arXiv:2601.19881v1 [math.GR] 27 Jan 2026

关于仅容许离散左连续豪斯多夫拓扑的半群

OLEG GUTIK

Abstract. 我们给出了一个充分条件，使得半群 S 上的每个左连续（右连续）豪斯多夫拓扑都是离散的。我们构造了双循环幺半群的一个子幺半群 $\mathscr{C}_+(a,\ b)$（分别地，$\mathscr{C}_-(a,\ b)$），它包含一个族 $\{S_\alpha$: 其中有连续统多个子半群 $\alpha \in \mathfrak{c}\}$，具有以下性质：$(i)$ S_α 上的每个左连续（分别地，右连续）豪斯多夫拓扑都是离散的；(ii) 每个半群 S_α 都容许一个非离散的右连续（分别地，左连续）豪斯多夫拓扑，该拓扑不是左连续的（分别地，右连续的）；(iii) 每个半群 S_α 都同构嵌入到一个豪斯多夫紧拓扑半群中。此外，我们还构造了扩展双循环半群的一个子幺半群 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}$（分别地，$\mathscr{C}^-_{\mathbb{Z}}$），它包含一个族 $\{S_\alpha$: 其中有连续统多个子半群 $\alpha \in \mathfrak{c}\}$，具有上述性质。

1. 引言、动机与主要定义

在本文中，我们将遵循 [7, 9, 12, 29]的术语。

用 ω 表示所有非负整数的集合，用 $\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合。在全文中，除非另有明确说明，我们始终假设所涉及的所有拓扑空间都是豪斯多夫的。

定义 1.1。设 X、Y和 Z为拓扑空间。映射 $f\colon X \times Y \to Z$，$(x,\ y) \mapsto f(x,\ y)$，称为

(i) 若在右 [左] 变量上连续，则称为右 [左] 连续；即，对于每个固定的 $x_0 \in X[y_0 \in Y]$，映射 $Y \to Z$，$y \mapsto f(x_0,\ y)$ $[X \to Z, x \mapsto f(x,\ y_0)]$是连续的；$(ii)$ 若同时右连续和左连续，则称为分别连续；(iii) 若作为从乘积空间 $X \times Y$到空间Z的映射是连续的，则称为联合连续。

定义 1.2 ([7, 29])。设 S 是一个非空拓扑空间，配备了结合乘法（半群运算）$\mu\colon S \times S \to S$, $(x, y) \mapsto \mu(x, y) = xy$。那么，数对 (S, μ) 称为

(i) 若映射 μ 右连续，则称为右拓扑半群，即所有内部左平移 $\lambda_s\colon S \to S$, $x \mapsto sx$ 都是连续映射，$s \in S$；(ii) 若映射 μ 左连续，则称为左拓扑半群，即所有内部右平移 $\rho_s\colon S \to S$,$x \mapsto xs$ 都是连续映射，$s \in S$；(iii) 若映射 μ分别连续，则称为半拓扑半群；(iv) 若映射 μ 联合连续，则称为拓扑半群。

我们通常省略对 μ 的提及，直接写作 S，而不写作 $(S,\ \mu)$。不言而喻，每个拓扑半群也是半拓扑半群，而每个半拓扑半群既是右拓扑半群，也是左拓扑半群。

半群 S 上的拓扑 τ 称为：

- 半群 拓扑，如果 $(S,\ \tau)$ 是拓扑半群；
- 若 $(S,\ \tau)$ 是半拓扑半群，则称其拓扑为移位连续拓扑；

日期：2026年1月28日。2020 年数学学科分类。22A15、54C08、54D10、54D30、54E52、54H10。关键词和短语。半拓扑半群、拓扑半群、左拓扑半群、右拓扑半群、离散拓扑、双循环幺半群、紧、扩展双循环半群、嵌入。

• 若 $(S,\ \tau)$ 是左拓扑半群，则称其拓扑为左连续拓扑；
• 若 $(S$右连续 $\tau)$ 是一个右拓扑半群，则称其拓扑为
I若 S 是一个半群，则用 $E(S)$ 表示 S 的所有幂等元的集合 .

双循环幺半群 $\mathscr{C}(a,b)$ 是由两个元素 a 和 b 生成、单位元为 1 的半群，且仅满足条件 $ab=1$。$\mathscr{C}(a,b)$ 上的半群运算定义如下：

$$b^k a^l \cdot b^m a^n = \begin{cases} b^{k-l+m}a^n, & \text{if } l<m; \\ b^k a^n, & \text{if } l=m; \\ b^k a^{l-m+n}, & \text{if } l>m. \end{cases}$$

众所周知，双循环幺半群 $\mathscr{C}(a,b)$ 是一个双单（因此也是单）的组合 E- 单位逆半群，并且 $\mathscr{C}(a,b)$ 上的每个非平凡同余都是群同余 [9]。

在 $\mathbf{B}_\omega=\omega\times\omega$ 上，我们按以下方式定义半群运算“·”

$$(k,l)\cdot(m,n) = \begin{cases} (k-l+m,n), & \text{if } l<m; \\ (k,n), & \text{if } l=m; \\ (k,l-m+n), & \text{if } l>m, \end{cases} \tag{1}$$

$k,\ l,\ m,\ n\in\omega$。显然，双循环幺半群 $\mathscr{C}(a,\ b)$ 与半群 $\mathbf{B}\omega$ 在映射 $b^i a^j \mapsto (i,\ j)$ 下同构。集合 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 配备半群运算（1）称为扩展双循环半群 [32]。

半群 S 称为逆半群，如果对于任意 $s\in S$，都存在唯一的 $t\in S$，使得 $sts=s$且 $tst=t$。在这种情况下，元素 t 称为 s 的逆，记作 s^{-1}。每个逆半群 S 都具有自然偏序：

$s\preccurlyeq t$ 当且仅当存在幂等元 $e\in S$，使得 $s=et$.

众所周知，双循环幺半群和扩展双循环半群都是逆半群。此外，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 和$\mathbf{B}_\omega$ 上的自然偏序 $\preccurlyeq$ 如下确定

$$(k,l)\preccurlyeq(m,n) \Longleftrightarrow (k-l=m-n \text{ and } m\leqslant k) \Longleftrightarrow (k-l=m-n \text{ and } n\leqslant l).$$

对于半群 S和 T，若映射 $\alpha\colon S\to S$ 满足 $\alpha(s\cdot t)=\alpha(t)\cdot\alpha(s)$，则称其为反同态。半群的双射反同态称为反同构。

众所周知，拓扑代数研究对象的拓扑性质对其代数性质的影响，以及对象的代数性质对其拓扑性质的影响。拓扑代数有两个主要问题：非离散拓扑化问题，以及嵌入具有某些拓扑代数性质的对象的问题。

在数学文献中，Markov 在 [27]提出了关于非离散（豪斯多夫）拓扑化的问题。Pontryagin 给出了群的单位元处的基满足何种条件时可使其具有非离散拓扑化的著名判据（见 [21] 的定理4.5）。许多作者对 Markov 的问题作了进一步探讨：给定的无限群 G 赋予非离散群拓扑后，能否嵌入某个紧拓扑群？对于任意阿贝尔群 G，答案仍是肯定的；但存在无法嵌入任何紧拓扑群的非阿贝尔拓扑群（见 [10]第9节）。

此外，Ol'shanskiy [28] 构造了一个无限可数群 G，使得其上的每一种豪斯多夫群拓扑 G都是离散的。在 [23] 中，作者构造了首批无限遗传非可拓扑化群的实例。在 [33] 中，Ye. Zelenyuk 证明，每个可数群上都存在一种非离散正则拓扑，使移位和取逆连续。此外，每个可数局部有限群都容许一种非离散豪斯多夫拓扑 [5]。Taimanov 在 [30] 中提出了一个交换半群$\mathfrak{T}$，它只容许离散豪斯多夫半群拓扑。他还在 [31] 中给出了交换半群具有非离散半群拓扑的充分条件。在 [15] 中证明，Taimanov半群 $\mathfrak{T}$ 上的每一种移位连续 T_1拓扑都是离散的。双循环幺半群只容许离散的移位连续豪斯多夫拓扑 [11, 6]。在 [8]中，构造了双循环幺半群 $\mathscr{C}(a,\ b)$ 上的非离散移位连续（半群、半群逆） T_1拓扑。在 [8] 中，给出了使 $\mathscr{C}(a,\ b)$ 上的移位连续 T_1拓扑为离散拓扑的充分条件。此外，每个

