arXiv:2601.19885v1 [math.AC] 27 Jan 2026

正则局部环中的极值 F-阈值

BENJAMIN BAILY

摘要。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是特征为 $p>0$ 的正则局部环。在所有消失阶 $\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$ 固定的真理想 $\mathfrak{a}\subseteq R$ 中，我们对使 F-阈值 $\operatorname{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$ 取最小值的理想进行分类。

1. 引言

设 $(R,\mathfrak{m})$ 是特征为 $p>0$ 的正则局部环，并令 $\mathfrak{a}$ 表示 R 的一个真理想。假设 R 是 F-有限的——也就是说，假设 Frobenius 映射 $F\colon R\to R$ 是有限映射——稍后我们将放宽这一假设。$(R,\mathfrak{a})$ 的 F-纯阈值是一个非负有理数 [4]，用于衡量点 $\mathfrak{m}$ 处 $\operatorname{Spec} R$ 中的对 $(R,\mathfrak{a})$ 的奇点。在这种情形下，F-纯阈值可计算为

$$\operatorname{fpt}(\mathfrak{a})=\sup\left\{\frac{t}{p^e}:\mathfrak{a}^t\not\subseteq\mathfrak{m}^{[p^e]}\right\},\ \text{where } I^{[p^e]}:=\sum_{z\in I}z^{p^e}R.$$

其思想是，较小的 F-纯阈值对应于由 $\mathfrak{a}$ 定义的 $\operatorname{Spec} R$ 的闭子概形具有“更差的奇点”。例如，若 $\mathfrak{a}=fR$ 是主理想，则 $\operatorname{fpt}(f)\leq 1$，当且仅当 R/fR 是 Frobenius 分裂时等号成立；在这种情况下，R/fR 必须是约化的。

如果 $d=\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$ 表示满足 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{m}^d$ 的最大正整数，且 n 是 R 的维数，那么 $\operatorname{fpt}(\mathfrak{a})$ 的下界为 $\frac{1}{d}$，上界为 $\min(\binom{n}{d},1)$；参见 [28]。本文将描述 F-纯阈值何时达到此范围的下界。

主定理 (定理 3.1)。设 $(R,\mathfrak{m})$ 是特征为 $p>0$ 的 F-有限正则局部环，且 $\mathfrak{a}\subseteq R$ 是一个真理想。令 $d=\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$，并写作 $d=qs$，其中 q 是 p 的幂，且 s 与 p 互素。那么，$\operatorname{fpt}(\mathfrak{a})=\frac{1}{d}$ 当且仅当 $\mathfrak{a}$ 是一个主理想，并且存在 g 属于 $\mathfrak{m}^{[q]}$，使得 $\mathfrak{a}=g^sR$。

关于更一般的表述和证明，请参见第 3 节。特别地，我们证明，F-有限假设可以弱化为以下假设：对于 R 中的所有素元 π，形式纤维 $\widehat{R}\otimes_R \frac{R_{(\pi)}}{\pi R_{(\pi)}}$ 均为约化的；任意优局部环都满足这一条件。关于 R 的高度 1 形式纤维的假设无法进一步弱化；参见例 3.20。

作者获得了美国国家科学基金会项目 DMS-2101075、美国国家科学基金会研究生培训项目 DMS-1840234 以及西蒙斯博士论文奖学金的资助。

其他作者研究了代数闭域 k 上特征为 $p > 0$的无平方因子齐次多项式的一个相关问题；参见 [20]。对于 $k[x_0, \dots, x_n]$ 中次数为 d的无平方因子齐次多项式 f，有 $\mathrm{fpt}(f) \geq \frac{1}{d-1}$，当且仅当 $d = p^e + 1$ 和 $f \in \mathfrak{m}^{[p^e]}$时取等号。然而，在缺少齐次性的情况下，即使假设 f 为无平方因子，我们也无法改进下界 $\mathrm{fpt}(f) \geq \frac{1}{d}$：当 d, N 互素时，二项式 $x_1^d + x_2^N$是约化的，并且 $\mathrm{fpt}(x_1^d + x_2^N)$ 在 $N \to \infty$ 时收敛于 $\frac{1}{d}$（例 3.21）。

关于对数正则阈值（lct）的主定理的特征零类比已广为人知。若 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个等特征零的优秀正则局部环，且 $\mathfrak{a} \subseteq R$ 是一个理想，那么专家们都知道，$\mathrm{lct}(\mathfrak{a}) \geq \frac{1}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})}$，且当且仅当 $\mathfrak{a} = x^d R$（其中d 属于 $\mathbb{Z}^+$，且 x 属于 $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$）时取等号。更一般地，对于多重次调和函数 $u\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 在 0 处的芽，若其 Lelong 数为 $\nu(u) = 1$，则有 $\mathrm{lct}(u) \geq 1$，且当且仅当 $u = \log |z_1| + v$ 时取等号，其中 z_1 是一个局部坐标，且 $\nu(v) = 0$；见 [12]。

主定理的一个直接推论是，下界 $\frac{1}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})} \leq \mathrm{fpt}(\mathfrak{a})$ 只有高度为 1 的理想才能达到。在一篇即将发表的论文中，[2], 作者证明了一个适用于更高高度理想的更强下界，这与 Demailly 和 Pham 关于对数正则阈值的一个结果类似 [8]。具体而言，对于一个特征为 $p > 0$ 的 F-有限正则局部环 $(R, \mathfrak{m})$，以及一个高度为 l 的理想 $\mathfrak{a} \subseteq R$，存在一个由正整数组成的对数凸数列 $\sigma_0(\mathfrak{a}) \dots, \sigma_l(\mathfrak{a})$，使得 $\sigma_0(\mathfrak{a}) = 1$，$\sigma_1(\mathfrak{a}) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$，并且

$$\frac{\sigma_0(\mathfrak{a})}{\sigma_1(\mathfrak{a})} + \cdots + \frac{\sigma_{l-1}(\mathfrak{a})}{\sigma_l(\mathfrak{a})} \leq \mathrm{fpt}(\mathfrak{a}). \tag{1}$$

整数 $\sigma_j(\mathfrak{a})$ 在 [3], 中构造，其中写作 $\sigma_j(\mathfrak{a}, \mathfrak{m})$。[2] 的主要结果是描述当 R 为多项式环且 $\mathfrak{a} \subseteq R$ 为齐次理想时，方程 (1) 中取等号的情形。

记号 1.1。本文中，所有环都是交换的诺特环。字母 p始终表示一个素数，而 q 表示 p的幂。

2. 预备知识

我们将研究幂级数环中的单项式序和首项。除少数例外，幂级数环中的格罗布纳理论与多项式环中的理论类似。对于不熟悉这些内容的读者，我们推荐阅读 [7,第 4]章。

记号 2.1。对于环元素的向量 $\mathbf{f} = f_1, \dots, f_r$ 以及非负整数的向量 $\mathbf{a} = a_1, \dots, a_r$，我们令 $\mathbf{f^a}$表示元素 $f_1^{a_1} \dots f_r^{a_r}$。如果 $\mathbf{a}$ 反而是一个非负实数元组，我们令 $\mathbf{f^a}$ 表示$\mathbb{R}$-除子 $a_1 div(f_1) + \cdots + a_r div(f_r)$。

定义 2.2. 设 k是一个域。设 $R = k[\![x_1, \dots, x_n]\!]$。$R$ 上的一个局部单项式序是单项式集合上的一个偏序 $>$，满足

对于所有属于 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 的$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，若$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \leq \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$，则

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{c}} \leq \mathbf{x}^{\mathbf{b}+\mathbf{c}} \leq \mathbf{x}^{\mathbf{b}}.$$

特别地，R中的最大单项式是 1。

设$f = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}} \gamma_{\mathbf{a}}\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ 是 R的一个元素。在所有满足$\gamma_{\mathbf{b}} \neq 0$的 $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 中，令 S 表示使 $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ 关于 $>$取最大值的向量集合。 f 关于 $>$的首项 记作 $\mathrm{in}_>(f)$，是元素$\sum_{\mathbf{b}\in S} \gamma_{\mathbf{b}}\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$。

2.1. **F-阈值与测试理想的背景**。 首先，我们定义F-阈值和测试理想，并汇总一些相关性质。有关更多背景，请参阅 [22, 28]。

定义-命题 2.3 ([22]). 设 R 是一个特征为 $p > 0$的正则局部环。设 $\mathfrak{a} \subseteq R$ 是一个理想，$\mathfrak{b} \subseteq R$ 是一个满足 $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$的真理想。对于 $e \geq 0$，定义 $\nu^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(p^e)$为满足$\mathfrak{a}^t \not\subseteq \mathfrak{b}^{[p^e]}$的最大整数 t 。那么数列 $\nu^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(p^e)\, p^e$ 在 $e \to \infty$时有极限，我们将该极限称为 F-阈值 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a})$。此外，我们有

$$\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(f) = \inf\left\{\frac{t}{p^e} : \mathfrak{a}^t \subseteq \mathfrak{b}^{[p^e]}\right\} = \sup\left\{\frac{t}{p^e} : \mathfrak{a}^t \not\subseteq \mathfrak{b}^{[p^e]}\right\}.$$

在本文的大部分内容中，上述 F-阈值的概念已足够。在少数几个个别情形下，我们需要更一般地定义一对 $(R,\ f^t)$ 何时是 F-纯的。

定义 2.4 ([25], §1.1)。设 R 是一个特征为 $p > 0$的环。对于任意 $e > 0$，模 $F^e_* R$的底层阿贝尔群与 R同构，其 R-模作用由沿 Frobenius 映射 $F^e\colon R \to R$ 限制标量所定义。具体而言， $F^e_* R$ 的元素为 $\{F^e_* f\colon f \in R\}$，且 $xF^e_* f = F^e_*(x^{p^e} f)$。若 R是 F-有限的，即 $F_* R$是有限生成的 R-模，则称之为 F-有限；此时，对所有 $e > 0$， $F^e_* R$都是有限的。

定义 2.5 ([24, 28])。设 R 是一个特征为$p > 0$的 F-有限约化环。设 $\mathfrak{a} \subseteq R$ 是一个理想， t 是一个非负实数。若对于某个 $e > 0$（等价地，对于所有满足 $n \in \mathbb{Z}^+$的整数 ne），存在 $d \in \mathfrak{a}^{\lceil t(p^e-1)\rceil}$，使得映射

$$R \to F^e_* R \qquad 1 \mapsto F^e_* d$$

分裂。

对 $(R, \mathfrak{a})$ 的 F-纯阈值 $\mathrm{fpt}(\mathfrak{a})$ 定义为所有满足 $(R, \mathfrak{a}^t)$ 是锐利 F-纯的实数 $t \geq 0$ 的上确界。

根据 [22, 注 1.5], 若 $(R, \mathfrak{m})$ 是正则局部环，则 $\mathrm{fpt}(\mathfrak{a}) = \mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$。

定义 2.6 ([4, 13])。设 R 是一个特征为 $p > 0$ 的 F-有限正则环，$\mathfrak{a} \subseteq R$ 是一个理想，t 是一个非负实数。对 $(R, \mathfrak{a}^t)$ 的测试理想 等于当 $e \gg 0$ 时映射的像

$$\mathfrak{a}^{\lceil tp^e \rceil} \cdot \mathrm{Hom}_R(F_*^e R, R) \to R \qquad d \cdot \phi \mapsto \phi(F_*^e d).$$

