arXiv:2601.19840v1 [math.GT] 27 Jan 2026

Sweedler代数上的 XC-结构所产生的纽结不变量都是平凡的

JORGE BECERRA

摘要。XC-代数是定义带框架的定向纽结不变量所需的最小代数结构，并将 Lawrence 从带状Hopf代数得到的不变量加以推广。本文证明，Sweedler代数上任何 XC-结构所产生的纽结不变量完全由纽结的框架决定。此外，我们还给出了 Sweedler代数上若干显式的 XC-结构族，它们并非源自带状Hopf代数。

目录

1. 引言2. 交换 XC-代数 3. Sweedler代数 附录 A. 计算 参考文献 1 3 5 11 11

1. 引言

量子拓扑学中有一种广为人知的说法：带状*Hopf*代数能够以两种不同的方式导出纽结不变量：一种是利用其表示论，通过著名的*Reshetikhin-Turaev*函子 [RT90], ；另一种是利用代数本身，通过 Lawrence 的普适不变量 [Law89、Hab06]。众所周知，后者涵盖了 Reshetikhin-Turaev不变量这一族，而且它还是迄今为止最强的多项式时间纽结多项式不变量之一的构造所依据的不变量 [BV19、BV21、Bec24a]。

然而，事实上，要沿用普适不变量的构造，为带框定向长结构造同痕不变量，只需一种弱得多的代数结构，即*XC*-代数 [Bec24b、Bec25a、BH25、Bec25b、Bos25]。我们在此回顾其定义：给定一个 A 定义在某个环上 $\Bbbk$的代数，*XC*-结构是 A 上两个可逆元的选取

$$R \in A \otimes A \qquad , \qquad \kappa \in A$$

满足

(XC0) $R^{\pm 1} = (\kappa \otimes \kappa) \cdot R^{\pm 1} \cdot (\kappa^{-1} \otimes \kappa^{-1})$,

(XC1f) $\sum_i \beta_i \kappa \alpha_i = \sum_i \alpha_i \kappa^{-1} \beta_i$,

日期：2026年1月28日。2020年数学主题分类。16T05、16T30、18M15、57K10、57K16。关键词和短语。XC-代数、Sweedler代数、纽结不变量。1

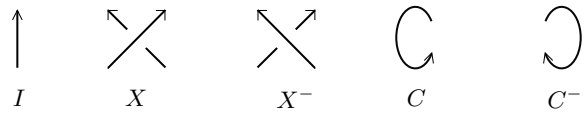
(XC2c) $1 \otimes \kappa^{-1} = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \otimes \bar{\beta}_j \kappa^{-1} \beta_i$,

(XC2d) $\kappa \otimes 1 = \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \kappa \alpha_j \otimes \beta_j \bar{\beta}_i$,

(XC3) $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$,

其中我们设 $R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$ 和 $R^{-1} = \sum_i \bar{\alpha}_i \otimes \bar{\beta}_i$。元素 $\nu := \sum_i \beta_i \kappa \alpha_i$ 由（XC1f）给出，称为经典缎带元的逆元。三元组（A，R，κ）由一个 $\Bbbk$-代数 A 及其上的一个 XC-结构组成，称为*XC*-代数。带状Hopf代数及其有限维表示的自同态代数是 XC-代数的自然例子 [Bec25a]。

设 K 是立方体中的一个（有向、带框架的长）纽结。我们感兴趣的是 K 的旋转图，也就是说，这种图具有这样的性质：每个点都有一个邻域，其中的图恰好呈现为以下某个基本构件：



(1.1)

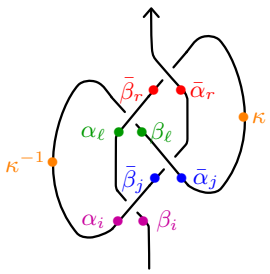
根据 [Bec25a，引理 3。2]，任意纽结都有旋转图。此外，通过考虑一组旋转*Reide meister*移动，我们始终可以保持在旋转纽结图的范畴内，参见 [BH25] 以了解相关论述。

现在回顾一下给定 XC-代数 $(A,\ R,\ \kappa)$ 时普适不变量的构造。给定一个纽结 K，考虑它的一个旋转图 D，并用代表元素 $\mathbf{1}$，$R^{\pm 1}$，$\kappa^{\mp 1}$ 的珠子装饰上文中的基本构件 I，$X^{\pm}$，$C^{\pm}$，如下所示：



(1.2)

然后令 $\mathfrak{Z}_A(K) \in A$ 为沿着图从右向左、按照纽结的方向将珠子相乘所得的元素（加入求和以计入 R 的不同副本）。例如，对于八字纽结 4_1，我们有



$$\mathfrak{Z}_A(4_1) = \sum_{i,j,\ell,r} \bar{\alpha}_r\ \bar{\beta}_j\ \alpha_i\ \kappa^{-1}\ \beta_\ell\ \bar{\alpha}_j\ \kappa\ \bar{\beta}_r\ \alpha_\ell\ \beta_i\ .$$

XC-代数之所以是使用 Lawrence 构造产生纽结不变量所需的最小代数结构，原因很简单：公理 (XC0)–(XC3) 与 R 和 κ 的可逆性，恰好是通过 $\mathfrak{Z}_A$ 对 [BH25 第 4 节中所展示的旋转Reidemeister移动的代数对应。3]注意，$\mathfrak{Z}_A(\ ) = \nu$。



