arXiv:2601.19999v1 [math.GN] 27 Jan 2026

参数化 ♢ ，用于拉弗性质和非平凡自同构 $\mathcal{P}$（ω）/有限集

WILL BRIAN AND ALAN DOW

Abstract. 我们引入一种新的参数化菱形原理，记作 ♢(LP)。该原理类似于 Moore、Hrušák 和 Džamonja 提出的参数化菱形；它们各自对应连续统的某个基数不变量，并给出一种类似 ♢的猜测原理，从而蕴含相应的不变量是 $\aleph_1$。我们的原理 ♢(LP)是一种类似♢的猜测原理，它蕴含在给定内模型（例如强迫扩张中的基模型）之上拉弗性质成立。

我们证明，通过强迫得到的许多熟悉的 ZFC 模型都满足 ♢(LP)，具体来说，是从一个满足连续统假设的模型出发，经由长度为ω_2 、采用可数支撑的适当博雷尔偏序迭代，并且这些偏序具有拉弗性质所得到的模型。其原因基本上与通常的参数化菱形在类似描述的强迫扩张中成立的原因相同；在那些扩张中，相应的基数不变量是 $\aleph_1$。

我们还证明，如果 ♢(LP) 在 CH 的某个内模型上成立，那么 $\mathcal{P}(\omega)$/Fin 存在非平凡自同构；事实上，我们得到了一类特别好的自同构，它们扩张了基模型中围绕 P-点构造的非平凡对合。此外，我们还证明，与萨克斯模型类似，在 Mathias 模型中， $\mathcal{P}(\omega)$/Fin 的所有自同构都在某处平凡。这限制了从 ♢(LP) 中能够得到的自同构类型。

1. 引言

布尔代数 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构称为平凡的，如果它由 ω 上的一个函数诱导。70 年前，Walter Rudin 在 [18] 中证明，CH 意味着 $2^{\mathfrak{c}}$ 存在总共 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 个自同构。由于只有 $\mathfrak{c}$ 个函数 $\omega \to \omega$，因此 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 也只有 $\mathfrak{c}$ 个平凡自同构，这意味着 CH 蕴含存在非平凡自同构。

多年以后，Shelah 在 [19, 第 4] 章/Fin证明，与 ZFC 相容的是， $\mathcal{P}(\omega)$ 的所有自同构都是平凡的。在 Shelah 的工作基础上，Shelah 和 Stepr¯ans 在 [21] 证明，PFA 蕴含所有自同构都是平凡的。Veli˘ckovi´c 在 [27] 证明，OCA + MA 就足够了，并且与 $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ 相容的是存在非平凡自同构。（这里的 OCA 指 Todor˘cevi´c 的开着色公理，该公理定义于 [25], ，有时记作 $\mathrm{OCA}_{\mathsf{T}}$ 或 OGA。）在 Moore 的工作基础上，De Bondt、Farah 和

Key words and phrases. 强迫、拉弗性质、参数化菱形原理、 $\mathcal{P}(\omega)$/Fin 的非平凡自同构。第一作者部分受到美国国家科学基金会 DMS-2154229 资助。

Vignati 最近在 [2]证明，单独的 OCA 就蕴含$\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathrm{Fin}$ 的所有自同构都是平凡的。此外，人们还构造了其他模型，其中 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的所有自同构都是平凡的，但这些模型不满足 OCA。这些模型包括在 $\mathfrak{c} > \aleph_2$ [7] 中具有 $\mathfrak{d} = \aleph_1$ [11]的模型。（回顾一下，OCA 蕴含 $\mathfrak{d} = \mathfrak{c} = \aleph_2$。）

另一方面，Veli˘ckovi´c 在 [26], 中概述了一种论证，并将其归于 Baumgartner。该论证表明，存在一个特征为 $\aleph_1$ 的 P-点，就意味着存在一个非平凡自同构（另见 [22]的后半部分）。特别是，非平凡自同构的存在与 ¬连续统假设相容。此外，Shelah 和 Stepr¯ans 在 [22] 中证明，在 $\aleph_2$-科恩模型中存在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的非平凡自同构。事实上，他们的论证表明，在连续统假设的模型上强迫添加$\aleph_2$ 个科恩实数后，基模型中的每个自同构都会扩张为强迫扩张中的一个自同构。同一作者还在 [24]中证明，如果与 $\mathfrak{d}$ 相关的某些基数不变量等于 $\aleph_1$，那么就存在非平凡自同构。

所有这些都引出了几个问题：

- 哪些熟悉的集合论公理能够推出，$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的所有自同构都是平凡的?
- 或者，换一种方式提出本质上相同的问题：在熟悉的 ZFC 模型中，哪些模型里的 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的所有自同构都是平凡的?
- 此外，根据熟悉的公理可以构造出哪些类型的非平凡自同构？在熟悉的模型中存在哪些类型的非平凡自同构?

第三个问题有几种理解方式。这里我们关注自同构的基本拓扑性质（它们是否具有有限阶？是否在某处是平凡的？不动点集呈现出什么样子？）。另一种有趣的理解方式来自考察由自同构作用于平凡自同构上所定义的性质（见 [3, 4]）。

本文旨在为上述第一个和第三个问题作出贡献。需要一开始就指出的是，严格来说，本文并未对第二个问题给出任何新的答案。本文构造的所有 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 非平凡自同构，都是基于下文引入的一条新的组合原理构造的，记为 $\diamondsuit$(LP)。我们证明，在由满足连续统假设的模型经过长度为 ω_2 的可数支撑迭代得到的模型中，$\diamondsuit$(LP) 成立，其中所迭代的是具有拉弗性质的适当博雷尔偏序（例如拉弗、Mathias、米勒、萨克斯和西尔弗模型）。目前已知的满足 $\diamondsuit$(LP)的非平凡模型只有这些。Shelah 和 Stepr¯ans 已经在 [24] 中证明，这类模型中存在非平凡自同构。（他们定义了一些新的基数特征，而这些特征在这些模型中是$\aleph_1$；他们证明，当这些基数 $\aleph_1$ 时，就存在非平凡自同构。）本文的主要目的如下：

