arXiv:2601.19864v1 [math.AP] 27 Jan 2026

Martinet 空间中的黏性解

THOMAS BIESKE、FREDERIC BOWEN

Abstract. 本文建立了 Martinet 空间中粘性解的性质；Martinet 空间既缺乏 Carnot 群的代数群运算，也缺乏 Grushin 型空间中的三角结构向量场。随后，我们证明了严格单调椭圆型偏微分方程以及无穷拉普拉斯方程的粘性解的唯一性。

1. introduction

次黎曼空间中粘性解的性质一直是近期研究的课题。特别是，通过利用 Carnot 群中 $1 < p \leq \infty$ 的（非阿贝尔）代数群运算 [4]，建立了 p-拉普拉斯方程的粘性解的存在性与唯一性；而 Grushin 型空间中向量场的三角结构，则使得无穷拉普拉斯方程和 $\infty(x)$-拉普拉斯方程的粘性解的存在性与唯一性得以证明。 [3, 5]。

在 [6], 一般次黎曼空间中，无穷拉普拉斯方程的粘性解存在性已得到证明，这引出了唯一性问题，尤其是在缺少代数群运算或缺少 Grushin 型空间的向量场结构的空间中。本文证明了这类空间——即 Martinet 空间——中无穷拉普拉斯方程的粘性解具有唯一性。

本文是第二作者在第一作者指导下开展的本科生研究项目的一部分。第二作者谨此感谢南佛罗里达大学提供的机会与支持。

2. Martinet Space

我们从 $\mathbb{R}^3$ 以及坐标（x_1、 x_2、 x_3）开始。考虑向量场

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \text{and } X_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} + f(x_1)\frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

其中 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是实解析的。也就是说，它在$\mathbb{R}$上有一个非平凡的泰勒级数。带有这些向量场的空间 $\mathbb{R}^3$ ，记作 $\mathfrak{m}$，是 Martinet 空间 $\mathbb{M}$ 的切空间，其坐标为（x_1、 x_2、 x_3）。现在， $\mathbb{M}$ 不一定是一个群，因为

$$[X_1, X_2] = f'(x_1)\frac{\partial}{\partial x_3} = \vec{0}$$

当 $f'(x_1) = 0$ 且

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：53C17、35D40、35H20。

Key words and phrases. 次黎曼几何、粘性解、无穷拉普拉斯算子。1

$$[X_1, X_2] = f'(x_1)\frac{\partial}{\partial x_3} \neq \vec{0}$$

当 $f'(x_1) \neq 0$ 时，这意味着李代数分次可能取决于点 (x_1, x_2, x_3)，例如 $f'(x_1) \neq 0$ 而 $f'(x_1)$ 有零点的情形。注意，当 $f(x_1) = x_1$ 时，我们得到海森堡代数的一种表示。我们将向量 $[X_1, X_2]$ 记作 X_3。

由于我们假设 $f(x_1)$ 的零点阶数有限，因此存在一个 $r_{x_1} \in \mathbb{N}$，使得长度最小的李括号迭代 r_{x_1} 满足条件$[X_1, [X_1, [..., [X_1, X_2]...]] \neq 0$。于是根据 [1, 定理 7.34],

$$d(p, q) \approx |x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|^{(r_{x_1}+1)^{-1}}. \tag{2.1}$$

尽管 $\mathbb{M}$ 未必是群，但它是一个度量空间，其自然度量是 Carnot-Carath´eodory 距离，该距离对点 p 和 q 的定义如下：

$$d(p, q) = \inf_{\Gamma} \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt,$$

其中，$\|\cdot\|$ 是一个范数，使得 $\{X_1, X_2\}$ 构成标准正交集；Γ 是所有连接 p 和 q 的曲线 γ 所组成的集合，且满足 $\gamma(0) = p$、$\gamma(1) = q$，以及 $\gamma'(t) \in$ 张成$\{X_1, X_2\}$。根据乔-拉舍夫斯基定理（例如参见[1]），任意两点都可以由这样一条曲线连接，这意味着 $d(p, q)$ 是一个真正的度量。利用该度量，我们可以定义以点 p_0 为中心、半径为 r 的 Carnot-Carath´eodory 球：

$$B = B(p_0, r) = \{p \in \mathbb{M} : d(p, p_0) < r\};$$

类似地，我们用 Ω 表示 $\mathbb{M}$ 中的一个有界域。

3. Calculus

给定 $\mathbb{M}$上的一个光滑函数 u，我们将 u的水平梯度记为$\nabla_0 u$，即

$$\nabla_0 u(p) = (X_1 u(p), X_2 u(p)),$$

将 u的半水平梯度记为 $\nabla_1 u$，即

$$\nabla_1 u(p) = (X_1 u(p), X_2 u(p), X_3 u(p)),$$

将对称化的二阶（水平）导数矩阵记为 $(D^2 u(p))^\star$，即

$$((D^2 u(p))^\star)_{ij} = \frac{1}{2}(X_i X_j u(p) + X_j X_i u(p))$$

对于 $i, j = 1, 2$。

定义 1. 若函数 $u : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ 满足 $X_1 u$ 和 $X_2 u$ 连续，则称其为 C^1_{sub}。类似地，若函数 u 满足 $X_3 u(p)$连续，且对所有 i、$j = 1, 2$，$X_i X_j u(p)$连续，则称其为 C^2_{sub}。

还应注意，对于任意开集 $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$，如果 u、$X_1 u$、$X_2 u$属于 $L^q(\mathcal{O})$，则函数 u 属于水平索об列夫空间 $W^{1,q}(\mathcal{O})$。将 $L^q(\mathcal{O})$ 替换为$L^q_{loc}(\mathcal{O})$，空间 $W^{1,q}_{loc}(\mathcal{O})$ 的定义类似。空间 $W^{1,q}_0(\mathcal{O})$ 是具有紧支撑的光滑函数在 $W^{1,q}(\mathcal{O})$ 中的闭包。局部利普希茨函数是满足下列条件的函数 u

$$\|\nabla_0 u\|_{L^\infty_{loc}} < \infty.$$

4. Martinet Jets and Viscosity Solutions

利用上一节的导数，我们考虑的方程类如下:

$$F(p, u(p), \nabla_1 u(p), (D^2 u(p))^\star) = 0 \tag{4.1}$$

其中连续函数

$$F : \mathbb{M} \times \mathbb{R} \times \mathfrak{m} \times S^2 \to \mathbb{R}$$

