 中有

$$\mathbf{T}_i(B_i^{[\ell]}) = B_{\tau_i\tau(i)}^{[\ell]} k_{\tau_i(i)}^{-\ell}, \qquad \mathbf{T}_i(B_i^{[\ell]}) = B_{\tau_i(i)}^{[\ell]} k_{\tau_i\tau(i)}^{-\ell};$$

在 U 中$_1^\imath$ 我们有 $\mathbf{T}_i(B_i) = B_{\tau_i\tau(i)} \cdot k_{\tau_i\, i\,()}^{-1}$ 并且 $\mathbf{T}_i(B_{\tau i}) = B_{\tau_i(i)} \cdot k_{\tau_i\tau\ (i)}^{-1}$。因此，(9.1) 对$x = B_i$, $B_{\tau i}$成立。也很容易验证，(9.1) 对 $x = k_j^{\pm 1}$成立。

剩下的工作是验证 (9.1) 对 $x = B_j$， $j \neq i$， τi成立。这部分的证明根据$a_{i,\ \tau i}$ 分为 3 种情形，并将在接下来的三个小节中的命题 9.4、9.5、9.6 中给出。 □

9.2. **情形** $a_{i,\ \tau i} = 2$。 在本小节中，固定 $i \in \mathbb{I}_\circ$ 使得 $a_{i,\ \tau i} = 2$; 即 $\tau i = i$。我们对 $m \in \mathbb{N}$ 定义

$$[m]!! = \prod_{r=0}^{\lceil m/2\rceil - 1} [m-2r]. \tag{9.2}$$

引理 9.2. 我们有

$$\sum_{r=1}^{\ell-1} (-1)^r \frac{v_i^r}{(v_i - v_i^{-1})^\ell [r]_i! [\ell-r]_i!} = \frac{1-\ell}{2\ell}$$

证明。根据 [Lus93，§1.3.4],对于一般的 q，我们有

$$\sum_{r=0}^{\ell} (-1)^r q_i^{r(1-\ell)} \begin{bmatrix} \ell \\ r \end{bmatrix}_i = 0,$$

这意味着

$$\frac{1}{(q_i - q_i^{-1})^\ell} \sum_{r=1}^{\ell-1} (-1)^r q_i^{r(1-\ell)} \begin{bmatrix} \ell \\ r \end{bmatrix}_i = \frac{q_i^{\ell-\ell^2}-1}{(1+q_i^{-\ell})(q_i^\ell - 1)} \frac{1}{(q_i - q_i^{-1})^{\ell-1}[\ell-1]_i!}$$

将 $q = v$ 代入上面的恒等式，并注意到 $\frac{q_i^{\ell-\ell^2}-1}{q_i^\ell - 1}$ 代入后变为 $1-\ell$。根据 [DCK90],$(v_i - v_i^{-1})^{\ell-1}[\ell-1]_i! = \ell$。由此可得所需的恒等式。 □

回忆一下元素 $B_i^{[m]}$， $m \in \mathbb{N}$ 它来自第2.5节。

引理 9.3. 对于任意 $a \geq 0$，我们在 $\mathbf{U}_v^\imath$ 中有

$$B_i^{[a]} B_i^{[\ell-a]} = B_i^{[\ell]}, \qquad B_i^{[a]} B_i^{[2\ell-a]} = B_i^{[2\ell]}.$$

证明。By [BS22，引理 4。4] 以及第 2.5节，对于一般的 q 和 $a,\ k\geq 0$，我们在 $\mathbf{U}$ 中有

$$B_i^{[a]}B_i^{[k]}=\sum_{t\geq 0}(-1)^t\frac{[a+k]_i!}{[a+k-2t]_i!}\left(\prod_{m=1}^{t}\frac{[a-2m+2]_i[k-2m+2]_i}{[a+k-2m+1]_i[2m]_i}\right)(q_i-q_i^{-1})^{2t}B_i^{[a+k-2t]}. \tag{9.3}$$