我们将 $(R, \mathfrak{a}^t)$ 的测试理想记为 $\tau(R, \mathfrak{a}^t)$；若上下文已明确环境环，则记为 $\tau(\mathfrak{a}^t)$。

命题 2.7。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 n 、特征为 $p > 0$ 的正则局部环。设 $\mathfrak{a}$ 是 R 的一个理想，并设 $\mathfrak{b} \subseteq R$ 满足 $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$。则有以下结论。

(1) 若 $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$，则 $ft^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{c}) \leq ft^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a})$。*(2)* 对于 $\mathbb{Z}^+$ 中的 s，有 $ft^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}^s) = \frac{1}{s} ft^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a})$。*(3)* 不等式 $1 \leq ord_{\mathfrak{m}}(f) \leq ft^{\mathfrak{m}}(f) \leq n \, ord_{\mathfrak{m}}(f)$ 成立。*(4)* 对所有 $e > 0$，有 $\nu_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(p^e) \, p^e \leq ft^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a})$。*(5)* 对于 ~~$\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$~~ 中的 x，若 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 表示 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 在 R/xR 中的像，则 $ft^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) \geq ft^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a})$。*(6)* 有 $ft^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) = inf\{t : \tau(\mathfrak{a}^t) \subseteq \mathfrak{b}\}$。*(7)* 若 R 是幂级数环，$\mathfrak{b}$ 是单项式理想，且 $>$ 是局部单项式序，则 $ft^{\mathfrak{b}}(in_>(\mathfrak{a})) \leq ft^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a})$。

证明。（1）—（4）见 [22, 命题 1.7]。下面列出断言（5）—（7）的证明。

（5）这一标准事实可由 [27, 定理 3.11]中的一个观察得出：对于任意正整数 t, e，若 $\mathfrak{a}^t \subseteq \mathfrak{b}^{[p^e]}$ 则 $(\mathfrak{a})^t \subseteq (\mathfrak{b})^{[p^e]}$。假设 $\bar{x} \in \mathfrak{m} \setminus \bar{\mathfrak{m}}^2$ 是为了确保商环 R/xR仍然是正则的；但如果以更一般的方式定义 F-阈值，则不需要这一假设。（6）这一事实由 [22, 命题 2.7]得出。（7） [28, 命题 4.5] 的证明中该断言的论证可以原样照用。

□

2.2. 临界点，参照 Hernández 和 Teixeira。

记号 2.8。对于 $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$中的向量$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$，符号 $\|\mathbf{a}\|$ 表示数 $a_1 + \cdots + a_n$。

定理 3.1 证明中的一个关键点运用了 Hernández 和 Teixera [16] 在二维情形下的思想，并将其推广以满足我们的需求。在前引文献中，作者考虑了以下问题。

问题 2.9。设 k是特征为 $p > 0$的域，且 $\mathbf{h} = h_1, \ldots, h_r$是 $R = k[x, y]$中的一组互不相同的线性形式。对于哪些 $\mathbf{t}$ 属于 $\mathbb{R}^r_{\geq 0}$，有$\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}}) = R$? 更一般地，对于一个齐次参数系

U, V和 $\mathfrak{b} = (U, V)$，我们如何描述使得$\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}}) \subseteq \mathfrak{b}$成立的 $\mathbf{t}$ 属于 $\mathbb{R}^r_{\geq 0}$ 的集合?

为了解决这个问题，作者研究了 *Syzygy* 间隙。对于 in $\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ and $q = p^e$，可以通过计算分次自由分解来确定 $\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{a}/q}) \subseteq \mathfrak{b}$

$$R(-m)\oplus R(-n) \to R(-q\text{度数 } U)\oplus R(-q\text{度数 } V)\oplus R(-\|\mathbf{a}\|) \to R/(U, V, \mathbf{h}^{\mathbf{a}}) \to 0 .$$

数值 $\Delta(\mathbf{a})$ 定义为“Syzygy 间隙” $|m-n|$。将 $\Delta(\mathbf{a}/q)$ 定义为 $\frac{1}{q}\Delta(\mathbf{a})$，便得到一个良定义映射 $\Delta: \left(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]_{\geq 0}\right)^r \to \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]_{\geq 0}$。根据引理 3.2 和引文中的命题 3.5，$\Delta$ 唯一地延拓为从 $\mathbb{R}^r_{\geq 0}$ 到 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的连续映射，并确定测试理想的行为：对于 $\mathbb{R}^r_{\geq 0}$ 中的 $\mathbf{t}$，当且仅当 $\Delta(\mathbf{t}) = |\|\mathbf{t}\| - \deg(UV)|$ 时，有 $\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}}) \subseteq \mathfrak{b}$。根据引文中的推论 3.11，只要 $\|\mathbf{t}\| \geq \deg(UV)$，就有 $\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}}) \subseteq \mathfrak{b}$，因此测试理想的非平凡行为仅限于区域 $\|\mathbf{t}\| < \deg(UV)$。根据引文中的定理 5.9，这种非平凡行为完全由 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]_{\geq 0}$ 中一族特殊点决定，作者将其称为临界点。

我们考虑的问题与此类似。我们不考虑任意的参数理想，而是考虑形如 (y, x^ℓ) 的特殊参数理想 $\mathfrak{b}$；我们不考虑线性形式的元组，而是考虑多项式元组 $\mathbf{h} = h_1, \ldots, h_r$，其中 $h_i = y - g_i$ 和 $g_i \in x^\ell k[x]$。

问题 2.10. 设 k 是特征为 $p > 0$ 的域，且 $R = k[\![x, y]\!]$。设 $\ell > 0$，并设 $\mathfrak{b} := (y, x^\ell)$。设 $r \geq 2$，对于 $1 \leq i \leq r$，令 $h_i = y - g_i$，其中 $g_i \in x^\ell k[x]$。令 $\mathbf{h}$ 表示向量 $h_1, \ldots, h_r$。对于 $\mathbb{R}^r_{\geq 0}$ 中的哪些 $\mathbf{t}$，有$\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}}) \subseteq \mathfrak{b}$?

与问题 2.9 类似，当 $\|\mathbf{t}\| < 1$ 时，我们有 $\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}}) \not\subseteq \mathfrak{b}$；当 $\|\mathbf{t}\| \geq 2$ 时，我们有$\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}}) \subseteq \mathfrak{b}$，因此 $\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}})$ 的非平凡行为包含在带状区域 $1 \leq \|\mathbf{t}\| < 2$ 中。由于无法使用 $\mathbb{N}$-分次结构，我们无法构造 Δ 的类似物，但我们证明，在问题 2.10 的情形下，临界点的类似物确实存在。

如果 D 是多项式 g_i中次数最大的，那么根据推论 2.19，$\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}})$ 在条带 $1 \leq \|\mathbf{t}\| < 1 + \frac{\ell}{D}$ 中的行为由 $\left(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]_{\geq 0}\right)^r$ 中的临界点决定；而当 $1 + \frac{\ell}{D} \leq \|\mathbf{t}\| < 2$时，临界点并不总能决定 $\tau(R, \mathbf{h}^{\mathbf{t}})$；见例 2.21。

定义 2.11。考虑问题 2.10 中的设定。我们将集合 $\left(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]_{\geq 0}\right)^r$ 划分为附属于 $\mathbf{h}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的上区域和下区域。对于 $\mathbb{Z}^r_{\geq 0}, q = p^e$ 中的$\mathbf{a}$，如果$\mathbf{h}^{\mathbf{a}} = h_1^{a_1} \ldots h_r^{a_r} \in \mathfrak{b}^{[q]}$，则称$\mathbf{a}_q \in \mathscr{U}$（上区域）。否则，称$\mathbf{a}_q \in \mathscr{L}$（下区域）。

由于 R 是 F-分裂的，因此 $\mathbf{h}^{\mathbf{a}} \in \mathfrak{b}^{[q]}$ 当且仅当 $\mathbf{h}^{p\mathbf{a}} \in \mathfrak{b}^{[pq]}$，所以区域 $\mathscr{U}$，$\mathscr{L}$是定义良好的。

引理 2.12。 对于任意 $\mathbf{a}_q \leq \mathbf{a}_{q'}'$，若 $\mathbf{a}_{-q} \in \mathscr{U}$，则 $\mathbf{a}_{q'}' \in \mathscr{U}$。

证明。 由 $\mathscr{U}$ 的良定义性，我们可以令 $q'' = \max(q, q')$，并改写 $\mathbf{a}_q = \mathfrak{b}_{q''}$，$\mathbf{a}' \equiv \mathbf{c}_{q''}$。假设 $\mathbf{b}_{q''} \in \mathscr{U}$。由于 $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$，可得 $\mathbf{h}^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{h}^{\mathbf{c}}$，因此 $\mathbf{h}^{\mathbf{c}} \in \mathfrak{b}^{[q'']}$，从而 $\mathbf{c}_{q''} \in \mathscr{U}$。□

引理 2.13。 假设 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$，且 q 是 p 的幂。令 $e_1, \ldots, e_r$ 表示 $\mathbb{Z}^r$ 中的标准单位向量。对于任意 $1 \leq s \leq r$，有 $\mathbf{a}_q - e_s \in \mathscr{U}$ 当且仅当 $\mathbf{a}_q - e_s \in \mathscr{U}$。

证明。 蕴含关系 $\Rightarrow$ 由引理 2.12 得出。对于反向蕴含，先考虑映射 $\phi : R \to R$，定义为 $\phi(x) = x$ 和 $\phi(y) = h_s$。由于 ϕ 是一个同构，且 $\phi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$，不失一般性，我们可以假设 $h_s = y$。

假设 $\mathbf{a}_q - e_s \in \mathscr{U}$。那么 $\mathbf{h}^{p(\mathbf{a}-e_s)} y^{p-1} = \mathbf{h}^{p\mathbf{a}-e_s} \in \mathfrak{b}^{[pq]}$。应用 [20,引理 3.5], ，我们得到

$$\mathbf{h}^{p(\mathbf{a}-e_s)} \in (\mathfrak{b}^{[pq]} : y^{p-1}) = (y^{pq-p+1}, x^{\ell pq})$$

单项式 $\{x^i y^j\}_{0 \leq i,j \leq p-1}$ 构成了 $F_* R$ 在 R 上的自由基；记 $\Phi : F_* R \to R$ 为到 $F_*(xy)^{p-1}$ 因子的投影。那么 $\Phi \circ (\cdot F_*(xy)^{p-1})$ 是 Frobenius 映射 $R \to F_* R$ 的一个分裂，因此

$$\mathbf{h}^{\mathbf{a}-e_s} = \Phi(F_*(xy)^{p-1} \mathbf{h}^{p(\mathbf{a}-e_S)}) \in \Phi(F_*(y^{pq}, x^{\ell pq+p-1})) = \mathfrak{b}^{[q]}.$$

□

引理 2.14. 设 $\mathbf{a}_q$ 是 $\mathscr{U}$ 中的一个向量。那么，对于所有满足 $a_s > 0$ 的 $1 \leq s \leq r$，$\mathbf{a}_q^{-e_s} \in \mathscr{L}$，当且仅当对于所有 $\mathbf{a}'_{q'} < \mathbf{a}_q$，$\mathbf{a}_{q'}' \in \mathscr{L}$。