满足

$$F(p, r, \eta, X) \le F(p, s, \eta, Y).$$

当 $r \le s$且 $Y \le X$ 时。（也就是说， F 是适当的 [7]。）回顾一下， S^2 是 2×2 实对称矩阵的集合。这类方程的一个例子是拟线性水平 q- 拉普拉斯算子

$$\operatorname{div}(\|\nabla_0 u\|^{q-2}\nabla_0 u) = X_1(\|\nabla_0 u\|^{q-2} X_1 u) + X_2(\|\nabla_0 u\|^{q-2} X_2 u)$$

对于 $2 \le q < \infty$。形式上令 $q \to \infty$ 趋于极限，得到水平无穷拉普拉斯算子

$$\Delta_\infty f = \sum_{i,j=1}^{2} X_i f X_j f X_i X_j f = \langle (D^2 f)^\star \nabla_0 f, \nabla_0 f\rangle.$$

现在我们希望定义该方程的解

$$F(p, u(p), \nabla_1 u(p), (D^2 u(p))^\star) = 0$$

在粘性意义下。为此，我们必须定义次椭圆喷流。（关于喷流的详细讨论，请参阅 [7]。）给定一个开集 $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$、一点 $p_0 \in \mathcal{O}$ 和一个函数 u: $\mathcal{O} \to \mathbb{R}$，我们考虑一类在点 p_0“接触”函数 u 的测试函数。具体来说，我们有所谓的“从上方接触”函数

$$\mathcal{TA}(u, p_0) = \{\varphi \in C^2_{sub}(\Omega) : 0 = \varphi(p_0) - u(p_0) < \varphi(p) - u(p) \text{ near } p_0\};$$

在 p_0 处，我们还定义了所谓的“从下方接触”函数:

$$\mathcal{TB}(u, p_0) = \{\varphi \in C^2_{sub}(\Omega) : 0 = u(p_0) - \psi(p_0) < u(p) - \psi(p) \text{ near } p_0\}.$$

然后，我们利用这些测试函数来定义 Martinet喷流。

定义 2. 给定 $u : \Omega \subset \mathbb{M} \to \mathbb{R}$，我们将 u 的二阶超喷流定义为

$$J^{2,+}u(p_0) = \{(\nabla_1\varphi(p_0), (D^2\varphi)^\star(p_0)) \in \mathfrak{m} \times S^2 : \varphi \in \mathcal{TA}(u, p_0)\}$$

以及关于 u 的二阶次喷流

$$J^{2,-}u(p_0) = \{(\nabla_1\psi(p_0), (D^2\psi)^\star(p_0)) \in \mathfrak{m} \times S^2 : \psi \in \mathcal{TB}(u, p_0)\}$$

根据定义很容易看出 $J^{2,-}u(p_0) = -J^{2,+}(-u)(p_0)$。此外，我们称有序对 $(\eta, X) \in \mathfrak{m} \times S^2$ 属于超喷流的闭包，记作 $(\eta, X) \in \overline{J}^{2,+}u(p_0)$，如果存在一列点 $\{p_k\} \subset \Omega$ 和喷流项 $(\eta_k, X_k) \in J^{2,+}u(p_k)$，使得

$$(p_k, u(p_k), \eta_k, X_k) \to (p_0, u(p_0), \eta, X).$$

定义3. 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{M}$ 中的一个开集，且 $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$。若 u 是上半连续的，并且

$$F(p, u(p), \eta, X) \leq 0 \quad \textit{for all} \quad p \in \mathcal{O}, \quad \textit{for all} \quad (\eta, X) \in \overline{J}^{2,+}_{\mathcal{O}} u(p)$$

则 u 是 $F(p, u(p)\ \nabla_1 u(p), (D^2 u(p))^\star) = 0$. 的粘性次解。若 u 是下半连续的，并且

$$F(p, u(p), \eta, X) \geq 0 \quad \textit{for all} \quad p \in \mathcal{O}, \quad \textit{for all} \quad (\eta, X) \in \overline{J}^{2,-}_{\mathcal{O}} u(p)$$

则 u 是 $F(p, u(p)\ \nabla_1 u(p), (D^2 u(p))^\star) = 0$.的粘性上解。
函数 u 是粘性解，当且仅当它既是粘性次解，又是粘性上解。 a

为了使用 [7] 中的工具证明比较原理，必须建立欧几里得喷流与 Martinet 喷流之间的关系。这通过以下引理实现，其证明是 [4, 推论 3.2] 的一个特例，故省略。

引理4.1 (扭转引理)。设 $O \subset \mathbb{M}$ 为开集，设 $u : O \to \mathbb{R}$，且 $p_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in O$。假设 $(\eta, X) \in J^{2,+}_{eucl} u(p_0)$，其中 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，并且 $X = \{X_{ij}\}$ 是一个 3×3 对称矩阵。那么

$$(B(p_0) \cdot \eta, A(p_0) \cdot X \cdot A^T(p_0) + \mathcal{T}(\eta, p_0)) \in J^{2,+} u(p_0) \tag{4.2}$$

其中， $A(p_0)$ 是由下式定义的 *Martinet*向量系数矩阵 2×3

$$A(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f(x_1^0) \end{pmatrix},$$

矩阵 3×3 由下式给出： $B(p_0)$

$$B(p_0) = A(p_0) \oplus (0, 0, f'(x_1^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f(x_1^0) \\ 0 & 0 & f'(x_1^0) \end{pmatrix},$$

而 2×2 扭转矩阵 $\mathcal{T}(\eta, p_0)$ 由下式给出：

$$\mathcal{T}(\eta, p_0) = \frac{\eta_3}{2} \begin{pmatrix} 0 & f'(x_1^0) \\ f'(x_1^0) & 0 \end{pmatrix}.$$

更具体地说，

$$B(p_0) \cdot \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 + f(x_1^0)\eta_3 \\ f'(x_1^0)\eta_3 \end{pmatrix}$$

and

$$A(p_0) \cdot X \cdot A^T(p_0) + \mathcal{T}(\eta, p_0) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} + f(x_1^0)x_{13} + \frac{1}{2}f'(x_1^0)\eta_3 \\ x_{12} + f(x_1^0)x_{13} + \frac{1}{2}f'(x_1^0)\eta_3 & x_{22} + 2f(x_1^0)x_{23} + f(x_1^0)^2 x_{33} \end{pmatrix}.$$

5. Maximum Principle

我们首先陈述一个类似于 [7, 引理 3.1]的引理。证明过程类似，因此略去。

注 5.1. 我们希望强调的是，在下文的引理 *5.2* 中，惩罚函数$\varphi(p,q)$ 不仅不同于 [7, 引理 3.1]，中的欧氏函数，也不同于 [3, 引理 4.1]中的 *Grushin* 型空间惩罚函数。它自然也不同于 *Carnot* 群最大值原理[4, 引理 3.6] 中的惩罚函数，因为该惩罚函数包含了 *Carnot*群的代数群运算。