现在令 $q=v$ 为一个本原 ℓ 次单位根。注意，$[\ell]_i!\,[\ell-2t]_i!=0$，除非 $t=0$，并且 $\prod_{m=1}^{t}\frac{[a-2m+2]_i[\ell-a-2m+2]_i}{[\ell-2m+1]_i[2m]_i}$ 在 $q=v$ 处没有任何极点。因此，我们在 $\mathbf{U}_v^\imath$ 中有

$$B_i^{[a]}B_i^{[\ell-a]}=B_i^{[\ell]}.$$

我们证明第二个恒等式。考虑右侧 (9.3) 中 $t>0$ 的系数。注意，$\frac{1}{[2\ell-2t]_i!\prod_{m=1}^{t}[2\ell-2m+1]_i}$ 对任意 $q=v$ 总是在 $t>0$ 处有一个单极点。此外，对于任意 $0\leq a\leq 2\ell,\ t\geq 0$，$\prod_{m=1}^{t}\frac{[a-2m+2]_i[2\ell-a-2m+2]_i}{[2m]_i}$ 在 $q=v$ 处没有任何极点。因此，右侧 (9.3) 中的系数为 0，除非 $t=0$，这意味着 $B_i^{[a]}B_i^{[2\ell-a]}=B_i^{[2\ell]}$。 □

Prop命题 9.4. 设 $j\in\mathbb{I}_\circ$ 满足 $j\neq i$。则有 $\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]})=\mathrm{Fr}^\imath(\mathbf{T}_i(B_j))$。

证明。 根据 [WZ25，定理 3。11] 和 [BS22，命题 4。6],我们在 $\mathbf{U}$ 中有$^\imath_{\mathcal{A}'}$

$$\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]})=\sum_{r+s=-\ell a_{ij}}(-1)^r q_i^r\frac{q_i^{\ell a_{ij}/2}}{(q_i-q_i^{-1})^{-\ell a_{ij}}}\frac{B_i^{[r]}B_j^{[\ell]}B_i^{[s]}}{[r]_i![s]_i!}. \tag{9.4}$$

We 根据 a_{ij}逐案证明此命题。情形 $a_{ij}=0$ 是显然的 l.

设 $a_{ij}=-1$。根据 [SZ25，引理 3。6],我们有 $\mathbf{T}_i(B_j)=\frac{1}{2\epsilon_i}\{B_j,B_i\}-\frac{1}{2}B_j\cdot B_i$。另一方面，回想 [DCK90] 中的结论：$(v_i-v_i^{-1})^{\ell-1}[\ell-1]_i!=\ell$。另请注意，对于一般的 q

$$(q_i-q_i^{-1})[\ell]_i=(q_i^{-\ell}+1)(q_i^{\ell}-1)=(q_i^{-\ell}+1)(q_i-v_i)(q_i^{\ell-1}+q_i^{\ell-2}v_i+\cdots+v_i^{\ell-1}).$$

因此，由 (9.4) 和 (2.15)，我们在 $\mathbf{U}$ 中有$^\imath_v$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]})=&\pi_v^\imath\left(\frac{1}{(q_i-q_i^{-1})^{\ell-1}[\ell-1]_i!(q_i^{-\ell}+1)}\left(\frac{[B_j^{[\ell]},B_i^{[\ell]}]}{\ell(q_iv_i^{-1}-1)}-B_i^{[\ell]}B_j^{[\ell]}\right)\right)\\&+\sum_{r=1}^{\ell-1}(-1)^r v_i^r\frac{B_j^{[\ell]}}{(v_i-v_i^{-1})^\ell}\frac{B_i^{[r]}B_i^{[\ell-r]}}{[r]_i![\ell-r]_i!}\\=&\frac{1}{2\epsilon_i}\{B_j^{[\ell]},B_i^{[\ell]}\}-\frac{1}{2\ell}B_j^{[\ell]}B_i^{[\ell]}+\frac{B_j^{[\ell]}B_i^{[\ell]}}{(v_i-v_i^{-1})^\ell}\sum_{r=1}^{\ell-1}(-1)^r v_i^r\frac{1}{[r]_i![\ell-r]_i!}\\=&\frac{1}{2\epsilon_i}\{B_j^{[\ell]},B_i^{[\ell]}\}-\frac{1}{2\ell}B_j^{[\ell]}B_i^{[\ell]}+\frac{1-\ell}{2\ell}B_j^{[\ell]}B_i^{[\ell]}\\=&\frac{1}{2\epsilon_i}\{B_j^{[\ell]},B_i^{[\ell]}\}-\frac{1}{2}B_j^{[\ell]}B_i^{[\ell]}=\mathrm{Fr}^\imath\big(\mathbf{T}_i(B_j)\big),\end{aligned}$$