证明。 蕴含关系 显然成立。对于蕴含关系，假设对于所有满足 的，$\mathbf{a}_q^{-e_s} \in \mathscr{L}$。由引理 2.13 可知，对于所有 $n > 0$ 以及所有满足 $a_s > 0$ 的 s，$p^n \mathbf{a}_{p^n q}^{-e_s} \in \mathscr{L}$。对于 $\mathbf{a}'_{q'} < \mathbf{a}_q$，不失一般性，设 $\mathbf{a}'_1 < \mathbf{a}_1$。那么 $\mathbf{a}'_{q'} \leq q' \mathbf{a}_{qq'}^{-e_1}$，由此根据引理 2.12 得到 $\mathbf{a}_{q'}' \in \mathscr{L}$。□

定义 2.15 （参见 [17], 定义 5.1）。 设 $\mathbf{c}_q$ 是 $\mathscr{U}$ 中的一个向量。若 $\mathbf{c}_q$ 满足引理 2.14 中两个等价条件之一，则称 $\mathbf{c}_q$ 是附属于 $\mathbf{h}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的一个临界点。我们用 $\mathscr{C}$ 表示此类临界点的集合。

引理 2.16 （参见 [16], 推论 5.7）。 设 a 属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$，且 q 是 p 的一个幂。则 $\mathbf{a}_q \in \mathscr{U}$ 当且仅当存在一个临界点 $\mathbf{c}_q$ 属于 $\mathscr{C}$，且 $\mathbf{c} \leq \mathbf{a}$。

证明。 假设 $\mathbf{a}_q \in \mathscr{U}$。集合 S 中满足 $\mathbf{u}$ 属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ 且 $\mathbf{u}_q \in \mathscr{U}$ 并且 $\mathbf{u} \leq \mathbf{a}$ 的元素是有限且非空的，因此选取 $\mathbf{c} \in S$，使得 $\|\mathbf{c}\|$ 最小。根据构造，对于所有 $1 \leq s \leq r$，都有 $\mathbf{c}_q^{-e_s} \in \mathscr{L}$，因此 $\mathbf{c}_q$ 是一个临界点（由引理 2.14）。反过来，若 $\mathbf{a}_q \geq \mathbf{c}_q \in \mathscr{C}$，则根据引理 2.12, $\mathbf{a}_q \in \mathscr{U}$。□

引理 2.17。若 $\mathbf{c}_{\bar{q}} \in \mathscr{U}$，则 $\left\|\frac{\mathbf{c}}{q}\right\| \geq 1$。

证明。首先，我们注意到 $h_i \in \mathfrak{b}$ 对所有 $1 \leq i \leq r$ 均成立，因此对于 $\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ 中的任意 $\mathbf{a}$，$\mathbf{h}^{\mathbf{a}} \in \mathfrak{b}^{\|\mathbf{a}\|}$。反过来，$\mathbf{h}^{\mathbf{a}}$ 中 $y^{\|\mathbf{a}\|}$ 的系数等于 1，因此 $\operatorname{ord}_{\mathfrak{b}}(\mathbf{h}^{\mathbf{a}}) = \|\mathbf{a}\|$。如果 $\mathbf{c}_q \in \mathscr{U}$，那么 $\mathbf{h}^{\mathbf{c}} \in \mathfrak{b}^{[q]} \subseteq \mathfrak{b}^q$，所以 $\|\mathbf{c}\| = \operatorname{ord}_{\mathfrak{b}}(\mathbf{h}^{\mathbf{c}}) \geq q$。□

引理 2.18（参见 [16], 注 5.8）。令 D 表示多项式 g_1、……、g_r 中任意一个多项式的最大总次数。如果 $\mathbf{b}_q$ 和 $\mathbf{c}_q$ 是 $\mathscr{C}$ 中的不同元素，那么 $\left\|\max(\frac{\mathbf{b}}{q}, \frac{\mathbf{c}}{q})\right\| \geq 1 + \frac{\ell}{D}$.

证明。令 $\mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{c}$。为证明这一结论，我们构造一个临界点序列 $\mathbf{c}^{(0)}$、$\mathbf{c}^{(1)}$、……、$\mathbf{c}^{(s)}$ 以及可能存在的非临界点 $\mathbf{a}^{(0)}$、……、$\mathbf{a}^{(s)}$，使得 $\mathbf{a}^{(s)} \leq \max(\mathbf{b}, \mathbf{c}^{(0)})$；我们将证明 $\|\mathbf{a}^{(s)}\| \geq 1 + \frac{\ell}{D}$。

考虑以下辅助条件，我们将证明它们对所有 $1 \leq m \leq s$ 均成立：

$$\max(\mathbf{b}, \mathbf{c}^{(m)}) \leq \max(\mathbf{b}, \mathbf{a}^{(m-1)}) \tag{2}$$

$$\max(\mathbf{b}, \mathbf{a}^{(m)}) < \max(\mathbf{b}, \mathbf{c}^{(m)}) \tag{3}$$

假设我们已构造出满足以下条件的 $\mathbf{c}^{(0)}$、…、$\mathbf{c}^{(n)}$、$\mathbf{a}^{(0)}$、…、$\mathbf{a}^{(n-1)}$

(i) $\mathbf{c}^{(n)} \neq \mathbf{b}$；(ii) $\mathbf{a}^{(0)}_q$、…、$\mathbf{a}^{(n-1)}_q \notin \mathscr{U}$；(iii) 方程 2 对 $1 \leq m \leq n$ 成立；(iv) 方程 3 对 $0 \leq m \leq n-1$ 成立。

对于基例 $n = 0$，唯一非空的假设是 $\mathbf{c}^{(0)} \neq \mathbf{b}$，这由假设可知成立。根据定义 2.15，不同的临界点 $\mathbf{b}_q$、$\mathbf{c}^{(n)}_q$ 彼此不可比较，因此取 $1 \leq i_n$、$j_n \leq r$，使得 $c^{(n)}_{i_n} > b_{i_n}$ 且 $c^{(n)}_{j_n} < b_{j_n}$。令 $\mathbf{a}^{(n)} = \max(\mathbf{b}, \mathbf{c}^{(n)}) - e_{i_n} - e_{j_n}$。我们计算

$$\max(b_t, a^{(n)}_t) = \begin{cases} c^{(n)}_{i_n} - 1 & t = i_n \\ b_{j_n} & t = j_n \\ \max(c^{(n)}_t, b_t) & t \neq i_n, j_n, \end{cases} \tag{4}$$

因此，方程 3 对 $m = n$ 成立。如果 $\mathbf{a}^{(n)}_q \in \mathscr{L}$，我们就设定 $s = n$ 并终止该序列。否则，我们应用引理 2.16，得到 $\mathbf{c}^{(n+1)} \leq \mathbf{a}^{(n)}$，其中 $\mathbf{c}^{(n+1)}_q \in \mathscr{C}$。根据构造，方程 2 对 $m = n+1$ 成立。由于 $c^{(n+1)}_{j_n} \leq a^{(n)}_{j_n} = b_{j_n} - 1$，向量 $\mathbf{c}^{(n+1)}$、$\mathbf{b}$ 再次彼此不同。

根据公式 2、3，我们得到一个严格递减的非负整数向量序列

$$\max(\mathbf{b}, \mathbf{c}^{(0)}) > \max(\mathbf{b}, \mathbf{c}^{(1)}) > \dots$$

该序列必然终止。特别地，存在某个索引 $s \geq 0$，使得 $\mathbf{a}_q^{(s)} \in \mathscr{L}$。此外，根据 $\mathbf{a}^{(s)}$ 的构造，我们计算得到

$$\mathbf{a}^{(s)} = \max(\mathbf{b}, \mathbf{c}^{(s)}) - e_{i_s} - e_{j_s} \leq \max(\mathbf{b}, \mathbf{c}^{(0)}) - e_{i_s} - e_{j_s},$$

因此 $\|\max(\mathbf{b}, \mathbf{c}^{(0)})\| \geq \|\mathbf{a}^{(s)}\| + 2$。为了证明 $\left\|\max(\mathbf{b}_q, \mathbf{c}_q^{(0)})\right\| \geq 1 + \frac{\ell}{D}$，只需证明

$$\left\|\mathbf{a}^{(s)}\right\| \geq q + \frac{\ell q}{D} - 2 \tag{5}$$

不妨设 $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(s)}$，$\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(s)}$，$i_s = 1$ 且 $j_s = 2$。令 $h_1 = y - g_1$，$h_2 = y - g_2$，考虑自同构 $\phi\colon R \to R$ 由 $x \mapsto x$ 和 $y \mapsto y - g_1$ 给出。于是 $\phi(h_1) = y$，$\phi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$，且 $\phi(h_i) = y - g_i - g_1$，其中 $g_i - g_1$ 是 $k[x]$ 中的一个总次数至多为 D 的多项式。因此不妨设 $g_1 = 0$，从而 $h_1 = y$。

令 $m = \operatorname{ord}_x(g_2)$。由于 x^ℓ 整除 g_2，且 $\deg(g_2) \leq D$，因此必有 $\ell \leq m \leq D$。我们计算得 $(h_1, h_2) = (y, x^m)$。作为一个 $q \in \mathscr{L}$，我们有 $\mathbf{h}^{\mathbf{a}} \notin \mathfrak{b}^{[q]}$。另一方面，$\mathbf{a} + e_1 \geq \mathbf{b}_q$ 且 $\mathbf{a} + e_2 \geq \mathbf{c}_q$，因此由引理 2.16 可得 $\mathbf{a} + e_1 \in \mathscr{U}$、$\mathbf{a} + e_2 \in \mathscr{U}$；于是 $\mathbf{h}^{\mathbf{a}}(h_1, h_2) \subseteq \mathfrak{b}^{[q]}$。将 (h_1, h_2) 改写为 (y, x^m)，并应用 [20,引理 3.5]，我们推出

$$\mathbf{h}^{\mathbf{a}} \in (\mathfrak{b}^{[q]} : (h_1, h_2)) = (y^q, x^{\ell q}, x^{\ell q - m} y^{q-1}).$$

写作 $\mathbf{h}^{\mathbf{a}} = \sum_{i \geq 0} z_i y^i$，其中 $z_i \in k[x]$。商模

$$\frac{(y^q, x^{\ell q}, x^{\ell q - m} y^q - 1)}{(y^q, x^{\ell q})}$$

由单项式 $y^{q-1}x^{\ell q - m}$、……、$y^{q-1}x^{\ell q - 1}$ 张成，因此 z_{q-1} 非零且次数至少为 $lq - m$。另一方面，z_{q-1} 是一个关于输入 g_1、……、g_r 的次数为 $\|\mathbf{a}\| - (q-1)$ 的多项式，因此我们有

$$\ell q - m \leq \deg(z_{q-1}) \leq D(\|\mathbf{a}\| - (q-1)).$$

由于 $m \leq D$，我们得出 $\|\mathbf{a}\| \geq (q-1) + \frac{\ell q - D}{D}$，因此等式 (5) 成立。 □

推论 *2.19*（参见 [16], 定理 *5.9*）。设 $h_1, \ldots, h_r$ 是问题 *2.10* 中的多项式，且其中的 g_i 两两不同。设 D 表示多项式 $g_1, \ldots, g_r$ 的最大次数。设 f 是 $k[\![x, y]\!]$ 中的一个元素，使得对于某些正整数 $t_1, \ldots, t_r$，有 $f = \mathbf{h}^{\mathbf{t}} = h_1^{t_1} \ldots h_r^{t_r}$。令 $\mathfrak{b} = (y, x^\ell)$，则要么 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(f) \geq \frac{1 + \ell/D}{\|\mathbf{t}\|}$，要么存在唯一的临界点 $\mathbf{c} \leq \frac{1 + \ell/D}{\|\mathbf{t}\|}\mathbf{t}$，它给出 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(f)$ 的值：也就是说，$\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(f) = \max_{1 \leq i \leq r} \frac{c_i}{t_i}$。