引理 5.2. 设 u 是Ω 中的上半连续函数， v 是Ω中的下半连续函数。对于 $\tau > 0$ 以及由 $p = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $q = (y_1, y_2, y_3)$给出的点 p 和 q ，令函数 $\varphi(p,q)$ 定义如下

$$\varphi(p,q) \equiv \frac{1}{2}(x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - y_2)^4 + \frac{1}{4}(x_3 - y_3)^4$$

并令函数 M_τ 定义为

$$M_\tau = \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} (u(p) - v(q) - \tau\varphi(p,q)).$$

令 $p_\tau = (x_1^\tau, x_2^\tau, x_3^\tau)$ 和 $q_\tau = (y_1^\tau, y_2^\tau, y_3^\tau)$ 满足

$$\lim_{\tau\to\infty} (M_\tau - (u(p_\tau) - v(q_\tau) - \tau\varphi(p_\tau, q_\tau))) = 0$$

于是，

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau\varphi(p_\tau, q_\tau) = 0 \tag{5.1}$$

and

$$\lim_{\tau\to\infty} M_\tau = u(p^*) - v(p^*) = \sup_{\overline{\Omega}} (u(p) - v(p)) \tag{5.2}$$

只要 p^* 是 p_τ 在 $\tau \to \infty$下的极限点。

根据和定理 [7, 定理3.2] ，存在矩阵 X， $Y \in S^3$ ，使得

$$(\tau\nabla_p\varphi(p_\tau, q_\tau), X) \in \overline{J}^{2,+}_{\text{eucl}} u(p_\tau) \text{ and } (-\tau\nabla_q\phi(p_\tau, q_\tau), Y) \in \overline{J}^{2,-}_{\text{eucl}} v(q_\tau)$$

其中， ∇_p 和 ∇_q 分别表示关于点 p 和q的欧氏梯度。应用扭转引理（引理4.1），存在向量Υ_{p_τ}， $\Upsilon_{q_\tau} \in \mathfrak{m}$和矩阵 $\mathcal{X}_\tau$， $\mathcal{Y}_\tau \in S^2$，使得

$$(\tau\Upsilon_{p_\tau}, \mathcal{X}_\tau) \in \overline{J}^{2,+} u(p_\tau) \text{ and } (\tau\Upsilon_{q_\tau}, \mathcal{Y}_\tau) \in \overline{J}^{2,-} v(q_\tau).$$

这些喷射元素的性质由以下引理给出。

引理 5.3。 向量 Υ_{p_τ} 和 Υ_{q_τ} 满足

$$\|\Upsilon_{p_\tau}\|^2 - \|\Upsilon_{q_\tau}\|^2 = O(\varphi(p_\tau, q_\tau)^2). \tag{5.3}$$

此外，按照通常序，矩阵 $\mathcal{X}^\tau$ 比矩阵 $\mathcal{Y}^\tau$小一个误差项。特别地，我们有 $\mathcal{X}^\tau \le \mathcal{Y}^\tau + \mathcal{R}^\tau$，其中 $\mathcal{R}^\tau \to 0$ 如同 $\tau \to \infty$

证明。 通过直接计算可得

$$\begin{aligned}\|\Upsilon_{p_\tau}\|^2 - \|\Upsilon_{q_\tau}\|^2 &= 2(x_2 - y_2)^3(x_3 - y_3)^3(f(x_1) - f(y_1)) \\ &\quad + (x_3 - y_3)^6(f(x_1)^2 - f(y_1)^2) + (f'(x_1) - f'(y_1))(x_3 - y_3)^6\end{aligned}$$

Now,

$$(x_2-y_2)\sim\varphi^{\frac{1}{4}},\ (x_3-y_3)\sim\varphi^{\frac{1}{4}},\ \text{and}\ f(x_1)-f(y_1)\sim(x_1-y_1)\sim\varphi^{\frac{1}{2}}.$$

于是我们得到

$$\|\Upsilon_{p_\tau}\|^2-\|\Upsilon_{q_\tau}\|^2\sim(\varphi^{\frac{8}{4}}+\varphi^{\frac{8}{4}}+\varphi^{\frac{8}{4}}).$$

向量结果随即得出。

接下来，我们聚焦于矩阵差估计。利用扭转引理（引理4.1），我们有（记 A_p为 $A(p_\tau)$， $\mathcal{T}_p$为 $\mathcal{T}(\Upsilon_{p_\tau},\ p_\tau)$，等等），

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{X}^\tau\varepsilon,\varepsilon\rangle-\langle\mathcal{Y}^\tau\kappa,\kappa\rangle &= \langle(A_pX^\tau A_p^T+\mathcal{T}_p)\epsilon,\epsilon\rangle-\langle(A_qY^\tau A_q^T+\mathcal{T}_q)\kappa,\kappa\rangle\\ &= \langle X^\tau A_p^T\epsilon,A_p^T\epsilon\rangle-\langle Y^\tau A_q^T\kappa,A_q^T\kappa\rangle+\langle\mathcal{T}_p\epsilon,\epsilon\rangle-\langle\mathcal{T}_q\kappa,\kappa\rangle\\ &\le \tau\left\langle C\begin{pmatrix}A_p^T\epsilon\\A_q^T\kappa\end{pmatrix},\begin{pmatrix}A_p^T\epsilon\\A_q^T\kappa\end{pmatrix}\right\rangle+\langle\mathcal{T}_p\epsilon,\epsilon\rangle-\langle\mathcal{T}_q\kappa,\kappa\rangle\\ &\stackrel{\text{def}}{=} \tau\mathcal{V}+\mathcal{W}.\end{aligned}$$

这里的矩阵 C 由下式给出

$$C=(D^2\varphi)_{\text{eucl}}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&0\\0&3(x_2-y_2)^2&0&0&-3(x_2-y_2)^2&0\\0&0&3(x_3-y_3)^2&0&0&3(x_3-y_3)^2\\-1&0&0&1&0&0\\0&-3(x_2-y_2)^2&0&0&3(x_2-y_2)^2&0\\0&0&3(x_3-y_3)^2&0&0&3(x_3-y_3)^2\end{pmatrix}.$$

我们先化简由项 $\tau\mathcal{V}$给出的内积。展开矩阵乘法，可得

$$C\begin{pmatrix}A_p^T\epsilon\\A_q^T\kappa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\epsilon_1-\kappa_1\\3(x_2^\tau-y_2^\tau)^2(\epsilon_2-\kappa_2)\\3(x_3^\tau-y_3^\tau)^2(f(x_1^\tau)\epsilon_2-f(y_1^\tau)\kappa_2)\\-\epsilon_1+\kappa_1\\3(x_2^\tau-y_2^\tau)^2(-\epsilon_2+\kappa_2)\\3(x_3^\tau-y_3^\tau)^2(-f(x_1^\tau)\epsilon_2+f(y_1^\tau)\kappa_2)\end{pmatrix}$$