扩展双循环半群以及双循环幺半群的任意互伴半群上的移位连续豪斯多夫拓扑都是离散的 [13, 18]。

稳定的且 Γ紧的拓扑半群不包含双循环幺半群 [1, 22, 24]。将双循环幺半群嵌入类紧拓扑半群中的问题已在[2, 3, 4, 20]中得到研究。

在 [26] 中，研究了双循环幺半群的以下反同构子半群

$$\mathscr{C}_+(a,b)=\{b^ia^j\in\mathscr{C}(a,b)\colon i\leqslant j\}\quad\text{and}\quad\mathscr{C}_-(a,b)=\{b^ia^j\in\mathscr{C}(a,b)\colon i\geqslant j\}$$

在论文 [16] 中，我们证明了幺半群 $\mathscr{C}_+(a,\ b)$ ($\mathscr{C}_-(a,\ b)$) 上的每个豪斯多夫左连续（右连续）拓扑都是离散的，并证明存在一个紧豪斯多夫拓扑幺半群 S，其包含 $\mathscr{C}_+(a,\ b)$ ($\mathscr{C}_-(a,\ b)$) 作为子幺半群。此外，在 [16] 中，我们在半群 $\mathscr{C}_+(a,\ b)$ ($\mathscr{C}_-(a,\ b)$) 上构造了一个非离散的右连续（左连续）拓扑 $\tau_p^+(\tau_p^-)$，该拓扑不是左连续的（右连续的）。

与 [26] 类似，下面两个

$$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^+=\{(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon i\leqslant j\}\quad\text{and}\quad\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^-=\{(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon i\geqslant j\}$$

$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$的。 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$的半群运算意味着， $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^+$ 和 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^-$ 是$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$的反同构子半群。

本文给出了一个充分条件，使得半群 S 上的每个左连续（右连续）豪斯多夫拓扑都是离散的。我们构造了双循环幺半群的一个子幺半群 $\mathscr{C}_+$（$a,\ b$）（分别为 $\mathscr{C}_-$（$a,\ b$）），其中包含一个族 $\{S_\alpha\colon\ \alpha\in\mathfrak{c}\}$，该族由连续统多个子半群组成，并具有以下性质：$(i)$ S_α 上的每个左连续（分别为右连续）豪斯多夫拓扑都是离散的；(ii) 每个半群 S_α 都具有一个非离散的右连续（分别为左连续）豪斯多夫拓扑，且该拓扑不是左连续的（分别为右连续的）；(iii) 每个半群 S_α 都同构嵌入某个豪斯多夫紧拓扑半群。此外，我们还构造了扩展双循环半群的一个子幺半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^+$（分别为 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^-$），其中包含一个族 $\{S_\alpha\colon\ \alpha\in\mathfrak{c}\}$，该族由连续统多个子半群组成，并具有上述性质。

2. On topologizations of subsubsemigroups of the semigroups $\mathscr{C}_+(a,\ b)$ and $\mathscr{C}_-(a,\ b)$

下面的例子表明，双循环幺半群 $\mathscr{C}(a,b)$ 具有豪斯多夫右连续（左连续）拓扑 $\tau_p^r(\tau_p^l)$，使得左（右）平移在 $(\mathscr{C}(a,b)\ \tau_p^r)$ ($(\mathscr{C}(a,b)\ \tau_p^l)$) 中不连续。

例2.1。 固定一个任意的正素数 p。对于任意的 $b^ia^j\in\mathscr{C}(a,b)$ 和任意的 $n\in\omega$，我们记

$$U_n^r(b^ia^j)=\left\{b^ia^{j+p^n\cdot k}\colon k\in\omega\right\}.$$

那么，族 $\mathscr{B}_p^r=\left\{\mathscr{B}_p^r(b^ia^j)\colon\ i,j\in\omega\right\}$，其中 $\mathscr{B}_p^r(b^ia^j)=\{U_n^r(b^ia^j)\colon\ n\in\omega\}$ 对于 $b^ia^j\in\mathscr{C}(a,b)$，满足 [12]，的性质 (BP1)–(BP4)，因此它生成了双循环幺半群 $\mathscr{C}(a,b)$ 上的豪斯多夫拓扑 τ_p^r。显然，τ_p^r 是一个非离散拓扑 $\mathscr{C}(a,b)$，而且 $(\mathscr{C}(a,b)\ \tau_p^r)$ 的所有点都是非孤立的。

我们断言，τ_p^r是 $\mathscr{C}(a,b)$上的右连续拓扑。事实上，对于任意的 $b^{i_1}a^{j_1},b^{i_2}a^{j_2}\in\mathscr{C}(a,b)$以及任意的 $n\in\omega$，我们有

$$b^{i_1}a^{j_1}\cdot U_n^r(b^{i_2}a^{j_2})=\left\{b^{i_1}a^{j_1}\cdot b^{i_2}a^{j_2+p^n\cdot k}\colon k\in\omega\right\}=$$
$$=\begin{cases}b^{i_1-j_1+i_2}a^{j_2+p^n\cdot k}, & \text{if } j_1<i_2;\\ b^{i_1}a^{j_2+p^n\cdot k}, & \text{if } j_1=i_2;\\ b^{i_1}a^{j_1-i_2+j_2+p^n\cdot k}, & \text{if } j_1>i_2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}U_n^r(b^{i_1-j_1+i_2}a^{j_2}), & \text{if } j_1<i_2;\\ U_n^r(b^{i_1}a^{j_2}), & \text{if } j_1=i_2;\\ U_n^r(b^{i_1}a^{j_1-i_2+j_2}), & \text{if } j_1>i_2,\end{cases}$$

因此，半群运算在 $(\mathscr{C}(a,b)\ \tau_p^r)$ 中是右连续的。

任取 $b^{i_1}a^{j_1}, b^{i_2}a^{j_2} \in \mathscr{C}(a,b)$，使得 $j_1 < i_2$。那么我们有 $b^{i_1}a^{j_1} \cdot b^{i_2}a^{j_2} = b^{i_1-j_1+i_2}a^{j_2}$。对于任意 $n \in \omega$，存在 k_0，使得邻域 $U^r_n(b^{i_1}a^{j_1})$ 包含具有如下性质的元素 $b^{i_1}a^{j_1+p^n\cdot k}$：对所有 $k > k_0$，$j_1+p^n\cdot k > i_2$。这意味着 $b^{i_1}a^{j_1+p^n\cdot k}\cdot b^{i_2}a^{j_2} = b^{i_1}a^{j_1+p^n\cdot k-i_2+j_2}$，因此我们得到

$$U^r_n(b^{i_1}a^{j_1}) \cdot b^{i_2}a^{j_2} \not\subseteq U^r_m(b^{i_1-j_1+i_2}a^{j_2})$$

对任意 n，$m \in \omega$。因此，半群运算在 $(\mathscr{C}(a,\ b)\ \tau^r_p)$ 中不是左连续的。

双循环幺半群 $\mathfrak{AI}\colon \mathscr{C}(a,\ b) \to \mathscr{C}(a,\ b)$，$b^ia^j \mapsto b^ja^i$，$i,\ j \in \omega$ 的反同构以如下方式在 $\mathscr{C}(a,\ b)$ 上生成了一个左连续拓扑。对于任意 $b^ia^j \in \mathscr{C}(a,\ b)$ 和任意 $n \in \omega$，我们记

$$U^l_n(b^ia^j) = (U^r_n(b^ja^i))\mathfrak{AI}$$

于是，族 $\mathscr{B}^l_p = \left\{\mathscr{B}^r_p(b^ia^j)\colon b^ia^j \in \mathscr{C}(a,b)\ n \in \omega\right\}$（其中 $\mathscr{B}^l_p(b^ia^j) = \{U^r_n(b^ia^j)\colon n \in \omega\}$）满足 [12]，的性质 (BP1)–(BP4)，因此它在双循环幺半群 $\mathscr{C}(a,b)$ 上生成一个非离散豪斯多夫拓扑 τ^l_p。由于 $\mathfrak{AI}\colon \mathscr{C}(a,b) \to \mathscr{C}(a,b)$ 是反同构，半群运算在 $(\mathscr{C}(a,b)\ \tau^r_p)$ 中是左连续的，但不是右连续的。