其中第三个等式由引理 9.2得出。所需结论对 $a_{ij}=-1$成立。

假设 $a_{ij}=-2$。在这种情形下，$q_i=q,\ q_j=q^2$。根据 [SZ25引理 3。6], 我们有$\mathbf{T}_i(B_j)=\frac{1}{8}\{\{B_j,B_i\},B_i\}-\frac{1}{4}\{B_i\cdot B_j,B_i\}+B_j$。另一方面，注意到 $\frac{[2\ell]!}{([\ell]!)^2}$在 $q=v$处专化为 2；参见 [Lus93引理 34.1。2]。由（9.3）以及与引理9.3的证明中类似的论证，我们有

$$\pi_v^\imath\left(\frac{(B_i^{[\ell]})^2-B_i^{[2\ell]}}{(q-q^{-1})^{2\ell}[2\ell]!}\right)=\pi_v^\imath\left((-1)^\ell\frac{([\ell]!!\cdot[\ell-2]!!)^2}{[2\ell-1]!!\cdot[2\ell]!!}\right)=-\frac{1}{2}. \tag{9.5}$$

此外 r，由（9.3），我们有 $B_i^{[\ell]}B_i^{[r]} = B_i^{[\ell+r]}$ 对于 $0 \le r \le \ell$ 在 U 中$^\imath_v$。因此，我们在 U 中有$^\imath_v$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]}) =& \pi_v^\imath \sum_{r+s=2\ell} (-1)^r q_i^r \frac{q_i^\ell}{(q_i - q_i^{-1})^{2\ell}} \frac{B_i^{[r]} B_j^{[\ell]} B_i^{[s]}}{[r]_i![s]_i!}. \\
=& \pi_v^\imath \left(\frac{[[B_j^{[\ell]}, B_i^{[\ell]}], B_i^{[\ell]}]}{2(q-q^{-1})^{2\ell}([\ell]!)^2} \right) + \pi_v^\imath \left(B_j^{[\ell]} \frac{-(B_i^{[\ell]})^2 + B_i^{[2\ell]}}{(q-q^{-1})^{2\ell}[2\ell]!} + q^{2\ell} \frac{-(B_i^{[\ell]})^2 + B_i^{[2\ell]}}{(q-q^{-1})^{2\ell}[2\ell]!} B_j^{[\ell]} \right) \\
& + \pi_v^\imath \left(\frac{(q^{2\ell}-1)(B_i^{[\ell]})^2 B_j^{[\ell]} - 2(q^\ell - 1) B_i^{[\ell]} B_j^{[\ell]} B_i^{[\ell]}}{2(q-q^{-1})^\ell ([\ell]!)^2} \right) \\
& + \sum_{r=1}^{\ell-1} (-1)^r \frac{v_i^r}{(v_i - v_i^{-1})^\ell [r]_i! [\ell - r]_i!} \pi_v^\imath \left(\frac{B_i^{[r]} B_j^{[\ell]} B_i^{[2\ell-r]} - B_i^{[\ell+r]} B_j^{[\ell]} B_i^{[\ell-r]}}{(q_i - q_i^{-1})^\ell [\ell]!} \right) \\
=& \frac{1}{8} \Big\{ \{B_j^{[\ell]}, B_j^{[\ell]}\}, B_j^{[\ell]} \Big\} + B_j^{[\ell]} - \frac{1}{4\ell} \{B_i^{[\ell]} B_j^{[\ell]}, B_i^{[\ell]}\} + \frac{1-\ell}{4\ell} \{B_i^{[\ell]} B_j^{[\ell]}, B_i^{[\ell]}\} \\
=& \mathrm{Fr}^\imath \big(\mathbf{T}_i(\underline{B_j}) \big)
\end{aligned}$$