本文旨在研究 Sweedler四维复代数上的 XC-结构

$$SW := \langle s, w | s^2 = 1,\ w^2 = 0,\ sw = -ws \rangle,$$

以及由它们导出的普适不变量。 SW 上的 XC-结构由一个含 40 个未知数的非线性方程组的解给出。我们展示了若干 SW 上的多参数 XC-结构族，它们并非源自带状 Hopf 代数；也就是说，它们并非来自 SW 上的带状 Hopf 代数结构，也不是来自另一带状 Hopf 代数的自同态代数，见例3.2– 3.5。

标准带状 Hopf代数结构在 R上的普适 SW-矩阵是三角的，因此产生平凡的纽结不变量，见引理 3.1 ，其中给出了这一事实的一般证明。然而， SW 上的大多数 XC-结构都不是三角的。本文的主要结果是，令人惊讶的是，任意 Sweeedler代数上的 XC-结构都会产生平凡不变量:

定理1.1 (定理3.6)。*Sweeedler*代数上的任意 *XC*-代数结构都会产生一个仅取决于框架的带框纽结不变量:

$$\mathfrak{Z}_{SW}(K) = \nu^{\mathrm{fr}(K)}.$$

特别是，对于任意零框架结，这个不变量都是平凡的。

也就是说，尽管 SW 是非交换的，但赋予 SW 任意 XC-结构后，其普适不变量的表现如同它处于交换代数中；参见命题 2.1。由此立即可知，赋予SW 任意带状Hopf代数结构，以及由这类结构之一的表示得到的任意 Reshetikhin-Turaev 不变量，也都会给出平凡的纽结不变量。

致谢。作者谨此感谢 Dror Bar-Natan 和 Roland van der Veen 开发并提供用于计算通用纽结不变量的 Mathematica 实现。作者获得了勃艮第数学研究所（IMB）ARN项目CPJ编号ANR-22-CPJ1-0001-0的资助。IMB 获得 EIPHI研究生院（合同编号 ANR-17-EURE-0002）的支持。

2. 交换 XC-代数

我们先给出交换代数上 XC-结构的分类结果，并描述每种结构对应的普适不变量。这样做很有启发性，因为正如我们在引言中所述，本文的主要目的是证明：赋予 Sweedler代数任意 XC-结构后，其普适不变量的表现如同它处于交换代数中。

命题 2.1。 设 A 是交换代数， $R \in A \otimes A$ 是任意可逆元， $\kappa \in A$ 是单位根的平方根。那么三元组 (A, R, κ) 是一个 *XC*-代数。此外， A 上的任意 *XC*-结构都具有这种形式。

证明。 首先注意到 κ 可逆，其逆为 $\kappa^{-1} = \kappa$。公理 (XC0)–(XC2d) 自动成立，例如对于最后一个公理，我们有

$$\sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \kappa \alpha_j \otimes \beta_j \bar{\beta}_i = (\kappa \otimes 1) \left(\sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \alpha_j \otimes \bar{\beta}_i \beta_j \right) = (\kappa \otimes 1) R^{-1} R = \kappa \otimes 1.$$

最后，对于 Yang-Baxter 方程 (XC3)

$$R_{12}R_{13}R_{23} = \sum_{i,j,k} \alpha_i\alpha_j \otimes \beta_i\alpha_k \otimes \beta_j\beta_k = \sum_{i,j,k} \alpha_j\alpha_i \otimes \alpha_k\beta_i \otimes \beta_k\beta_j$$
$$= \sum_{i,j,k} \alpha_j\alpha_k \otimes \alpha_i\beta_k \otimes \beta_i\beta_j = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

对于命题的最后一部分，我们先考虑元素 $\theta := \sum_i \alpha_i\beta_i$。我们断言， θ 可逆，其逆为 $u := \sum_i \bar{\alpha}_i\beta_i$；事实上，这直接由方程 $RR^{-1} = 1 \otimes 1 = R^{-1}R$ 得出。公理 (XC1f) 随即推出

$$\kappa\theta = \sum_i \beta_i\kappa\alpha_i = \sum_i \alpha_i\kappa^{-1}\beta_i = \kappa^{-1}\theta,$$

也就是说， κ 是单位根的平方根。 □

注 2.2。若 A 是交换带状 Hopf 代数，则证明中的元素 u 恰好是该结构的 Drinfeld 元 $u := \sum_i S(\beta_i)\alpha_i$。事实上，由于 A 是交换的，反 antipode S 是一个对合，因此

$$\sum_i S(\beta_i)\alpha_i = \sum_i S^{-1}(\beta_i)\alpha_i = \sum_i \bar{\beta}_i\bar{\alpha}_i = \sum_i \bar{\alpha}_i\bar{\beta}_i$$

利用众所周知的等式 $(\mathrm{Id} \otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$。

