arXiv:2601.19873v1 [math.FA] 27 Jan 2026

关于空间 $C(X)$ 和商射影空间的对偶空间与双对偶中的弱*-基本序列

To the memory of our friend Professor Steven A. Saxon.

Jerzy K.akol[1†]、Manuel Lopez-Pellicer[2*†]、Wies-law ´Sliwa[3†]

[1*]亚当·密茨凯维奇大学数学与信息学学院，Uniwersytetu Poz na´nskiego 4，Pozna´n，61-614，波兰。[2]纯粹与应用数学研究所，瓦伦西亚理工大学，Camino de Vera s/n，瓦伦西亚，46022，西班牙。[3]精密与技术科学学院，热舒夫大学，al. Tadeusza Rejtana16C, Rzesz´ow，35-310，波兰。

通讯作者。电子邮箱：mlopezpe@mat.upv.es；其他作者：kakol@amu.edu.pl；sliwa@amu.edu.pl;wsliwa@ur.edu.pl；

†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

我们证明，对于无限 Tychonoff 空间 X 和 Y，$C_k(X \times Y)$ 的弱*-对偶空间包含一个基本序列；此外，$C_k(X)$ 的弱*-双对偶也包含这样的序列。当 X 和 Y 是无限紧空间时，我们给出一个具体序列 (μ_n)，其元素是定义在 $X \times Y$ 上的有限支撑符号测度，并满足定量的小矩形估计；我们还证明，(μ_n) 的每个子列都存在一个进一步的子列，该子列是强正规的，并且构成巴拿赫空间 $C(X \times Y)$ 的对偶空间 $C(X \times Y)^*$ 中的弱*-基本序列。我们还研究商射影空间这一类中的 Fr´echet 局部凸空间的弱*-基本序列问题，并证明，对于每个商射影空间 E，其双对偶 E^{**} 都包含一个弱*-基本序列；与此同时，一个长期悬而未决的问题是，每个无限维巴拿赫空间的对偶空间是否都包含一个弱*-拓扑下的基本序列。文中还给出了若干例子并提出了一些开放问题，特别是关于空间 $C(X)$ 以及 Fr´echet 空间的归纳极限的问题。

关键词：弱*-基本序列、巴拿赫空间、商射影空间、弗雷歇局部凸空间、$C(X)$ 空间

1 引言

对于局部凸空间（lcs） E，我们将其对偶空间记作 E^*，并分别用 $\sigma(E, E^*)$和 $w^* = \sigma(E^*, E)$表示弱拓扑和弱* 拓扑。我们将E的强对偶记作 E_b^*，即赋予强拓扑 $\beta(E^*, E)$的 E^*。

e_n中的一个序列（ E ）称为 ***Schauder*** 基，如果每个 $x \in E$ 都有唯一的表示 $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$，且该表示在 E 的给定拓扑下收敛，并且系数泛函 $b_n^* : E \to \mathbb{R}$，$b_n^*(x) = b_n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 都是连续的。如果一个序列是其闭线性张成的 Schauder 基，则称其为基本序列 。

对偶空间中弱*-基本序列的存在性，自然与可分商空间问题密切相关。对于 Fr´echet 空间（即度量化且完备的局部凸空间），Eidelheit 的经典定理表明，每个非赋范 Fr´echet 空间都有一个同构于 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$的商空间；因此，这类空间的对偶空间包含一个弱*-基本序列。相比之下，巴拿赫空间的相应结论仍未解决：每个无限维巴拿赫空间的对偶空间是否必然包含一个弱*-基本序列，至今仍是开放问题；并且存在一些桶状局部凸空间（不具有 $C_k(X)$ 或 $C_p(X)$ 的形式），其对偶空间不含弱*-基本序列，见下文参考文献。

本文建立了若干自然函数空间对偶空间中的弱*-基本序列。对于任意无限的 Tychonoff 空间 X 和 Y，我们证明 $C_k(X \times Y)^*$包含一个弱*-基本序列，而 $C_k(X)^{**}$ 也包含一个。在紧致情形下，我们利用μ_n上的有限支撑符号测度$X \times Y$(在 [1, 定理 1]中得到)构造出的显式序列μ_n)，它满足定量的小矩形估计；由此可知，*)的每个子列都存在一个强正规子列，该子列是弱-基本的。

我们还讨论商射影空间这一类空间。回顾一下，弗雷歇空间 E 是一个商射影空间，如果对于 E 上的每个连续半范数 p，赋予商拓扑的商空间 $E/\ker p$ 都是巴拿赫空间。我们证明，对于每个商射影空间 E，其双对偶E^{**} 都包含一个弱*-基本序列。

最后，受这些结果的启发，我们讨论弗雷歇空间的归纳极限。如果E 是一个弗雷歇空间序列的严格归纳极限，那么 E^* （赋予弱*拓扑）包含一个 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的补子空间，因此也包含一个弱*-基本序列。这引出了一个问题：对于任意的（LF）空间，是否也能得出相同的结论?