因此， $\tau\mathcal{V}$ 由下式给出

$$\tau\mathcal{V}=\tau\bigg((\epsilon_1-\kappa_1)^2+3(x_2^\tau-y_2^\tau)^2(\epsilon_2-\kappa_2)^2+3(x_3^\tau-y_3^\tau)^2(f(x_1^\tau)\epsilon_2-f(y_1^\tau)\kappa_2)^2\bigg)$$

注意，当 $\epsilon=\kappa$ 时，我们有

$$\tau\mathcal{V}\ \sim\ \tau\bigg((x_3^\tau-y_3^\tau)^2(f(x_1^\tau)-f(y_1^\tau))^2\bigg)\sim\tau\varphi^{\frac{1}{2}}\times\varphi \tag{5.4}$$

现在我们聚焦于 $\mathcal{W}$ 项。我们有

$$\mathcal{W}=\langle\mathcal{T}_p\epsilon,\epsilon\rangle-\langle\mathcal{T}_q\kappa,\kappa\rangle=\tau(x_3^\tau-y_3^\tau)^3\bigg(f'(x_1^\tau)\epsilon_1\epsilon_2-f'(y_1^\tau)\kappa_1\kappa_2\bigg).$$

当 $\epsilon=\kappa$ 时，我们便有

$$\mathcal{W}\sim\tau\varphi^{\frac{3}{4}}\varphi^{\frac{1}{2}} \tag{5.5}$$

矩阵关系随后由方程（5.4）和（5.5）得出。 □

这个引理是证明比较原理的关键。第一个比较原理涉及严格单调椭圆方程。这类方程满足以下性质：

$$\begin{aligned}
\sigma(r-s) &\leq F(p,r,\eta,X)-F(p,s,\eta,X),\\
|F(p,r,\eta,X)-F(q,r,\eta,X)| &\leq w_1(d_C(p,q)),\\
|F(p,r,\eta,X)-F(p,r,\eta,Y)| &\leq w_2(\|Y-X\|),\\
|F(p,r,\eta,X)-F(p,r,\nu,X)| &\leq w_3(\|\eta\|-\|\nu\|),
\end{aligned}$$

其中常数 $\sigma>0$ 和函数 $w_i\colon [0,\infty]\to[0,\infty]$ 满足 $w_i(0^+)=0$，当 $i=1,2,3$。接下来给出适当的比较原理。

定理 5.4。设 F 满足上述四个性质。设 u 是上半连续次解，v 是下半连续上解，且

$$F(p,g(p),\nabla_1 g(p),(D^2 g(p))^\star)=0$$

在区域Ω 中，使得

$$\limsup_{q\to p} u(q)\leq \liminf_{q\to p} v(q)$$

当 $p\in\partial\Omega$时，两边不同时为 ∞ 或 $-\infty$。那么

$$u(p)\leq v(p)$$

对所有 $p\in\Omega$均成立。

证明。假设 $\sup_\Omega(u-v)>0$. 利用 Martinet 最大值原理（引理 5.2），我们得到

$$\begin{aligned}
\sigma(u(p_\tau)-v(q_\tau)) &\leq F(p_\tau,u(p_\tau),\tau\Upsilon_{p_\tau},\mathcal{X}^\tau)-F(p_\tau,v(q_\tau),\tau\Upsilon_{p_\tau},\mathcal{X}^\tau)\\
&= F(p_\tau,u(p_\tau),\tau\Upsilon_{p_\tau},\mathcal{X}^\tau)-F(q_\tau,v(q_\tau),\tau\Upsilon_{q_\tau},\mathcal{Y}^\tau)\\
&+ F(q_\tau,v(q_\tau),\tau\Upsilon_{q_\tau},\mathcal{Y}^\tau)-F(p_\tau,v(q_\tau),\tau\Upsilon_{q_\tau},\mathcal{Y}^\tau)\\
&+ F(p_\tau,v(q_\tau),\tau\Upsilon_{q_\tau},\mathcal{Y}^\tau)-F(p_\tau,v(q_\tau),\tau\Upsilon_{p_\tau},\mathcal{Y}^\tau)\\
&+ F(p_\tau,v(q_\tau),\tau\Upsilon_{p_\tau},\mathcal{Y}^\tau)-F(p_\tau,v(q_\tau),\tau\Upsilon_{p_\tau},\mathcal{X}^\tau).
\end{aligned}$$

第一项为负，因为 u 是次解，而 v 是上解。利用（引理 5.3）可得

$$0<\sigma(u(p_\tau)-v(q_\tau))\leq w_1(d_C(p_\tau,q_\tau))+w_2(||R_\tau||)+w_3(\tau\big|||\Upsilon_{q_\tau}||-||\Upsilon_{p_\tau}|||\big|),$$

当 τ 趋近于 ∞时，该式趋于 0。 □

6. Viscosity Solutions to the Infinite Laplace Equation

本节旨在探讨 ∞-拉普拉斯方程的粘性解的存在性与唯一性，该方程也称为无穷调和函数。由 [6], 可知，无穷调和函数存在，因此我们将重点讨论唯一性。遗憾的是，唯一性证明中所用估计具有精细复杂的性质，即使考虑上一节的结果，也无法使用标准方法。不过，我们有一个有用的工具，即迭代最大值原理 [3]。

6.1. **迭代最大值原理**。 我们需要一个特定版本的迭代最大值原理，以适用于我们的 Martinet 环境：

引理 6.1 (迭代最大值原理)。 [3] 设Ω $\subset \mathbb{M}$ 是一个区域，且u 是在Ω 上的上半连续函数， v 是在Ω上的下半连续函数。假设存在某个 $p_0 \in$Ω ，使得

$$u(p_0) - v(p_0) > 0.$$

设 $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbb{R}^3$ 的坐标均为正数，并对 $\mathbb{M}p = (x_1, x_2, x_3)$ $q =$和(y_1, y_2, y_3) 中的每一对点，定义函数

$$\varphi_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(p,q) := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} \tau_k (x_k - y_k)^2$$

$$\varphi_{\tau_2,\tau_3}(p,q) := \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{3} \tau_k (x_k - y_k)^2$$

$$\varphi_{\tau_3}(p,q) := \frac{1}{2}\tau_3 (x_3 - y_3)^2.$$

利用Ω 的紧致性和上半连续性，我们还可以定义

$$\begin{aligned}
M_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} &:= \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \{u(p) - v(q) - \varphi_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(p,q)\} \\
&= u(p_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}) - v(q_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}) - \varphi_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(p_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}, q_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}) \\
M_{\tau_2,\tau_3} &:= \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \{u(p) - v(q) - \varphi_{\tau_2,\tau_3}(p,q) : x_1 = y_1\} \\
&= u(p_{\tau_2,\tau_3}) - v(q_{\tau_2,\tau_3}) - \varphi_{\tau_2,\tau_3}(p_{\tau_2,\tau_3}, q_{\tau_2,\tau_3}) \\
M_{\tau_3} &:= \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \{u(p) - v(q) - \varphi_{\tau_3}(p,q) : x_2 = y_2\} \\
&= u(p_{\tau_3}) - v(q_{\tau_3}) - \varphi_{\tau_3}(p_{\tau_3}, q_{\tau_3}).
\end{aligned}$$