下面的定理给出了半群 S 的充分条件，在这些条件下，S 上的每个豪斯多夫左连续（右连续）拓扑都是离散的。

定理 2.2。设 S 是一个无限半群。若对任意 $s \in S$，存在一个幂等元 $e_s \in S$，使得 $s \in S\setminus Se_s$（$s \in S\setminus e_sS$），且集合 $S\setminus Se_s$（$S\setminus e_sS$）是有限的，则 S 上的每个豪斯多夫左连续（右连续）拓扑都是离散的。

证明。固定任意一个 $s \in S$。显然，对于半群 S 的幂等元 e_s，右平移 $\rho_{e_s}\colon S \to S$，$s \mapsto se_s$ 是拓扑空间 S到自身的连续收缩。S 的豪斯多夫性以及 [12] 的习题 1.5.C表明，Se_s 是 S的闭子空间。由于集合 $S \setminus Se_s$ 是有限且开，点 s在 S中是孤立的。

对偶命题的证明类似。 □

定理 2.2 蕴含以下推论。

推论 2.3。设 S 是 $\mathscr{C}_+(a,b)$ $\mathscr{C}_-(a,b)$ 的子半群，且集合 $E(S)$ 是无限的。那么 S 上的每个豪斯多夫左连续（右连续）拓扑都是离散的。

证明。固定任意的 $b^ia^{i+k} \in S$，$i,\ k \in \omega$。由于集合 $E(S)$ 是无限的，因此存在正整数p，使得 $p > k$ 和 $b^{i+p}a^{i+p} \in E(S)$。$\mathscr{C}_+(a,\ b)$ 的半群运算（从而 S 的半群运算）意味着，对于任意 $b^sa^t \in S$，我们都有

$$b^sa^t \cdot b^{i+p}a^{i+p} = \begin{cases} b^{s-t+i+p}a^{i+p}, & \text{if } t < i+p; \\ b^sa^{i+p}, & \text{if } t = i+p; \\ b^sa^t, & \text{if } t > i+p. \end{cases}$$

由上述等式可得 $b^ia^{i+k} \notin S\cdot b^{i+p}a^{i+p}$，此外集合 $\mathscr{C}_+(a,\ b) \setminus (\mathscr{C}_+(a,\ b)\cdot b^{i+p}a^{i+p})$ 是有限的。这意味着 $S \setminus S\cdot b^{i+p}a^{i+p}$ 也是有限的。接下来我们应用定理 2.2。

对于半群 $\mathscr{C}_-(a,\ b)$，证明类似。 □

下面的例子和后续陈述表明，半群 $\mathscr{C}_+(a,\ b)$ 和 $\mathscr{C}_-(a,\ b)$ 含有连续统多个满足定理 2.2 条件的子半群。

例 2.4. 对于任意非负整数 k，我们定义

$$\mathscr{C}_{+k}(a,b) = \left\{b^ia^{i+s} \in \mathscr{C}_+(a,b)\colon s \geqslant k, s \in \omega\right\}.$$

$\mathscr{C}_+(a,b)$ 的半群运算蕴含着，$\mathscr{C}_{+k}(a,b)$ 是 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 的子半群。固定 ω 的一个任意无限子集 X。之后我们假设 $X = \{x_i\colon\ i \in \omega\}$，其中 $\{x_i\}_{i\in\omega}$ 是 ω 中的严格递增序列。令

$$\mathscr{C}^X_{+k}(a,b) = \mathscr{C}_{+k}(a,b) \cup \left\{b^{x_i}a^{x_i} \in \mathscr{C}_+(a,b)\colon i \in \omega\right\}.$$

由于

$$b^j a^{j+s} \cdot b^{x_i} a^{x_i} = \begin{cases} b^{x_i - s} a^{x_i}, & \text{if } j + s < x_i; \\ b^j a^{j+s}, & \text{if } j + s \geqslant x_i \end{cases}$$

and

$$b^{x_i} a^{x_i} \cdot b^j a^{j+s} = \begin{cases} b^j a^{j+s}, & \text{if } x_i < j; \\ b^{x_i} a^{x_i + s}, & \text{if } x_i \geqslant j \end{cases}$$

对所有 i，j，$s \in \omega$，不等式 $s \geqslant k$ 蕴含 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,\ b)$ 是 $\mathscr{C}_+(a,\ b)$ 的子半群。显然，半群 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,\ b)$ 含有无限多个幂等元。因此，推论 2.3 的条件对半群 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,\ b)$ 成立。

引理 2.5. 对于 ω 的任意无限子集 X，半格 $(X$,最大值) 与半格 $(\omega$,最大值)同构。

证明。由于 e $(\omega$，最大值) 是一个线性序半格，$(X$，最大值) 也是一个半格　　.

不失一般性，我们可以假设 $X = \{x_i\colon\ i \in \omega\}$，其中 $\{x_i\}_{i\in\omega}$ 是 ω 中的严格递增序列。我们按公式 $(i)\iota_X = x_i$, $i \in \omega$ 定义映射 $\iota_X\colon\ \omega \to X$。由于集合 ω 和 X 在通常的线性序 $\leqslant$下是良序的，因此映射 $\iota_X\colon\ \omega \to X$ 定义良好。显然，$\iota_X\colon (\omega,\ \max) \to (X,\ \max)$ 是一个半格同构。事实上，由于 $\{x_i\}_{i\in\omega}$ 是 ω 中的严格递增序列，不等式 $i \leqslant j$ 蕴含 $x_i = (i)\iota_X \leqslant (j)\iota_X = x_j$。容易看出，映射 $\iota_X\colon\ \omega \to X$ 是双射，且其逆是严格递增的。□

引理 2.6。设 $\{x_i\}_{i\in\omega}$ 和 $\{y_i\}_{i\in\omega}$ 是 ω 中的严格递增序列。则集合 X $=\{x_i\colon\ \ i \in \omega\}$ 和 $Y = \{y_i\colon\ \ i \in \omega\}$ 在从 $(\omega, \max)$ 诱导的半格运算下是同构半格；此外，同构 $\iota\colon (X, \max) \to (Y$ $\max)$ 由公式 $(x_i)\iota = y_i, i \in \omega$ 定义。

证明。根据引理 2.5 的证明，半格同构 $\iota_X\colon (\omega, \max) \to (X, \max)$ 由公式 $(i)\iota_X = x_i$, $i \in \omega$ 定义。这些论证表明，同构 $\iota\colon (X, \max) \to (Y, \max)$ 按如下方式确定：$(x_i)\iota = ((x_i)\iota_X^{-1})\iota_Y = y_i$, $i \in \omega$。由于同构 ι_X 和 ι_Y 定义良好，ι 也定义良好。□

引理 2.7。设 $\{x_i\}_{i\in\omega}$ 和 $\{y_i\}_{i\in\omega}$ 是自然数集中的严格递增序列，且 $X = \{x_i\colon\ \ i \in \omega\}$ 和 $Y = \{y_i\colon$ $i \in \omega\}$。那么，幺半群 $\mathscr{C}_+(a, b)$ 的子半群 $\mathscr{C}^X_{+1}(a, b)$ 和 $\mathscr{C}^Y_{+1}(a, b)$ 同构，当且仅当对所有 $i \in \omega$，$x_i = y_i$。