2 预备知识

一个长期存在的问题是：每个无限维巴拿赫空间的对偶空间是否都包含一个在 w^*拓扑下的基本序列（例如，参见 [2] 及其中的参考文献，以及 [3]）。在弗雷歇空间情形下，这个问题与可分商空间密切相关，并且有一个特别清晰的刻画。事实上，在 [4, 命题 1] ´中，Sliwa 和 W´ojtowicz 证明了以下定理，另见 [5]。

定理 1 (´Sliwa–W´ojtowicz) *For a lcs E consider the following statements:*

1. E 拥有无限维可分商空间。*2.* E 拥有具有 ***Schauder*** 基的无限维可分商空间。

3. （$E^*, \sigma(E^*, E)$）具有一个基本序列。
4. 在 E 中，存在一个严格递增的闭向量子空间序列，其并在 E 中稠密。

Then (2) ⇒(3) ⇒(4) ⇔(1). *Moreover, all statements are equivalent if E is a Fréchet lcs.*

定理 1 推广了 Johnson 和 Rosenthal 关于可分巴拿赫空间的经典结果 [6, 定理 III。1]它也适用于所有非赋范的 Fr´echet 局部凸空间，因为这类空间有一个与 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 同构的商空间，该结果由 [7]给出。对于巴拿赫空间，情况要微妙得多；尽管如此，定理 1仍适用于各种具体类别，例如 Lipschitz 自由空间情形，参见 [8]。

(A) 连续函数空间。我们的第一个主要结果刻画了广泛的 C-空间族，其对偶空间（或双对偶）中包含弱*-基本序列。

定理 2 *Let X and Y be infinite Tychonoff spaces. Then:*

1. $C_k(X \times Y)$ 的对偶空间包含一个弱*-基本序列。*2.* $C_k(X)$ 的双对偶包含一个弱*-基本序列。*3.* 若 $C_k(X)$ 是桶状的，则 $C_k(X)$ 的对偶空间包含一个弱*-基本序列。*4.* 若 X 包含一个在 X 中 C^*嵌入的无限离散子集，则 $C_k(X)$ 的对偶空间包含一个弱*-基本序列。*5.* 若 X 和 Y 是紧的，且 (μ_n) 是下文定理 *3* 中的序列，则 (μ_n) 的每个子列 (μ_{k_n}) 都包含一个强正规子列，该子列是 $C(X \times Y)^*$ 中的弱*-基本序列。

第 (5) 项依赖于 ([1,定理 1]) 中一个由有限支撑测度构成的具体序列；为方便起见，我们在此陈述所需的结论：

定理 3 (Kakol-Sliwa) : *Let X and Y be infinite compact spaces and let $n \in \mathbb{N}$. Let $K_n \times L_n$ be a finite subset of $X \times Y$ such that $|K_n| = 2^n$ and $|L_n| = n$. Let φ_n : $K_n \to \{-1, 1\}^{L_n}$ be a bijection. Then*

$$\mu_n := \frac{1}{n2^n} \sum_{(s,j) \in K_n \times L_n} \varphi_n(s)(j)\, \delta_{(s,j)}$$

is a finitely supported signed measure on $X \times Y$ such that

$$(1)\ \ \|\mu_n\| = 1 \text{ and } \operatorname{supp}(\mu_n) = K_n \times L_n;$$

$$(2)\ \ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} < \sup_{A \times B \subset X \times Y} |\mu_n(A \times B)| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$(3)\ \ |\mu_n(f \otimes g)| \leq \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \|f \otimes g\|_\infty, \text{for all } (f, g) \in C(X) \times C(Y),$$

where $f \otimes g : X \times Y \to \mathbb{R}$, $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$.
In particular, $\mu_n(h) \to_n 0$ for every $h \in C(X \times Y)$.

在第 3 节中，我们考察其他几类空间 $C_k(X)$ 和 $C_p(X)$，它们的对偶空间含有弱*-基本序列，见定理 17。

Remark 1 回顾一下，每个可度量的 $C_k(X)$ 都是桶状空间；例如，这可由 [9, 定理 10.1.12] 得出。也存在一些非桶状空间 $C_k(X)$，其满足定理 2(3) 的结论（见下文的例 2 ）。

(B) 巴拿赫空间输入与商射影空间。 Josefson–Nissenzweig 定理给出了巴拿赫空间对偶空间中的正规序列（见 [10]）。我们还将使用 [11] 中引入的更强概念：若序列 $(y_n^*) \subset E^*$ 满足 $\|y_n^*\| = 1$（ $n \in \mathbb{N}$ ），则称其为强正规，并且

$$\left\{ x \in E : \sum_n |y_n^*(x)| < \infty \right\} \text{ is dense in } E.$$

另一方面，Argyros、Dodos 和 Kanellopoulos 证明了以下重要定理 [12,定理 15]:

定理 4 *The dual space E^* of an infinite-dimensional Banach space E admits an infinite-dimensional separable quotient.*（Argyros–Dodos–Kanellopoulos）

结合定理1 与4 可立即得到:

推论 5任意无限维巴拿赫空间的双对偶都含有一个弱*-基本序列。

我们将推论5 从巴拿赫空间推广到商射影空间这一类空间:

定理 6 *The bidual of any quojection E admits a w^*-basic sequence.*

定理 6 的论证涉及严格归纳极限，并特别引出了一个问题：每个（LF）空间的对偶空间是否都存在弱*基本序列。

问题 7 证明推论 5 ，但不得使用定理 4。

在 [13]，中，我们给出了一个桶状空间的例子 E ，它没有无限维可分商空间。由定理 1 可知，* 的弱对偶空间 E 不存在弱*基本序列。这引出了以下问题:

问题 8 刻画那些局部凸空间 E ，使得其 E^* 存在弱*基本序列。

Remark 2 据我们所知，尚不清楚任意无限维可分局部凸空间 E 的对偶空间 E^* 是否包含弱* 基本序列。

若 Fr´echet 局部凸空间 E 满足：对 E上的每个连续半范数 p ，商空间 $E/\ker p$ 赋予商拓扑后是赋范的，则称其为 商射影空间 。它

容易看出， E 是商射影空间，当且仅当 $E = \mathrm{proj}_n(E_n, R_n)$，其中每个$E_n$ 都是巴拿赫空间，且每个粘合映射 $R_n : E_{n+1} \to E_n$ 都是满射；此时我们也记作 $E = \mathrm{quoj}_n(E_n, R_n)$。任意巴拿赫空间的可数乘积都是商射影空间，参见 [9, 8.4.28]（例如，$C_k(\mathbb{R}) \simeq \prod_{n\in\mathbb{N}} C([-n, n])$）；但也存在并非巴拿赫空间可数乘积的商射影空间（Moscatelli，参见 [9,例 8.4.37]）。更多例子还可参见 [14], [15], [16] 和 [9, 例 8.4.34]。

最后回顾一下， φ 是一个带有最强局部凸拓扑的$\aleph_0$维向量空间；等价地，原点处的邻域基由所有绝对凸吸收集组成。于是， φ 上的每个线性泛函都是连续的，并且 φ中的每个有界集 B 都是有限维的（即 span(B) 是有限维的），参见 [17, 第 2 章 4] 或[9, 0.3.1]。

定理 2 的证明以及关于空间 $C_k(X)$,$C_p(X)$

记 $C_p(X)$为 Tychonoff 空间X 上带逐点拓扑的连续实值函数空间。当且仅当 X 的每个函数有界子集都是有限集时，空间 $C_p(X)$ 才是桶状的，参见 [18, 推论 11.7.6]。

回顾一下，若拓扑空间 X 上的每个实值连续函数都是有界的，则称其为伪紧空间。已知，当且仅当$C_p(X)$含有空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的一个（补）拷贝时， X 不是伪紧的；当且仅当 $C_k(X)$ 含有 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的一个（补）拷贝时亦然，参见 [19, 第 4], 节或 [17, 定理 2.6.3], [13,定理 3.1]。于是， $C_p(X)$的弱*-对偶空间含有空间 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^* = \varphi$的一个拷贝；注意，此处 φ 的 Hamel 基同时也是 Schauder 基。

Remark 3 在 [13] 中，我们给出了一个桶状局部凸空间 E，它没有无限维可分商空间；因此，根据定理 E，它不同构于任何空间 $C_k(X)$或 $C_p(X)$，见定理2(3)，另见[20,定理 2]。

现在我们可以证明定理2了。不过，我们需要以下由 ´Sliwa [11, 给出的结果，即定理 1]。

定理 9 *Any strongly normal sequence y_n in the dual E^* of a Banach space* (´Sliwa) () *E contains a weak*-basic subsequence.*

Proof of Theorem 2 (1) 根据 [21, 推论 1，10] 空间 $C_k(X \times Y)$有一个商空间同构于 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 或 c_0 或$(c_0)_p$, 其中$(c_0)_p = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ x_n \to 0\}$ 赋予逐点拓扑。由于上述商空间存在绍德基，我们应用定理1。

(2) 根据 Warner [22]，空间 $C_k(X)$ 存在有界集的基本序列，当且仅当对于 X，满足以下条件：给定 X 中任意一个两两不交的非空开子集序列 $(G_n)_n$，存在一个紧集 $K \subset X$，使得 $\{n \in \mathbb{N} : K \cap G_n \neq \emptyset\}$ 是无限的。我们称 X 为 Warner 有界，当上述条件成立时。

(a) *Assume that X is Warner bounded.*那么根据 [13, 定理 3。5] 空间的强对偶 $C_k(X$包含空间 ℓ_1 的一个补子空间。

(b) *Assume that X is not Warner bounded*。因此，空间 $C_k(X)$ 的强对偶包含 φ 的一个补子空间，这同样由 [13, 定理 3.5] 得出。

接下来，对于这两种情况，我们应用定理1 来完成第 (2) 项的证明。

(3) 回顾一下， $C_k(X)$ 是桶状的，当且仅当 X 的每个函数有界（=有界）子集都是相对紧的，参见 [9, 定理 10.1.20]。如果 $C_k(X)$ 是巴拿赫空间，那么 $C_k(X)$ 有一个同构于 c_0 或 ℓ_2 的商空间，参见 [23]。如果 $C_k(X)$ 不是巴拿赫空间，那么 X 不是伪紧的。因此， $C_k(X)$ 包含 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的一个补子空间。对于这两种情况，定理 1 都完成了证明。