其中第三个等号由引理 9.2推出。对于 $a_{ij} = -2$，所需结论得证。情形 $a_{ij} = -3$ 也可类似验证。细节从略。□

9.3. 情形 $a_{i,\tau i} = 0$. 在本小节中，固定 $i \in \mathbb{I}_\circ$ 使得 $a_{i,\tau i} = 0_\circ$ 在此情形下，$q_i = q_\circ$

命题 9.5. 设 $j \in \mathbb{I}_\circ$ 使得 $j \ne i, \tau i$。则有 $\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]}) = \mathrm{Fr}^\imath(\mathbf{T}_i(B_j))$。

证明。若 $c_{ij} = c_{\tau i,j} = 0$，则结论显然成立。若 $c_{\tau i,j} = 0, c_{ij} = -1$，则 $\mathbf{T}_i(B_j) = \frac{1}{2}\{\underline{B_j}, \underline{B_i}\} - \frac{1}{2}\underline{B_j} \cdot \underline{B_i}$，并且可以采用命题 9.4证明中的相同论证，来证明 $\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]}) = \mathrm{Fr}^\imath(\mathbf{T}_i(B_j))$。对于 $c_{ij} = 0, c_{\tau i,j} = -1$ 的情形也类似。

剩下的需要考虑非平凡情形 $c_{ij} = c_{\tau i,\ j} = -1$。根据 [SZ25，引理 3。6]，我们有

$$\mathbf{T}_i(\underline{B_j}) = \frac{1}{4}\{\{\underline{B_j}, \underline{B_{\tau i}}\}, \underline{B_i}\} - \frac{1}{4}\underline{B_i}\{\underline{B_j}, \underline{B_{\tau i}}\} - \frac{1}{4}\{\underline{B_{\tau i}} \cdot \underline{B_j}, \underline{B_i}\} + \frac{1}{4}\underline{B_i} \cdot \underline{B_{\tau i}} \cdot \underline{B_j} + \underline{k_i}^{-1} \cdot \underline{B_j}.$$

另一方面，根据 [WZ25，定理 4。13]，对一般的 q

$$\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]}) = \sum_{u=0}^{\ell} \sum_{r=0}^{\ell-u} \sum_{s=0}^{\ell-u} (-1)^{r+s} q^{r(-u+1)+s(u+1)} k_i^{-u} \frac{q^{-\ell+u} B_i^{[r]} B_{\tau i}^{[s]} B_j^{[\ell]} B_{\tau i}^{[\ell-s-u]} B_i^{[\ell-r-u]}}{(q-q^{-1})^{2\ell-2u}[r]![s]![\ell-r-u]![\ell-s-u]!}. \tag{9.6}$$

现在我们将 q 特化为 $v_\circ$ 注意，对于任意 $0 < u < \ell$，在 U 中我们有 $^\imath_v$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{\ell-u} \sum_{s=0}^{\ell-u} (-1)^{r+s} v^{r(-u+1)+s(u+1)} \frac{B_i^{[r]} B_{\tau i}^{[s]} B_j^{[\ell]} B_{\tau i}^{[\ell-s-u]} B_i^{[\ell-r-u]}}{(v-v^{-1})^{2\ell-2u}[r]![s]![\ell-r-u]![\ell-s-u]!} \\
=& \frac{1}{([\ell-u]!)^2} \sum_{r=0}^{\ell-u} (-1)^r v^{r(-u+1)} \Big(\sum_{s=0}^{\ell-u} (-1)^s v^{s(u+1)} \begin{bmatrix} \ell-u \\ s \end{bmatrix} \Big) \begin{bmatrix} \ell-u \\ r \end{bmatrix} \frac{B_j^{[\ell]} B_i^{[r]} B_{\tau i}^{[\ell-u]} B_i^{[\ell-r-u]}}{(v-v^{-1})^{2\ell-2u}} \\
=& 0,
\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 q-二项式恒等式推出，见 [Lus93，§1.3。4]。因此，我们在 U 中有$^\imath_v$