- 参数化 $\diamondsuit$原理 $\diamondsuit$(LP) 的引入本身就很有趣。除了定义这一原理并

利用它构造 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的非平凡自同构外，我们还引入了 ◇(LP) 的两种较弱形式，并提出了若干关于这三个新原理的开放问题。

- 由 ◇(LP) 构造的自同构的简洁性。我们前面提到过 Baumgartner-Veli˘ckovi´c 构造，它从一个特征为 $\aleph_1$ 的 P-点构造出一个非平凡自同构。这些自同构是对合，只固定一个超滤子（即P-点），并且在该超滤子的对偶理想中的每个集合上都是平凡的。我们的构造将其推广，利用 ◇(LP) 构造一个非平凡对合，它固定一个特征为$\aleph_1$的稀疏 P-滤子，并且在该滤子的对偶理想中的每个集合上都是平凡的。

除了这两个主要目标外，我们还将在论文最后一节证明，在 Mathias 模型中，$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的所有自同构都在某处平凡。对于萨克斯模型，这一点早已为人所知（见 [23]）。由于 ◇(LP)在 Mathias 模型和萨克斯模型中成立，这就限制了能够从 ◇(LP) 得到的自同构类型：无法从 ◇(LP) 构造出一个处处非平凡自同构。当然，仅凭萨克斯模型就可以推出这一事实；不过，我们仍纳入了 Mathias 模型中相应事实的证明，因为它似乎值得作为对上述第三个问题的补充。

2. Bowties of functions

本节旨在介绍一种一般性的拓扑结构，借助它可以构造出 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的非平凡自同构。该论证直接推广了 Baumgartner-Veli˘ckovi´c 在 [26] 中提出的构造：从一个特征为 $\aleph_1$ 的 P-点构造自同构。不过，此处介绍的版本适用范围更广：我们证明，这类结构（以及与之相伴的自同构）可由 ◇(LP) 推出；该原理在拉弗模型中成立（其中不存在特征为 $\aleph_1$ 的 P-点），在西尔弗模型中也成立（其中根本不存在 P 点 [5]）。

ω $\mathcal{P}(\omega)$ 的幂集按包含关系排序后构成一个完备布尔代数。布尔代数 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 是该布尔代数对有限集理想取商所得的商代数。对于 $A, B \subseteq \mathbb{N}$，我们用 $A =^* B$ 表示 A 与 B 仅相差有限个元素，即 $|(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| < \aleph_0$。$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的元素是 $=^*$ 关系的等价类，而 $A \subseteq \omega$ 的等价类记为 $[A]_{\mathrm{Fin}}$。布尔代数关系 $[A]_{\mathrm{Fin}} \leq [B]_{\mathrm{Fin}}$ 在代表元层面记作 $A \subseteq^* B$：也就是说，$A \subseteq^* B$ 表示 $[A]_{\mathrm{Fin}} \leq [B]_{\mathrm{Fin}}$，或者（等价地）$B$ 包含 A 中除有限多个元素以外的所有元素。

$\mathcal{P}(\omega)$ 的 Stone 空间是 $\beta\omega$，即可数离散空间 ω 的 Čech–Stone 紧化。$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的 Stone 空间是 $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$。

定义在 ω 上的几乎置换是 ω 的余有限子集之间的双射。ω 的每个置换都是几乎置换，但并非每个几乎置换都是置换，甚至也不一定是某个置换的限制（例如，考虑

后继函数 $n \mapsto n+1$）。ω 的每个几乎置换 f 都会导出 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的一个自同构 α_f，其定义公式为

$$\alpha_f\big([A]_{\mathrm{Fin}}\big) = \big[f[A]\big]_{\mathrm{Fin}}.$$

由 ω 的几乎置换以这种方式诱导的 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构称为平凡的。注意，若 f 不是 ω 的几乎置换，那么上述公式并未定义 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构（尽管它仍定义了一个同态）。ω^* 的平凡自同胚 指的是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的平凡自同构的 Stone 对偶。具体而言，若 f 是 ω 的几乎置换，则它诱导出平凡自同胚 f^*，其定义方式是将 $f^*(u)$ 取为由 $\{f^{-1}[A]\colon A \in u\}$ 生成的超滤子。

若 A, B 是 ω 的无限子集，则 $\mathcal{P}(A)/\mathrm{Fin}$ 和 $\mathcal{P}(B)/\mathrm{Fin}$ 都同构于 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$。与 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构一样，若同构 $\mathcal{P}(A)/\mathrm{Fin} \to \mathcal{P}(B)/\mathrm{Fin}$ 是由几乎双射 $A \to B$ 的作用诱导的，则称它为平凡的。若 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构在 $A \subseteq \omega$ 上是平凡的，是指它在 $\mathcal{P}(A)/\mathrm{Fin}$ 上的限制在此意义下是平凡的。若一个自同构在某个无限 $A \subseteq \omega$ 上是平凡的，则称它为某处平凡。

将 $=^*$ 关系从 ω 的子集推广到函数，$f =^* g$ 意味着 $\mathrm{dom}(f) =^* \mathrm{dom}(g) =^* \{x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)\colon f(x) = g(x)\}$。类似地，如果 f 和 g 是到 ω 中的函数，那么 $f \le g$ 意味着 $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$，并且对于所有 $x \in \mathrm{dom}(f)$，都有 $f(x) \le g(x)$；而 $f \le^* g$ 意味着 $\mathrm{dom}(f) \subseteq^* \mathrm{dom}(g)$，并且对于除有限多个 $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ 之外的所有情形，都有 $f(x) \le g(x)$。

现在我们介绍本节的主要对象——函数蝴蝶结。除了将上文提到的 Baumgartner-Veli˘ckovi´c 论证加以推广之外，这些函数蝴蝶结还与第二作者和 Shelah 在 [8] 中研究的领结点有关（也称为系结点或蝴蝶点）。本节将证明，函数蝴蝶结的存在性意味着存在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的一个（特别良好的）非平凡自同构。下一节将证明，$\diamondsuit$(LP) 意味着函数蝴蝶结的存在。

对于每个 $\alpha < \omega_1$，令 $D_\alpha \subseteq \omega$，并令 f_α 为一个没有不动点的置换 $D_\alpha \to D_\alpha$。序列 $\langle f_\alpha\colon \alpha < \omega_1\rangle$ 是函数蝴蝶结，如果