(4) 如果 X 包含一个无限紧子集 K，那么限制映射 $T\colon C_k(X) \to C(K)$ 是连续开映射（[21, 命题 2.9]），且 $C(K)$ 通过连续开满射映到 ℓ_2 或 c_0。然后我们应用定理 1。现在假设 X 的所有紧子集都是有限的。如果 X 是伪紧的，我们应用 [24, 定理 1]，得到 $C_k(X) = C_p(X)$ 有一个带 Schauder 基的商空间，该商空间同构于 $(\ell_\infty)_p = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : sup_n|x_n| < \infty\}$，其中赋予逐点拓扑；然后我们再次应用定理 1。最后，如果 X 不是伪紧的，空间 $C_k(X)$ 包含 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的一个补子空间，因此定理 1 适用。

(5) 对于 $X \times Y$ 中任意两个不同的点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，都有 $x_1 \neq x_2$ 或 $y_1 \neq y_2$。因此，存在一个元素 $f \in C(X)$，使得 $f(x_1) = 1$ 且 $f(x_2) = 0$；或者存在 $g \in C(Y)$，使得 $g(y_1) = 1$ 且 $g(y_2) = 0$。因此， $f \otimes \mathbf{1}_Y$ 或 $\mathbf{1}_X \otimes g$ 能将点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 分离。

因此，子代数 $\mathcal{A}{:=}\mathsf{lin}\ \{f \otimes g\colon (f, g) \in C(X) \times C(Y)\}$ of $C(X \times Y)$ 能将 $X \times Y$ 中的点分离。利用 Stone-Weierstrass 定理，我们推得 $\mathcal{A}$ 在 $C(X \times Y)$ 中稠密。

设 (μ_n) 是定理 3 中提到的一个序列，并设 (μ_{k_n}) 是 (μ_n) 的一个子列。设 (s_{k_n}) 是 (k_n) 的一个子列，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s_{k_n}}} < \infty.$$

于是（应用定理 3）我们推得，对所有（f， g）$\in C$（X）$\times C$（Y），有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_{s_{k_n}}(f \otimes g)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{s_{k_n}}} \|f \otimes g\|_\infty < \infty.$$

由此可得，对每个 $h \in \mathcal{A}$， $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_{s_{k_n}}(h)| < \infty$。因此，序列 $(\mu_{s_{k_n}})$ 是强正规序列，即 $\{f \in C(X \times Y)\colon \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_{s_{k_n}}(f)| < \infty\}$ 在 $C(X \times Y)$ 中稠密。

根据定理 9 巴拿赫空间 E 的对偶空间中的每个强正规序列（y_n^*）都包含一个子列，该子列是 *-基本序列，且位于 E的对偶空间中。利用此定理，我们完成了对本情形 $E = C$（$X \times Y$）的证明。□

推论5 也适用于推出以下结论

推论 10 设 E 是一个包含无限维补巴拿赫子空间 F 的无限维局部凸空间。那么， E 的强二重对偶 E_b^{**} 存在一个弱*-基本序列。

*Proof*由于 F是 E的补空间，因此 F_b^*的强对偶 F是 E_b^*的强对偶 E的补空间，见第 [25, 页 287]。令 $P\colon E_b^* \to F_b^*$ 为一个连续线性投影。对巴拿赫空间 4 应用定理 F_b^* 以及 Johnson-Rosenthal [6, 定理 2]，可得

存在一个连续开线性满射 $T: E_b^* \to G$ 映射到一个带有 Schauder 基的无限维可分巴拿赫空间 G。现在可应用定理 1。□

在 [26, 定理 32]K.akol 和 Saxon 证明了一个定理，指出弱*对偶空间 $C_p(X)$ 的每个无限维子空间都存在一个 $\aleph_0$维商空间。不过，目前仍不清楚是否任意空间 $C_p(X)$ 都存在无限维可分商空间（即使在无限紧 X的情形下也是如此）。尽管如此，我们有定理 2(3) 的以下变体。

推论 11 若 $C_p(X)$ 是定义在无限 Tychonoff X 上的桶状空间，则 $C_p(X)$ 的对偶空间含有一个弱*-基本序列。

Proof 分两种情况讨论。(a) X 是 $pseudocompact$。于是，$C(X)$ 上的紧开拓扑被巴拿赫拓扑 ξ 支配，且 $(C(X)\ \xi)$ 与巴拿赫空间 $C(\beta X)$ 同构。因此，恒等映射 $I: C_p(X) \to (C(X)\ \xi)$ 的图是闭的，所以根据闭图定理，见 [9, 定理 4.1.10], 映射 I 连续，这意味着 $C_p(X)$ 是巴拿赫空间。因此 X 是有限的，矛盾。(b) X 是 $not\ pseudocompact$。那么 $C_p(X)$ 有一个与 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$同构的商空间。接着应用定理 1。□

定理2 还可能表明如下结论

问题12 对于任意无限紧空间 X， $C_p(X)^*$ 是否存在弱*-基本序列?

问题13 对于任意无限 Tychonoff 空间X， $C_k(X)^*$ 是否存在弱*-基本序列?