证明。令 $\lambda = \frac{1 + \ell/D}{\|\mathbf{t}\|}\mathbf{t}$。记 $\mu := \mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(f)$，并假设 $\mu < \lambda$。对所有 $e > 0$，命题 2.7 (4) 蕴含 $f^{\lceil p^e \mu \rceil} \in \mathfrak{b}^{[p^e]}$。根据定义，$\frac{\lceil p^e \mu \rceil}{p^e}\mathbf{t} \in \mathscr{U}$，因此由引理 2.16，存在 $\mathbf{c}^{(e)}$ 属于 $\mathscr{C}$，使得 $\mathbf{c}^{(e)} \leq \frac{\lceil p^e \mu \rceil}{p^e}\mathbf{t}$。 ——

选取 $e_0 \gg 0$，使得对所有 $e \geq e_0$，都有 $\frac{\lceil p^e\mu \rceil}{p^e} < \lambda$。对于任意 $e > e_0$，有

$$\left\| \max(\mathbf{c}^{(e_0)}, \mathbf{c}^{(e)}) \right\| \leq \left\| \frac{\lceil p^e\mu \rceil}{p^e}\mathbf{t} \right\| = \frac{\lceil p^e\mu \rceil}{p^e} \|\mathbf{t}\| < \lambda \|\mathbf{t}\| = 1 + \frac{\ell}{D}.$$

由引理 2.18，必有 $\mathbf{c}^{(e)} = \mathbf{c}^{(e_0)}$。令 $\mathbf{c} := \mathbf{c}^{(e_0)}$。

由于对所有 $e \geq e_0$ 都有 $\mathbf{c} \leq \frac{\lceil p^e\mu \rceil}{p^e}\mathbf{t}$，因此 $\mathbf{c} \leq \mu\mathbf{t}$。另一方面，对于任意 $\mu' < \mu$，我们可以选取 $e \gg 0$，使得 $\lceil p^e\mu' \rceil < \nu_f^{\mathfrak{b}}(p^e)$，根据定义—命题 2.3。因此，$\frac{\lceil p^e\mu' \rceil}{p^e}\mathbf{t} \notin \mathscr{U}$，所以 $\mathbf{c}^{(e_0)} \not\leq \frac{\lceil p^e\mu' \rceil}{p^e}\mathbf{t}$，进而 $\mathbf{c} \not\leq \mu'\mathbf{t}$。我们得出结论：$\mu$ 是使 $\mathbf{c} \leq \mu\mathbf{t}$ 成立的最小实数，因此 $\mu = \max_{1 \leq i \leq r} \frac{c_i}{t_i}$。□

注 2.20。代入 $\ell = n = 1$，上述推论为 [16, 定理 5.9] 在特殊情形 $\mathfrak{b} = (x, y)$ 下给出了一种替代证明：给定任意齐次多项式 f，我们可以进行线性坐标变换，使得 $x \nmid f$，之后即可应用推论 2.19。

下面的例子表明，参数 D 是必要的。与齐次情形（[17, 定理 5.9]）不同，如果 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(f) < \frac{2}{\|\mathbf{t}\|}$，则未必存在唯一的临界点 $\mathbf{c}$ 满足 $q \leq \|2\mathbf{t}\|$ 来计算 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(f)$。

例 2.21。设 $R = \mathbb{F}_2[\![x, y]\!]$ 和 $\ell = 1$ 满足 $\mathfrak{b} = (x, y)$，且 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(-) = \mathrm{fpt}(-)$。我们定义 $h_1 = y + x, h_2 = y + x^2, h_3 = y + x^4$。考虑 $\mathbf{t} = (1, 2, 1)$ $f := \mathbf{h}^{\mathbf{t}} = h_1h_2^2h_3$。那么 $f^7 \in \mathfrak{m}^{[16]}$，因此 $\mathrm{fpt}(f) \leq \frac{7}{16} < \frac{2}{\|\mathbf{t}\|}$。然而，在 $\|\mathbf{t}\| = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ 以下有许多临界点：例如，点 $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{13}{16}, \frac{7}{16}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right)$ 都是临界点。此外，这些点都无法计算 $\mathrm{fpt}(f)$ 的实际值；通过在 Macaulay2 [11] 中使用 FrobeniusThresholds 软件包[5] 进行计算，可得该值等于 $\frac{3}{7}$。

3. 定理 3.1 的证明

我们陈述主定理的一个一般版本，并概述其证明。

定理 3.1. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是特征为 $p > 0$ 的正则局部环，且 $\mathfrak{a} \subseteq R$ 是一个真理想。设 $d = \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$，并写作 $d = qs$，其中 q 是 p 的幂，且 $\gcd(p, s) = 1$。那么

(6) *If* $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{d}$, *then there exists* g *in* $\mathfrak{m}^{[q]}\widehat{R}$ *such that* $g^s\widehat{R} = \mathfrak{a}\widehat{R}$.

进一步假设，对于 R 中所有的素元 π，形式纤维 $R \otimes_R R_{(\pi)}/\pi R_{(\pi)}$ 是约化的。那么

(7) *If* $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{d}$, *there exists* h *in* $\mathfrak{m}^{[q]}$ *such that* $h^sR = \mathfrak{a}R$.

由于 F-有限环是优环 [10, （注 13）, 6], 我们的主定理可由这一更精确的版本推出。关于满足 $t_i \in \mathbb{R}$ 的对（R, $\mathfrak{a}_1^{t_1} \dots \mathfrak{a}_r^{t_r}$）的一个版本将见于作者的博士论文。

作为定理 3.1 的一个特例，我们可以对满足 $\mathrm{fpt}(f) = \frac{1}{\deg(f)}$ 的齐次多项式 f in $k[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ 进行分类。此情形见~~[20,~~ 注 3.2]；我们的证明采用了类似的策略。我们先将结论归约到代数闭域上的完备局部环中的主理想情形，随后应用局部贝蒂尼定理（引理 3.11），将问题归约到二维情形。

此处，两种论证开始出现分歧：与齐次多项式不同，二元幂级数可能是不可约的，因此我们使用魏尔斯特拉斯预备定理，将 f 写成 $u(y^d + a_1 y^{d-1} + \cdots + a_d)$，其中 $u \in k[\![x, y]\!]^\times$ 且 $a_1, \dots, a_d \in k[\![x]\!]$（引理 3.5）。接下来，我们将其扩张到有限平坦扩张 $(R, \mathfrak{m}) \to (U, \mathfrak{n})$，在该扩张上 f 分解为 $(y - \theta_1) \dots (y - \theta_d)$。为此，我们必须考虑 f 在 $\mathfrak{m}U$ 处的 F-阈值，而非 f 的 F-纯阈值。利用 [23, 命题 5.1],，我们将问题归约到 θ_i 是 $k[x]$ 的有限扩张 $k[x^{1/u}]$ 中的多项式这一情形。最后，我们运用临界点框架（推论 2.19）推得 $\theta_1 = \cdots = \theta_d$，随后应用引理 3.6，推得 f 在 R 中有一个 s 次根。由于 $d = qs$，若 $f = g^s$，则 $\mathrm{fpt}(g) = s\,\mathrm{fpt}(f) = \frac{1}{q} = \frac{1}{\mathfrak{m}}\mathrm{ord}\,(g)$，因此结论由次数为 q 的情形（引理 3.2）推出。我们将证明分为五个小节。

(1) 当 $\mathfrak{a}$ 为主理想、$k = k$，且 $R = k[\![x, y]\!]$ 时，等式 (6) 成立。(2) 当 $\mathfrak{a}$ 为主理想、$k = k$，且 $R = k[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ 时，等式 (6) 成立。(3) 当 $\mathfrak{a}$ 为主理想、k 为任意域，且 $R = k[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ 时，等式 (6) 成立。(4) 当 $\mathfrak{a}$ 为任意理想、k 为任意域，且 $R = k[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ 时，等式 (6) 成立。(5) 定理 3.1 成立。

3.1. **步骤 (1)**。

引理 3.2。设 $(R, \mathfrak{m})$ 是特征为 $p > 0$ 的正则局部环，且 f 是 R 的一个元素。若 $q = p^e$ 且 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = q$，则 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) = \frac{1}{q}$ 当且仅当 $f \in \mathfrak{m}^{[q]}$。

证明。如果 $f^1 \in \mathfrak{m}^{[q]}$，则不等式 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) \leq \frac{1}{q}$ 可由定义-命题 2.3 得出。反之，如果 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) = \frac{1}{q}$，那么 $\nu_f^{\mathfrak{m}}(q) < \frac{1}{q}$，因此 $\nu_f^{\mathfrak{m}}(q) = 0$ 且 $f \in \mathfrak{m}^{[q]}$。
□

引理 3.3 ([26]标签 05CK)。设 $A \to B$ 是环的忠实平坦映射，$I \subseteq A$ 是一个理想。那么 $IB \cap A = I$。

引理 3.4。设 $(R,\mathfrak{m}) \to (S,\mathfrak{n})$ 是正则局部环之间的平坦局部映射。假设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \subseteq R$ 是满足 $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}}$ 的理想。那么 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) = \mathrm{ft}^{\mathfrak{b}S}(\mathfrak{a}\overline{S})$ 且 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{b}S}(\mathfrak{a}S)$。

证明。第一个断言由 [19, 命题 2.2 (v)] 得出。对于第二个断言，设 $t > 0$。引理 3.3 表明

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}^t \implies \mathfrak{a}S \subseteq \mathfrak{b}^t \implies \mathfrak{a}S \cap R \subseteq \mathfrak{b}^t \cap R \iff \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}^t,$$

因此 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{b}S}(\mathfrak{a}S)$。□

引理 3.5。设 k 是特征为 $p > 0$ 的代数闭域。设 $R = k[\![z,w]\!]$，并令 $\mathfrak{m} = (z,w)$。若 $f \in \mathfrak{m}^d \setminus \mathfrak{m}^{d+1}$ 且 $\mathrm{fpt}(f) = \frac{1}{d}$，则存在：

- 对于 R，一组正则参数系为 x,y；
- 一个次数为 d 的首一多项式 P 在 $k[\![x]\!][y]$中；
- u 中的一个单位 $R^{\times}$

使得 $f = uP$。

证明。写作 $f = f_d + f_{>d}$，其中 f_d 是次数为 d 的齐次多项式，且 $f_{>d} \in \mathfrak{m}^{d+1}$。由命题 2.7 (7)，我们有 $\mathrm{fpt}(f_d) \leq \mathrm{fpt}(f)$。由于命题 2.7 (3) 的下界 $\frac{1}{d} = \frac{1}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f_d)} \leq \mathrm{fpt}(f_d)$ 仍然适用，我们有 $\mathrm{fpt}(f_d) = \frac{1}{d}$。由 [20, 注 3.2]，我们有 $f_d = \ell^d$，其中某个齐次线性形式为 ℓ。选取新的正则参数系 x，y 作为 R，使得 $\ell = y$，则有 $f = y^d + f_{>d}$。

将 $f = a_0 + a_1 y + \ldots$ 写成关于 $k[\![x]\!][\![y]\!]$的幂级数。由于 $f - y^d \in \mathfrak{m}^{d+1}$，可得 a_0，……，$a_{d-1} \in \mathfrak{m}$ 以及 $a_d \equiv 1$ 模 $\mathfrak{m}$。由魏尔斯特拉斯预备定理 [21, 定理 IV.9.1、IV.9.2]，即可得出结论。