- $D_\alpha \subseteq^* D_\beta$，且只要 $\alpha < \beta < \omega_1$，$D_\beta \setminus D_\alpha$ 就是无限的，
- $f_\alpha =^* f_\beta \restriction D_\alpha$，只要 $\alpha \le \beta < \omega_1$，
- ，对于每个 $A \subseteq \omega$，都存在某个 $\delta_A < \omega_1$，使得若 $\delta_A \le \alpha < \omega_1$，则 $(D_\alpha \setminus D_{\delta_A}) \cap A$ 和 $(D_\alpha \setminus D_{\delta_A}) \setminus A$ 是几乎 f_α-不变集；所谓几乎不变，是指 $f_\alpha[(D_\alpha \setminus D_{\delta_A}) \cap A] =^* (D_\alpha \setminus D_{\delta_A}) \cap A$ 并且 $f_\alpha[(D_\alpha \setminus D_{\delta_A}) \setminus A] =^* (D_\alpha \setminus D_{\delta_A}) \setminus A$。

此外，如果每个 f_α 都是对合（即 $f_\alpha^2 = \mathrm{id}$），那么 $\langle f_\alpha\colon \alpha < \omega_1\rangle$ 就是一个对合的蝴蝶结。

定理 2.1。若存在函数蝴蝶结，则存在一个关于 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的非平凡自同构 F。此外，ω^* 中存在一个闭 P-集，其特征为 $\aleph_1$，即 $K = \bigcap_{\alpha<\omega_1}(\omega \setminus D_\alpha)^*$，使得只要 A^* 不与 K 的边界相交，F 在 A 上就是平凡的。进一步说，若函数蝴蝶结是对合的蝴蝶结，则 F 是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的一个对合。

证明。固定一个函数蝴蝶结 $\langle f_\alpha\colon \alpha<\omega_1\rangle$。对每个 $A\subseteq\omega$，令 δ_A 表示具有上述“函数蝴蝶结”定义中所述性质的最小序数。定义 $F\colon \mathcal{P}(\omega)\to\mathcal{P}(\omega)$ 如下：

$$F(A) = f_{\delta_A}[A\cap D_{\delta_A}]\cup(A\setminus D_{\delta_A}).$$

注意，如果 $A=^* B$，那么 $\delta_A=\delta_B$。因此，F 在$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$上诱导出一个映射，记作 F，即

$$\tilde{F}\big([A]_{\mathrm{Fin}}\big) = \big[F[A]\big]_{\mathrm{Fin}}.$$

我们的目标是证明，这个映射是一个非平凡自同构，并具有定理中所述的性质。

固定 $A\subseteq\omega$，并固定满足 $\delta_A\le\delta<\omega_1$的 δ。由于 $\delta_A\le\delta$，我们有 $f_{\delta_A}=^* f_\delta\restriction D_{\delta_A}$，因此 $f_\delta[A\cap D_{\delta_A}]=^* f_{\delta_A}[A\cap D_{\delta_A}]$。此外，我们对 δ_A 的选取确保 $f_\delta\big[(D_\delta\setminus D_{\delta_A})\cap A\big]=^*(D_\delta\setminus D_{\delta_A})\cap A$。因此，

$$\begin{aligned}
F(A) &= f_{\delta_A}[A\cap D_{\delta_A}]\cup(A\setminus D_{\delta_A})\\
&=^* f_\delta[A\cap D_{\delta_A}]\cup(A\setminus D_{\delta_A})\\
&=^* f_\delta[A\cap D_{\delta_A}]\cup\big((D_\delta\setminus D_{\delta_A})\cap A\big)\cup(A\setminus D_\delta)\\
&=^* f_\delta\big[(A\cap D_{\delta_A})\cup\big((D_\delta\setminus D_{\delta_A})\cap A\big)\big]\cup(A\setminus D_\delta)\\
&= f_\delta[A\cap D_\delta]\cup(A\setminus D_\delta).
\end{aligned}$$

换言之，在定义 $F(A)$ 时去掉带下标的 A，只会使定义在模 Fin 的意义下发生变化。

考虑某个 A，$B\subseteq\omega$，并令 $\delta=\max\{\delta_A,\delta_B,\delta_{A\cup B}\}$。于是

$$\begin{aligned}
F(A)\cup F(B) &= \big(f_{\delta_A}[A\cap D_{\delta_A}]\cup(A\setminus D_{\delta_A})\big)\cup\big(f_{\delta_B}[B\cap D_{\delta_B}]\cup(B\setminus D_{\delta_B})\big)\\
&=^* \big(f_\delta[A\cap D_\delta]\cup(A\setminus D_\delta)\big)\cup\big(f_\delta[B\cap D_\delta]\cup(B\setminus D_\delta)\big)\\
&= f_\delta[(A\cup B)\cap D_\delta]\cup\big((A\cup B)\setminus D_\delta\big)\\
&=^* f_{\delta_{A\cup B}}[(A\cup B)\cap D_{\delta_{A\cup B}}]\cup\big((A\cup B)\setminus D_{\delta_{A\cup B}}\big)\\
&= F(A\cup B).
\end{aligned}$$

类似的计算表明，$F(A\cap B)=^* F(A)\cap F(B)$，由 F 的定义可知，$F(\omega)=\omega$ 且 $F(\emptyset)=\emptyset$。这表明 F 是一个同态 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\to\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$。

要证明这个同态是一个自同构，还需证明F 是一个双射。由 F 的定义可立即得出，若 A 是无限的，则 $F(A)$ 也无限，因此 F 的核是 $\{[\emptyset]_{\mathrm{Fin}}\}$，这意味着 F 是单射。