Remark 4 注意，在问题13 中，只需考虑以下情形：的每个紧子集都是有限集，且 X 是伪紧的。其余情形已由前面的结果涵盖。因此，考虑到定理2(4)，我们不禁会问：对于每个紧子集都是有限集的任意伪紧空间 X，其中是否存在一个无限离散子集 X，该子集是 C^*-嵌入的? 答案是否定的。这个例子由 Reznichenko 教授惠赐第一作者。

Example 1 在 [27] 中，Tkachenko 和 Reznichenko 引用了 [28] 中构造的空间X 的以下性质：

1. X 是一个基数为连续统的伪紧空间，并且 X 的每个基数小于连续统的子集都是闭且离散的。 2. βX 同胚于一个不可数权的拓扑完备正则立方体，并且是一个杜贡吉紧空间。 3. βX 中 X 的每个可数子集的闭包都是一个可度量紧空间。

因此 X 不含任何 X 中 C^*嵌入的可数离散子集，且 X 的每个紧子集都是有限集。

还要注意，定理2 (3) 的结论也适用于不可分空间$C_k(X)$ 不具有桶状性。

Example 2 设 X 是一个伪紧空间，使得 X 包含 $\mathbb{N}$ 的一个副本，并且包含于 $\beta\mathbb{N}$中，且 X 的每个紧子集都是有限的，参见 [29]。那么 $C_k(X) = C_p(X)$ 不是桶状的。事实上，若 X 是伪紧的，则 $C_k(X)$ 具有由范数 $\|f\| = sup_{x\in X}|f(x)|$. 生成的更强巴拿赫拓扑。桶状空间与巴拿赫空间之间的闭图定理 [9, 定理 10.1.10] 表明， X 必定是有限的，这就产生了矛盾。由于 X 是包含一个无限离散子集 C^*且嵌入于 X中的伪紧空间，我们再次应用[24, 定理 1] ，得到 $C_p(X)$ 有一个商空间同构于 $(\ell_\infty)_p$ 且具有 Schauder 基；关于这种情形，另见 [21, 命题 3.1 (4)] 。现在定理 1 适用。还请注意，$C_k(X)$ 不可分，否则 X 将具有一个较弱的可度量化拓扑，继而根据 [30, IV.5.10，第 156] 页，我们可得出 X 是可度量化且紧的，这是不可能的。

应用前面的事实，我们注意到以下内容

推论 14 设 X 是一个无限 Tychonoff 空间。若 $C_k(X)$ 不存在带有 Schauder 基的无限维商空间，则 X 是伪紧的，并且 X 的每个紧子集都是有限集。例 2 表明，反向推论一般不成立。

推论 15 设对于一个无限 Tychonoff 空间 X，空间 $C_p(X)$ 是可分的。那么

1. $C_k(X)$ 存在一个与 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 或 c_0 或 ℓ_2.同构的无限维商空间2. $C_p(X)$ 存在一个与 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 或 $(c_0)_p = \{(x_n) \in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 同构的无限维商空间： $x_n \to 0\}$ 赋予来自 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$的乘积拓扑。

Proof 由于 $C_p(X)$ 是可分的， X 可赋予一个更弱的可度量可分拓扑， [31, 推论 4.2.2]。

(1) *If X is pseudocompact*，再应用一次 [30, IV.5.10，第 156] 页，我们推得 X C_k X c_0 *If X is not* 是一个可度量紧空间，因此 ( ) 有一个与 . *pseudocompact* C_k X $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 同构的商空间。于是 ( ) 包含 . 的一个可补子空间。

(2 X *not pseudocompact* C_p X X *is*) 若 *pseudocompact* X C_p X 是，则 ( ) 包含 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的补子空间。若， 是紧可度量化的。于是 ( ) 包含 $(c_0)_p$ 的补子空间，见 [32]。□

问题16 假设 $C_k(X)$（分别是 $C_p(X)$）有一个无限维可分商空间。那么 $C_k(X)$（分别是 $C_p(X)$）是否有一个带 Schauder 基的无限维商空间?

在 [24] 中，我们研究了空间 $C_p(X)$ 是否具有无限维可度量化商空间的问题。这也促使我们提出了与问题17 、问题12、问题16 以及推论15相关的定理。

定理 17 *Let X be an infinite Tychonoff space.*

1. 若空间 $C_p(X)$ 有一个无限维可度量化商空间 $C_p(X)/Y$，则$C_p(X)/Y$有 *Schauder* 基，且其对偶空间 $C_p(X)^*$ 有一个弱*-基本序列。*2.* 若空间 $C_k(X)$ 有一个无限维可度量化商空间 $C_k(X)/Y$，则$C_k(X)$ 也有一个带 *Schauder* 基的无限维可度量化商空间 $C_k(X)/Z$ ，且 $C_k(X)^*$ 有一个弱*-基本序列。

证明中需要以下两个补充引理，它们或许是已知的，但不易查证。

引理 18 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的线性子空间 Y 在 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 中稠密，当且仅当对每个有限集合 $F \subset \mathbb{N}$，投影 π_F: $Y \to \mathbb{R}^F$ 都是满射，其中 π_F: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^F$是由 $\pi_F(x) = (x_n)_{n\in F}$ 给出的典范投影。