$$\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]}) = \pi_v^\imath \left(\sum_{r=0}^{\ell} \sum_{s=0}^{\ell} (-1)^{r+s} q^{r+s} \frac{q^{-\ell} B_i^{[r]} B_{\tau i}^{[s]} B_j^{[\ell]} B_{\tau i}^{[\ell-s]} B_i^{[\ell-r]}}{(q-q^{-1})^{2\ell}[r]![s]![\ell-r]![\ell-s]!} \right) + k_i^{-\ell} B_j^{[\ell]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi_v^\imath\left(\frac{B_j^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_i^{[\ell]} - q^\ell B_i^{[\ell]}B_j^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]} - q^\ell B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]}B_i^{[\ell]} + q^{2\ell}B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]}}{(q-q^{-1})^{2\ell}\big([\ell]!\big)^2}\right)\\
&\quad + \pi_v^\imath\left(\sum_{r=1}^{\ell-1}(-1)^r q^r \frac{B_i^{[r]}B_j^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_i^{[\ell-r]} - q^\ell B_i^{[r]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]}B_i^{[\ell-r]}}{(q-q^{-1})^{2\ell}[r]![\ell-r]![\ell]!}\right)\\
&\quad + \pi_v^\imath\left(\sum_{s=0}^{\ell}(-1)^s q^s \frac{B_{\tau i}^{[s]}B_j^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell-s]}B_i^{[\ell]} - q^\ell B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[s]}B_j^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell-s]}}{(q-q^{-1})^{2\ell}[\ell]![s]![\ell-s]!}\right)\\
&\quad + \sum_{r=1}^{\ell-1}\sum_{s=1}^{\ell-1}(-1)^{r+s}v^{r+s}\frac{B_i^{[r]}B_{\tau i}^{[s]}B_j^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell-s]}B_i^{[\ell-r]}}{(v-v^{-1})^{2\ell}[r]![s]![\ell-r]![\ell-s]!} + k_i^{-\ell}B_j^{[\ell]}\\
&= \frac{1}{4}\big\{\{B_j^{[\ell]},B_{\tau i}^{[\ell]}\},B_i^{[\ell]}\big\} - \frac{1}{4\ell}B_i^{[\ell]}\{B_j^{[\ell]},B_{\tau i}^{[\ell]}\} - \frac{1}{4\ell}\{B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]},B_i^{[\ell]}\} + \frac{1}{4\ell^2}B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]}\\
&\quad + \frac{1-\ell}{4\ell}B_i^{[\ell]}\{B_j^{[\ell]},B_{\tau i}^{[\ell]}\} - \frac{1-\ell}{4\ell^2}B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]} + \frac{1-\ell}{4\ell}\{B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]},B_i^{[\ell]}\} - \frac{1-\ell}{4\ell^2}B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]}\\
&\quad + \frac{(1-\ell)^2}{4\ell^2}B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]} + k_i^{-\ell}B_j^{[\ell]}\\
&= \mathrm{Fr}^\imath(\mathbf{T}_i(\underline{B}_j)),
\end{aligned}
$$

第三个等式中用到了引理9.2。证明完毕。 □

9.4. 情形 $a_{i,\ \tau i}=-1$。 在本小节中，固定 $i\in\mathbb{I}_\circ$ 使得 $a_{i,\ \tau i}=-1$。在此情形下， $q_i=q_\circ$