□

引理 3.6. 设 L 是一个域。设 f 是 $L[\![x]\!]$ 中的一个元素，且满足 $x \nmid f$。设u、s 为正整数，使得 s 不是特征 k的倍数。若 $g \in L[\![x^{1/u}]\!]$使得 $g^s = f$，则 $g \in L[\![x]\!]$。

证明。写作 $g = a_0 + a_1 x^{1/u} + \cdots \in L[\![x^{1/u}]\!]$。由于 $x \nmid f$，我们有 $a_0 \neq 0$。若对所有 $u \nmid i$都有$a_i = 0$，则 $g \in L[\![x]\!]$。否则，为了导出矛盾，设 i 是满足 $u \nmid i$ 且 $a_i \neq 0$的最小值。通过比较 g^s 和 f中$x^{i/u}$ 的系数，我们得到

$$0 = s a_0^{s-1} a_i.$$

我们假设 s 不是 char k的倍数，因此 s 是 k中的一个单位，这与 $a_0 a_i \neq 0$ 的假设矛盾。□

引理 3.7。设 k 是一个域，且 $T = k[\![t]\!]$。设 θ_1、…、θ_d 是 T 的元素，并将 $f = (y-\theta_1)\ldots(y-\theta_d)$ 视为 $T[y]$ 的一个元素。设 $\ell \geq 1$。若 $f \in (y, t^{\ell})^d$，则对所有 $1 \leq i \leq d$，都有 $\mathrm{ord}_t(\theta_i) \geq \ell$。

证明。设 $f = y^d + g_1 y^{d-1} + \cdots + g_d$，其中 g_1，……，$g_d \in T$。将根 θ_1，……，θ_d重新排序，使得

$$\mathrm{ord}_t(\theta_1) = \cdots = \mathrm{ord}_t(\theta_r) < \mathrm{ord}_t(\theta_{r+1}) \leq \cdots \leq \mathrm{ord}_t(\theta_d).$$

由于 $f \in (y, t^\ell)^d$，我们有 $y^{d-r} g_r \in (y, t^\ell)^d$，因此 $g_r \in (y, t^\ell)^{d-r} \cap T = t^{\ell r} T$。我们有 $g_r = \theta_1 \dots \theta_r +$高阶项，因此 $\operatorname{ord}_t(g_r) = \operatorname{ord}_t(\theta_1 \dots \theta_r) = r \operatorname{ord}_t(\theta_1)$，所以对所有 $1 \le i \le d$，都有 $\operatorname{ord}_t(\theta_i) \ge \operatorname{ord}_t(\theta_1) \ge \frac{\ell r}{r} = \ell$。□

引理 3.8. 设 k 是特征为 $p > 0$的代数闭域。设 $R = k[\![x, y]\!], \mathfrak{m} = (x, y)$。设 d 是正整数，f是R的一个元素，满足 $\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = d$，$\operatorname{fpt}(f) = \frac{1}{d}$。记 $d = qs$，其中 q是 p的幂，且 $\gcd(p, s) = 1$。那么存在 g属于 $\mathfrak{m}^{[q]}$，使得 $g^s = f$。

证明。根据引理 3.5，我们不妨设 f 是 $k[\![x]\!][y]$中的次数为 d的首一多项式。令 $S = k[\![x]\!]$，且 $K =$ 为 $\operatorname{Frac}(S)$。$S[y]$中的每个首一多项式都在 K上完全分解，因此我们可以写成

$$f = (y - \theta_1)^{e_1} \dots (y - \theta_r)^{e_r}$$

对于某些 θ_1、……、θ_r 个互不相同的根，它们属于 K；与前一个引理不同，我们将按重数计算根。

令 T表示 S在 $K(\theta_1, \dots, \theta_r)$ 中的整闭包。根据 [18, 定理 4.3.4]，T 是完备局部整环，且 $S \to T$ 是有限的。由于 T 是一个等特征的一维完备正规环，Cohen 结构定理给出：对某个域扩张 k'/k，有 $T \cong k'[\![t]\!]$。此外，$S \to T$ 在 $k \to k'$ 上的限制是有限的，且 k 是代数闭的，因此 $k = k'$。

定义 $\ell := \operatorname{ord}_t(xT)$，并注意到根据引理 3.7，对所有 $1 \le i \le r$，都有 $t^\ell \mid \theta_i$。令 $U := T[\![y]\!] = k[\![y, t]\!]$。由于 $R \hookrightarrow U$是同维正则局部环之间的有限局部映射，根据奇迹平坦性引理 [26, Tag 00R4]，$R \to U$ 是平坦的。令 $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}U = (y, t^\ell)U$。由于 $R \to U$是平坦的，我们有 $\operatorname{fpt}(f) = \operatorname{ft}^{\mathfrak{m}}(f) = \operatorname{ft}^{\mathfrak{b}}(f) = \frac{1}{d}$，根据引理 3.4。写作 $d = qs$，其中 s与 p互素。我们旨在证明存在 U 中的 g，使得 $g^s = f$。如果 $r = 1$，结论显然；我们只需有 $f = h_1^{qs}$ 和 $g = h_1^q$。否则，假设 $r \ge 2$。

设 $\mathfrak{n} = (y, t) \subseteq U$。对于所有 $1 \le i \le r$，，我们有 $y - \theta_i \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{n}^2$，因此 $h_i := y - \theta_i$是不可约的。正如在 [23, 推论 5.2], 中所论证的，对 $(U, (h_1 \dots h_r)^1)$ 在远离 $\mathfrak{n}$ 的地方是锐利的 F-纯的，因此根据 [23, 定理 5.1]，存在 D 属于 $\mathbb{Z}^+$，使得对于所有 $t_1, \dots, t_r$ 属于 $[0, 1)$ 以及满足 $h_i \equiv \tilde{h}_i$ 模 $\mathfrak{n}^D$ 的 $\tilde{h}, \dots, \tilde{h}_r$，我们有

$$\tau(U, h_1^{t_1} \dots h_r^{t_r}) = \tau(U, \tilde{h}^{t_1} \dots \tilde{h}_r^{t_r}). \tag{8}$$

不失一般性，取 D 大于对所有$1 \le i < j \le r$的 $\operatorname{ord}_{\mathfrak{n}}(\theta_i - \theta_j)$；特别地，$D$ 的这个取值满足 $D \ge \ell$。对于 $1 \le i \le r$，~，令 θ_i 表示 $k[t]$中幂级数 θ_i 截断到第 D 项所得的多项式；我们有 $\theta_i \equiv \tilde{\theta}_i \bmod \mathfrak{n}^D$，且 $t^\ell \mid \tilde{\theta}_i$。设 $\tilde{h}_i = y - \tilde{\theta}_i$，并令 $\tilde{f} = \tilde{h_1}^{e_1} \dots \tilde{h_r}^{e_r}$。根据假设 $r \ge 2$，我们有对所有 $1 \le i \le r$，$e_i \le d - 1$，因此对 $[0, \frac{1}{d}]$中所有 c，都有 $ce_i \in [0, 1)$。由方程（8），对于所有 $c \in [0, \frac{1}{d}]$，，我们有

$$\tau(R, f^c) = \tau(R, h_1^{ce_1} \dots h_r^{ce_r}) = \tau(R, \tilde{h_1}^{ce_1} \dots \tilde{h_r}^{ce_r}) = \tau(R, \tilde{f}^c).$$

由于 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(f)=\frac{1}{d}$，可得对所有 $0\le c<\frac{1}{d}$，$\tau(R,\ \tilde{f}^{c})\not\subseteq\mathfrak{b}$，且 $\tau(R,\ \tilde{f}^{1/d})\subseteq\mathfrak{b}$，因此 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(\tilde{f})=\frac{1}{d}$。

根据我们对 D 的选择，因子 h_1、……、h_r 互不相同。沿用定义 2.11 中的记号，记 $\tilde{f}=\tilde{\mathbf{h}}^{\mathbf{e}}=\tilde{h_1}^{e_1}\dots\tilde{h_r}^{e_r}$，其中 $e_i>0$。由于 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(\tilde{f})=\frac{1}{\|\mathbf{e}\|}<\frac{1+\ell/D}{\|\mathbf{e}\|}$，由推论 2.19，存在一个临界点 $\mathbf{c}=\mathbf{a}\,q_0\le\frac{1+\ell/D}{\|\mathbf{e}\|}$，使得 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(\tilde{f})=\max_{1\le i\le r}\frac{c_i}{e_i}$。于是我们有

$$1=\|\mathbf{e}\|\cdot\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(\tilde{f})=\sum_{i=1}^{r}e_i\max\left(\frac{c_1}{e_1},\dots,\frac{c_r}{e_r}\right)\ge\sum_{i=1}^{r}c_i=\|\mathbf{c}\|\,. \tag{9}$$

由引理 2.17，我们有 $\|\mathbf{c}\|\ge 1$，因此等式（9）中的不等式取等号。特别地，对所有 $1\le i\le r$，都有 $c_i=e_i\max(\frac{c_1}{e_1},\dots,\frac{c_r}{e_r})$，因此对所有 $1\le i\le r$，都有 $\frac{c_i}{e_i}=\max(\frac{c_1}{e_1},\dots,\frac{c_r}{e_r})$，于是 $\mathbf{c}=\mathrm{ft}^{\mathfrak{b}}(\tilde{f})\mathbf{e}$。对于所有 $1\le i\le r$，我们得到 $\frac{e_i}{d}=\frac{a_i}{q_0}$。回忆一下，$d=qs$，其中 s 与 p 互素。于是 $e_iq_0=a_isq$，所以我们得到 $s\mid e_i$。因此，f 在U中有一个 s 次根 g：与 $r=1$ 情形类似，我们取 $g=h_1^{e_1/s}\dots h_r^{e_r/s}$。

回忆一下，$x=ut^{\ell}$，其中 u 是 $U^{\times}$中的一个单位。由于 U 是域 k 上的幂级数环，我们有 $u^{1/\ell}\in U$。因此，$x^{1/\ell}=tu^{1/\ell}$ 与 t 共轭，故 $U=k[\![y,\ x^{1/\ell}]\!]$。令 $L=$ 为 $\mathrm{Frac}(k[\![y]\!])$，并将 f 视为 $L[\![x]\!]$的一个元素。由于 $g\in U\subseteq L[\![x^{1/\ell}]\!]$，由引理 3.6 可知$g\in L[\![x]\!]\subseteq$ 属于 $\mathrm{Frac}(R)$。由于 R 是整闭的，且 g 在 R 上整，因此 $g\in R$。

由于 $f=g^s$，由命题 2.7 (2) 可得 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f)=\frac{1}{s}\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(g)$。此外，$\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(g)=\frac{1}{s}\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f)$，所以 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(g)=\frac{1}{q}=\frac{1}{\mathfrak{m}\mathrm{ord}(g)}$。由引理 3.2，我们得出 $g\in\mathfrak{m}^{[q]}$，从而证明了该断言。□

注记 3.9。利用 Schwede 关于 F-纯性的中心的结果，可以在 d与 p互素的特殊情形下，给出引理 3.8 的一个简短证明。假设 $\mathrm{fpt}(f)=\frac{1}{d}$且 d与 p 互素；则对于某个$e>0$，有 $(p^e-1)\frac{1}{d}\in\mathbb{Z}^{+}$。根据定理 4.9]，，对 $(R,\ f^{1/d})$ 是尖锐 F-纯的，但不是强 F-正则的。令 $\mathfrak{p}$ 为 $(R,\ f^{1/d})$ 的一个尖锐 F-纯性中心，如[24, 中所述；根据命题 4.6]，它是一个非零素理想。由命题 3.11 和 4.7]，我们得到$f^{\frac{p^e-1}{d}}\in(\mathfrak{p}^{[p^e]}:\ \mathfrak{p})$ [24, 。