证明。 蕴含关系 $(\Leftarrow)$ 是显然的。

$(\Rightarrow)$ 假设半群 $\mathscr{C}^X_{+1}(a, b)$ 和 $\mathscr{C}^Y_{+1}(a, b)$ 同构。首先注意到，$\mathscr{C}_+(a, b)$ 的半群运算表明，对于任意 $i \in \omega$，等式$b^i a^i \cdot z = b^i a^{i+1}$ 在 $\mathscr{C}_+(a, b)$ 中的解集如下

$$\mathscr{S}^{b^i a^i}_{b^i a^{i+1}} = \left\{a, \ldots, b^i a^{i+1}\right\},$$

也就是说，集合 $\mathscr{S}^{b^i a^i}_{b^i a^{i+1}}$ 的基数等于 $i+1$。这意味着，在半群 $\mathscr{C}^X_{+1}(a, b)$ 中，等式 $b^{x_i} a^{x_i} \cdot z = b^{x_i} a^{x_i+1}$ 的解也具有相同的性质；在半群 $\mathscr{C}^X_{+1}(a, b)$ 中，等式 $b^{y_i} a^{y_i} \cdot z = b^{y_i} a^{y_i+1}$ 的解亦然。

如果 $\mathfrak{I}\colon\ \mathscr{C}^X_{+1}(a, b) \to \mathscr{C}^X_{+1}(a, b)$ 是一个同构，那么根据引理 2.6 可得，对于任意 $i \in \omega$，有 $(b^{x_i} a^{x_i})\mathfrak{I} = b^{y_i} a^{y_i}$。结合上述论证可知，$\mathscr{C}^X_{+1}(a, b)$ 中等式 $b^{x_i} a^{x_i} \cdot z = b^{x_i} a^{x_i+1}$ 的解集与 $\mathscr{C}^X_{+1}(a, b)$ 中等式 $b^{y_i} a^{y_i} \cdot z = b^{y_i} a^{y_i+1}$ 的解集具有相同的基数$x_i + 1 = y_i + 1$，因此二者相同。这意味着，对于所有 $i \in \omega$，都有 $x_i = y_i$。□

众所周知，集合 ω 包含连续统多个不同的无限子集。由此以及引理2.7可知，在幺半群 $\mathscr{C}_+(a, b)$ 中存在连续统多个非同构子半群，其形式为 $\mathscr{C}^X_{+k}(a, b)$，其中 $k \in \omega \setminus \{0\}$，且 X 是 ω的一个无限子集。再利用定理 2.2 可得到以下定理。

定理 2.8。 幺半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 包含连续统多个非同构子半群，其形式为 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$，其中 k 是一个正整数， X 是 ω的一个无限子集，并且 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$ 上的每个左连续豪斯多夫拓扑都是离散的。

证明。 令 $X=\{x_i\colon i\in\omega\}$ 为 ω 的任意无限子集，使得 $\{x_i\}_{i\in\omega}$ 是 ω中的严格递增序列。对于任意元素 $b^ja^{j+s}\in\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$，存在 $x_i\in X$ 使得 $x_i\geqslant j+s+1$。于是我们有

$$b^ja^{j+s}\notin\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)\cdot b^{x_i}a^{x_i}\subset\mathscr{C}_+(a,b)\cdot b^{x_i}a^{x_i}$$

且集合

$$\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)\setminus\left(\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)\cdot b^{x_i}a^{x_i}\right)\subset\mathscr{C}_+(a,b)\setminus\left(\mathscr{C}_+(a,b)\cdot b^{x_i}a^{x_i}\right)$$

是无限的。接下来我们应用定理 2.2。 □

仿照例 2.4 中的对偶方法，对于 ω 的任意无限子集 X 以及任意正整数 k，我们构造幺半群 $\mathscr{C}^X_-(a,b)$ 的子半群 $\mathscr{C}^X_{-k}(a,b)$。我们注意到，幺半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 和 $\mathscr{C}_-(a,b)$ 通过映射 $\mathfrak{AI}\colon b^ia^j\mapsto b^ja^i,\ i,j\in\omega,\ i\leqslant j$ 互为反同构（见 [16, 26]）。简单验证可知，对于 ω 的任意无限子集 X 以及任意正整数 k，将 $\mathfrak{AI}$ 限制在 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$ 上，便得到从幺半群 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$ 到$\mathscr{C}^X_{-k}(a,b)$ 的反同构。上述论证和定理 2.8 表明

定理 2.9。 幺半群 $\mathscr{C}_-(a,b)$ 包含连续统多个非同构子半群，其形式为 $\mathscr{C}^X_{-k}(a,b)$，其中 k 是正整数，X 是 ω的一个无限子集，并且 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$ 上的每个右连续豪斯多夫拓扑都是离散的。

我们注意到，对于任意正整数 k 和 ω 的任意无限子集 X，对于每个 $b^ja^j\in\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$，在 $(\mathscr{C}(a,b)\ \tau^l_p)$ 中都存在其基本邻域 $U^r_n(b^ia^j)$，使得 $U^r_n(b^ia^j)\subset\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$；此外，对于任意正整数 $m>n$，$U^r_m(b^ia^j)\subset\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$。这意味着空间 $(\mathscr{C}(a,b)\ \tau^l_p)$ 的拓扑在 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$ 上诱导出一个非离散拓扑。下文将 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$ 上的这一拓扑记作 τ^l_p。那么，例2.1中给出的论证推出以下命题。

命题 2.10. 幺半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 包含连续统多个非同构子半群，其形式为 $\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)$，其中 k 是正整数，X 是 ω的无限子集；其半群运算在$(\mathscr{C}^X_{+k}(a,b)\ \tau^l_p)$中是左连续但不是右连续的。

同样，通过对偶方式可得以下结论

命题 2.11. 幺半群 $\mathscr{C}_-(a,b)$ 包含连续统多个非同构子半群，其形式为 $\mathscr{C}^X_{-k}(a,b)$，其中 k 是正整数，X 是 ω的无限子集；其半群运算在$(\mathscr{C}^X_{-k}(a,b)\ \tau^r_p)$中是右连续但不是左连续的。

3. On topologizations of subsubsemigroups of the semigroups $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}$ and $\mathscr{C}^-_{\mathbb{Z}}$

对于任意 $(k,l)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，我们记

$$\uparrow_{\preccurlyeq}(k,l)=\{(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon(k,l)\preccurlyeq(i,j)\}\qquad\text{and}\qquad\downarrow_{\preccurlyeq}(k,l)=\{(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}\colon(i,j)\preccurlyeq(k,l)\},$$

其中，$\preccurlyeq$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$上的自然偏序。

我们注意到，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 的幂等元半格 $E(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}})$通过映射$(i,\ i)\mapsto i, i\in\mathbb{Z}$与半格$(\mathbb{Z},\ \max)$同构。

引理 3.1. 在$(\mathbb{Z},\max)$ 上的每个豪斯多夫移位连续拓扑 τ 都是离散的 e.