*Proof*设 $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 稠密。由于 π_F 连续， $\pi_F(Y)$ 在 $\pi_F(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{R}^F$ 中稠密且为有限维。因此 π_F 是满射。反过来，假设对每个有限的 $F \subset \mathbb{N}$，都有 $\pi_F(Y) = \mathbb{R}^F$。令 $U = \pi_F^{-1}(V)$ 为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的乘积拓扑中的一个开基本集，其中 $V \subset \mathbb{R}^F$ 为开集，且 $F \subset \mathbb{N}$ 是某个有限集合。于是 $V \cap Y \neq \emptyset$, 因此 Y 稠密。□

引理 19 每个稠密向量子空间 Y 都存在一个 Schauder 基 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 。

*Proof*我们通过归纳法在 Y中构造一个序列 (b_n)，使其满足条件 $\pi_k(b_n) = \delta_{kn}$，对所有 $1 \le k \le n$ 均成立。对于 $n = 1$，由引理 18 可知 $\pi_1(Y) = \mathbb{R}$，因此我们可以找到 $b_1 \in Y$，使得 $\pi_1(b_1) = 1.$。假设已找到 b_1、b_2、$\ldots b_{n-1}$。由引理 18 可知，对于 $F = \{1, 2, \ldots, n\}$，映射 π_F: $Y \to \mathbb{R}^n$ 是满射。因此存在 $b_n \in Y$，使得

$$\pi_F(b_n) = (0, 0, \ldots, 1).$$

我们证明 $(b_n)_n$ 是一个 Schauder 基。设 $y = (y_n) \in Y$。定义标量 $(a_n)_n$ 如下:

$$a_1 = y_1,\ a_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \pi_n(b_k),\ n > 1.$$

令 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n.$。固定 $m \in \mathbb{N}$。对于所有 $N \ge m$，我们有

$$\pi_m(S_N) = \sum_{n=1}^{N} a_n \pi_m(b_n) = \sum_{n=1}^{m} a_n \pi_m(b_n),$$

因为对于所有 $n > m$， $\pi_m(b_n) = 0$。注意，对于所有 $N \ge m$， $\pi_m(S_N) = y_m$。事实上，对于 $m = 1$，我们有 $\pi_1(S_N) = a_1\pi_1(b_1) = a_1 = y_1.$。假设该结论对所有 $k < m.$ 都成立。那么

$$\pi_m(S_N) = \sum_{n=1}^{m-1} a_n \pi_m(b_n) + a_m \pi_m(b_m)$$

$$= \sum_{n=1}^{m-1} a_n \pi_m(b_n) + (y_m - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \pi_m(b_k)).$$

这意味着对于每个 $m \in \mathbb{N}$， $\pi_m(S_N) \to_N y_m$。因此，在乘积拓扑中有 $S_N \to_N y$。系数的唯一性由三角结构推出： a_n 由 $\pi_n(y)$ 和前面的系数唯一确定。

最后，我们证明（对 n 进行归纳）由 $b_n^*(y) = a_n$ 定义的基本投影 $b_n^* : Y \to \mathbb{R}$ 连续。对于 $n = 1$， $b_1^*(y) = \pi_1(y)$。由于 π_1 连续，它在 Y 上的限制也连续。对于 $n > 1$

$$b_n^*(y) = \pi_n(y) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k^*(y)\pi_n(b_k),$$

这表明 b_n^* 连续 . □

定理 17 与定理 1 共同引出了下一个

问题 20 若 $C_p(X)$ 有一个无限维可分商空间，那么它是否也有一个无限维可度量化商空间?

如果 $C_p(X)$ 本身可分，则答案是肯定的，见推论 15。

Proof of Theorem 17 (1) 设 $C_p(X)/Y$ 是 $C_p(X)$ 的一个无限维可度量化商空间。由于 $C_p(X)$ 和 $C_p(X)/Y$ 分别赋有其弱拓扑，可度量空间 $C_p(X)/Y$ 嵌入 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$。因此， $C_p(X)/Y$ 是可分的。我们可以假设 $E = C_p(X)/Y$ 是 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的一个稠密子空间（因为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的每个闭的无限维向量子空间都与 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$同构，见 [9, 推论 2.6.5]）。应用引理 19 可得 $C_p(X)/Y$ 有 Schauder 基。最后，我们应用定理 1。

（2）如果 X 的每个紧子集都是有限集，那么 $C_p（X）= C_k（X）$，于是可应用（1）。如果 X 包含一个无限紧子集，那么我们已经知道 $C_k（X）$有一个与 c_0 或 ℓ_2 同构的商空间，此时定理 1 同样适用。□

我们应用上述论证，得出以下 内容

推论 21 如果 X 是一个 Tychonoff 空间，且 $C_p(X)$ 的对偶空间含有一个弱*-基本序列，那么 $C_k(X)$ 的对偶空间也具有相同性质。

受上述关于空间 $C_k(X)$ 和 $C_p(X)$ 的结果启发，我们可以提出以下

问题 22 有限维的可度量化可分局部凸空间是否存在一个具有 Schauder 基的无限维商空间?