如果 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1$，那么对于某个不可约元 $g\in R$，有 $\mathfrak{p}=(g)$。在这种情况下，我们有 $f^{\frac{p^e-1}{d}}\in g^{p^e-1}$。由于 $p^e-1=\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f^{\frac{p^e-1}{d}})\ge(p^e-1)\,\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(g)$，因此必有 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(g)=1$，所以 $q=1$ 且 $g\in\mathfrak{m}^{[q]}$。由f 的唯一分解性可知，对于某个单位 $u\in R$，有 $f=ug^d$。由于 k 是代数闭的，u在 R中有一个 d 次根，从而在此情形下证明了结论。为完成证明，我们将证明 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})\ne 2$。反设 $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$。那么 $f^{\frac{p^e-1}{d}}\in(x_1^{p^e},x_2^{p^e},(x_1x_2)^{p^e-1})\subseteq\mathfrak{m}^{p^e}$。但这与 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f^{\frac{p^e-1}{d}})=p^e-1$ 的事实矛盾，从而证明了结论。

3.2. **步骤 (2)**。对于这一步，我们需要 Flenner 提出的局部贝尔蒂尼定理 [9]。

引理 3.10 ([9], 定理 2.1)。设$(A, \mathfrak{m})$是一个余系数域为 k 的完备局部环。设 $\mathfrak{J} = (z_1, \ldots, z_l) \subseteq A$ 是一个真理想。假设$Q = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r\}$是 $D(\mathfrak{J})$的有限个素理想组成的集合。那么存在 x属于 $\mathfrak{J}$，使得：

(i) $x \equiv z_1$ 模 $(z_2, \ldots, z_l) + \mathfrak{m}\mathfrak{J}$；
(ii) $x \notin \mathfrak{q}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{q}_r$；*(iii)* 对所有 $x \in D(\mathfrak{J})$， $x \notin \mathfrak{p}^{(2)}$。

证明。虽然 Flenner 没有明确指出关于x的同余条件，但我们可以说明构造中的一个细节，以确保 (i) 成立。按照 Flenner 的记号，设 $y_1, \ldots, y_m$是 $\mathfrak{m}$ 的一个生成集。接着令 $x_1, \ldots, x_n$表示元素 $z_1, \ldots, z_l, z_1y_1, \ldots, z_ly_m$组成的集合，其中$x_i = z_i$对 $1 \leq i \leq l$成立。取 loc. cit. 中的 $S \subseteq A$，则存在 $a_2, \ldots, a_n$属于 S，使得 $x := x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$满足 (ii) 和 (iii)。注意到 $x \equiv z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_lz_l$模 $\mathfrak{m}\mathfrak{J}$，结论 (i) 即得。□

下面的引理本质上是 [9, Korollar 3.5], 的一个应用，其中我们用修改后的引理 3.10 替换了上述文献中的 Satz 2.1。尽管 Flenner 的论证经过相应调整后也适用于我们，但由于上述文献是用德语写成的，为方便读者，我们将这些改动明确写出。

引理 3.11。设 k 是一个无限域。设 $n \geq 3, R = k[\![x_1, \ldots, x_n]\!], \mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$。设 f 是 R 中的一个元素，且 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = d > 0$。设 $s > 0$，并假设 f 在 R 中没有 s 次根。存在 $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ 中的 x，使得 f 在 R/xR 中的像 f 没有 s 次根，且$\mathrm{ord}^{\mathfrak{m}/(x)}(f) = d$。

证明。回想一下，正则局部环是唯一分解整环（UFD） [1]。将 f分解为 $f = \pi_1^{e_1} \ldots \pi_l^{e_l}$，其中 π_1、.....、π_l是 f的互不相同的不可约因子。根据假设，f 在 R中没有 s次根，因此重数 e_i并非都能被 s整除。令 $g = \pi_1 \ldots \pi_l$。写作 $f = f_d + f_{>d}$，其中 f_d 是次数为 d 的齐次多项式，且 $f_{>d} \in \mathfrak{m}^{d+1}$。令 $Q \subseteq \mathrm{Spec}\, R$ 表示素理想 $\mathfrak{q}$ 的集合，其中要么$\mathfrak{q}$ 是 (f_d, g)上的极小素理想，要么 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) < n$，且 $\mathfrak{q}$ 在 R/gR中的像是 $\mathrm{Sing}(R/gR)$ 的极小元素。由于 $\dim R = n \geq 3$，且 (f_d, g) 上的每个极小素理想 $\mathfrak{q}$ 都满足 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq 2$，我们得出 $\mathfrak{m} \notin Q$。

由假设 k 是无限集[1]，存在一个齐次线性形式属于 R，且它不是 f_d 的因子。选取齐次坐标 $z_1, \ldots, z_n$，使其满足 $R\ z_1 \nmid f_d$。令 $\mathfrak{J} = (z_1, z_2^{d+1}, \ldots, z_n^{d+1})$。由于 $\sqrt{\mathfrak{J}} = \mathfrak{m}$，我们有 $Q \subseteq D(\mathfrak{J})$。对 $R, \mathfrak{J}$ 和 Q 应用引理 3.10，得到 x 属于 $\mathfrak{J}$，使得 $x \equiv z_1$ 模 $(z_2^{d+1}, \ldots, z_n^{d+1}) + \mathfrak{m}\mathfrak{J}, x \notin \bigcup_{\mathfrak{q} \in Q} \mathfrak{q},$，且对所有 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ 都有 $x \notin \mathfrak{p}^{(2)}$。于是由构造可知 $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$。

[1]只需有 $\#\mathbb{P}^{n-1}(k) > d$。

我们研究 f 在 R/xR 中的像 f，并证明它满足 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}/(x)}(f) = d$。为此，只需证明 $f \notin xR + \mathfrak{m}^{d+1}$。由于 $x \equiv z_1$ 模 $(z_2^{d+1}, \ldots, z_n^{d+1}) + z_1\mathfrak{m}$，存在 y 属于 $\mathfrak{m}$，使得 $x \equiv z_1 + yz_1$ 模 $\mathfrak{m}^{d+1}$。因为 z_1, f_d 是齐次多项式，且 $z_1 \nmid f_d$，所以有 $f_d \notin z_1R + \mathfrak{m}^{d+1} = xR + \mathfrak{m}^{d+1}$，因此 $f \equiv f_d \neq 0$ 模 $xR + \mathfrak{m}^{d+1}$，从而 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}/(x)}(f) = d$。

由于 R/fR 是约化的，利用 [9, Korollar 3.5] 中的论证，我们可以得出环 $R/(f, x)R$ 是约化的。特别地，f的像在 R/xR中无平方因子，因此我们可以将 R/xR 中每个 π_i 的像分解为$\pi_i = \rho_{i1} \ldots \rho_{is_i}$，其中$\rho_{ij}$不可约且两两不同。由此可将 f 分解为$\prod_{i=1}^{l} \prod_{j=1}^{s_i} \rho_{ij}^{e_i}$。根据假设，重数 e_i并非全都能被 s整除。由于 $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$，环 R/xR 是正则的，因此是唯一分解整环，所以 f 没有 s次根属于 R/xR。□

引理 3.12。设 k 是特征为 $p > 0$的代数闭域。设 $n \geq 1$ 且 $R = k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$。设 f是 R 中的一个元素，满足$\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = d$。写作 $d = qs$，其中 $q = p^e$ 且 s 与 p互素。若$\mathrm{fpt}(f) = \frac{1}{d}$，则存在 g属于 $\mathfrak{m}^{[q]}$，使得 $f = g^s$。

证明。若 $n = 1$，则对某个 u，有 $f = ux_1^d$ 在 $R^\times$ 中。由于 $\overline{k} = k$，R 中的每个单位在 R中都有一个 d次根，因此我们有 $f = (u^{1/d}x_1)^d$ 以及 $g = u^{q/d}x_1^q$。$n = 2$ 情形即为引理 3.8；现在假设该结论在维数 $n - 1$ 中成立，并令 $n \geq 3$。设 f是 R 中的一个元素，满足 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = d$，并写作 $d = qs$，其中 $q = p^e$ 且 $\gcd(s, p) = 1$。如果 f 在 R中没有 s次根，那么根据引理 3.11，存在 x 属于 $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$，将 f 在 R/xR中的像记为 f，使得元素 f 在R/xR中没有 s次根，且 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}/(x)}(f) = d$。根据维数 $n-1$中的分类，我们有 $\overline{\mathrm{ft}}^{\mathfrak{m}/(x)}(f) > \frac{1}{d}$。由命题 2.7（5），我们有 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) \geq \mathrm{ft}^{\mathfrak{m}/(x)}(f) > \frac{1}{d}$。

现在假设 $\mathrm{fpt}(f) = \frac{1}{d}$。根据上一段，$f$在 R 中有一个s次根 g。记作 $f = g^s$，由命题 2.7 （2）以及 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}$ 是赋值这一事实可得

$$\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(g) = s\,\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) = \frac{1}{q} = \frac{1}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(g)}.$$

由引理 3.2，我们得出 $g \in \mathfrak{m}^{[q]}$，从而证明了该断言。□

3.3. **步骤（3）**。在任意域 k 上，$k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ 中满足 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) = \frac{1}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f)}$ 的元素 f可能根本没有 s 次根。

例 3.13。设 $R = k[\![x]\!]$。设 $q = p^e$ 和 $s > 0$ 满足最大公约数$(s, p) = 1$，并记作 $d = qs$。若存在 $a \in k^\times$ 使得 a 在 k 中没有 s 次根，则 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(ax^d) = \mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(x^d) = \frac{1}{d}$，，但 ax^d 在R 中没有 s 次根。

下面的引理表明，例 3.13 在幂级数环中可能出现的病态程度已达极限。

引理 3.14. 设 k 为一个域，$R = k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$，并令 $S = R\widehat{\otimes}_k k$。设 f 是 $\overline{R}$ 的一个元素，且 s 属于 $\mathbb{Z}^+$，满足 $\mathrm{char}(k)$ 不整除 s。若存在 g 属于 S，使得 $g^s = f$，则存在一个单位 u 属于 $k^\times$，以及一个元素 h 属于 R，使得 $f = uh^s$。

证明。令 Γ 表示 S中的单项式集合。设 $\succ$ 是 S上的局部单项式序，使得 $(\Gamma, \succ)$ 与 $(\mathbb{N}, >)$ 序同构；例如，我们可以取满足

$$x^I \succ x^J \iff x^I <_{\mathrm{deglex}} x^J$$

的 $\succ$。写作$g = \sum_{i=0}^N a_i x^{I_i}$，其中 a_i非零且 $I_1 < I_2 < \ldots$。我们允许 N为正整数或无穷大；两种情况下的证明相同。由于 $a_1^s(x_1^{I_1})^s = $在$\succ(g^s) = $在$\succ(f) \in R$，可得 $a_1^s \in k$。令 $u = a_1^{-s}$且$h = a_1^{-1}g$；于是有 $f = uh^s$ 和 $h^s \in R$。为证明该断言，我们将证明$h \in R$。