于是，

$$\lim_{\tau_3\to\infty} \lim_{\tau_2\to\infty} \lim_{\tau_1\to\infty} M_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} = u(p_0) - v(p_0)$$

and

$$\lim_{\tau_3\to\infty} \lim_{\tau_2\to\infty} \lim_{\tau_1\to\infty} \varphi_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(p_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}, q_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}) = 0.$$

此外， $p_{\tau_{l+1},\ldots,\tau_3}$ 和$q_{\tau_{l+1},\ldots,\tau_3}$ 的前 l 个坐标相同。也就是说，

$$x_k^{\tau_{l+1},\ldots,\tau_3} = y_k^{\tau_{l+1},\ldots,\tau_3}, \ k = 1, \ldots l.$$

迭代最大值原理的证明立即导出以下结果，使我们能够以任意顺序取参数 $\tau_k \to \infty$ ，并讨论完整极限 τ_{k_1}， τ_{k_2}， $\tau_{k_3} \to \infty$。

推论 6.2. [3, 推论 4.4] 在（引理 *6.1*）的条件下， $M_{\tau_{k_1},\ \tau_{k_2},\ \tau_{k_3}} = u(p_0) - v(p_0)$的每一个迭代极限。换言之，

$$\lim_{\tau_{k_1}\to\infty} \lim_{\tau_{k_2}\to\infty} \lim_{\tau_{k_3}\to\infty} M_{\tau_{k_1},\tau_{k_2},\tau_{k_3}}(p_{\tau_{k_1},\tau_{k_2},\tau_{k_3}}, q_{\tau_{k_1},\tau_{k_2},\tau_{k_3}}) = u(p_0) - v(q_0).$$

因此，

$$\lim_{\tau_{k_1}\to\infty} \lim_{\tau_{k_2}\to\infty} \lim_{\tau_{k_3}\to\infty} \varphi_{\tau_{k_1},\tau_{k_2},\tau_{k_3}}(p_{\tau_{k_1},\tau_{k_2},\tau_{k_3}}, q_{\tau_{k_1},\tau_{k_2},\tau_{k_3}}) = 0.$$

引理 6.3。 [3, 引理 4。5] 在（引理 *6.1*）的条件下，$M_{\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3}$ 的完整极限存在，并等于 u（p_0） $-v$（p_0）。更确切地说，

$$\lim_{\tau_1,\tau_2,\tau_3\to\infty} M_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} = u(p_0) - v(p_0).$$

此外，

$$\lim_{\tau_1,\tau_2,\tau_3\to\infty} \varphi_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(p_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}, q_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}) = 0.$$

注 6.4. 由于上述引理，重新标记中间点 $p_{\tau_1、\ \tau_2、\ \tau_3}$、 $q_{\tau_1、\ \tau_2、\ \tau_3}$ 以及函数 $\varphi_{\tau_1、\ \tau_2、\ \tau_3}$ 为 $p_{\vec{\tau}}$、 $q_{\vec{\tau}}$和 $\varphi_{\vec{\tau}}$. 并无歧义。我们也将 $p_{\vec{\tau}}$、 $q_{\vec{\tau}}$的坐标分别记为 $x_k^{\vec{\tau}}$、 $y_k^{\vec{\tau}}$。

6.2. **无穷调和函数**。

引理 6.5. 设 u、 v、 $\varphi_{\vec{\tau}}$和 $(p_{\vec{\tau}}$、 $q_{\vec{\tau}})$ 如迭代最大值原理（引理 *6.1*）中所述。假设函数 u、 v 中至少有一个局部为 $\mathbb{M}$-*Lipschitz* 连续。那么：

(A) 存在 $(\Upsilon_{\vec{\tau}}^+$、 $\mathcal{X}_{\vec{\tau}}) \in J^{2,+}u(p_{\vec{\tau}})$ 以及 $(\Upsilon_{\vec{\tau}}^-$、 $\mathcal{Y}_{\vec{\tau}}) \in J^{2,-}v(q_{\vec{\tau}})$。*(B)* 定义 $(p \diamond q)_k$ 为一个点，其第 *k* 个坐标与 *q* 相同，其他坐标与 *p* 相同。换言之，

$$(p\diamond q)_1 = (y_1, x_2, x_3), (p\diamond q)_2 = (x_1, y_2, x_3), \text{and } (p\diamond q)_3 = (x_1, x_2, y_3).$$

于是，对于每个指标 *k*,

$$\tau_k (x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}})^2 \lesssim d_{CC}(p_{\vec{\tau}}, (p_{\vec{\tau}} \diamond q_{\vec{\tau}})_k). \tag{6.1}$$

特别地，对于 $k = 1$，2 我们有

$$\tau_k |x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}}| = O(1) \text{ as } \tau_k \to \infty. \tag{6.2}$$

(C) 设 $\eta_{\vec{\tau}}^+$ 和 $\eta_{\vec{\tau}}^-$ 分别为 $\Upsilon_{\vec{\tau}}^+$ 和 $\Upsilon_{\vec{\tau}}^-$ 的水平部分。也就是说，根据扭转引理（引理*4.1*），

$$\begin{cases} \eta_{\vec{\tau}}^+ = A(p_{\vec{\tau}}) \cdot D_{\text{eucl}}(p)\varphi_{\vec{\tau}}(p_{\vec{\tau}}, q_{\vec{\tau}}) \\ \eta_{\vec{\tau}}^- = A(q_{\vec{\tau}}) \cdot -D_{\text{eucl}}(q)\varphi_{\vec{\tau}}(p_{\vec{\tau}}, q_{\vec{\tau}}). \end{cases}$$

于是我们得到向量估计

$$\lim_{\tau_3\to\infty} \lim_{\tau_2\to\infty} \lim_{\tau_1\to\infty} \left| ||\eta_{\vec{\tau}}^+||^2 - ||\eta_{\vec{\tau}}^-||^2 \right| = 0 \tag{6.3}$$