证明。 固定任意整数 n，并假设 n是 $(\mathbb{Z},\ \max\ \tau)$ 中的非孤立点。由于半格 $(\mathbb{Z},\ \tau)$ 上的运算 max 分别连续，集合 $\uparrow_{\geqslant}(n-1)=\{i\in\mathbb{Z}\colon n-1\geqslant i\}$ 作为连续移位 $k\mapsto\max\{k,n-1\}$ 下点 $(n-1)$ 的完全原像，在空间 $(\mathbb{Z},\ \tau)$ 中是闭集。这意味着点 n在 $(\mathbb{Z},\ \tau)$ 中有一个开邻域 $U(n)$，使得$U(n)\subseteq\downarrow_{\geqslant}n=\{i\in\mathbb{Z}\colon i\geqslant n\}$。

同样，由于移位 $k \mapsto \max\{k, n+1\}$ 是豪斯多夫空间（$\mathbb{Z}$，τ）上的连续收缩，根据 [12]的习题 1.5.C，我们得到集合 $\downarrow_{\geqslant}(n+1) = \{i \in \mathbb{Z}\colon i \geqslant n+1\}$ 是（$\mathbb{Z}$，τ）的闭子集。因此 n 是（$\mathbb{Z}$，τ）中的孤立点，这就推出了引理的结论。□

注 3.2。(1) 由于半格（$\mathbb{Z}$，max）与（$\mathbb{Z}$，min）通过映射 $n \mapsto -n$同构，因此引理 3.1 对半格（$\mathbb{Z}$，min）成立。

(2) 引理 3.1 证明的第一部分表明，在（ T_1-拓扑 τ 上，半格（$\mathbb{N}$，min）的每个移位连续拓扑都是离散的。(3) 引理3.1 证明的第二部分表明，在τ上的每个豪斯多夫移位连续拓扑（$\mathbb{N}$，max）都是离散的。显然，半格（$\mathbb{N}$，max）容许一个非离散的半群 T_1-拓扑。

引理 3.3。对于任意整数 k，子半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}[k] = \{(s,\ t) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}\colon\ s \geqslant k\}$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的半群 $\mathscr{C}_{+}(a,\ b)$，其同构映射为 $\mathfrak{h}_k\colon\ \mathscr{C}_{+}(a,\ b) \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}[k],\ \ b^i a^j \mapsto (i+k,\ j+k)$。

证明。由 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$的半群运算可知，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}[k]$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的子半群。由于映射 $\mathfrak{h}_k$，等式

$$(b^{i_1}a^{j_1} \cdot b^{i_2}a^{j_2})\mathfrak{h}_k = \begin{cases} (b^{i_1-j_1+i_2}a^{j_2})\mathfrak{h}_k, & \text{if } j_1 < i_2; \\ (b^{i_1}a^{j_2})\mathfrak{h}_k, & \text{if } j_1 = i_2; \\ (b^{i_1}a^{j_1-i_2+j_2})\mathfrak{h}_k, & \text{if } j_1 > i_2 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + k, j_2 + k), & \text{if } j_1 < i_2; \\ (i_1 + k, j_2 + k), & \text{if } j_1 = i_2; \\ (i_1 + k, j_1 - i_2 + j_2 + k), & \text{if } j_1 > i_2 \end{cases}$$

and

$$(b^{i_1}a^{j_1})\mathfrak{h}_k \cdot (b^{i_2}a^{j_2})\mathfrak{h}_k = (i_1+k, j_1+k) \cdot (i_2+k, j_2+k) =$$
$$= \begin{cases} (i_1 + k - (j_1 + k) + i_2 + k, j_2 + k), & \text{if } j_1 + k < i_2 + k; \\ (i_1 + k, j_2 + k), & \text{if } j_1 + k = i_2 + k; \\ (i_1 + k, j_1 + k - (i_2 + k) + j_2 + k), & \text{if } j_1 + k > i_2 + k \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + k, j_2 + k), & \text{if } j_1 < i_2; \\ (i_1 + k, j_2 + k), & \text{if } j_1 = i_2; \\ (i_1 + k, j_1 - i_2 + j_2 + k), & \text{if } j_1 > i_2 \end{cases}$$

蕴含引理的结论。□

若 $\preccurlyeq$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上的自然偏序，且 S 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的子半群，则在本节中，我们用 $\preccurlyeq^S$ 表示二元关系 $\preccurlyeq$ 在 S上的限制，即(i,j) $\preccurlyeq^S (k,l)$当且仅当(i,j) $\preccurlyeq (k,l)$在$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$中成立，并且对任意($\preccurlyeq$, $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$) $\preccurlyeq^S$，令

$$\uparrow_{\preccurlyeq^S}(m,n) = \left\{(p,q) \in S\colon (m,n) \preccurlyeq^S (p,q)\right\} \quad \text{and} \quad \downarrow_{\preccurlyeq^S}(m,n) = \left\{(p,q) \in S\colon (p,q) \preccurlyeq^S (m,n)\right\},$$

对于任意 $(m,\ n) \in S$。

定理 3.4. 设 S 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ ($\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{-}$) 的子半群，且 S 的带 $E(S)$ 同构于半格$(\mathbb{Z},\max)$。那么 S 上的每个豪斯多夫左连续(右连续) 拓扑 τ 都是离散的。

证明。如果 $S = E(S)$，那么定理的结论由引理 3.1 得出。因此，以下假设 $S \neq E(S)$。

固定任意的 $(i,j) \in S$。由于带 $E(S)$ 同构于半格 $(\mathbb{Z}, \max)$，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的半群运算意味着存在最大整数 k，使得 $(k,k) \in E(S)$ 且 $k \leqslant i$。由引理 3.3，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的子半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}[k]$ 同构于半群 $\mathscr{C}_{+}(a,b)$，因此由推论 2.3，$S_k = S \cap \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}[k]$ 是 S 的离散子半群。

同样，由于 $E(S)$ 同构于 $(\mathbb{Z}, \max)$，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的半群运算意味着存在最小整数 n，使得 $(n, n) \in E(S)$ 且 $j < n$。于是我们有 $(i, j)\cdot(n, n) = (n-j+i, n)$。我们注意到

$$\uparrow_{\preccurlyeq^S}(n-j+i, n) = \{(s,t) \in S : (s,t)\cdot(n,n) = (n-j+i, n)\} = \{(n-j+i-p, n-p) : p \in \omega\}$$

根据引理 3.3 和推论 2.3，点 $(n-j+i, n)$ 在空间 $S_n = S \cap \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}[n]$ 中是孤立的。因此，等式

$$(s,t)\cdot(n,n) = \begin{cases} (n-t+s, n), & \text{if } t \leqslant n; \\ (s,t), & \text{if } t > n \end{cases}$$

以及 (S, τ) 的半群运算的左连续性意味着集合 $\uparrow_{\preccurlyeq^S}(n-j+i, n)$ 在 (S, τ) 中是开集。显然，$(i, j) \in \uparrow_{\preccurlyeq^S}(n-j+i, n)$。如果集合 $\uparrow_{\preccurlyeq^S}(n-j+i, n)$ 是有限的，则证明完成。

假设集合 $\uparrow_{\preccurlyeq^S}(n-j+i, n)$ 是无限的。由于 $E(S)$ 同构于 $(\mathbb{Z}, \text{最大值})$，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的半群运算意味着存在最大整数 $s < j$，使得 $(s, s) \in E(S)$，并且 $(i, j)\cdot(s, s) = (i, j)$。我们注意到，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的半群运算意味着集合 $\uparrow_{\preccurlyeq^S}(i, j)$ 是无限的，因此存在 $(x, y) \in \uparrow_{\preccurlyeq^S}(i, j)$，使得 $(i, j) \neq (x, y)\cdot(s, s)$。不失一般性，设 $y < s$，于是有 $(x, y)\cdot(s, s) = (s-y+x, s)$。豪斯多夫性以及 (S, τ) 的半群运算的左连续性意味着集合 $\uparrow_{\preccurlyeq^S}(s-y+x, s)$ 在 (S, τ) 中是闭集，因为它是点 $(s-y+x, s)$ 在右平移 $\rho_{(s,s)} : S \to S$ 下的完全原像，$(a, b) \mapsto (a, b)\cdot(s, s)$。这意味着点 (i, j) 在 (S, τ) 中具有有限的开邻域，因此是孤立的。

该定理的对偶命题源于这样一个事实：半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 和 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{-}$ 通过映射 $\mathfrak{J} : \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{-}$, $(i, j) \mapsto (j, i)$ 反同构。□

下面的例子表明，扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 具有豪斯多夫右连续（左连续）拓扑 τ_p^r（τ_p^l），使得左（右）平移在 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_p^r)$（$(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_p^l)$）中不连续。

例3.5。取任意正素数 p。对于任意 $(i, j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 和任意 $n \in \omega$，我们记

$$U_n^r(i, j) = \{(i, j + p^n \cdot k) : k \in \omega\}.$$

那么，族 $\mathscr{B}_p^r = \{\mathscr{B}_p^r(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}\}$，其中 $\mathscr{B}_p^r(i, j) = \{U_n^r(i, j) : n \in \omega\}$ 对于 $(i, j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，满足 [12]，的性质 (BP1)–(BP4)，因此它在扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 上生成一个豪斯多夫拓扑 τ_p^r。显然，τ_p^r 是非离散拓扑 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，而且 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_p^r)$ 中的所有点都是非孤立的。