众所周知，Tychonoff 空间 X 是可分的，当且仅当 $C_p(X)$ 具有一个更弱的可度量化（可分）局部凸拓扑，记作 ξ，见 [31,推论 4.3。3]。根据 [33, 定理 1。5] ($C_p(X)$ ξ) 的完备化同构于 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$。应用引理19 ，我们得到以下结论

推论 23 Tychonoff 空间 X 可分，当且仅当 $C_p(X)$ 具有一个较弱的、可度量化的局部凸拓扑，且有 Schauder 基。

定理的证明 6

设 E 是一个向量空间，且 (E_n, τ_n) 是 E 的一个严格递增的向量子空间序列，覆盖 E，其中每个 E_n 都是赋予拓扑 τ_n的 Fr´echet（Banach）空间，并且 $\tau_{n+1}|E_n \leq \tau_n$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$均成立。那么在 E 上存在最细的局部凸拓扑 τ，使得 $\tau|E_n \leq \tau_n$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$均成立；此时空间 (E, τ) 称为一个 (LF)-空间 （一个 (LB)-空间）。

若 $\tau_{n+1}|E_n = \tau_n$对每个 $n \in \mathbb{N}$都成立，则 $\tau|E_n = \tau_n$对每个 $n \in \mathbb{N}$都成立，而 (E, τ) 称为 (E_n, τ_n) 的严格归纳极限，例如参见 [9]。回顾一下，每个 (LF)- 空间都是桶状的，参见 [9, 命题 4.2.6]。经典空间 $D^m(\Omega)$（严格的 (LB)-空间）、$D(\Omega)$、 $D(\mathbb{R}^N)$（严格的 (LF)-空间）展示了上述各类。

为了证明 定理 6 我们还需要以下命题 。

命题

24 *The weak*-dual E^* of a strict LF -space contains a basic sequence. In (), fact it contains a complemented copy of $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Proof 根据 [34, 定理 1]，严格的（LF）空间 E 包含空间φ的一个补子空间。因此存在连续线性映射 $i : \varphi \to E$和 $P : E \to \varphi$，使得 $P \circ i = id_\varphi$.

取伴随映射后，我们得到连续映射 $P^* : (\varphi^*, \sigma(\varphi^*, \varphi)) \to (E^*, \sigma(E^*, E))$以及 $i^* : (E^*, \sigma(E^*, E)) \to (\varphi^*, \sigma(\varphi^*, \varphi))$，满足 $i^* \circ P^* = id_{\varphi^*}$。因此， P^*是一个拓扑嵌入，且 $P^*(\varphi^*)$在 E的弱*-对偶空间中是补的（特别地，是闭的）。

最后， φ^* 与 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 同构，而 $\sigma(\varphi^*, \varphi)$对应于$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$上的乘积拓扑。单位向量在此拓扑下构成 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的 Schauder 基，因此它们在P^* 下的像是 E^*中的 w^*-基本序列。这也表明， E^* 的弱*-对偶空间包含 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$的一个补子空间。□

在 [35, 定理 3], 中，Saxon 和 Narayanaswami 证明了，每个（LF）空间 E 都存在一个无限维可分商空间。如果 E 是严格（LF）空间，那么E 含有一个 φ（[34, 定理 1]）的补子空间。上述事实与定理1 共同构成了.....的动机

问题25 每个（LF）空间的对偶空间都存在弱*-基本序列吗?

Proof of Theorem 6 如果 E 是一个巴拿赫空间，我们应用推论5。

现在假设 E 是一个 Fr´echet 局部凸空间，它是一个商射影空间，并且 E 不可赋范。由于 E 是一个商射影空间，空间 E 是巴拿赫空间 $E = quoj_n(E_n, R_n)$的严格射影极限。赋予强拓扑 $\beta(E^*, E)$的对偶空间 E^*，根据 [9, 命题 8.4.30]，是巴拿赫空间序列$(E_n^*, \beta(E_n^*, E_n))$的严格归纳极限。

注意，序列 (E_n^*) 确实是 *strictly increasing*。事实上，由于拓扑$\beta(E^*, E)$ 是桶状的（因为它是巴拿赫空间 $(E_n^*, \beta(E_n^*, E_n))$ 的归纳极限拓扑；参见 [9, 命题 4.2.6]），且不可赋范（因为 E不是巴拿赫空间），我们可以选取 (E_n^*) 的一个严格递增子列，其覆盖 E^*。否则，我们就能用一列形如 (nS) 的闭绝对凸集覆盖 $\beta(E^*, E)$，其中 S是 $\beta(E^*, E)$ 中的有界集。因此， S将是 $\beta(E^*, E)$ 中的一个桶；进而，由于$\beta(E^*, E)$ 是桶状的，该空间将具有零点的有界邻域，从而可赋范性

$\beta(E^*,\ E)$，矛盾。因此 $(E^*,\ \beta(E^*,\ E))$ 是一个严格的 (LB)-空间。最后，命题 24 完成证明。□

声明

- 经费支持：不适用。
- 利益冲突/竞争性利益：作者不存在竞争性利益。
- 伦理审批与参与同意：不适用。
- 出版同意：所有作者均已阅读并批准最终稿，并同意提交和发表该稿件。