对于交换 XC-代数，普适不变量的作用非常有限。我们认为，这一点在带状 Hopf 代数领域对专家而言已是众所周知的，但由于缺乏相关参考资料，我们仍给出证明。

定理 2.3。设 (A, R, κ) 是一个交换 *XC*-代数。那么，对于任意（长）纽结 K，其普适不变量 $\mathfrak{Z}_A(K)$ 完全由其框架 $\mathrm{fr}(K)$确定；更确切地说，有

$$\mathfrak{Z}_A(K) = \nu^{\mathrm{fr}(K)}.$$

特别地，对于任意零框架结，普适不变量都是平凡的。

证明。设 D 是 K的一个旋转图。回顾 [Bec25a]， $rot(D)$ 的旋转数是 D 的正向整周旋转次数C 与反向整周旋转次数 C^-之差。如果 $\theta = \sum_i \alpha_i\beta_i$ 和 $u = \sum_i \bar{\alpha}_i\beta_i$ 如上所述，且$n_\pm$ 表示图中正交叉和负交叉的数量，则有以下等式，我们将在下面解释：

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}_A(K) &= \kappa^{-rot(D)} \cdot \theta^{n_+} \cdot u^{n_-} \\ &= \kappa^{-rot(D)} \cdot \theta^{wr(D)} \\ &= \kappa^{2r+wr(D)} \cdot \theta^{wr(D)} \\ &= \kappa^{wr(D)} \cdot \theta^{wr(D)} \\ &= \nu^{\mathrm{fr}(K)}.\end{aligned}$$

第一个等式源于 A的交换性，第二个等式只是扭率的定义 $wr(D) = n_+ - n_-$ 以及 $u = \theta^{-1}$这一事实，正如命题2.1的证明中所解释的，第三个等式是 [Bec25a推论 37]所述，即和 $rot(D) + w(D)$ 总是偶数；第四个等式源于 κ 是单位根的平方根这一事实；第五个等式则源于这样一个事实： $\nu = \theta\kappa$ 图示的扭率恰好就是其所表示纽结的框架。□

3. Sweedler代数

令 SW 为*Sweedler*代数，即具有两个生成元 s, w 且满足以下关系的四维复代数

$$s^2 = 1 \quad , \quad w^2 = 0 \quad , \quad sw = -ws.$$

这是最小的非半单 $\mathbb{C}$代数，它具有 Hopf代数结构（事实上，这样的 Hopf代数结构在同构意义下是唯一的）。

为方便起见，记 $p := (1-s)/2$。众所周知， SW 是一个非交换、非余交换的带状 Hopf代数，其具有如下的普适 R-矩阵

$$R_\lambda = 1\otimes 1 - 2p\otimes p + \lambda(w\otimes w + 2wp\otimes wp - 2w\otimes wp) \quad , \quad \lambda\in\mathbb{C}$$

和平衡元 $\kappa := s$ （这是一族单参数带状结构），例如参见 [Maj95，例 2.1。7] 或 [Bec24b，例 2.4。5]。这个普适 R-矩阵在以下意义下是三角的 $R^{-1} = R_{21}$。众所周知，由此结构构造出的普适不变量，以及任意有限维表示的 Reshetikhin-Turaev 不变量 SW 都会产生仅依赖于框架的弱不变量。这一点可直接由 XC-代数情形下 [Bec25a] 的结果和下面的引理得出。为此，我们称 XC-代数 (A, R, κ) 为三角的，若 $R^{-1} = R_{21}$。

引理 3.1。设 (A, R, κ) 是一个三角的 *XC*-代数。那么对于任意（长）纽结 K，其普适不变量 $\mathfrak{Z}_A(K)$ 完全由 $r := \mathrm{fr}(K)$（模 2）确定：有

$$\mathfrak{Z}_A(K) = \nu^r.$$

特别地，对于任意零框架结，普适不变量都是平凡的。

证明。条件 $\sum_i \bar{\alpha}_i\otimes\beta_i = \sum_i \beta\otimes\alpha$ 意味着 $\mathfrak{Z}_A(D) = \mathfrak{Z}_A(D')$，其中 D'是通过任意将另一幅此类 D 中的正交叉替换为负交叉、并将负交叉替换为正交叉而得到的旋转纽结图。由于任何纽结图都可以通过改变交叉的符号变为平凡结的图（带有某种框架），这意味着 $\mathfrak{Z}_A(K)$ 必须是 ν的幂，也就是正、负卷曲串接后的取值。此外，三角性意味着 $\nu = \mathfrak{Z}_A(\,) = \mathfrak{Z}_A(\,) = \nu^{-1}$，即 ν 是单位根的平方根，因此 $\mathfrak{Z}_A(K) = \nu^r$，其中 $r = 0, 1$。$r = \mathrm{fr}(K) \pmod 2$ 这一结论源于：改变给定图中某个交叉的符号不会改变其扭率模 2 的值。□

然而，Sweedler代数是否存在可用于构造潜在非平凡纽结不变量的非三角 XC-代数结构，仍是一个问题。现在我们给出 SW 上若干多参数族的 XC-结构：

例 3.2。令 $\lambda\in\mathbb{C}$ 满足 $\lambda \neq 0, \pm 2$。那么

$$R_\lambda := \lambda\cdot 1\otimes 1 + (1+s+w+sw)\otimes(s+w+sw)$$

并且 $\kappa := -s-w-sw$ 定义了SW上的一参数 XC 代数结构族。其逆 R矩阵为

$$R_\lambda^{-1} = \frac{1}{4-\lambda^2}(1+s+w+sw)\otimes(s+w+sw)$$

$$+\frac{2}{\lambda(\lambda^2-4)}(s+w+sw)\otimes 1+\frac{\lambda^2-2}{\lambda(\lambda^2-4)}1\otimes 1$$