关于半群运算在 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_p^r)$ 上是右连续但不是左连续的证明，与例2.1中的相应结论的证明类似。此外，通过反同构 $\mathfrak{J} : \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$，我们得到 $(i, j) \mapsto (j, i)$ 上的豪斯多夫左连续拓扑 τ_p^l，使得右平移在 $(\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}, \tau_p^l)$ 中不连续。

注3.6。(1) 我们注意到，对于任意整数 i_0，子集 $L_{i_0} = \{(i_0, i_0 + i) : i \in \mathbb{Z}\}$ 不是的子半群，因为 $(i_0, i_0 - 1)\cdot(i_0, i_0 - 1) = (i_0 + 1, i_0 - 1) \notin L_{i_0}$。

(2) 显然，拓扑 τ_p^r（τ_p^l）的扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 在半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$（$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{-}$）上诱导出一种豪斯多夫、非离散且右连续（左连续）的拓扑，但该拓扑并非左连续（右连续）。

下面的例子表明，定理3.4在子半群 $E(S)$ 的带 S 无限时，$\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 其结论并不成立。

例3.7. 我们定义 $S = S_0 \cup S_1$，其中 $S_0 = \{(-i, -i) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+} : i \in \mathbb{N}\}$ 且 $S_1 = \{(0, k)\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+} : k \in \omega\}$。简单验证可知，$S$ 是 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的交换子半群。此外，S_1 是 S 的一个理想，使得对于所有 $(-i, -i) \in S_0$ 和 $(0, k) \in S_1$，都有 $(-i, -i)\cdot(0, k) = (0, k)$。

我们以下述方式在 S 上定义一个拓扑 τ。所有形如 $(-i,-i)$、$i\in\mathbb{N}$ 的点，在 (S,τ) 中都是孤立的。固定一个任意的素整数 p。族 $\mathscr{B}_\tau=\{U_n(0,k)\colon\ n\in\mathbb{N}\}$，其中

$$U_n(0,k)=\{(0,k+p^n s)\in S_1\colon s\in\omega\},$$

是点 τ 处的拓扑基 $(0,k)\in S_1$。简单验证可知，τ 是 S 上的豪斯多夫拓扑。

由于 $(-i,-i)\cdot(-j,-j)=(\max\{-i,-j\},\max\{-i,-j\})$，$(-i,-i)\cdot U_n(0,k)=U_n(0,k)$，且 $U_n(0,k)\cdot U_n(0,l)\subseteq U_n(0,k+l)$，对任意 i、j、$k\in\mathbb{N}$ 以及 k、$l\in\omega$ 均成立，因此 (S,τ) 上的半群运算是连续的。

根据引理 3.3 半群 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}$ 包含半群 $\mathscr{C}_+(a,b)$ 的无限多个同构副本，因此根据定理 2.8 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}$ 有连续统多个子半群 $\{S_\alpha\colon\ \alpha\in\mathfrak{c}\}$ 使得对任意 $\alpha\in\mathfrak{c}$以下条件均成立：

(i) 带 $E(S_\alpha)$ 与 $(\omega,\max)$ 同构；(ii) 对于 S_α 的任意幂等元 (i,i)，集合 $S\setminus(S\cdot(i,i))$ 是有限的；(iii) S 上的每个左连续豪斯多夫拓扑都是离散的。

例 3.8 和定理 3.10 表明 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}$ 有连续统多个子半群 $\{S_\alpha\colon\ \alpha\in\mathfrak{c}\}$ 使得对于任意 $\alpha\in\mathfrak{c}$ 以下条件成立：

(i°) 带 $E(S_\alpha)$ 与 $(\mathbb{Z},\max)$ 同构；(ii°) 对于 S_α 的任意幂等元 (i,i)，集合 $S\setminus(S\cdot(i,i))$ 是无限的；(iii°) S 上的每个左连续豪斯多夫拓扑都是离散的。

例 3.8。之后我们将假设 $X=\{x_i\colon\ i\in\omega\}$，其中 $\{x_i\}_{i\in\omega}$ 是 ω 中的严格递增序列。对于任意正整数 k，我们定义

$$\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(k,X)=\{(-i,-i)\colon i\in\omega\}\cup\{(x_i,x_i)\colon i\in\omega\}\cup\left\{(m,n)\in\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}[0]\colon m\geqslant k\right\}.$$

简单验证可知，对于任意正整数 k，$\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(k,X)$ 是 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}$ 的子半群。

引理 3.9. 设 $\{x_i\}_{i\in\omega}$ 和 $\{y_i\}_{i\in\omega}$ 是自然数集 ω 中的严格递增序列，并设 $X=\{x_i\colon\ i\in\omega\}$ 和 $Y=\{y_i\colon i\in\omega\}$。那么，$\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}$ 的子半群 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,X)$ 和 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,Y)$ 同构，当且仅当对所有 $i\in\omega$，$x_i=y_i$。

证明。蕴含关系 $(\Leftarrow)$ 是显然的。

$(\Rightarrow)$ 假设 $\mathfrak{I}\colon\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,X)\to\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,Y)$ 是一个同构。令 $S_X=\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,X)\cap\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}[0]$ 和 $S_Y=\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,Y)\cap\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}[0]$。简单验证可知，$S_X$ 和 S_Y 分别是 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,X)$ 和 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,Y)$ 的子半群。此外，根据映射 $(m,n)\mapsto b^m a^n$，S_X 同构于 $\mathscr{C}^X_{+1}(a,b)$，而 S_Y 同构于 $\mathscr{C}^Y_{+1}(a,b)$。由 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,X)$ 和 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,Y)$ 的半群运算可知，方程 $z\cdot(i,i+p)=(i,i+p)$（在 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,X)$ 和 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,Y)$ 中）只有有限个解，其中 $i\in\omega$ 和 $p\in\mathbb{N}$。因此，限制映射 $\mathfrak{I}_{S_X}\colon S_X\to S_Y$ 是一个同构，进而由引理 2.7 可得，对所有 $i\in\omega$，$x_i=y_i$。于是半格 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,X)\setminus S_X$ 和 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,Y)\setminus S_Y$ 同构。显然，$\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,X)\setminus S_X$ 和 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,Y)\setminus S_Y$ 通过映射 $(-i,-i)\mapsto i$ 同构于半格 $(\omega,\min)$。由于半格 $(\omega,\min)$ 上的自然偏序是完备的，即 $(\omega,\min\preccurlyeq)$，因此对于任意 $i\in\omega$，有 $(-i,-i)\mathfrak{I}=(-i,-i)$。□

注意，对于半群 $\{x_i\}_{i\in\omega}$中的任意严格递增序列 $\omega\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}(1,X)$，其中$X=\{x_i\colon\ i\in\omega\}$，均满足条件（$i^\circ$）、（$ii^\circ$）和（$iii^\circ$）。于是，引理3.9 推出以下定理。

定理 3.10. 半群 $\mathscr{C}^+_{\mathbb{Z}}$ 包含连续统多个两两非同构的子半群 S_α，使得其上的每个左连续豪斯多夫拓扑都是离散的，并且 S_α 满足条件 (i°)、(ii°)和(iii°)。