为证明满射性，固定 $B\subseteq\omega$，并令 $A=f_{\delta_B}^{-1}[B\cap D_{\delta_B}]\cup(B\setminus D_{\delta_B})$。若 δ满足 $\max\{\delta_A,\delta_B\}\le\delta<\omega_1$，则

$$\begin{aligned}
F(A) &= f_{\delta_A}[A\cap D_{\delta_A}]\cup(A\setminus D_{\delta_A})\\
&=^* f_\delta[A\cap D_\delta]\cup(A\setminus D_\delta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_\delta\big[\big(h_{\delta_B}^{-1}[B\cap D_{\delta_B}]\cup(B\setminus D_{\delta_B})\big)\cap D_\delta\big]\\
&\qquad\cup\big(\big(f_{\delta_B}^{-1}[B\cap D_{\delta_B}]\cup(B\setminus D_{\delta_B})\big)\setminus D_\delta\big)\\
&=^* f_\delta\big[\big(f_{\delta_B}^{-1}[B\cap D_{\delta_B}]\cup(B\setminus D_{\delta_B})\big)\cap D_\delta\big]\cup(B\setminus D_\delta)\\
&= f_\delta\big[\big(f_{\delta_B}^{-1}[B\cap D_{\delta_B}]\cup\big(B\cap(D_\delta\setminus D_{\delta_B})\big)\big]\cup(B\setminus D_\delta)\\
&= f_\delta\big[\big(f_{\delta_B}^{-1}[B\cap D_{\delta_B}]\big]\cup f_\delta\big[B\cap(D_\delta\setminus D_{\delta_B})\big]\cup(B\setminus D_\delta)\\
&=^* (B\cap D_{\delta_B})\cup\big(B\cap(D_\delta\setminus D_{\delta_B})\big)\cup(B\setminus D_\delta)\\
&= B.
\end{aligned}$$

由于 $B\subseteq\omega$ 是任意的，这表明 F 是满射的，从而完成证明： F 是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的自同构。

剩下要证明的是同构，并证明该定理中的“此外”和“而且”断言。要看出 F 是非平凡的，回想 Frolík 在 [12] 中证明：若 $F\colon\omega^*\to\omega^*$ 是 ω^*的平凡自同胚，则 $\mathbf{Fix}(F)=\{u\in\omega^*\colon F(u)=u\}$ 是既开又闭的。

为了应用 Frolík 的结果，我们暂时在拓扑范畴中进行讨论。

令 $F\colon\omega^*\to\omega^*$ 表示 F的 Stone 对偶，即函数

$$\bar{F}(u)=\bigcup\Big\{\tilde{F}^{-1}\big([A]_{\mathrm{Fin}}\big)\colon A\in u\Big\}.$$

令 $K=\bigcap_{\alpha<\omega_1}(\omega\setminus D_\alpha)^*$。设 $u\in K$，并令 $A\in u$。于是

$$F(A)=f_{\delta_A}[A\cap D_{\delta_A}]\cup(A\setminus D_{\delta_A})\supseteq A\setminus D_{\delta_A}\in u.$$

因此， F将 u 中的集合映射为 u中的集合，这意味着 $F(u)=u$。

现在假设 $u\notin K$。那么对于某个 $\alpha<\omega_1$， $D_\alpha\in u$ 。利用三集引理（见 [10]），以及 $f_{\delta_{D_\alpha}}$ 没有不动点这一事实，可以将 D_α 划分为三个集合： A_0， A_1， A_2，使得对于每个i， $f_{\delta_{D_\alpha}}[A_i]\cap A_i=\emptyset$。不失一般性，假设 $A_0\in u$。如果 $\delta\geq\max\{\alpha,\delta_{D_\alpha},\delta_{A_0}\}$，那么

$$F(A_0)=^* f_\delta[A_0\cap D_\delta]\cup(A_0\setminus D_\delta)=^* f_\delta[A_0]$$

（因为 $A_0\subseteq D_\alpha\subseteq^* D_\delta$），所以 F 将 u 中的一个集合映射到不属于 u的集合。这表明 u 不是 F的不动点。

因此， K 恰好是 F的不动点集合。要证明 K不是既开又闭的，取满足 $C^*\subseteq P$的 $C\subseteq\omega$。那么，对所有 α，都有 $D_\alpha\subseteq^*\omega\setminus C$；而如果 $\alpha<\beta<\omega_1$，那么（$C\cup D_\beta$）$\setminus$（$C\cup D_\alpha$）是无限的。因此$\langle\big(\omega\setminus($ $C\cup D_\alpha)$ $\big)^*\colon\alpha<\omega_1\rangle$ 是 ω^*中一个由非空既开又闭集组成的递减序列。根据紧致性，$K\setminus C^*=\bigcap_{\alpha<\omega_1}\big(\omega\setminus($ $C\cup D_\alpha)$ $\big)^*\neq\emptyset$。由此，$C^*\neq K$。由于 C^* 是 K的任意既开又闭子集，这表明 K 并非既开又闭。应用 Frolík 的上述结果可知， F是非平凡的（因此 F 也是）。

为了证明该定理的“此外”部分，假设 $A\subseteq\omega$ andA^* 不与 K 的边界相交。这意味着存在一个将 A 划分为两个集合 B,C 的划分，使得 $B^*\subseteq\mathrm{Int}(K)$ and $C^*\cap K=\emptyset$。事实是

$B^* \subseteq K$ 意味着对于所有 $\alpha < \omega_1$，都有 $B \cap D_\alpha =^* \emptyset$。这意味着 $\delta_B = 0$ and

$$F(B) = f_0[B \cap D_0] \cup (B \setminus D_0) =^* B.$$

因此， $F \restriction \mathcal{P}(B)/\mathrm{Fin}$ 是恒等映射，尤其是平凡的。至于 C，首先注意到，利用与前一段相同的紧致性论证， $C^* \cap K = \emptyset$ 这一事实意味着，对于某个特定的 $\delta_0 < \omega_1$，有 $C \subseteq^* D_{\delta_0}$。如有需要，增大 δ_0，我们可以（并且确实）假设 $\delta_0 \geq \delta_C$。如果 $X \subseteq C$ 且 $\delta_0 \leq \alpha < \omega_1$，那么 $(D_\alpha \setminus D_{\delta_0}) \cap X$ 和 $(D_\alpha \setminus D_{\delta_0}) \setminus X$ 都是有限的，因为 $X \subseteq C \subseteq^* D_{\delta_0}$。由此可得 $\delta_X \leq \delta_0$。因此，若 $X \subseteq C$，则

$$F(X) = f_{\delta_0}[X \cap D_{\delta_0}] \cup (X \setminus D_{\delta_0}) = f_{\delta_0}[X \cap D_{\delta_0}].$$