并且 $\kappa^{-1}=\kappa$。注意，这个 XC-代数不是三角的，特别是 R_λ^{-1} 不是（R_λ）$_{21}$的倍数。

我们还指出，在这个例子中

$$\mathfrak{Z}_{SW}(\ \circlearrowleft\ )=\nu=-1-(1+\lambda)(s+w+sw)$$

不是 关于 $\lambda\neq -1$中心的，这意味着该 XC-代数结构并非来自 SW 上的带状 Hopf代数结构，其中 [Hab06，命题 8。2]。另一方面， SW 作为代数，与某个自同态代数不同构$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ，其中向量空间为二维（后者是单代数， SW却甚至不是半单的），因此，这种 XC-代数结构也不是由带状Hopf代数的二维表示所诱导的结构。

例 3.3。 设 λ， μ， $\gamma\in\mathbb{C}$ 满足 $\lambda\neq 0$。那么

$$R_{\lambda,\mu,\gamma}:=\lambda(s\otimes 1-\mathbf{i}\cdot 1\otimes s)-\lambda\gamma(w\otimes 1-\mathbf{i}\cdot 1\otimes w)+\mu(w\otimes w-sw\otimes sw)$$
$$+sw\otimes w-w\otimes sw$$

而 $\kappa:=-s+\gamma w$ 定义了 SW上的一组三参数 XC-代数结构。其逆 R-矩阵为

$$R^{-1}_{\lambda,\mu,\gamma}=\frac{1}{2\lambda^2}(\lambda(s\otimes 1+\mathbf{i}\cdot 1\otimes s)-\lambda\gamma(w\otimes 1+\mathbf{i}\cdot 1\otimes w)+\mu\mathbf{i}(-w\otimes w+sw\otimes sw)$$
$$+\mathbf{i}(-sw\otimes w+w\otimes sw))$$

而 $\kappa^{-1}=\kappa$。与前一个例子一样，该 XC-代数不是三角的；事实上$R^{-1}_{\lambda,\ \mu,\ \gamma}$ 不是$(R_{\lambda,\ \mu,\ \gamma})_{21}$的倍数。

例 3.4. 设 $\lambda_1,\dots,\lambda_6\in\mathbb{C}$ 满足 $\lambda_1\neq 0$。则

$$R_{\lambda_1,\dots,\lambda_6}:=\lambda_1\cdot 1\otimes 1+\lambda_2\cdot 1\otimes w+\lambda_3\cdot w\otimes w+\lambda_4\cdot 1\otimes sw$$
$$+\lambda_5\cdot w\otimes sw+\lambda_6\cdot sw\otimes sw+sw\otimes w$$

而 $\kappa:=1$ 定义了 SW 上的一个六参数 XC 代数结构族。同样，该 XC-代数不是三角的，并且 $R^{-1}_{\lambda_1\ ,\dots,\lambda_6}$ 不是 $(R_{\lambda_1,\dots,\lambda_6})_{21}$ 的倍数：我们有

$$R^{-1}_{\lambda_1,\dots,\lambda_6}=\frac{1}{\lambda_1}1\otimes 1-\frac{1}{\lambda_1^2}(\lambda_2\cdot 1\otimes w+\lambda_3\cdot w\otimes w+\lambda_4\cdot 1\otimes sw$$
$$+\lambda_5\cdot w\otimes sw+\lambda_6\cdot sw\otimes sw+sw\otimes w).$$

注意到，与例 3.2 类似，在此情形下我们有

$$\nu=\lambda_1+\lambda_2 w+\lambda_4 sw$$

除非 $\lambda_2=\lambda_4=0$，否则它不是中心的，这再次意味着该 XC 代数结构并非源自带状 Hopf代数。

例 3.5. 设 $\lambda_1,\dots,\lambda_5\in\mathbb{C}$ 满足 $\lambda_1\neq 0$。则

$$R_{\lambda_1,\dots,\lambda_5}:=\lambda_1\cdot 1\otimes 1+\lambda_2(sw\otimes 1-1\otimes sw+1\otimes w-w\otimes 1)$$
$$+\lambda_3(w\otimes s-s\otimes w-sw\otimes s)+\lambda_4\cdot w\otimes w$$
$$+\lambda_5\cdot sw\otimes w+\frac{2\lambda_2^2-2\lambda_3^2-\lambda_1\lambda_5}{\lambda_1}w\otimes sw+\frac{2\lambda_3^2-2\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_4}{\lambda_1}sw\otimes w$$

且 $\kappa := 1 + 2\frac{\lambda_3}{\lambda_1}(w - sw)$ 在 SW 上定义了一个五参数族的 XC-结构。再一次，$R^{-1}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_5}$ 不是 $(R_{\lambda_1,\ldots,\lambda_5})_{21}$ 的倍数。在这种情况下，我们注意到$\kappa^{-1} \neq \kappa$。

研究这些 XC-结构在 SW 上产生的带框纽结不变量是很自然的。它们全都不是三角的，而且 Sweedler代数还是非交换的，因此从先验角度看，它们可能产生任何类型的数值不变量：没有理由认为它们会产生仅取决于框架的平凡不变量。