成立。

(D) 设 $\eta_{\vec{\tau}}^+$ 和 $\eta_{\vec{\tau}}^-$ 如上所述。于是，矩阵估计

$$\lim_{\tau_3\to\infty} \lim_{\tau_2\to\infty} \lim_{\tau_1\to\infty} \langle \mathcal{X}_{\vec{\tau}} \cdot \eta_{\vec{\tau}}^+, \eta_{\vec{\tau}}^+ \rangle - \langle \mathcal{Y}_{\vec{\tau}} \cdot \eta_{\vec{\tau}}^-, \eta_{\vec{\tau}}^- \rangle = 0. \tag{6.4}$$

成立。

证明。 **条目（A）**： 这由和定理 [7, 定理 3.2] 以及Martinet 扭转引理（引理4.1）得出。

条目（B）： 根据点 $p_{\vec{\tau}}, q_{\vec{\tau}}$的定义，对于所有点 $p, q \in \Omega$，不等式

$$u(p) - v(q) - \varphi_{\vec{\tau}}(p, q) \le u(p_{\vec{\tau}}) - v(q_{\vec{\tau}}) - \varphi_{\vec{\tau}}(p_{\vec{\tau}}, q_{\vec{\tau}})$$

成立。因此，假设（不失一般性） u 是 $\mathbb{M}$-Lipschitz 的，令 $p := (p_{\vec{\tau}} \diamond q_{\vec{\tau}})_k$ 和 $q := q_{\vec{\tau}}$，并合并各项后，我们得到

$$\begin{aligned} \tau_k (x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}})^2 &= \varphi_{\vec{\tau}}(p_{\vec{\tau}}, q_{\vec{\tau}}) - \varphi_{\vec{\tau}}(p_{\vec{\tau}} \diamond q_{\vec{\tau}})_k, q_{\vec{\tau}}) \\ &\le u(p_{\vec{\tau}}) - u((p_{\vec{\tau}} \diamond q_{\vec{\tau}})_k) \le K d_{CC}(p_{\vec{\tau}}, (p_{\vec{\tau}} \diamond q_{\vec{\tau}})_k) \end{aligned} \tag{6.5}$$

其中， K 是 u的 Lipschitz 常数。这就是公式 (6.1)。

为完成条目 B，我们将注意力转向表达式 $\tau_k|x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}}|$ 当$k = 1,2$。若 $x_k^{\vec{\tau}} \neq y_k^{\vec{\tau}}$，则由方程（6.5）可得

$$\tau_k|x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}}| = \tau_k(x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}})^2 \cdot \frac{1}{|x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}}|} \leq \frac{K d_{CC}(p_{\vec{\tau}}, (p_{\vec{\tau}} \diamond q_{\vec{\tau}})_k)}{|x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}}|}. \tag{6.6}$$

现在，对于 $k = 1,2$，方程（2.1）告诉我们

$$d_{CC}(p_{\vec{\tau}}, (p_{\vec{\tau}} \diamond q_{\vec{\tau}})_k) \approx |x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}}|. \tag{6.7}$$

方程（6.2）得证。

条目 (C)：直接计算可得

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_{\vec{\tau}}(p_{\vec{\tau}}, q_{\vec{\tau}}) = \tau_k(x_k^{\vec{\tau}} - y_k^{\vec{\tau}}) = -\frac{\partial}{\partial y_k}\varphi_{\vec{\tau}}(p_{\vec{\tau}}, q_{\vec{\tau}})$$

因此我们得出

$$\eta_{\vec{\tau}}^+ = \begin{pmatrix} \tau_1(x_1^{\vec{\tau}} - y_1^{\vec{\tau}}) \\ \tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) + f(x_1^{\vec{\tau}})\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \end{pmatrix} \text{ and } \eta_{\vec{\tau}}^- = \begin{pmatrix} \tau_1(x_1^{\vec{\tau}} - y_1^{\vec{\tau}}) \\ \tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) + f(y_1^{\vec{\tau}})\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

由此得到:

$$\big|||\eta_\tau^+||^2 - ||\eta_\tau^-||^2\big| = 2\tau_2\tau_3(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}})(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}})\big(f(x_1^{\vec{\tau}}) - f(y_1^{\vec{\tau}})\big) + \tau_3^2(x_3^{\tau} - y_3^{\vec{\tau}})^2\big(f(x_1^{\vec{\tau}})^2 - f(y_1^{\vec{\tau}})^2\big).$$

Now,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_1 \to \infty} \big|||\eta_\tau^+||^2 - ||\eta_\tau^-||^2\big| &= 2\tau_2\tau_3(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}})(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}})\big(f(x_1^0) - f(x_1^0)\big) + \tau_3^2(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}})^2\big(f(x_1^0)^2 - f(x_1^0)^2\big) \\ &= 2\tau_2\tau_3(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}})(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}})(0) + \tau_3^2(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}})^2(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{\tau_3 \to \infty} \lim_{\tau_2 \to \infty} \lim_{\tau_1 \to \infty} \big|||\eta_\tau^+||^2 - ||\eta_\tau^-||^2\big| = 0.$$

结论随即得证。

条目 (D) 由扭转引理（引理4.1）可得

$$\langle \mathcal{X}^{\vec{\tau}}\eta_{\vec{\tau}}^+, \eta_{\vec{\tau}}^+\rangle - \langle \mathcal{Y}^{\vec{\tau}}\eta_{\vec{\tau}}^-, \eta_{\vec{\tau}}^-\rangle = I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 := \Big\langle \Big(A(p^{\vec{\tau}}) \cdot X^{\vec{\tau}} \cdot A^T(p^{\vec{\tau}})\Big)\eta_{\vec{\tau}}^+, \eta_{\vec{\tau}}^+ \Big\rangle - \Big\langle \Big(A(q^{\vec{\tau}}) \cdot Y^{\vec{\tau}} \cdot A^T(q^{\vec{\tau}})\Big)\eta_{\vec{\tau}}^-, \eta_{\vec{\tau}}^- \Big\rangle,$$

$$I_2 := \langle \mathcal{T}(D_p\varphi_{\vec{\tau}}(p^{\vec{\tau}}, q^{\vec{\tau}}), p^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^+, \eta_{\vec{\tau}}^+\rangle - \langle \mathcal{T}(-D_q\varphi_{\vec{\tau}}(p^{\vec{\tau}}, q^{\vec{\tau}}), q^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^-, \eta_{\vec{\tau}}^-\rangle.$$