因此，C是由 $f_{\delta_0} \restriction C$（或对于任意 $\delta \geq \delta_0$，由 $f_\delta \restriction C$）导出的；特别是，这个映射是平凡的。

最后，为了证明定理的“此外”部分，假设每个 f_α 都是对合。注意，对每个 $A \subseteq \omega$都有 $\delta_A = \delta_{\omega \setminus A}$。于是

$$\begin{aligned} F\big(F(A)\big) &= f_{\delta_{\omega\setminus A}}\big[f_{\delta_A}[A \cap D_{\delta_A}]\big] \cup (A \setminus D_{\delta_{\omega\setminus A}}) \\ &= f_{\delta_A}\big[f_{\delta_A}[A \cap D_{\delta_A}]\big] \cup (A \setminus D_A) \\ &= (A \cap D_{\delta_A}) \cup (A \setminus D_A) = A. \end{aligned}$$

˜因此，如果每个 f_α 都是对合，那么 F也是对合，从而 F 也同样如此。 □

我们指出，Baumgartner-Veli˘ckovi´c 在[26], 中概述的论证表明，存在一个特征为 $\aleph_1$ 的 P-点蕴含存在一个非平凡自同构；而该论证实质上也表明，如果存在一个特征为 $\aleph_1$ 的 P-点，那么就存在一个对合的蝴蝶结。具体来说，若 u是一个 P-点，且 $\langle B_\alpha \colon \alpha < \omega_1 \rangle$是 u的一个严格递减基，那么可以通过递归定义一个函数蝴蝶结 $\langle f_\alpha \colon \alpha < \omega_1 \rangle$，其中每个 f_α 都是 $D_\alpha = \omega \setminus B_\alpha$的一个对合。（对每个 $A \subseteq \omega$，序数δ_A 是满足以下条件之一的最小 δ：$B_\delta \subseteq^* A$ 或 $B_\delta \cap A =^* \emptyset$。由于 $\{B_\alpha \colon \alpha < \omega_1\}$ 是一个超滤子的基，因此对某个 δ，这两种情况必有其一成立。）同样，下一节中从 ⟨(LP)构造的蝴蝶结也是对合的蝴蝶结。本节中我们给出了更一般的定义，因为在定理 2.1 的表述中将范围限制为对合会损失一定的一般性，而在证明中并不会因此更清晰。

3. ♢(LP)

给定一个函数 $h \colon \omega \to \omega \setminus \{0\}$， h-*slalom* 是一个定义域为 ω 的函数 G，满足对每个 $n \in \omega$， $G(n) \subseteq \omega^{n+1}$ 且 $|G(n)| \leq h(n)$。给定一个函数 $f \in \omega^\omega$，如果对于每个 n， $f \restriction (n+1) \in G(n)$，我们就称 G *captures* f。我们只关注满足 $\lim_{n\to\infty} h(n) = \infty$的 h-slalom，因此定义 $\mathcal{A} = \{h \in \omega^\omega \colon$ 对所有 n， $h(n) \neq 0$，且 $\lim_{n\to\infty} h(n) = \infty\}$；这就是可作为 slalom 宽度的函数集合。

如果对于每个由 $V \cap \omega^\omega$ 中某个成员界定的 $f \in \omega^\omega$，以及每个 $h \in V \cap \mathcal{A}$，都存在一个能够捕获 f 的 h-扇区 $G \in V$，我们就称 拉弗性质 在内模型 V 上成立。若使用强迫偏序集 $\mathbb{P}$ 进行强迫被称为

具有拉弗性质，如果使用 $\mathbb{P}$ 进行强迫会生成一个模型，使拉弗性质在该模型上相对于地面模型成立。

现在我们回顾 [1, 第 4] 节和 [17]中的一些定义，这些定义涉及连续统的基数特征及其相应的参数化$\diamondsuit$ 原理。一个 不变量 是一个三元组（A， B， E），满足

- A 和 B 都是基数为 $\leq \mathfrak{c}$的集合。
- $E \subseteq A \times B$ （即， E是一个定义域为 A、陪域为 B的关系）。
- 对每个 $a \in A$，都存在某个 $b \in B$，使得（a， b） $\in E$。
- 对每个 $b \in B$，都存在某个 $a \in A$，使得（a， b） $\notin E$。

不变量 $(A,\ B,\ E)$ 的取值为

$$\langle A, B, E\rangle \ = \ \min\left\{|X| : X \subseteq B \text{ and } \forall a \in A\ \exists b \in X\ (a,b) \in E\right\}.$$

在 [1]或 [9] 中研究的大多数经典基数不变量都自然地表示为这种形式：例如， $\mathfrak{d} = \langle \omega^\omega,\ \omega^\omega,\ \leq^*\rangle$ 和 $\mathfrak{b} = \langle \omega^\omega,\ \omega^\omega,\ \not\geq^*\rangle$，$\mathfrak{s} = \langle [\omega]^\omega,\ [\omega]^\omega,\ \text{被}\rangle$ 分割，而 $\mathfrak{r} = \langle [\omega]^\omega,\ [\omega]^\omega,\ \text{不分割}\rangle$，等等。

基于 Hruˇs´ak 在 [14] 中以及 Devlin 和 Shelah 在 [6], 中的工作，Moore、Hruˇs´ak 和 Dˇzamonja 在 [17] 中定义了一个与不变量 $(A,\ B,\ E)$ 相关联的猜测原理 $\diamondsuit(A,\ B,\ E)$。

$\diamondsuit(A,\ B,\ E)$：对于每个博雷尔映射 $F\colon\ 2^{<\omega_1} \to A$，存在某个 $g\colon\ \omega_1 \to B$，使得对于每个 $f\colon\ \omega_1 \to 2$，集合 $\left\{\alpha \in \omega_1\colon\ \left(F(f\restriction\alpha)\ g(\alpha)\right) \in E\right\}$ 是平稳的。

在此语境下，博雷尔映射 $F\colon 2^{<\omega_1} \to A$ in [17] 意味着 A 是波兰空间的一个博雷尔子集，并且对每个 $\delta < \omega_1$，映射 $F\restriction 2^\delta$ 都是博雷尔的。