令人惊讶的是，通过计算可以验证，它们产生的结果全都如此。事实上，Sweedler代数上的任何其他 XC-结构也会如此。这就是我们的主要结果：

定理 3.6. *Sweedler*代数上的任意 *XC* 代数结构都会产生一个仅取决于框架的带框纽结不变量：

$$\mathfrak{Z}_{SW}(K) = \nu^{\mathrm{fr}(K)}.$$

特别地，对于任意零框架结，该不变量都是平凡的。

根据 [Bec25a] 中的结果，我们自动得到

推论 3.7。 SW 上的任意带状*Hopf*代数结构都会产生一个平凡的带框纽结不变量（仅取决于框架）。对于赋予任意带状*Hopf*代数结构的*Sweedler*代数的任意有限维表示所产生的*Reshetikhin-Turaev*不变量，情况也是如此。

本文的其余部分致力于证明定理3.6。我们将把证明分为几个步骤。

引理 3.8。 令 $e_1 = 1$、$e_2 = s$、$e_3 = w$、$e_4 = sw$ 并记

$$x = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i e_i \in SW \qquad , \qquad Q = \sum_{i,j=1}^{4} \mu_{ij} e_i \otimes e_j \in SW \otimes SW.$$

(1) x 可逆当且仅当 $\lambda_1 \neq \pm\lambda_2$，在这种情况下

$$x^{-1} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}(\lambda_1 - \lambda_2 s - \lambda_3 w - \lambda_4 sw).$$

(2) Q可逆当且仅当

$$\mu_{11} + \mu_{12} \neq \pm(\mu_{21} + \mu_{22}) \qquad , \qquad \mu_{11} - \mu_{12} \neq \pm(\mu_{21} - \mu_{22}),$$

and Q^{-1} *can be written explicitly.*

证明。令 $x' = \sum_{i=1}^{4} \lambda'_i e_i$ 和 $Q' = \sum_{i,j=1}^{4} \mu'_{ij} e_i \otimes e_j$。将方程$xx' = 1$（分别为 $QQ' = 1 \otimes 1$）视为关于系数 λ_i（分别为 μ_{ij}）的线性方程组，其中将它们视为形式变量，未知数为 λ'_i（分别为 μ'_{ij}），通过直接计算可得该线性方程组的矩阵行列式等于 $-\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)^2$（分别为

$$\begin{aligned} &-\left(\mu_{1,1} + \mu_{1,2} - \mu_{2,1} - \mu_{2,2}\right)^4 \left(\mu_{1,1} - \mu_{1,2} + \mu_{2,1} - \mu_{2,2}\right)^4 \\ &\times \left(\mu_{1,1} - \mu_{1,2} - \mu_{2,1} + \mu_{2,2}\right)^4 \left(\mu_{1,1} + \mu_{1,2} + \mu_{2,1} + \mu_{2,2}\right)^4 \quad). \end{aligned}$$

的公式 $x' = x^{-1}$ 和 $Q' = Q^{-1}$ 是利用伴随矩阵，通过逆矩阵的标准公式推导得到的。显式公式见附录A，其中给出了 Q^{-1}。□

记 $J = \text{span}_{\mathbb{C}}(w、\ sw)$，并注意到 J 实际上是SW 的一个双边理想（J 实际上是SW的雅各布森根）。

引理 3.9. 若 $x、\ y \in J$，则对任意 $z \in SW$，$xzy = 0$。

证明。由于 J 是一个双边理想，因此 $xz \in J$，所以 $xzy = 0$，显然 $J^2 = 0$。□

我们用 $[u, v] := uv - vu$ 表示 $SW \otimes SW$ 中元素的交换子。

命题 3.10. 对于 SW 上的任意 ***XC*-结构** (R, κ)，交换子

$$[R, \kappa^{\pm 1} \otimes 1] \quad , \quad [R, 1 \otimes \kappa^{\pm 1}] \quad , \quad [R^{-1}, \kappa^{\pm 1} \otimes 1] \quad , \quad [R^{-1}, 1 \otimes \kappa^{\pm 1}]$$

都属于 $J \otimes J$。

证明。令 $e_1 = 1、\ e_2 = s、\ e_3 = w、\ e_4 = sw$ 并记作

$$\kappa = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i e_i \qquad , \qquad R = \sum_{i,j=1}^{4} \mu_{ij} e_i \otimes e_j \qquad , \qquad R^{-1} = \sum_{i,j=1}^{4} \mu'_{ij} e_i \otimes e_j .$$

由于 κ 必须可逆，引理 3.8 表明 $\lambda_1 \neq \pm\lambda_2$ 且

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}(2\lambda_1 - \kappa). \tag{3.1}$$

另一方面，记作

$$(\kappa \otimes \kappa) \cdot R^{\pm 1} \cdot (\kappa^{-1} \otimes \kappa^{-1}) - R^{\pm 1} = \sum_{i,j} p^{\pm}_{i,j} e_i \otimes e_j,$$

其中 $p_i^{\pm}$、$_j$ 被视为关于 $\lambda_i、\ \mu_{ij}$ 的有理函数，且 μ'_{ij} 其中出现的唯一分母是 $\lambda_1^2 - \lambda_2^2$ 或其平方。

证明将说明：作为（XC0）的推论，关系式 $p^{\pm}_{ij} = 0$意味着，对于这些交换子中的每一个，与 $J \otimes J = \text{span}_{\mathbb{C}}(e_3 \otimes e_3、\ e_3 \otimes e_4、\ e_4 \otimes e_3、\ e_4 \otimes e_4)$之外的基元素相对应的坐标均为零。记 $\pi\colon\ SW \otimes SW \longrightarrow (SW \otimes SW)/(J \otimes J)$ 为到商空间的自然投影，我们将该商空间与由其余基元素 $e_i \otimes e_j$（不在 $J \otimes J$中的基元素）张成的线性子空间视为同一空间。