和定理（[7, 定理3.2] 给出

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle X^{\vec{\tau}}A^T(p^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^+, A^T(p^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^+\rangle - \langle Y^{\vec{\tau}}A^T(q^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^-, A^T(q^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^-\rangle \\ &\leq \left\langle C \begin{pmatrix} A^T(p^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^+ \\ A^T(q^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^-) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^T(p^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^+ \\ A^T(q^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^-) \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} \tau_1 + 2\delta\tau_1^2 & 0 & 0 & -(\tau_1 + 2\delta\tau_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 + 2\delta\tau_2^2 & 0 & 0 & -(\tau_2 + 2\delta\tau_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 + 2\delta\tau_3^2 & 0 & 0 & -(\tau_3 + 2\delta\tau_3^2) \\ -(\tau_1 + 2\delta\tau_1^2) & 0 & 0 & \tau_1 + 2\delta\tau_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -(\tau_2 + 2\delta\tau_2^2) & 0 & 0 & \tau_2 + 2\delta\tau_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\tau_3 + 2\delta\tau_3^2) & 0 & 0 & \tau_3 + 2\delta\tau_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{B} & -\mathfrak{B} \\ -\mathfrak{B} & \mathfrak{B} \end{pmatrix}.$$

于是我们得到

$$I_1 \leq \left\langle \mathfrak{B} \cdot \left(A^T(p^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^+ - A^T(q^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^- \right), \left(A^T(p^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^+ - A^T(q^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^- \right) \right\rangle. \tag{6.9}$$

利用方程（6.8）和扭转引理4.1，我们有 $A^T(p^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^+$ 由下式给出

$$\begin{pmatrix} \tau_1(x_1^{\vec{\tau}} - y_1^{\vec{\tau}}) \\ \tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) + f(x_1^{\vec{\tau}})\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \\ \tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) + f(x_1^{\vec{\tau}})\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) + f(x_1^{\vec{\tau}})\tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) + f(x_1^{\vec{\tau}})^2\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \end{pmatrix}$$

且 $A^T(q^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^-$ 由下式给出

$$\begin{pmatrix} \tau_1(x_1^{\vec{\tau}} - y_1^{\vec{\tau}}) \\ \tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) + f(y_1^{\vec{\tau}})\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \\ \tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) + f(y_1^{\vec{\tau}})\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) + f(y_1^{\vec{\tau}})\tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) + f(y_1^{\vec{\tau}})^2\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \end{pmatrix}.$$

因此，$A^T(p^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^+ - A^T(q^{\vec{\tau}})\eta_{\vec{\tau}}^-$ 由下式给出

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (f(x_1^{\vec{\tau}}) - f(y_1^{\vec{\tau}}))\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \\ (f(x_1^{\vec{\tau}}) - f(y_1^{\vec{\tau}}))\big(\tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) - \tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}})\big) + (f(x_1^{\vec{\tau}})^2 - f(y_1^{\vec{\tau}})^2)\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \end{pmatrix}.$$

方程（6.9）可改写为

$$\begin{aligned} I_1 \quad \leq \quad & \big(\tau_2 + 2\delta\tau_2^2\big)(f(x_1^{\vec{\tau}}) - f(y_1^{\vec{\tau}}))\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \\ & + \big(\tau_3 + 2\delta\tau_3^2\big)\Bigg((f(x_1^{\vec{\tau}}) - f(y_1^{\vec{\tau}}))\big(\tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) - \tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}})\big) \\ & + (f(x_1^{\vec{\tau}})^2 - f(y_1^{\vec{\tau}})^2)\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \Bigg). \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_1 \to \infty} I_1 \quad \leq \quad & \big(\tau_2 + 2\delta\tau_2^2\big)(f(x_1^0) - f(x_1^0))\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \\ & + \big(\tau_3 + 2\delta\tau_3^2\big)\Bigg((f(x_1^0) - f(x_1^0))\big(\tau_2(x_2^{\vec{\tau}} - y_2^{\vec{\tau}}) - \tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}})\big) \\ & + (f(x_1^0)^2 - f(x_1^0)^2)\tau_3(x_3^{\vec{\tau}} - y_3^{\vec{\tau}}) \Bigg) \\ = \quad & 0 + 0 + 0. \end{aligned}$$

由此我们得出

$$\lim_{\tau_3 \to \infty} \lim_{\tau_2 \to \infty} \lim_{\tau_1 \to \infty} I_1 = 0.$$

为估计项 I_2，注意到根据扭转引理（引理4.1），我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(D_p\varphi_{\vec{\tau}}(p^{\vec{\tau}},q^{\vec{\tau}}),p^{\vec{\tau}}) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})f'(x_1^{\vec{\tau}}) \\ \frac{1}{2}\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})f'(x_1^{\vec{\tau}}) & 0\end{pmatrix}\\ \text{and}\quad \mathcal{T}(-D_q\varphi_{\vec{\tau}}(p^{\vec{\tau}},q^{\vec{\tau}}),q^{\vec{\tau}}) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})f'(y_1^{\vec{\tau}}) \\ \frac{1}{2}\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})f'(y_1^{\vec{\tau}}) & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此，由方程（6.8）可得

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{2}\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})f'(x_1^{\vec{\tau}})\tau_1(x_1^{\vec{\tau}}-y_1^{\vec{\tau}})\Big(\tau_2(x_2^{\vec{\tau}}-y_2^{\vec{\tau}})+f(x_1^{\vec{\tau}})\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})\Big)\\ &\quad -\frac{1}{2}\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})f'(y_1^{\vec{\tau}})\tau_1(x_1^{\vec{\tau}}-y_1^{\vec{\tau}})\Big(\tau_2(x_2^{\vec{\tau}}-y_2^{\vec{\tau}})+f(y_1^{\vec{\tau}})\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})\Big)\\ &= \frac{1}{2}\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})\tau_2(x_2^{\vec{\tau}}-y_2^{\vec{\tau}})\tau_1(x_1^{\vec{\tau}}-y_1^{\vec{\tau}})(f'(x_1^{\vec{\tau}})-f'(y_1^{\vec{\tau}}))\\ &\quad +\frac{1}{2}\tau_3^2(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})^2\tau_1(x_1^{\vec{\tau}}-y_1^{\vec{\tau}})\Big(f'(x_1^{\vec{\tau}})f(x_1^{\vec{\tau}})-f'(y_1^{\vec{\tau}})f(y_1^{\vec{\tau}})\Big)\end{aligned}$$

利用方程（6.2），我们便可计算得出

$$\begin{aligned}\lim_{\tau_1\to\infty} I_2 &= K\tau_3(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})\tau_2(x_2^{\vec{\tau}}-y_2^{\vec{\tau}})(f'(x_1^0)-f'(x_1^0))\\ &\quad +K\tau_3^2(x_3^{\vec{\tau}}-y_3^{\vec{\tau}})^2\Big(f'(x_1^0)f(x_1^0)-f'(x_1^0)f(x_1^0)\Big)\\ &= 0+0\end{aligned}$$