- 数据可用性：不适用。
- 材料可用性：不适用。
- 代码可用性：不适用。
- 作者贡献：所有作者均参与了本项工作的构思。所有作者撰写并批准了最终稿件。

参考文献

[1] K ̨akol, J., ́Sliwa, W.：巴拿赫空间的约瑟夫森-尼森茨威格定理的一个初等证明 $C(K \times L)$。arXiv:2512.01740[2] Jamez-Sevilla, M., Lajara, S.：巴拿赫空间的拟补子空间与可分商。Results Math.（2023）。78:244[3] Mujica, J.：巴拿赫空间的可分商。Rev. Mat. Complut.**10**, 299–330（1997）[4] ́Sliwa, W., W ́ojtowicz, M.：局部凸空间的可分商。Bull. Polish Acad. Sci. Math. **43**, 175–185（1995）[5] K ̨akol, J., ́Sliwa, W.：关于可分商问题的若干评述。Note Mat. **13**, 277–282（1993）[6] Johnson, W.B., Rosenthal, H.P.：关于弱*基序列及其在巴拿赫空间研究中的应用。Studia Math. **43**, 77–92（1972）[7] Eidelheit, M.：线性方程组理论。Studia Math. **6**, 139– 148（1936）[8] Hajek, P., Novotny, M.：关于Lipschitz自由空间结构的若干评述。Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **24**, 283–304（2016）[9] P ́erez Carreras, P.P., Bonet, J.：桶化局部凸空间。北荷兰数学研究，第131卷。北荷兰出版社，阿姆斯特丹（1987）[10] Diestel, J.：巴拿赫空间中的序列与级数。Graduate Texts in Mathematics，（1984）

[11] ´Sliwa, W.：可分商问题与强正规序列。日本数学会杂志 64, 387–397（2012）[12] Argyros, S.A., Dodos, P., Kanellopoulos, V.：巴拿赫空间中的无条件族。数学年刊 341, 15–38（2008）[13] K˛akol, J., Saxon, S.A., Todd, A.R.：有（或无）可分商的桶化空间。澳大利亚数学会公报 90, 295–303（2014）[14] Moscatelli, V.B.：没有连续范数且没有基的Fr´échet空间。伦敦数学会公报 12, 63–66（1980）[15] Vogt, D.：关于Mitiagin的两个问题。数学消息 141, 13–25（1989）[16] Moscatelli, V.B.：严格归纳极限与射影极限、扭曲空间及商射影空间。Rend. Circ. Mat. Palermo Suppl. 10, 119–131（1985）[17] K˛akol, J., Kubi´s, W., L´opez-Pellicer, M., Sobota, D.：泛函分析专题中的描述拓扑学。更新扩充第二版。数学进展，第24卷。施普林格，纽约、多德雷赫特、海德堡（2025）[18] Jarchow, H.：局部凸空间。B. G. Teubner，斯图加特（1981）[19] Arkhangel'ski, A.V.：Cp理论。载于：广义拓扑学最新进展，第1–56页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹-伦敦-纽约-东京（1992）[20] K˛akol, J., Saxon, S.A.： $c_c(x)$和 $c_p(x)$中的可分商及其对偶空间。美国数学会会刊 145, 3829–3841（2017）[21] K˛akol, J., Marciszewski, W., Sobota, D., Zdomskyy, L.：空间 c_0 在空间 $c_p(x \times y)$中的补子空间副本。以色列数学杂志 250, 139–177（2022）[22] Warner, S.：连续函数空间上的紧收敛拓扑。杜克数学杂志 25, 265–282（1958）[23]Rosenthal, H.P.：关于巴拿赫空间中的拟补子空间，附录讨论从 $l^p(\mu)$到 $l^r(\nu)$的紧算子。泛函分析杂志 41, 176–214（1969）[24] Banakh, T., K˛akol, J., ´Sliwa, W.： c_p-空间的可度量化商。拓扑学及其应用 249, 95–102（2018）[25] K¨othe, G.：拓扑向量空间 I。施普林格，柏林-海德堡-纽约（1983）[26] K˛akol, J., Saxon, S.A.：商空间/余维问题。Rev. R. Acad. Cienc.

[27] Reznichenko, E., Tkachenko, M.：伪紧拟拓扑 Korovin 群的所有可数子集都是闭的、离散的且 c^*-嵌入的。《拓扑学及其应用》**341**，108728（2024）[28] Reznichenko, E.：一个伪紧空间，其中只有基数完备的集合不是闭集也不是离散集。《莫斯科大学数学通报》**6**，69–70（1989）[29] Haydon, R.：连续函数空间理论中的三个例子。《法国科学院报告》**276**，685–687（1973）[30] Arkhangel'ski, A.V.：《拓扑函数空间》。Kluwer，多德雷赫特（1992）[31] McCoy, R.A., Ntantu, I.：《连续函数空间的拓扑性质》。《数学讲义》，第 1315 卷。施普林格，???（1988）[32] Banakh, T., K.akol, J., ´Sliwa, W.： c_p-空间的 Josefson–nissenzweig 性质。《法国科学院报告》**113**，3015–3030（2019）[33] K.akol, J., Leiderman,A.：带弱拓扑的空间 $c_p(x)$ 的连续线性像。《西班牙皇家科学院杂志》A辑数学，自然科学系列 **116** （2022）。116:129[34] Narayanaswami, P.P., Saxon, S.A.：(lf)-空间、拟 Baire 空间与最强局部凸拓扑。数学年刊 **274**，627–641（1986）[35] Saxon, S.A., Narayanaswami, P.P.：可度量化 (lf)-空间、(db)-空间与可分商问题。《澳大利亚数学会通报》**23**，65–80（1981年）