令 $\mathcal{S} = \left\{G \in \prod_{n\in\omega} \mathcal{P}(\omega^n)\colon\ G \text{ 是某个 } h \in \mathcal{A}\right\}$. 的 h-斜线。对每个 $G \in \mathcal{S}$，定义 $\mathsf{w}_G : \omega \to \omega$ 为函数 $\mathsf{w}_G(n) = |G(n)|$。换言之，w_G 是使 G 成为一个 h-斜线的最小 $\leq$个 $h \in \mathcal{A}$ （即 G 的“宽度”）。

给定一个内模型 V，它满足 ZFC 的（一个足够大的片段），若实数 $r \in \omega^\omega$ 存在某个 $b \in \omega^\omega$ 使得 $r \leq b$，则称其为 V-有界（等价地，存在某个 b' 使得 $r \leq^* b'$）。猜测原理 $\diamondsuit(\mathrm{LP}_V)$ 定义如下。

$\diamondsuit(\mathrm{LP}_V)$：对于每个博雷尔映射 $F\colon\ 2^{<\omega_1} \to \omega^\omega$ 以及每个序列 $\langle h_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle$ 中的函数序列，存在一个函数 $g\colon\ \omega_1 \to \mathcal{S}\cap V$，使得对于每个 $\alpha < \omega_1$都有 $\mathsf{w}_{g(\alpha)} = h_\alpha$，并且对于每个 $f\colon\ \omega_1 \to 2\{\alpha < \omega_1\colon$ 如果 $F(f\restriction\alpha)$ 是 V-有界的，那么 $g(\alpha)$ 捕获 $F(f\restriction\alpha)\}$ 是平稳的。

e

注意，在此定义中，我们不要求序列$\langle h_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle$ 属于 V，而只要求每个特定的 h_α 属于 V。如果内模型 V 根据上下文是明确的，例如在强迫扩张中，那么$\diamondsuit(\mathrm{LP}_V)$ 可缩写为 $\diamondsuit(\mathrm{LP})$。

$\diamondsuit(\mathrm{LP})$ 与 $\diamondsuit$ 参数化 $\diamondsuit$原理 A, B, E 之间存在明确的联系，这些原理见 [17]。它是与不变量 $(\omega^\omega, \mathcal{S}\cap V,$ 若为 V-有界则可捕获) 相关联的原理，此外还要求：对于任意给定的序列 $\langle h_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle$，我们都可以要求 $\mathsf{w}_{g(\alpha)} = h_\alpha$。

对于获得 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的非平凡自同构而言，原理 ◇(LP) 的要求过强。以下简化版的 ◇(LP) 已足以完成当前任务，而且使用起来也稍容易一些（因此在其他情境中也可能更容易应用）。

◇⁻(拉弗性质$_V$)：对于每个序列 $\langle h_\alpha\colon\ \alpha<\omega_1\rangle$ 属于 $\mathcal{A}\cap V$，都存在一个函数$g\colon\ \omega_1\to\mathcal{S}\cap V$，使得对每个 $\alpha<\omega_1$，$\mathrm{w}_{g(\alpha)}=h_\alpha$，并且

$$\{\alpha<\omega_1\colon g(\alpha)\text{ captures }r\}$$

对每个 V-有界 $r\in\omega^\omega$ 都是平稳的。

和之前一样，如果 V 可以从上下文中明确看出，那么 ◇⁻(拉弗性质$_V$) 就简称为 ◇⁻(拉弗性质)。

事实上，即使是对 ◇(LP)的这种弱化，对于证明 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$存在非平凡自同构而言也强于所需条件：我们的证明只要求 $\{\alpha<\omega_1\colon\ g(\alpha)$所捕获的 $r\}$ 非空，而不必平稳。令 †(LP$_V$)表示将 ◇⁻(LP$_V$)定义中的“平稳”一词替换为“非空”一词所得到的（看起来）更弱的原理；当 V可由上下文清楚得知时，简称为 †(LP)。

命题 3.1。 ◇(LP)蕴含 ◇⁻(LP)，而 ◇⁻(LP) 蕴含 †(LP)，并且 †(LP) 蕴含拉弗性质在 V上成立。

证明。假设 ◇(LP)成立。设 F_0 是一个 Borel 满射 $2^\omega\to\omega^\omega$，并定义 $F\colon\ 2^{<\omega_1}\to\omega^\omega$，令 $F(\sigma)=F_0(\sigma\restriction\omega)$，只要 $|\sigma|\geq\omega$成立；若 $|\sigma|<\omega$，则任意定义 $F(\sigma)$。设 $\langle h_\alpha\colon\ \alpha<\omega_1\rangle$ 是 $\mathcal{A}\cap V$中的任意函数序列，并设 $g\colon\ \omega_1\to\mathcal{S}\cap V$ 是一个函数，它见证 ◇(LP)对 F和 $\langle h_\alpha\colon\ \alpha<\omega_1\rangle$成立。对于每个 V-有界的 $r\in\omega^\omega$，存在函数 $f_r\colon\ \omega\to 2$，使得 $F_0(f_r)=r$。若 $f\colon\ \omega_1\to 2$ 是任意满足 $f\restriction\omega=f_r$ 的函数，则对所有 $\alpha\in[\omega,\omega_1$都有 $F(f\restriction\alpha)=r$，因此$\{\alpha<\omega_1\colon\ g(\alpha)$所捕获的 $r\}$ 是平稳的。由于这对每个 V-有界的$r\in\omega^\omega$都成立，g 便见证 ◇⁻(LP)对 $\langle h_\alpha\colon\ \alpha<\omega_1\rangle$ 成立。

从定义可清楚看出，◇⁻(LP) 蕴含 †(LP)。

为证明命题的最后一个断言，假设 †(LP) 成立。设$r\in\omega^\omega$ 是 V-有界的，并设 $h\in\mathcal{A}\cap V$。将常值序列 $h_\alpha=h$用于 †(LP)，可得一个函数 $g\colon\ \omega_1\to\mathcal{S}\cap V$，使得 $\{\alpha<\omega_1\colon\ g(\alpha)$ 捕获 $r\}$ 非空，且对所有 α 都有 $\mathrm{w}_{g(\alpha)}=h$。因此，V中存在一个捕获 r的 h-斜坡。□