4. Embeddng of the semigroup $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ into a compact topological semigroup

扩展双循环半群的闭包的以下例子 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 见于 [13]。

例 4.1 ([13, 例 5])。 用 $G_1(1)$ 和 G_0 表示整数加法群。分别用 $(n)^1$ 和 $(m)^0$ 表示群 $G_1(1)$ 和 G_0 的元素 n, $m \in \mathbb{Z}$。这意味着，对于任意 m, $n \in \mathbb{Z}$，有 $(m)^1 \cdot (n)^1 = (m+n)^1$，且 $(m)^0 \cdot (n)^0 = (m+n)^0$。令 $S = G_1(1) \sqcup \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} \sqcup G_0$，并按以下方式将半群运算扩展到 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$、$G_1(1)$ 和 G_0 上：

$$
\begin{aligned}
(n)^1 \cdot (i,j) &= (-n+i,j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}};\\
(i,j) \cdot (n)^1 &= (i,j+n) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}};\\
(n)^1 \cdot (m)^0 &= (n+m)^0 \in G_0;\\
(m)^0 \cdot (n)^1 &= (m+n)^0 \in G_0;\\
(m)^0 \cdot (i,j) &= (m+j-i)^0 \in G_0;\\
(i,j) \cdot (m)^0 &= (m+j-i)^0 \in G_0,
\end{aligned}
$$

对于任意 $(n)^1 \in G_1(1)$、$(i,\ j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ 和 $(m)^0 \in G_0$。

拓扑 τ 在 S 上按以下方式确定：

(1) 扩展双循环半群的所有元素 (i,j) 在 (S,τ) 中都是孤立点；(2) 族 $\mathscr{B}((n)^1) = \{U_p((n)^1) : p \in \mathbb{N}\}$，其中 $U_p((n)^1) = \{(n)^1\} \cup \{(-q,-q+n) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} : q \geqslant p\}$，是点 $(n)^1 \in G_1(1)$ 处拓扑 τ 的一个拓扑基；(3) 族 $\mathscr{B}((m)^0) = \{V_p((m)^0) : p \in \mathbb{N}\}$，其中

$$
V_p((m)^0) = \begin{cases} \{(m)^0\} \cup \{(q,q+m) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} : q \geqslant p\}, & \text{if } m \geqslant 0;\\ \{(m)^0\} \cup \{(q-m,q) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}} : q \geqslant p\}, & \text{if } m \leqslant 0, \end{cases}
$$

是点 $(m)^0 \in G_0$ 处拓扑 τ 的一个拓扑基。

那么 (S,τ) 是一个豪斯多夫局部紧拓扑逆半群 [13]。

例 4.2. 设 $G_1(1)$ 和 G_0 为例 4.1 中定义的群。记 $G_1^+ = \{(n)^1 \in G_1(1) : n \geqslant 0\}$ 和 $G_0^+ = \{(m)^0 \in G_0 : m \geqslant 0\}$。由半群运算 S 可知，S 的子集 $S^+ = G_1^+ \sqcup \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^+ \sqcup G_0^+$ 在由 S 诱导的乘法下构成 S 的子半群。设 τ^+ 为 S^+ 上由 (S,τ) 诱导的拓扑。那么 (S^+,τ^+) 是一个豪斯多夫拓扑半群。由于 (S^+,τ^+) 是 (S,τ) 的闭子空间，[12] 的定理 3.3.8 表明，空间 (S^+,τ^+) 是局部紧的。

我们将 $S_{\mathscr{O}}^+$ 定义为加上零元 $\mathscr{O}$ 的半群 S^+，即对任意 $s \in S^+$，都有 $\mathscr{O} \cdot s = s \cdot \mathscr{O} = \mathscr{O} \cdot \mathscr{O} = \mathscr{O}$。我们在半群 $S_{\mathscr{O}}^+$ 上定义拓扑 $\tau_{\mathscr{O}}^+$ 如下。我们按以下方式将拓扑 τ^+ 扩展到半群 $S_{\mathscr{O}}^+$ 上：族 $\mathscr{B}^+(\mathscr{O}) = \{W_p(\mathscr{O}) : p \in \mathbb{N}\}$，其中

$$
W_p(\mathscr{O}) = \{\mathscr{O}\} \sqcup \left\{(n)^1 \in G_1(1) : n \geqslant p\right\} \sqcup \left\{(i,j) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^+ : j-i \geqslant p\right\} \sqcup \left\{(m)^0 \in G_0 : m \geqslant p\right\}
$$

是点 $\mathscr{O}$ 处拓扑 $\tau_{\mathscr{O}}^+$ 的拓扑基。显然，$\tau_{\mathscr{O}}^+$ 是 $S_{\mathscr{O}}^+$ 上的紧豪斯多夫拓扑。由于半群 $S_{\mathscr{O}}^+$ 可数，[12] 中的定理 3.1.21 和 4.2.8 蕴含空间 $(S_{\mathscr{O}}^+,\ \tau_{\mathscr{O}}^+)$ 是可度量化的。

命题 4.3。 $(S_{\mathscr{O}}^+, \tau_{\mathscr{O}}^+)$ 是一个拓扑半群。

证明。 (S^+,τ^+) 是豪斯多夫拓扑半群，而 (S^+,τ^+) 是拓扑空间 $(S_{\mathscr{O}}^+,\tau_{\mathscr{O}}^+)$ 的开子空间，因此只需证明在以下七种情形下，半群运算在 $(S_{\mathscr{O}}^+,\tau_{\mathscr{O}}^+)$ 上连续。

(1) 在 $(n)^1 \cdot \mathscr{O}$ 的情况下，其中 $(n)^1 \in G_1(1)$，对于任意非负整数 n 以及任意正整数 p_1 和 p_2，我们有 $U_{p_1}((n)^1) \cdot W_{p_2}(\mathscr{O}) \subseteq W_{n+p_2}(\mathscr{O})$。(2) 在 $\mathscr{O} \cdot (n)^1$, 的情况下，其中 $(n)^1 \in G_1(1)$，对于任意非负整数 n 以及任意正整数 p_1 和 p_2，我们得到 $W_{p_1}(\mathscr{O}) \cdot U_{p_2}((n)^1) \subseteq W_{p_1+n}(\mathscr{O})$。

(3) 在 $(i,j)\cdot\mathscr{O}$ 的情况下，其中 $(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$，对于任意正整数 p，我们得到 $(i,j)\cdot W_p(\mathscr{O})\subseteq W_{p+j-i}(\mathscr{O})$。(4) 在 $\mathscr{O}\cdot(i,j)$ 的情况下，其中 $(i,j)\in\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$，对于任意正整数 p，我们有 $W_p(\mathscr{O})\cdot(i,j)\subseteq W_{p+j-i}(\mathscr{O})$。(5) 在 $(m)^0\cdot\mathscr{O}$ 的情况下，其中 $(m)^0\in G_0$，对于任意非负整数 m 以及任意正整数 p_1 和 p_2，我们得到 $V_{p_1}((m)^0)\cdot W_{p_2}(\mathscr{O})\subseteq W_{m+p_2}(\mathscr{O})$。(6) 在 $\mathscr{O}\cdot(m)^0$, 的情况下，其中 $(m)^0\in G_0$，对于任意非负整数 m 以及任意正整数 p_1 和 p_2，我们得到 $W_{p_1}(\mathscr{O})\cdot V_{p_2}((m)^0)\subseteq W_{p_1+m}(\mathscr{O})$。(7) 在 $\mathscr{O}\cdot\mathscr{O}$ 的情况下，对于任意正整数 p_1 和p_2，我们有 $W_{p_1}(\mathscr{O})\cdot W_{p_2}(\mathscr{O})\subseteq W_{p_1+p_2}(\mathscr{O})$。以上论证表明，半群运算在 $(S_{\mathscr{O}}^{+},\tau_{\mathscr{O}}^{+})$ 上连续。

□

拓扑 $\tau_{\mathscr{O}}^{+}$ 的定义 $I_0=G_0^{+}\sqcup\{\mathscr{O}\}$ 表明，$S_{\mathscr{O}}^{+}$ 是豪斯多夫紧拓扑半群（$\tau_{\mathscr{O}}^{+}$ [25]， [7,）的紧理想。57]根据 Lawson-Madison 定理（参见 $S_{\mathscr{O}}^{+}/I_0$ 或 $\tau_{\mathbf{q}}$ 定理 1 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ ），带有商拓扑的商半群 $S_{\mathscr{O}}^{+}$ 是豪斯多夫紧拓扑半群。由于 $\tau_{\mathscr{O}}^{+}$ 是（ $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}\cap I_0=\varnothing$， $\tau_{\mathscr{O}}^{+}$ ）的稠密子半群，并且 $I_0=G_0^{+}\sqcup\{\mathscr{O}\}$，我们得到以下推论。