通过直接计算，我们发现

$$\begin{aligned}\pi([R, \kappa \otimes 1]) = {} & 2(\lambda_4\mu_{1,2} - \lambda_2\mu_{1,4})w \otimes 1 + 2(\lambda_3\mu_{1,2} - \lambda_2\mu_{1,3})sw \otimes 1 \\ & + 2(\lambda_4\mu_{2,2} - \lambda_2\mu_{2,4})w \otimes s + 2(\lambda_3\mu_{2,2} - \lambda_2\mu_{2,3})sw \otimes s.\end{aligned}$$

对于第一个系数，我们先计算

$$p^{+}_{3,1} = \frac{2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}(\lambda_2^2\mu_{1,3} - \lambda_3\lambda_2\mu_{1,2} + \lambda_1\lambda_2\mu_{1,4} - \lambda_1\lambda_4\mu_{1,2})$$

$$p^{+}_{4,1} = \frac{2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}(\lambda_2^2\mu_{1,4} - \lambda_4\lambda_2\mu_{1,2} + \lambda_1\lambda_2\mu_{1,3} - \lambda_1\lambda_3\mu_{1,2})$$

然后我们只需注意到

$$2(\lambda_4\mu_{1,2} - \lambda_2\mu_{1,4}) = \lambda_2 p^{+}_{4,1} - \lambda_1 p^{+}_{3,1} = 0$$

由 (XC0) 得到。这个组合是通过对 p_{ij}使用 Mathematica 计算格罗布纳基，并将 $\lambda_1、\ \lambda_2$ 视为常数（因为它们出现在分母中）而发现的。其余系数以及 $\pi([R, 1 \otimes \kappa])$ 的相应系数为零，这一点也可用类似方法计算，见附录 A。

对于 $[R,\kappa^{-1}\otimes 1]$ 和 $[R,1\otimes\kappa^{-1}]$，我们只需注意到，作为 (3.1) 的推论，有

$$[R,\kappa^{-1}\otimes 1]=-\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}[R,\kappa\otimes 1] \quad , \quad [R,1\otimes\kappa^{-1}]=-\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}[R,1\otimes\kappa],$$

并应用 π，我们得出结论。关于 $[R^{-1},\kappa^{\pm1}\otimes 1]$ 和 $[R^{-1},1\otimes\kappa^{\pm1}]$ 的陈述可逐字照搬，只需使用带有 R^{-1} 的 (XC0) 版本，此时系数为 μ'_{ij}。□

对于 $k>0$，令 $\mathfrak{S}_k$ 为阶数 k 的对称群。若 $\sigma\in\mathfrak{S}_k$，记

$$\mu_\sigma : SW^{\otimes k}\longrightarrow SW \quad , \quad x_1\otimes\cdots\otimes x_k\mapsto x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma^{-1}(k)}.$$

命题 3.11。令 $n>0$ 和 $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_{2n}$。对于定义在$SW$上的任意 *XC*-结构$(R,\kappa)$，我们有

$$\mu_\sigma(R^{\otimes r}\otimes(R^{-1})^{\otimes n-r})=\mu_\tau(R^{\otimes r}\otimes(R^{-1})^{\otimes n-r})$$

每当 $\sigma\ (2i)\ -\sigma\ (2i-1)$ 和 $\tau\ (2i)\ -\tau\ (2i-1)$ 对所有 $i=1,\dots,n$ 都具有相同的符号时。

更简单地说，这意味着在形如 $\mu_\sigma(R^{\otimes r}\otimes(R^{-1})^{\otimes n-r})$ 的表达式中，只要两个连续的希腊字母具有不同的指标，就可以交换它们的顺序，而不改变表达式的值。具体来说，这意味着对于如下形式的表达式：

$$\sum_{i,j,k}\alpha_j\beta_k\bar{\alpha}_i\alpha_k\beta_j\bar{\beta}_i,$$

α_k 可以放置在 β_k 的右侧任意位置，或者 β_k 可以放置在 α_k 的左侧任意位置，而不会改变求和的结果（其余字母也同理）。

证明。首先，我们声称只需验证这些差值

$$\sum_{i,j}(\tilde{\alpha}_i\tilde{\alpha}_j-\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}_i)\otimes\tilde{\beta}_i\otimes\tilde{\beta}_j \quad , \quad \sum_{i,j}(\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_j-\tilde{\beta}_j\tilde{\alpha}_i)\otimes\tilde{\beta}_i\otimes\tilde{\alpha}_j,$$
$$\sum_{i,j}(\tilde{\beta}_i\tilde{\alpha}_j-\tilde{\alpha}_j\tilde{\beta}_i)\otimes\tilde{\alpha}_i\otimes\tilde{\beta}_j \quad , \quad \sum_{i,j}(\tilde{\beta}_i\tilde{\beta}_j-\tilde{\beta}_j\tilde{\beta}_i)\otimes\tilde{\alpha}_i\otimes\tilde{\alpha}_j,$$

其中波浪号表示带横线或不带横线，全部属于

$$U:=(J\otimes J\otimes A)\oplus(J\otimes A\otimes J)\oplus(A\otimes J\otimes J).$$