命题 9.6。 设 $j\in\mathbb{I}_\circ$ 使得 $j\neq i,\tau i$。那么我们有 $\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]})=\mathrm{Fr}^\imath(\mathbf{T}_i(B_j))$。

证明。 当 $a_{i,\ \tau i}=-1$时，涉及顶点 i， j的非平凡秩 2 情形只有 $a_{ij}=-1$， $a_{\tau i,\ j}=0$和 $a_{\tau i,\ j}=-1$， $a_{i,\ j}=0$。只需考虑第一种情形 $a_{ij}=-1$， $a_{\tau i,\ j}=0$。

根据 [SZ25，引理 3。6], 我们有

$$
\mathbf{T}_i(\underline{B}_j)=\frac{1}{4}\big\{\{\underline{B}_j,\underline{B}_i\},\underline{B}_{\tau i}\big\} - \frac{1}{4}\{\underline{B}_i\cdot\underline{B}_j,\underline{B}_{\tau i}\} - \frac{1}{4}\underline{B}_{\tau i}\{\underline{B}_j,\underline{B}_i\} + \frac{1}{4}\underline{B}_i\cdot\underline{B}_{\tau i}\cdot\underline{B}_j + \underline{k}_i\cdot\underline{B}_j.
$$

另一方面，根据 [WZ25，定理 6。17], 我们有

$$
\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]})=\sum_{u=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell-u}\sum_{r=0}^{\ell-u}(-1)^{r+s}q^{r(u+1)+s(-2u+1)-\frac{u^2}{2}}k_i^u\frac{q^{-\ell+u}B_{\tau i}^{[s]}B_i^{[r]}B_j^{[\ell]}B_i^{[\ell-u-r]}B_{\tau i}^{[\ell-u-s]}}{(q-q^{-1})^{2\ell-2u}[s]![r]![\ell-u-r]![\ell-u-s]!}. \tag{9.7}
$$

与命题 9.5 的证明类似，对于任意固定的 $0<u<\ell$，右端的被加项在 $\mathbf{U}_v^\imath$ 中为 0。因此，我们在 $\mathbf{U}_v^\imath$ 中有，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_i(B_j^{[\ell]}) &= \pi_v^\imath\left(\sum_{s=0}^{\ell}\sum_{r=0}^{\ell}(-1)^{r+s}q^{r+s}\frac{B_{\tau i}^{[s]}B_i^{[r]}B_j^{[\ell]}B_i^{[\ell-r]}B_{\tau i}^{[\ell-s]}}{(q-q^{-1})^{2\ell}[s]![r]![\ell-r]![\ell-s]!}\right) + k_i^\ell B_j^{[\ell]}\\
&= \frac{1}{4}\big\{\{B_j^{[\ell]},B_i^{[\ell]}\},B_{\tau i}^{[\ell]}\big\} - \frac{1}{4\ell}\{B_i^{[\ell]}B_j^{[\ell]},B_{\tau i}^{[\ell]}\} - \frac{1}{4\ell}B_{\tau i}^{[\ell]}\{B_j^{[\ell]},B_i^{[\ell]}\} + \frac{1}{4\ell^2}B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]}\\
&\quad + \frac{1-\ell}{4\ell}\{B_i^{[\ell]}B_j^{[\ell]},B_{\tau i}^{[\ell]}\} - \frac{1-\ell}{4\ell^2}B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]} + \frac{1-\ell}{4\ell}B_{\tau i}^{[\ell]}\{B_j^{[\ell]},B_i^{[\ell]}\} - \frac{1-\ell}{4\ell^2}B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]}\\
&\quad + \frac{(1-\ell)^2}{4\ell^2}B_i^{[\ell]}B_{\tau i}^{[\ell]}B_j^{[\ell]} + k_i^{-\ell}B_j^{[\ell]}\\
&= \mathrm{Fr}^\imath(\mathbf{T}_i(\underline{B}_j)).
\end{aligned}
$$

(这里涉及的计算本质上与命题 9.5 的证明相同。)证明完成。 □

References

[ABG04] S. Arkhipov、R. Bezrukavnikov 和 V. Ginzburg, *Quantum groups the loop Grassmannian and the Springer resolution*, 《美国数学学会杂志》（），–。[AJS94] H. H. Andersen、J. C. Jantzen、W. Soergel, *Representations of quantum groups at a p-th root of unity and semisimple groups in characteristic p: independence of p*, **220** 1994, 《Asterisque》（）。

[21] *Quantum symmetric pairs at roots of* 1 **380** 2021 107576, BS H. Bao 和 T.