推论 4.4。 半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 是豪斯多夫紧拓扑半群（$S_{\mathscr{O}}^{+}/I_0$， $\tau_{\mathbf{q}}$）的稠密子半群。

由于豪斯多夫紧拓扑半群中子半群 S 的闭包 K 是一个紧拓扑半群，命题4.3推出以下两个推论。

推论 4.5。 半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{+}$ 的每个子半群都是某个豪斯多夫紧拓扑半群的稠密子半群。

推论 4.6。 带添零的半群 $\mathscr{C}_{+}(a,b)$ 存在一种豪斯多夫紧半群拓扑。

备注 4.7。 (1) 命题 4.3 以及推论 4.4 和 4.5 中的类似结论对半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{-}$ 也成立。此外，推论 4.6 中的结论对半群 $\mathscr{C}_{-}(a,b)$也成立。

(2) 文献 [14] 证明，带添零的豪斯多夫局部紧半拓扑双循环半群 $\mathscr{C}^0$ 要么是紧的，要么是离散的。对双循环幺半群的半拓扑互伴半群也有类似结论 [18]。然而，带添零的扩展双循环半群 $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}^{0}$ 存在连续统多个移位连续局部紧拓扑 [19] ，且半群 $\mathscr{C}_{+}(a,b)$ 和 $\mathscr{C}_{-}(a,b)$ [17]也有类似结论。

致谢

作者感谢 Alex Ravsky 提出的意见和建议 s.

References

[1] L. W. Anderson、R. P. Hunter 和 R. J. Koch，《半群稳定性的一些结果》，美国数学会会刊 117（1965），521–529。DOI：10.2307/1994222 1[2] T. Banakh、S. Dimitrova 和 O. Gutik，《简单拓扑半群的 Rees-Suschkiewitsch 定理》，数学研究 31（2009），第 2 期，211–218。 1[3] T. Banakh、S. Dimitrova 和 O. Gutik，《将双循环半群嵌入可数紧拓扑半群》，拓扑学及其应用 157（2010），第 18 期，2803–2814。DOI: 10.1016/j.topol.2010.08.020 1[4] S. Bardyla 和 A. Ravsky，《类紧拓扑空间的闭子集》，应用与一般拓扑学 21（2020），第 2 期，201–214。DOI：10.4995/agt.2020.12258。 1[5] V. V. Belyaev，《可数局部有限群的拓扑化》，代数与逻辑 34（1995），第 6 期，339–342。1[6] M. O. Bertman 和 T. T. West，《条件紧双循环半拓扑半群》，爱尔兰皇家科学院会刊 A76（1976），第 21–23 期，219–226。 1[7] J. H. Carruth、J. A. Hildebrant 和 R. J. Koch，《拓扑半群理论》，第 I 卷，Marcel Dekker, Inc.，纽约和巴塞尔，1983。 1, 1.2, 4[8] A. Chornenka 和 O. Gutik，《关于双循环幺半群的拓扑化》，利沃夫大学学报，力学与数学系列 95（2023），45–56。DOI: 10.30970/vmm.2023.95.046-056 1

[9] A. H. Clifford 和 G. B. Preston，《半群代数理论》，第 I 卷，美国数学会调查丛书 7，普罗维登斯，罗得岛州，1961。 1, 1[10] W. W. Comfort，《拓扑群》，《集合论拓扑学手册》，Kunen K.、Vaughan J.（编），爱思唯尔，1984，第 1143–1263 页。 1[11] C. Eberhart 和 J. Selden，《关于双循环半群的闭包》，美国数学会会刊 144（1969），115–126。DOI：10.1090/S0002-9947-1969-0252547-6 1[12] R. Engelking，《一般拓扑学》，第 2 版，Heldermann，柏林，1989。 1, 2.1, 2, 3, 3.5, 4.2[13] I. R. Fihel 和 O. V. Gutik，《关于扩展双循环半群的闭包》，喀尔巴阡数学出版物 3（2011），第 2 期，131–157。 1, 4, 4.1, 4.1[14] O. Gutik，《带零元的局部紧半拓扑双循环幺半群的二分性》，利沃夫大学学报，力学与数学系列 80（2015），33–41。 2[15] O. Gutik，《Taimanov半群的拓扑性质》，舍甫琴科科学学会数学通报 13（2016），29–34。 1[16] O. Gutik，《关于不可拓扑化半群》，利沃夫大学学报，力学与数学系列 96（2024），25–36。DOI：10.30970/vmm.2024.96.025-036 1, 2[17] O. V. Gutik，《关于半群上的局部紧移位连续拓扑》 $\mathscr{C}_+(a,\ b)$ 和 $\mathscr{C}_-(a,\ b)$ 带添零，布科维纳数学杂志 12（2024），第 1 期，14–20。DOI：10.31861/bmj2024.01.02 2[18] O. Gutik 和 K. Maksymyk，《关于双循环幺半群的半拓扑交错关联半群》，利沃夫大学学报，力学与数学系列 82（2016），98–108。 1, 2[19] O. V. Gutik 和 K. V. Maksymyk，《关于带添零的半拓扑扩展双循环半群》，物理与力学数学方法 62（2019），第 4 期，29–38；重印版：数学科学杂志 265（2022），第 3 期，369–381。DOI：10.1007/s10958-022-06058-6 2[20] O. Gutik 和 D. Repovˇs，《关于可数紧零单拓扑逆半群》，半群论坛 75（2007），第 2 期，464–469。DOI：10.1007/s00233-007-0706-x 1[21] E. Hewitt 和 K. A. Roos，《抽象调和分析》，第 1 卷，施普林格，柏林，1963。 1[22] J. A. Hildebrant 和 R. J. Koch，《 Γ-紧半群的膨胀作用》，半群论坛 33（1986），65–85。DOI：10.1007/BF02573183 1[23] A. A. Klyachko、A. Yu. Olshanskii 和 D. V. Osin，《关于可拓扑化群和不可拓扑化群》，拓扑学及其应用 160（2013），第 16 期，2104–2120。 1[24] R. J. Koch 和 A. D. Wallace，《半群中的稳定性》，杜克数学杂志 24（1957），第 2 期，193–195。DOI：10.1215/S0012-7094-57-02425-0 1[25] J. Lawson 和 B. Madison，《关于同余与锥》，数学杂志 120（1971），18–24。DOI：10.1007/BF01109714 4[26] S. O. Makanjuola 和 A. Umar，《关于双循环半群的某个子半群》，代数通讯，25（1997），第 2 期，509–519。DOI：10.1080/00927879708825870 1, 2[27] A. A. Markov，《关于自由拓扑群》，苏联科学院学报 9（1945），3–64（俄文）；英文版见：美国数学会译丛 8（1962），第 1 期，195–272。 1[28] A. Yu. Ol'shanskiy，《关于可数非拓扑化群的注记》，莫斯科大学学报，力学与数学系列 39（1980），1034（俄文）。 1[29] W. Ruppert，《紧半拓扑半群：内蕴理论》，数学讲义 1079，施普林格，柏林，1984。DOI：10.1007/BFb0073675 1, 1.2[30] A. D. Taimanov，《一个只允许离散拓扑的半群实例》，代数与逻辑 12（1973），第 1 期，64–65。DOI：10.1007/BF02218642 1[31] A. D. Taimanov，《关于交换半群的拓扑化》，数学札记 17（1975），第 5 期，443–444。DOI：10.1007/BF01155800 1[32] R. J. Warne，《 I-双单半群》，美国数学会会刊 130，（1968）第 3 期，367–386。DOI：10.1090/S0002-9947-1968-0223476-8 1[33] Ye. Zelenyuk，《关于具有连续平移和取逆的群上的拓扑》，基辅大学学报，物理与数学系列 2（2000），252–256（乌克兰语） 1

Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, 79000, Ukraine电子邮箱地址：oleg.gutik@lnu.edu.ua