事实上，给定一个形如 $\mu_\sigma(R^{\otimes r}\otimes(R^{-1})^{\otimes n-r})$ 的元素，将该元素与交换两个指标不同的连续希腊字母后得到的元素之差，可以写成上述四个元素之一与 $R^{\pm1}$ 的其他副本的某个乘积。由于 J 是一个双边理想，这意味着上述差值属于 $J^2=0$，因此这两个元素相等。

现在我们使用命题3.10中的记号来证明这一论断。需要分析十二种情况；这里我们详细说明 $\Gamma:=\sum_{i,\ j}(\alpha_i\alpha_j-\alpha_j\alpha_i)\otimes\beta_i\otimes\beta_j$这一情况，其余情况请参见附录A 。记$\pi:\ SW^{\otimes 3}\longrightarrow SW^{\otimes 3}/U$为自然投影，并将商空间与由以下基元素张成的线性子空间等同：$SW^{\otimes 3}$ 不属于 $e_i\otimes e_j\otimes e_k$ 的基元素 U。通过直接计算，我们得到

$$\pi(\Gamma)=(2\mu_{1,4}\mu_{2,2}-2\mu_{1,2}\mu_{2,4})w\otimes w\otimes 1+(2\mu_{1,3}\mu_{2,2}-2\mu_{1,2}\mu_{2,3})sw\otimes s\otimes 1$$

$$+(2\mu_{1,2}\mu_{2,4}-2\mu_{1,4}\mu_{2,2})w\otimes 1\otimes s+(2\mu_{1,2}\mu_{2,3}-2\mu_{1,3}\mu_{2,2})sw\otimes 1\otimes s.$$

为证明这些系数均为零，我们作如下论证：若 $\lambda_2\neq 0$，可以直接看出，这些系数可表示为命题 3.10 中由 (XC0) 计算得到的格罗布纳基元素的线性组合。若 $\lambda_2=0$，则该格罗布纳基必然有 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ 或 $\mu_{12}=\mu_{21}=\mu_{22}=0$。在这两种情况下，由 (XC0)–(XC3) 确定的方程组都有有限个（参数）解。对于每个解，计算可得 $\pi(\Gamma)$ 的系数为零。□

现在，我们已经具备证明本文主要定理所需的全部技术要素。粗略地说，证明思路是注意到，上述两个命题使我们能够采用一种与交换情形下定理2.3 非常相似的论证。

证明（定理 *3.6*）。设 D 是一个由 K 构成的旋转图，n_+ 个正交叉、n_- 个负交叉、m_+ 次正向整周旋转和 m_- 次反向整周旋转。根据定义，

$$\mathfrak{Z}_{SW}(K)=\mu_\sigma(R^{\otimes n_+}\otimes(R^{-1})^{\otimes n_-}\otimes(\kappa^{-1})^{\otimes m_+}\otimes\kappa^{\otimes m_-}) \tag{3.2}$$

对于某个 $\sigma\in\mathfrak{S}_{2(n_++n_-)+m_++m_-}$ 由图 D 确定。

证明的第一步是证明

$$\mathfrak{Z}_{SW}(K)=\kappa^{-rot(D)}\cdot\mu_{\sigma'}(R^{\otimes n_+}\otimes(R^{-1})^{\otimes n_-}) \tag{3.3}$$

其中 $\sigma'\in\mathfrak{S}_{2(n_++n_-)}$ 是通过移除 σ 最后的m_++m_- 个指标，并按顺序相应地移动其余指标而得到的置换。事实上，我们声称，可以依次将求和式（ $\kappa^{\pm1}$ 中出现的每个 3.2的副本移到最前面，而不改变 $\mathfrak{Z}_{SW}(K)$的值。从（ $\kappa^{\pm1}$ 3.2）中最左边的 开始，不失一般性地假设 $\kappa^{\pm1}$ 前面的字母是 α_i，且 β_i 出现在其右侧，

$$\mathfrak{Z}_{SW}(K)=\sum\cdots\alpha_i\kappa^{\pm1}\cdots\beta_i\cdots,$$

其中，省略号表示其他的 $R^{\pm1}$ 副本以及 $\kappa^{\pm1}$。根据命题 3.10，这等于

$$\mathfrak{Z}_{SW}(K)=\sum\cdots\kappa^{\pm1}\alpha_i\cdots\beta_i\cdots+\sum\cdots x_i\cdots y_i\cdots$$

对于某个元素 $\sum_i x_i\otimes y_i\in J\otimes J$。根据引理 3.9，第二个加数为零。我们重复这一过程，直到所有 $\kappa^{\pm1}$ 的副本都移到求和号外。于是得到 $rot(D)=m_+-m_-$。

现在证明 $\mathfrak{Z}_{SW}(K)=\nu^{\mathrm{fr}(K)}$。记

$$\theta:=\sum_i\alpha_i\beta_i\qquad,\qquad\xi:=\sum_i\beta_i\alpha_i.$$

由 (XC1f) 和命题3.10 可得

$$\theta=\kappa^2\xi \tag{3.4}$$

（因此 θ 与 ξ 重合当且仅当 κ 是单位根的平方根）。由旋转 Reidemeister 变换 Ω1fa 对 [BH25], 命题3.10 和 (3.4) 可立即得到

$$\theta^{-1}=\sum_i\bar\alpha_i\bar\beta_i\qquad,\qquad\xi^{-1}=\sum_i\bar\beta_i\bar\alpha_i.$$