[22] *Symmetric subgroup schemes Frobenius splittings*

Sale, , 《数学进展》（），BS H. Bao 和 J. Song, , 《》, *and quantum symmetric pairs*arXiv:2212.13426[BW18a] H. Bao 和 W. Wang, *A new approach to Kazhdan-Lusztig theory of type B via quantum symmetric pairs*, 《Asterisque》402，2018，vii+134页。[BW18b] H. Bao 和 W. Wang, *Canonical bases arising from quantum symmetric pairs*, 《数学发明》213(3) (2018)，1099–1177。[BW21] H. Bao 和 W. Wang, *Canonical bases arising from quantum symmetric pairs of Kac-Moody type*, 《组合数学》157 (2021)，1507–1537。[BeW18] C. Berman 和 W. Wang, *Formulae of ı-divided powers in* $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$, 《纯粹与应用代数杂志》222 (2018)，2667–2702。[BG03] K. A. Brown 和 I. G. Gordon, *Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory*, 《莱茵与应用数学杂志》559 (2003)，193–216。[BK19] M. Balagović 和 S. Kolb, *Universal K-matrix for quantum symmetric pairs*, 《莱茵与应用数学杂志》747 (2019)，299–353。[CLW21] X. Chen、M. Lu 和 W. Wang, *A Serre presentation for the ıquantum groups*, 《变换群》26 (2021)，827–857。[DCK90] C. De Concini 和 V. G. Kac, *Representations of quantum groups at roots of 1*, 载于：Progress in Mathematics 92, Birkhäuser Boston，1990，471–506。[DCKP92] C. De Concini、V. G. Kac 和 C. Procesi, *Quantum coadjoint action*, 《美国数学学会杂志》5 (1992)，第1期，151–189。[DCKP93a] C. De Concini、V. G. Kac 和 C. Procesi, *Some remarkable degenerations of quantum groups*, 《数学物理通讯》157 (1993)，第2期，405–427。[DCKP93b] C. De Concini、V. G. Kac 和 C. Procesi, *Some quantum analogs of solvable Lie groups*, arXiv:hep-th/9308138。[DCP93] C. De Concini 和 C. Procesi, *Quantum groups*, D-模、表示论与量子群：在 Centro Internazionale Matematico Estivo（C.I.M.E.）第2届会议上所作讲座，威尼斯，意大利，六月 12 20, 1992 – DCPRR C. De

[05] Concini、C. Procesi、N. Reshetikhin 和 M. Rosso, *Hopf algebras with trace and representations*, 《数学发明》**161** 2005 1, 1 44 ( ), 第 – 期 DK L. Dobson 和 S. Kolb,

[19] *Factorisation of quasi K-matrices for quantum symmetric pairs*, 《精选数学》（新系列）25 (2019)，论文编号63，53页。[GK93] V. Ginzburg、S. Kumar, *Cohomology of quantum groups at roots of unity*, 《杜克数学杂志》69 (1993)，第1期，179–198。[KL08] S. Kolb 和 G. Letzter, *The center of quantum symmetric pair coideal subalgebras*, 《表示论》12 (2008)，294–326。[Ko14] S. Kolb, *Quantum symmetric Kac-Moody pairs*, 《数学进展》267 (2014)，395–469。[Ko20] S. Kolb, *Braided module categories via quantum symmetric pairs*, 《伦敦数学学会会刊》（第3辑）121 (2020)，第1期，1–31。[06] *Proof of the De Concini-Kac-Procesi conjecture* 0611236 1 Kre K. Kremnizer, ,