为便于记号，记 $b_i = \frac{a_i}{a_1}, i \geq 2$，使得 $h = x^{I_1} + b_2 x^{I_2} + \ldots$。设 $j \geq 2$ 满足 $b_2, \ldots, b_{j-1} \in k$，并考虑 h^s 中 $x^{(s-1)I_1 + I_j}$ 的系数 c_j。先验地，我们有

$$c_j = \sum_{\substack{\ell_1, \ldots, \ell_s \\ I_{\ell_1} + \cdots + I_{\ell_s} = (s-1)I_1 + I_j}} b_{\ell_1} \ldots b_{\ell_s}. \tag{10}$$

若 $\ell_1 \leq \cdots \leq \ell_s \in \mathbb{N}$ 满足 $I_{\ell_1} + \cdots + I_{\ell_s} = (s-1)I_1 + I_j$，则有 $(s-1)I_1 + I_{\ell_s} \leq (s-1)I_1 + I_j$，因此 $\ell_s \leq j$，且当且仅当$\ell_1 = \cdots = \ell_{s-1} = 1$时取等号。因此，我们可以改进方程（10）：

$$c_j = sb_j + \sum_{\substack{\ell_1, \ldots, \ell_s < j \\ I_{\ell_1} + \cdots + I_{\ell_s} = (s-1)I_1 + I_j}} b_{\ell_1} \ldots b_{\ell_s}. \tag{11}$$

由于 $h^s \in R$，系数 c_j 属于 k。根据假设 $b_1, \ldots, b_{j-1} \in k$，方程（11）的第二项是 k 的一个元素，因此 $sb_j \in k$。由于 s 是 k 中的一个单位，我们得出 $b_j \in k$。□

引理 3.15. 设 k 是特征为 $p > 0$ 的域，$R = k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$，且 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$。设 f是 R中的一个元素，使得 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) = \frac{1}{d}$。若 q是整除 d 和 $d = qs$的 p 的最大幂，则存在 $R^\times$ 中的一个单位 u 和 $\mathfrak{m}^{[q]}$ 中的一个元素 g，使得 $f = ug^s$。

证明。设 $S = R\widehat{\otimes}_k \overline{k}$，并考虑映射 $R \to S$。我们有 $R \to S$是忠实平坦的，$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}S$是 S 的极大理想，且 $S = k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$。由引理 3.4，得 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) = \mathrm{ft}^{\mathfrak{n}}(f)$，且 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{n}}(f)$。由于 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{n}}(f) = \frac{1}{d} = \frac{1}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{n}}(f)}$，由引理 3.12，存在 $\mathfrak{m}^{[q]}$ 中的 g，使得 $f = g^s$。由引理 3.14，存在 R中的 h，$R^\times$ 中的 u，使得 $uh^s = f$；并由引理 3.2 得 $h \in \mathfrak{m}^{[q]}$。□

3.4. 步骤（4）。

引理 3.16。设 k 是特征为 $p > 0$ 的域，$R = k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$，以及 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$。设 $\mathfrak{a} \subseteq R$ 满足 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{d}$。如果 q 是整除 d 和 $d = qs$ 的 p 的最大幂，那么存在 $g \in \mathfrak{m}^{[q]}$，使得 $g^s R = \mathfrak{a}$。

证明。设 f 是 $\mathfrak{a}$ 中满足 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f)=d$ 的元素。由命题 2.7 (1)、(3)，有 $\frac{1}{d}\le \mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f)\le \mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})=\frac{1}{d}$。由引理 3.15，存在 $u\in R^{\times}$，$g\in \mathfrak{m}^{[q]}$，使得 $f=ug^s$。我们将证明 g^s 生成 $\mathfrak{a}$。

令 $e>0$ 满足 $s\mid(p^e-1)$；记 $t_e=\frac{p^e-1}{s}$。由命题 2.7 (4)，对所有 $e>0$，我们有 $\nu_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{m}}(qp^e)<qp^e\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})\le\lceil qp^e/qs\rceil=t_e+1$，因此对所有 $e>0$，都有 $\mathfrak{a}^{t_e+1}\subseteq\mathfrak{m}^{[p^e]}$。令 z 为 $\mathfrak{a}$ 中任意元素，并令 r 为一个正整数。由于 $\mathfrak{a}^{t_e+1}\subseteq\mathfrak{m}^{[qp^e]}$，特别有 $(g^s)^{t_e-r}z^{r+1}\in\mathfrak{m}^{[qp^e]}$。记 $g=a_1x_1^q+\cdots+a_nx_n^q$。由于 $=\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(g)=q$，存在某个 $1\le i\le n$ 使得 $a_i\in R^{\times}$。由于 $g\equiv a_ix_i^q \bmod (x_1^q,\ldots,x_{i-1}^q,x_{i+1}^q,\ldots,x_n^q)$，可得 $\mathfrak{m}^{[q]}=(x_1^q,\ldots,x_{i-1}^q,g,x_{i+1}^q,\ldots,x_n^q)$。特别地，$x_1,\ldots,x_{i-1},g,x_{i+1},\ldots,x_n$ 是 R 的一个参数系。由 [20, 引理 3.5]，，我们有

$$
\begin{aligned}
z^{r+1}\in(\mathfrak{m}^{[qp^e]}:(g^s)^{t_e-r})&=\left((x_1^{qp^e},\ldots,g^{p^e},\ldots,x_n^{qp^e}):g^{p^e-1-sr}\right)\\
&=(x_1^{qp^e},\ldots,g^{1+sr},\ldots,x_n^{qp^e}).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

应用等式（12），并令 $e\to\infty$，我们得到对所有 $r>0$ 都有 $z^{r+1}\in g^{1+sr}R\subseteq g^{sr}R$。根据 [18, 推论 6.8.11]，$z$ 包含在理想 g^sR的整闭包中；根据 [18, 命题 1.5.2]，该整闭包等于 g^sR 本身。□

3.5. **步骤（5）**。

引理 3.17. 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个正则局部环，且 $I\subseteq A$ 是一个理想，使得 $\widehat{IA}$为主理想。那么 I 为主理想。

证明. 设 M是一个 A-模。由于 $I\widehat{A}$为主理想，$I\widehat{A}$是平坦的，因此 $\mathrm{Tor}_1^{\widehat{A}}(I\widehat{A},M\otimes_A\widehat{A})=0$。因此，根据 [26, 标签 00M8]，我们有

$$0=\mathrm{Tor}_1^{\widehat{A}}(I\widehat{A},M\otimes_A\widehat{A})=\mathrm{Tor}_1^{\widehat{A}}(I\otimes_A\widehat{A},M\otimes_A\widehat{A})=\mathrm{Tor}_1^{A}(I,M)\otimes_A\widehat{A},$$

因此，由于 $A\to\widehat{A}$ 的忠实平坦性，我们得出 $\mathrm{Tor}_1^A(I,M)=0$。由于 M 是任意的，我们推得 I 是一个平坦的 A-模，因此 I 是一个主理想。□

引理 3.18。设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个正则局部环，$I\subseteq A$ 是一个理想，且 $I\widehat{A}$ 是由某个元素 g^s 生成的主理想，其中 s 属于 $\mathbb{Z}^+$，g 属于 $\widehat{A}$。假设对于所有素元 $\pi\in A$，形式纤维 $A\otimes_A A_{(\pi)}/\pi A_{(\pi)}$ 都是约化的。那么存在 h 属于 A，使得 $I=h^sA$。

证明。由引理 3.17，取 f 属于 A，使得 $I=fA$。由于 $IA=fA=g^sA$，由引理 3.14 可知，对于某个 u 属于 $A^{\times}$，有 $f=ug^s$。

再次回忆，A，$\widehat{A}$是唯一分解整环 [1]。将 f在 A中分解为$f=v\pi_1^{d_1}\ldots\pi_l^{d_l}$，其中 v属于 $A^{\times}$，且 $\pi_1,\ldots,\pi_l$两两互素且不可约。在 A，中，将每个 π_i 分解为 $\rho_{i1}^{e_{i1}}\ldots\rho_{is_i}^{e_{is_i}}$，其中每个$\rho_{ij}$都不可约，且$\rho_{ij}$，$\rho_{ij'}$互素，对任意 $j\ne j'$均成立。根据假设，对所有 $1\le i\le l$，形式纤维$A\otimes_A A_{(\pi_i)}/\pi_iA_{(\pi_i)}$ 都是约化的，可得对所有 $1\le i\le l$，$1\le j\le s_i$，$e_{ij}=1$。此外，由于 $\rho_{ij}A\cap A=\pi_iA$，可得对所有 ....., ρ_{ij}，$\rho_{i'j'}$互素

$(i,\ j) \neq (i',\ j')$。记作

$$ug^s = f = v\pi_1^{d_1} \dots \pi_l^{d_l} = \prod_{i=1}^{l} \prod_{j=1}^{s_i} \rho_{ij}^{d_i},$$

由此可得，对于所有 $1 \leq i \leq l,\ \ s \mid d_i$。令 $h = \pi_1^{d_1/s} \dots \pi_l^{d_l/s}$，则有$I = h^s A$。
□

定理 *3.1* 的证明。设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个特征为$p > 0$的正则局部环，且 $\mathfrak{a} \subseteq A$ 是一个理想，满足 $\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = d > 0$。将 d 分解为 qs，其中$q = p^e$ 且 $\gcd(p, s) = 1$。假设 $\operatorname{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{d}$。由引理 3.4 可得

$$\operatorname{ft}^{\mathfrak{m}\widehat{A}}(\mathfrak{a}\widehat{A}) = \operatorname{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{d} = \frac{1}{\operatorname{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})} = \frac{1}{\operatorname{ord}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{a}\widehat{A})}.$$

由引理 3.16，存在 g 属于 $\mathfrak{m}^{[q]}\widehat{A}$，使得 $g^s = \mathfrak{a}\widehat{A}$。如果进一步假设，对于 A 的所有素元 π，形式纤维$\widehat{A} \otimes_A A_{(\pi)}/\pi A_{(\pi)}$ 都是约化的，那么由引理 3.18 可知，存在 h 属于 $\mathfrak{m}^{[q]}$，使得 $\mathfrak{a} = h^s A$。

反过来，设对于某个 g，$\mathfrak{a}\widehat{A} = g^s\widehat{A}$ 属于 $\mathfrak{m}^{[q]}\widehat{A}$。由引理 3.2 和 3.4 可得 $\operatorname{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{d}$。类似地，若存在 h 属于 $\mathfrak{m}^{[q]}$ 使得$\mathfrak{a} = h^s A$，则由引理 3.2 可得 $\operatorname{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{d}$。□

例 3.20 表明，我们关于形式纤维的假设是必要的；该例依赖于以下引理。

引理 3.19。设 $(T, \mathfrak{m})$ 是一个维数至少为 2 且满足塞尔条件 S_2 的完备局部整环。假设 T 具有一个系数域 k。设x 是 $\mathfrak{m}$ 的一个非零元素。那么存在一个诺特局部子环$\widehat{\ }(A, \mathfrak{m} \cap A)$，使得 $x \in A$、$A = T$，并且 x 是 A 的一个素元。

证明。令 $C = \{\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r\}$ 表示包含于 x之上的极小素理想集。令 Π表示 T 的素子环——也就是说，若 $\operatorname{char} k = 0$，则为 $\Pi = \mathbb{Q}$；若 $\operatorname{char} k = p > 0$，则为 $\Pi = \mathbb{F}_p$。只要验证这一设定满足 [6, 定理 1.1]的假设，结论便随之得出。