问题 3.2. 这些蕴含关系中，是否有任何一个可以反向成立？

与参数化的 ◇ [17], 原理类似，这些原理在足够良好的强迫扩张中成立，此时相应的基数特征为$\aleph_1$；在连续统假设的某个模型上，通过具有拉弗性质的偏序集进行足够良好的强迫扩张时，◇(LP) 也成立。接下来给出的证明，是对 [17]中证明的简单且相当直接的改编；原证明颇有趣味，也十分精妙。

令 $\mathcal{P}(2)$ 表示含有 2 个元素的布尔代数，并令 $\mathcal{P}(2)^+$ 表示相应的强迫概念。许多“常见的”博雷尔

强迫概念（科恩、随机强迫、拉弗、Mathias、米勒、萨克斯、西尔弗等）都等价于 $\mathcal{P}(2)^+ \times \mathbb{Q}$ （即两个 $\mathbb{Q}$ 的副本的 彩票和）。

定理 3.3. 设 $\langle \mathbb{Q}_\alpha \colon \alpha < \omega_2 \rangle$ 是一个博雷尔偏序序列，使得对每个 $\alpha < \omega_2$，$\mathbb{Q}_\alpha$ 都与 $\mathcal{P}(2)^+ \times \mathbb{Q}_\alpha$强迫等价。令 $\mathbb{P}_{\omega_2}$表示该序列的长度为 ω_2 的可数支撑迭代。假设连续统假设，则下列命题等价：

(1) $\mathbb{P}_{\omega_2}$ 具有拉弗性质。*(2)* $\mathbb{P}_{\omega_2}$ 强迫 †(LP)。*(3)* $\mathbb{P}_{\omega_2}$ 强迫 $\diamondsuit^-$ (LP)。*(4)* $\mathbb{P}_{\omega_2}$ 强迫 $\diamondsuit$(LP)。

证明。 由前一个命题可知，(4) $\Rightarrow$(3) $\Rightarrow$(2) $\Rightarrow$ (1)。剩下只需证明 (1) $\Rightarrow$ (4)：也就是说，若 $\mathbb{P}_{\omega_2}$ 具有拉弗性质，则它强迫 (LP)。

其证明是对 [17]，中定理 6.6 证明的直接改编；该证明涵盖了引理 6.8 至引理 6.12，见 [17]。事实上， [17, 定理 6.6] 的证明几乎可以原样用于证明这里的 (1) $\Rightarrow$ (4)，但引理 6.12 的证明需要做一处小改动。在该证明中，作者首先固定 B 中成员的一个序列 $\langle b_\xi \colon \xi < \omega_1 \rangle$ ，以见证 $\langle A, B, E \rangle = \aleph_1$。在当前情境下，我们给定一个序列 $\langle h_\alpha \colon \alpha < \omega_1 \rangle$，并且必须对每个 $\alpha < \omega_1$ 固定一个由 h_α-斜线组成的序列$\langle g^\alpha_\xi \colon \xi < \omega_1 \rangle$ ，其中这些斜线属于 V，以见证每个 V-有界$r \in \omega^\omega$ 都被 V 中的某个 h_α-斜线捕获。（这是因为我们假设在一个满足连续统假设的模型上具有拉弗性质；事实上，我们可以令$\langle g^\alpha_\xi \colon \xi < \omega_1 \rangle$ 简单地取为 V 中所有 h_α-斜线的枚举。）随后在证明中定义 $\dot{g}(\delta)$ 时，我们应令 $h_t(\xi)$ 强迫 $\dot{g}(\delta) = g^\delta_\xi$（而不只是 b_ξ），且其在高度为 δ 的条件 $t \in \mathcal{T}$ 下。□

推论 3.4. $\diamondsuit$(LP) 在拉弗模型、*Mathias* 模型、米勒模型、萨克斯模型和西尔弗模型中成立。

定理 3.5. 假设相对于一个满足 $\omega_1^V = \omega_1$ 的内模型 V， †(LP$_V$) 成立。那么存在一个函数蝴蝶结，因此也存在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的非平凡自同构。

证明. 首先，令 $\langle I_n \colon n \in \omega \setminus 3 \rangle$ 表示 ω 中的有限区间序列，使得 $|I_n| = n$ ，且对所有 n，$\min(I_3) = 0$ ，$\min(I_{n+1}) = 1 + \max(I_n)$。（为方便起见，本证明中的许多可数无限集将用 $\omega \setminus 3 = \{3, 4, 5, \dots\}$ 而非 ω 编号。这样可以简化后面的一些公式。）我们的目标是利用 †(LP) 定义一个严格递减序列$\langle J_\alpha \colon \alpha < \omega_1 \rangle$ ，其元素是 ω 的子集，并满足对每个 α，

- $|J_\alpha \cap I_n| \geq 2$ 对所有 $n \geq 3$。
- 设 $S_\alpha = \{n \geq 3 \colon |J_\alpha \cap I_n| > 2\}$，并令 s_α 表示唯一的递增双射 $\omega \setminus 3 \to S_\alpha$。于是$\left|J_\alpha \cap I_{s_\alpha(k)}\right| = k$。

因此，我们的函数蝴蝶结由函数 f_α 组成，其定义域为

$$D_\alpha = \bigcup \{J_\alpha \cap I_n \colon |J_\alpha \cap I_n| = 2\} = \bigcup_{n \in \omega \setminus S_\alpha} J_\alpha \cap I_n,$$

其中， f_α 的定义方式是：对每个$n \in \omega \setminus S_\alpha$，它都交换 $J_\alpha \cap I_n$ 的两个元素。任何具有这些性质的严格 $\subseteq^*$-递减序列 $\langle J_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle$，都会产生一个置换序列 $f_\alpha\colon\ D_\alpha \to D_\alpha$，满足函数蝴蝶结定义中的前两项。证明的关键在于利用 †(LP)递归地构造序列 $\langle J_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle$，使其也满足定义中的第三项。

在应用 †(LP)之前，我们必须选择一个序列 $\langle h_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle$，其中的函数属于 $\mathcal{A} \cap V$。不过，在此之前，我们必须先通过在 V中进行的超限递归，构造集合S_α 及其枚举函数，如上所述。（虽然上文中 S_α 是由 J_α 定义的，但证明的一个关键特点是，先定义 S_α，再定义 J_α。之后选择 J_α，使得 S_α 与 J_α之间满足上述关系。）构造出 S_α后，我们将根据 S_α定义每个 h_α。