[02] *Coideal subalgebras and quantum symmetric pairs*

《arXiv: v Let G. Letzter, , 《霍普夫代数的新方向》（剑桥），MSRI 出版物，43 (2002)，剑桥大学出版社，117–166。[Lu14] J.-H. Lu, *On the T-leaves and the ranks of a Poisson structure on twisted conjugacy classes*, 《荷兰数学学会学报》（新系列）25 (2014)，第5期，1102–1121。[Lus90] G. Lusztig, *Finite-dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebra*, 《美国数学学会杂志》3 (1990)，257–296。[Lus93] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, 《现代Birkhäuser经典丛书》，1993年版重印，Birkhäuser，波士顿，2010。

[Lus03] G. Lusztig, *Hecke algebras with unequal parameters*, CRM专著丛书18, 美国数学学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2003。[LY08] J.-H. Lu 和 M. T. Yakimov, *Group orbits and regular partitions of Poisson manifolds*, 《数学物理通讯》283 (2008), 第3期, 729–748。[LYZ25] M. Lu、R. Yang 和 W. Zhang *PBW basis for ıquantum groups*, 《代数杂志》684, 441–478。[Sa20] T. Sale, *Quantum Symmetric Pairs and Quantum Supergroups at Roots of 1*, 博士论文, 弗吉尼亚大学数学系, 2020。[Sev21] A. Sevostyanov, *Q-W-algebras*,
Zhelobenko operators and a proof of De Concini-Kac-Procesi conjecture, arXiv:2102.03208
[24] *Quantum duality principle and quantum symmetric pairs* 2403 05167 So b J. Song, , arXiv: 。
[83] *Some results on algebraic groups with involutions*
Spr T. A. Springer, , 《载于 *Algebraic groups and related topics*
(Kyoto/Nagoya, 1983) 525 543, , –, 《纯粹数学
高级研究》[Spr06] T. A. Springer, *Twisted conjugacy in simply connected groups*, 《变换群》11 (2006), 第3期, 539–545。[Spr09] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, 第2版, 《现代Birkhäuser经典丛书》, Birkhäuser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 2009。[Ste65] R. Steinberg, *Regular elements of semisimple algebraic groups*, 《高等科学研究所数学出版物》第25期（1965）, 49–80。[SZ25] J. Song 和 W. Zhang, *Braid group symmetries on Poisson algebras arising from quantum symmetric pairs* 34 2507 , 页数, arXiv: 。
09456
[23] *Quantum symmetric pairs*Wa W. Wang, , 《国际数学家大会论文集》第4卷（2023）, 3080–3102。
EMS Press, 柏林。[WZ23] W. Wang 和 W. Zhang,
An intrinsic approach to relative braid group symmetries on ıquantum groups, 《伦敦数学学会会刊》127 (2023), 1338–1423。[WZ25] W. Wang 和 W. Zhang, *Relative braid group symmetries on modified ıquantum groups and their modules*, arXiv:2508.12041[Wat21] H. Watanabe, *Classical weight modules over ıquantum groups*, 《代数杂志》578 (2021), 241–302。[Wat25] H. Watanabe, *Integrable modules over quantum symmetric pair coideal subalgebras*, 《伦敦数学学会数学研究所杂志》24 (2025), 第6期, 2257–2282。[Wen20] H. Wenzl, *On representations of $U_q'\mathfrak{so}_n$*, 《美国数学学会汇刊》373 (2020), 第5期, 3295–3322。

Department of Mathematics The Hong Kong University of Science and Technology Clear Wa- , ,
ter Bay Hong Kong SAR P.R.China
, ,*Email address*:jfsong@ust.hk

Department of Mathematics and New Cornerstone Science Laboratory The University of Hong , ,
Kong Pokfulam Hong Kong SAR P.R.China
, ,*Email address*:mathzwn@hku.hk