(0) 素理想 $\mathfrak{q}_1$、……、$\mathfrak{q}_r$的高度至多为 1，因此不是极大理想。此外，我们有 $x \in \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$。(1) 由于 $\operatorname{Ass}(T) = \{(0)\}$，显然对于所有属于 $\operatorname{Ass}(T)$ 的 $\mathfrak{p}$，都有 $\mathfrak{p} \cap \Pi[x] = (0)$。(2) 由于 T 是约化的，且 x 是正则元，因此 T/xT 是 S_1。所以，T/xT 的关联素理想恰好是 T/xT 的极小素理想，故 $\operatorname{Ass}(T/xT) = C$。(3) 对所有 $1 \leq i \leq r$，我们断言 $\operatorname{Frac}(\Pi[x]) \cap \mathfrak{q}_i \subseteq xT$。为此，假设存在 d、e 属于 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$、a_1、……、a_d、b_1、……、b_e 属于 Π，f 属于 $\mathfrak{q}_i$，使得

$$\frac{x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_d}{x^e + b_1 x^{e-1} + \dots + b_e} = f. \tag{13}$$

此外，我们假设方程（13）的左边写成约化形式。于是有

$$a_d = x(x^{d-1} + a_1x^{d-2} + \cdots + a_{d-1}) - f(x^e + b_1x^{e-1} + \cdots + b_e) \in \mathfrak{m}.$$

由于 $a_d \in \Pi \cap \mathfrak{m}$，可知 $a_d = 0$，因此我们有

$$b_e f = x(x^{d-1} + a_1x^{d-2} + \cdots + a_{d-1} - f(x^{e-1} + b_1x^{e-2} + \cdots + b_{e-1})) \in xT.$$

由于方程（13）的左侧已写成约化形式，且x 整除分子 $x^d + \cdots + xa_{d-1}$，因此可知 $b_e \neq 0$，所以$f \in xT$。

□

作为上述引理的应用，我们证明，对于所有 $d > 0$，存在许多正则局部环（A, $\mathfrak{m}$）以及素元 f，它们位于 A 中，使得 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = d$，$\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) = \frac{1}{d}$。

例 3.20。设 k 是特征为 $p > 0$ 的域。对于任意 $n \geq 2$，令$T = k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ 和 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$。固定某些 $e \geq 0, q = p^e$，以及满足最大公约数$(s, p) = 1$ 的 $s > 0$。在 $\mathfrak{m}^{[q]}$ 中选取 g，使得 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(g) = q$，并令 $f = g^s$。根据引理 3.2，我们有 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f) = \frac{1}{s}\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(g) = \frac{1}{qs} = \frac{1}{\mathfrak{m}\mathrm{ord}(f)}$。

由引理 3.19，存在一个诺特局部子环 $(A, \mathfrak{m} \cap A) \subseteq \widehat{T}$，使得 $f \in A$, $A = T$, 并且 f 是 A 的素元。令$\mathfrak{n} := \mathfrak{m} \cap A$。如引理 3.15 中所述，我们有 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{n}}(f) = \mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f)$ 且 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{n}}(f) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f)$，因此 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{n}}(f) = \frac{1}{\mathrm{ord}_{\mathfrak{n}}(f)}$。

作为本文的总结，我们考察增加一个额外的约化假设对主定理的影响。

例 3.21. 若 R 是正则局部环，x, y 是 R 的一个正则参数系的一部分，且 a, b 是互素整数，则 $\widehat{R}/(x^a - y^b)\,\widehat{R}$ 在几何上是不可约的。为此，写作 $R = k[\![x, y, z_1, \ldots, z_n]\!]$，我们有$\widehat{R}/(x^a - y^b)\,\widehat{R} \cong k[\![t^a, t^b, z_1, \ldots, z_n]\!]$。

设 $(R, \mathfrak{m})$ 是特征为 $p > 0$ 的正则局部环。设 $\mathfrak{a} \subseteq R$，使得 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = d$、$\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{d}$，且 $\widehat{R}/\mathfrak{a}\widehat{R}$ 是约化的。将 d 分解为 $d = qs$，其中 $q = p^e$，且 $\gcd(s, p) = 1$。根据定理 3.1，存在 g 属于 $\mathfrak{m}^{[q]}\widehat{R}$，使得 $\widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \widehat{\ }\ \mathfrak{a}R = g^sR$，因此 R/g^sR 的约化性迫使 $s = 1$。由引理 3.3，我们还有 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^{[q]}$。对于任意 $q = p^e$，若 x，则 y 是 R 的一个正则参数系的一部分；令 $f = x^q - y^{q+1}$，则按构造有 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = q$，由引理 3.2 有 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(f_q) = \frac{1}{q}$，且 $\widehat{R}/f_q\widehat{R}$ 是几何约化的。

为证明当 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = d$ 且 $R/\mathfrak{a}R$ 约化（或几何约化）时，$\frac{1}{d}$ 是 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})$ 的最优下界，设 $\dim R \geq 2$ 且 x, y是 R 的一个正则参数系的一部分。令 $g_{d,\,t} = x^d - y^{td+1}$，则 $\mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}(g_{d,\,t}) \leq \mathrm{ft}^{\mathfrak{m}}((x^d,\ y^{td+1})) \leq \frac{1}{d} + \frac{1}{td+1} \searrow \frac{1}{d}$，其中不等式来自命题 2.7 (1)，等式则来自 [15, 命题 36]。

参考文献

[1] 莫里斯·奥斯兰德和 D. A. 布克斯鲍姆。“正则局部环中的唯一分解”。载于：《美国国家科学院院刊》45 (1959)，第 733–734 页。ISSN：0027-8424。DOI：10.1073/pnas.45.5.733。[2] BENJAMIN BAILY。“具有最小奇点阈值的齐次理想”。准备中。2026。[3] Carles Bivià-Ausina。“单项式理想的联合约化与复解析映射的重数”。英文。载于：《数学研究快报》15.2 (2008)，第 389–407 页。ISSN：10732780, 1945001X。DOI：10.4310/MRL.2008.v15.n2.a15。（访问于 2025 年 10 月 11 日）。[4] Manuel Blickle、Mircea Mustaţă 和 Karen E. Smith。“ F-阈值的离散性与有理性”。载于：第 57 卷。纪念 Melvin Hochster 专辑。2008 年，第 43–61 页。DOI：10.1307/mmj/1220879396。[5] Juliette Bruce 等。《FrobeniusThresholds：F-阈值》。版本 2.1。A$Macaulay2$ 软件包，网址：https://github.com/Macaulay2/M2/tree/stable/M2/Macaulay2/packages。[6] John Chatlos 等。“主素理想的半局部形式纤维”。载于：《交换代数杂志》4.3 (2012)，第 369–385 页。ISSN：1939-0807,1939-2346。DOI：10.1216/jca-2012-4-3-369。[7] David A. Cox、John Little 和 Donal O’Shea。《使用代数几何》。第二版。第 185 卷。《数学研究生教材》。纽约：Springer，2005 年，第 xii+572 页。ISBN：0-387-20706-6。[8] Jean-Pierre Demailly 和 Hoang Hiep Pham。“对数正则阈值的一个尖锐下界”。载于：《数学学报》212.1 (2014)，第 1–9 页。ISSN：0001-5962,1871-2509。DOI：10.1007/s11511-014-0107-4。[9] Hubert Flenner。“局部环的 Bertini 定理”。德文。载于：《数学年刊》229 (1977)，第 97–112 页。[10] Ofer Gabber。“关于一些 t-结构的札记”。载于：《*Dwork* 理论的几何方面：第一、二卷》。柏林：Walter de Gruyter，2004 年，第 711–734 页。ISBN：3-11-017478-2。[11] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。《Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统》。网址：http://www2.macaulay2.com。[12] 管启安和周向宇。“Lelong 数为一的权重下乘子理想层的刻画”。载于：《数学进展》285 (2015)，第 1688–1705 页。ISSN：0001-8708,1090-2082。DOI：10.1016/j.aim.2015.08.002。[13] Nobuo Hara 和 Ken-Ichi Yoshida。“紧闭包与乘子理想的推广”。载于：《美国数学会汇刊》355.8 (2003)，第 3143–3174 页。ISSN：0002-9947,1088-6850。DOI：10.1090/S0002-9947-03-03285-9。[14] Daniel J. Hernández。“超曲面的F-纯性”。载于：《数学研究快报》19.2 (2012)，第 389–401 页。ISSN：1073-2780,1945-001X。DOI：10.4310/MRL.2012.v19.n2.a11。

[15] Daniel J. Hernández. “多项式的F-纯性与对数典范性”。载于：名古屋数学杂志224.1（2016），第10–36页。ISSN：0027-7630,2152-6842。DOI：10.1017/nmj.2016.14。[16] Daniel J. Hernández 和 Pedro Teixeira。“F-阈值函数：协同子缺口分形与二元齐次情形”。载于：符号计算杂志80（2017），第451–483页。ISSN：0747-7171,1095-855X。DOI：10.1016/j.jsc.2016.07.003。[17] Daniel J. Hernández 和 Pedro Teixeira。“F-阈值函数：协同子缺口分形与二元齐次情形”。载于：符号计算杂志80（2017），第451–483页。ISSN：0747-7171,1095-855X。DOI：10.1016/j.jsc.2016.07.003。[18] Craig Huneke 和 Irena Swanson。理想、环与模的整闭包。第336卷。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，2006，第xiv+431页。ISBN：978-0-521-68860-4。[19] Craig Huneke 等。“F-阈值、紧闭包、整闭包与重数界”。载于：第57卷。纪念 Melvin Hochster 的特辑。2008，第463–483页。DOI：10.1307/mmj/1220879419。[20] Zhibek Kadyrsizova 等。“ F-纯阈值的下界与极端奇点”。载于：美国数学会汇刊*B*辑9（2022），第977–1005页。ISSN：2330-0000。DOI：10.1090/btran/106。[21] Serge Lang。代数。第三版。第211卷。《数学研究生教材》。施普林格出版社，纽约，2002，第xvi+914页。ISBN：0-387-95385-X。DOI：10.1007/978-1-4613-0041-0。[22] Mircea Mustaţă、Shunsuke Takagi 和 Kei-ichi Watanabe。“F-阈值与伯恩斯坦-佐藤多项式”。载于：欧洲数学大会。欧洲数学会，苏黎世，2005，第341–364页。ISBN：3-03719-009-4。[23] Kenta Sato。“正则局部环上F-纯阈值的聚点”。载于：代数杂志622（2023），第614–635页。ISSN：0021-8693。DOI：https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.02.010。[24] Karl Schwede。“ F-纯性的中心”。载于：*Math. Z.* 265.3（2010），第687–714页。ISSN：0025-5874,1432-1823。DOI：10.1007/s00209-009-0536-5。[25] Karl Schwede 和 Karen E Smith。由 *Frobenius* 映射定义的奇点。英语。2024。[26] Stacks项目作者。*Stacks*项目。https://stacks.math.columbia.edu。2025。[27] Shunsuke Takagi。“对的F-奇点与任意余维的伴随反演”。载于：数学发明157.1（2004），第123–146页。ISSN：0020-9910,1432-1297。DOI：10.1007/s00222-003-0350-3。[28] Shunsuke Takagi 和 Kei-ichi Watanabe。“关于F-纯阈值”。载于：代数杂志282.1（2004），第278–297页。ISSN：0021-8693,1090-266X。DOI：10.1016/j.jalgebra.2004.07.011。