现在，根据命题 3.11，表达式 $\mu_{\sigma'}(R^{\otimes n_+}\otimes(R^{-1})^{\otimes n_-})$ 出现在（3.3）中，等于另一个表达式，其中相同的指标连续出现，从.....开始

表达式中最左侧希腊字母的指标，将具有相同指标的希腊字母移至其旁边，然后依次对每个指标进行操作。此外，命题 3.11还意味着 θ 和 ξ 可交换。

综上，我们得到以下等式链，下面将对此进行解释：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_{SW}(K) &= \kappa^{-rot(D)} \cdot \mu_{\sigma'}(R^{\otimes n_+} \otimes (R^{-1})^{\otimes n_-}) \\
&= \kappa^{-rot(D)} \left(\textstyle\sum_i \alpha_i\beta_i\right)^{n_{+,1}} \left(\textstyle\sum_i \beta_i\alpha_i\right)^{n_{+,2}} \left(\textstyle\sum_i \bar{\alpha}_i\bar{\beta}_i\right)^{n_{-,1}} \left(\textstyle\sum_i \bar{\beta}_i\bar{\alpha}_i\right)^{n_{-,2}} \\
&= \kappa^{-rot(D)} \theta^{n_{+,1}-n_{-,1}} \xi^{n_{+,2}-n_{-,2}} \\
&= \kappa^{-rot(D)+2(n_{+,1}-n_{-,1})} \xi^{wr(D)} \\
&= \kappa^{wr(D)} \xi^{wr(D)} \\
&= \nu^{\mathrm{fr}(K)}.
\end{aligned}$$

这里我们记 $n_{\pm,1}$（分别为 $n_{\pm,2}$），表示纽结最先穿过下穿股（分别为上穿股）时正交叉／负交叉的数量。显然，$n_\pm = n_{\pm,1} + n_{\pm,2}$。上述等式链中的第一个等式不过是（3.3），第二个等式根据上述讨论并利用 3.11 即可得到（提醒读者，我们按从右到左的顺序将珠子乘到纽结图上）。第三个等式源于上述 θ 与 ξ 的可交换性及其逆元公式；第四个等式就是（3.4）；第五个等式则直接由等式得到

$$rot(D) + wr(D) = 2(n_{+,1} - n_{-,1})$$

对于旋转纽结图 D，这一结果已在 [Bec25a的推论 37]中证明。最后一个等式源于等式 $\nu = \kappa\xi$，该等式由命题3.10推出。□

附录 A. 计算

Mathematica 中的计算程序 [Wol] 包含引理3.8、命题3.10 和命题3.11 中所述计算，可在以下位置找到

https://sites.google.com/view/becerra/XCsweedler。

参考文献

[Bec24a] J. Becerra。《Bar-Natan–van der Veen扰动高斯函数》。Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM，118(2)：第46号论文，共58页，2024。doi:10.1007/s13398-023-01536-1。[Bec24b] J. Becerra Garrido。量子纽结通用不变量。博士论文，格罗宁根大学，2024。doi:10.33612/diss.989716384。[Bec25a] J. Becerra。《精细函子性通用缠结不变量》，2025，arXiv:2501.17668。网址https://arxiv.org/abs/2501.17668。[Bec25b] J. Becerra。《XC缠结与普适不变量》，2025，arXiv:2511.08045 https://arxiv.org/abs/2511.08045 网址 。[BH25] J. Becerra 和 K. van Helden。《旋转Reidemeister移动的最小生成集》，2025，arXiv:2506.15628。网址 https://arxiv.org/abs/2506.15628。[Bos25] B. Bosch。《张量、高斯函数与Alexander多项式》，2025，arXiv:2512.13329。网址 https://arxiv.org/abs/2512.13329。[BV19] D. Bar-Natan 和 R. van der Veen。《多项式时间纽结多项式》。Proc. Amer. Math. Soc.，147(1)：377–397，2019。doi:10.1090/proc/14166。[BV21] D. Bar-Natan 和 R. van der Veen。《普适纽结不变量的扰动高斯生成函数》，2021。doi:10.48550/ARXIV.2109.02057。

[Hab06] K. Habiro。底缠结与普适不变量。*Algebr. Geom. Topol.*，6 1214，2006 1113102140200661113：–。doi:./agt-...。[Law89] R. J. Lawrence。运用量子群构造的普适链环不变量。载于理论物理中的微分几何方法（切斯特，*1988*），第55–63页。World Sci. Publ.，Teaneck, NJ，1989。[Maj95] S. Majid。量子群理论基础。剑桥大学出版社，剑桥，1995。doi:10.1017/CBO9780511613104。[RT90] N. Y. Reshetikhin 和 V. G. Turaev。由量子群导出的带状图及其不变量。*Comm. Math. Phys.*，127 1 1 26, 1990 http://projecteuclid. ( ): – 。网 org/euclid.cmp/1104180037 址 。[Wol] Wolfram。Mathematica，版本13.2。网址。伊利诺伊州香槟市，2022。

勃艮第欧洲大学，法国国家科学研究中心，IMB UMR5584，法国第戎 F-21000电子邮件地址：Jorge.Becerra-Garrido@ube.fr网址： https://sites.google.com/view/becerra/