由此即可得出 D 部分。 □

利用引理 6.5，我们现在将通过詹森辅助函数，证明无穷拉普拉斯方程（也称无穷调和函数）的粘性解的比较原理。 [8] 具体而言，对于 $\varepsilon>0$，我们考虑

$$\begin{aligned}F_\varepsilon(\nabla_0 u,(D^2u)^\star) &= \min\{\|\nabla_0 u\|^2-\varepsilon^2,-\langle(D^2u)^\star\nabla_0 u,\nabla_0 u\rangle\}\\ G_\varepsilon(\nabla_0 u,(D^2u)^\star) &= \max\{\varepsilon^2-\|D\nabla_0 u\|^2,-\langle(D^2u)^\star\nabla_0 u,\nabla_0 u\rangle\}\\ \text{and}\quad \mathcal{F}_\infty &= -\langle(D^2u)^\star\nabla_0 u,\nabla_0 u\rangle.\end{aligned}$$

我们注意到， $F_\varepsilon=0$ 的粘性解是 $\mathcal{F}_\infty=0$ 的黏性无穷上解，而 $G_\varepsilon=0$ 的粘性解是$\mathcal{F}_\infty$的黏性无穷下解。

定理 6.6. 设 u 是粘性次解， v 是以下方程的粘性上解

$$F_\varepsilon(\nabla_0 f(p),(D^2f(p))^\star)=0$$

在有界域 Ω 中。此外，假设 u、v 中至少有一个是局部 *Lipschitz*。则若 $u\le v$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，则 $u\le v$ 在 Ω 中成立。

证明。 设对于某个 $p_0\in\Omega$，有 $u(p_0)>v(p_0)$。利用 [2],中的论证，我们可以假设 v 是严格上解，因此利用迭代最大值原理（引理 6.1）以及引理 6.5 的 A 和 C 部分，可得

$$\begin{aligned}0<\mu(p) &\le F_\varepsilon(\eta_{\vec{\tau}}^-,\mathcal{Y}_{\vec{\tau}})\\ 0 &\ge F_\varepsilon(\eta_{\vec{\tau}}^+,\mathcal{X}_{\vec{\tau}})\end{aligned}$$

对于适当的函数 $\mu(p)$。将这两个不等式相减可得

$$0 < \mu(p) \leq \max\{\|\eta_{\bar{\tau}}^-\|^2 - \|\eta_{\bar{\tau}}^+\|^2, \langle \mathcal{X}_{\bar{\tau}}\eta_{\bar{\tau}}^+, \eta_{\bar{\tau}}^+\rangle - \langle \mathcal{Y}_{\bar{\tau}}\eta_{\bar{\tau}}^-, \eta_{\bar{\tau}}^-\rangle\}.$$

该推论由引理 6.5 的 C 部分和 D 部分得出。 □

这个定理可直接推出一个推论。

推论 6.7。设 u 是一个粘性次解，v 是一个粘性上解，满足

$$G_\varepsilon(\nabla_0 f(p), (D^2 f(p))^\star) = 0$$

在有界域 Ω 中。此外，假设 u、v 中有一个是局部 *Lipschitz* 的。那么，如果 $u \leq v$ 在 $\partial\Omega$ 上，则 $u \leq v$ 在 Ω 中。

现在我们陈述一个引理，给出解关于 $\varepsilon \to 0$ 的估计。证明与 Jensen [8] 所证明的欧几里得版本类似，故略去。

引理 6.8. 设 $g \in W^{1,\infty}(\Omega)$。设 u^ε 和 u_ε 分别是 $F_\varepsilon = 0$ 和 $G_\varepsilon = 0$ 的解，且在 $\partial\Omega$ 上等于 g。给定 $\delta > 0$，存在一个 $\varepsilon > 0$，使得

$$u_\varepsilon \leq u^\varepsilon \leq u_\varepsilon + \delta.$$

接着，我们结合定理 6.6、推论 6.7 和引理 6.8，得到黏性无穷调和函数的比较原理。证明是标准论证，故略去。 [2]

定理 6.9. 设 u 是区域 Ω 中的黏性无穷次调和函数，v 是黏性无穷超调和函数，且若 $p \in \partial\Omega$,

$$\limsup_{q \to p} u(q) \leq \limsup_{q \to p} v(q)$$

其中两边不同时为 $-\infty$ 或 $+\infty$。则 $u \leq v$ 在 Ω 中。

推论 6.10. 设 Ω 是 $\mathbb{M}$ 中的有界域，且 g 是 $\partial\Omega$ 上的连续函数。则狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0 & in\ \Omega \\ u = g & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

有唯一的粘性解 u。

References

[1] Bella ¨ ´ *Sub-Riemannian Geometry* ¨ ´ ¨ ıche, Andre.《次黎曼几何中的切空间》。载于；Bellaıche, Andre.、Risler, Jean-Jacques. 编；Progress in Mathematics；Birkhauser：瑞士巴塞尔。1996；第 144 卷，1–78。[2] Bieske, Thomas.《海森堡群上的无穷调和函数》。Comm. in PDE. **2002**，*27* (3&4)，727–762。[3] Bieske, Thomas.《广义 Grushin 空间上的 Lipschitz 延拓》。Mich. Math J. **2005**，*53* 1 3 31( )，–。[4] Bieske, Thomas.《Carnot 群中的次黎曼最大值原理及其在 p-拉普拉斯算子中的应用》。Ann. Acad. Sci. Fenn. **2012**，*37*，119–134。[5] Bieske, Thomas.《Grushin 型空间中的 ∞ x **2016**, ( )-方程》。*2016* 125 1 13 Electron. J. Diff. Eqns. ( )，–。[6] Capogna, L., Giovannardi, G., Pinamonti, A., Verzellesi, Simone.《Carnot–Carath´eodory 空间中的渐近 p-泊松方程作为 $p \to \infty$》。Math. Ann. **2024**，*390*，2113–2153。https://doi.org/10.1007/s00208-024-02805-z [7] Crandall, Michael.; Ishii, Hitoshi.; Lions, Pierre-Louis.《二阶偏微分方程粘性解指南》。Bull. of Amer. Math. Soc. **1992**，*27* (1)，1–67。

[8] Jensen, Robert.《Lipschitz 延拓的唯一性：最小化梯度的上确界范数》。《纯粹与应用数学档案》**1993**，*123*，51–74。

Thomas BieskeDepartment of Mathematics and Statistics、
University of South Florida、 Tampa、 FL33620-5700、 USA*Email address*:
tbieske@usf.eduFrederic BowenCollege of Arts and Sciences、
University of South Florida、 Tampa、 FL 33620-5700、 USA*Email address*： bif@usf.edu