递归的基例中，令 $S_0 = \omega \setminus 3$。在后继步骤中，假设给定了 S_α。令 s_α 表示唯一的递增双射$\omega \setminus 3 \to S_\alpha$，通过令 $s_{\alpha+1}(k) = s_\alpha(k2^k)$对所有$k \geq 3$成立，定义 $s_{\alpha+1}\colon\ \omega \setminus 3 \to \omega$，并令 $S_{\alpha+1} =$ 为Image($s_{\alpha+1}$)。换言之，我们定义 $S_{\alpha+1}$ 为这样一个集合：对于每个 $k \geq 3$，它包含 S_α 中的第（$k2^k - 3$）个$^{\text{th}}$ 元素。显然， $S_{\alpha+1}$是 S_α的一个无限子集，而 $S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}$ 也为无限集。在极限步骤中，假设对于某个极限序数 α，给定了 $\langle S_\xi\colon\ \xi < \alpha\rangle$，且它是一个严格$\subseteq^*$递减的集合序列。令 S_α 为$\{S_\xi\colon\ \xi < \alpha\}$的一个无限伪交，并令 s_α 表示唯一的递增双射 $\omega \setminus 3 \to S_\alpha$。如有必要，进一步缩小 S_α，我们可以（并且确实会）假设对所有 $\xi < \alpha$， $s_\xi \leq^* s_\alpha$ 均成立。

如前所述，整个递归都在内模型V中进行，因此递归的结果——序列 $\langle S_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle$ 和$\langle s_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle$——也都是 V的成员。对于每个 $\alpha < \omega_1$，定义 $h_\alpha\colon\ \omega \to \omega$，使得若 $n < 2^{s_{\alpha+1}(2)}$，则 $h_\alpha(n) = 1$；否则

$$h_\alpha(n) = j \quad \Leftrightarrow \quad n \in \big[s_{\alpha+1}(j), s_{\alpha+1}(j+1)\big).$$

注意，每个 $h_\alpha \in \mathcal{A}$ 都成立，因为每个 $s_{\alpha+1}$ 都是严格递增的；并且$\langle h_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle \in V$，因为 $\langle s_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle \in V$。

固定一个函数 $g\colon\ \omega_1 \to \mathcal{S} \cap V$，它见证 †(LP) 对于 $\langle h_\alpha\colon\ \alpha < \omega_1\rangle$。这些 J_α使用 g 作为指引，通过超限递归构造而成。不过，在介绍这一构造之前，我们先来考虑一种将 ω 的子集编码为函数 $\omega \to \omega$的方法。定义 $b\colon\ \omega \to \omega$，令 $b(0) = b(1) = b(2) = 0$，并令$b(n) = 2^{|I_n|} = 2^n$，其中 $n \geq 3$。在 V中，对于每个 $n \geq 3$，都存在一个双射ϕ_n，从 $b(n) = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ 映到 $\mathcal{P}(I_n)$。利用这些双射，可得到一个自然的同胚 Φ，它连接 $K_b = \{a \in \omega^\omega\colon\ a \leq b\}$ 与 $\prod_{n\in\omega} \mathcal{P}(I_n)$。因此，我们可以（也确实如此）将 K_b 的元素视为对ω的子集进行“编码”。具体而言， $A \subseteq \omega$ 由函数 $n \mapsto A \cap I_n$ 编码，该函数属于 $\prod_{n\in\omega} \mathcal{P}(I_n)$；通过 Φ，它对应于 K_b 的一个元素，而函数 $a \in K_b$ 则编码集合 $\bigcup_{n\in\omega} \Phi(a)(n) = \bigcup_{n\in\omega} \phi_n\big(a(n)\big)$。

现在我们可以描述 $\langle J_\alpha\colon\ \alpha<\omega_1\rangle$的构造了。对于基步骤，令 $J_0=\omega$。注意，对所有 $n\geq 3$，都有 $|J_0\cap I_n|=|I_n|=n$，因此 $\{n\geq 3\colon\ |J_0\cap I_n|>2\}=\omega\setminus 3=S_0$。

对于后继步骤，设 $J_\alpha\subseteq\omega$ and $\{n\geq 3\colon\ |J_\alpha\cap I_n|>2\}=S_\alpha$。如上所述，令 s_α 表示唯一的递增双射 $\omega\setminus 3\to S_\alpha$，并进一步假设对于所有 $k\geq 3$，$|J_\alpha\cap I_{s_\alpha(k)}|=k$。我们将通过确定每个 $n\in\omega\setminus 3$ 对应的 $J_{\alpha+1}\cap I_n$ 的值来描述$J_{\alpha+1}$。首先，如果$|J_\alpha\cap I_n|=2$（即，如果 $n\notin S_\alpha$），则设 $J_{\alpha+1}\cap I_n=J_\alpha\cap I_n$。其次，如果$n\in S_\alpha\setminus S_{\alpha+1}$，则令 $J_{\alpha+1}\cap I_n$ 为 $J_\alpha\cap I_n$ 的前两个元素。最后，考虑 $n\in S_{\alpha+1}$。回想一下，$s_{\alpha+1}$ 表示唯一的递增双射 $\omega\setminus 3\to S_{\alpha+1}$，并令 $k=s_{\alpha+1}^{-1}(n)$。回想一下，$s_{\alpha+1}(k)=s_\alpha(k2^k)$，且$|J_\alpha\cap I_n|=|J_\alpha\cap I_{s_{\alpha+1}(k)}|=|J_\alpha\cap I_{s_\alpha(k2^k)}|=k2^k$。我们的目标是从 $J_\alpha\cap I_n$ 的 $k2^k$ 个元素中选出若干个 k，使它们成为 $J_{\alpha+1}\cap I_n$。

回想一下，$g(\alpha)$ 是一个 $h(\alpha)$-缝隙，意即 $g(\alpha)(n)$ 由 $h(\alpha)(n)$ 个 ω^{n+1} 中的有限序列组成，并且对每个 $\sigma\in h(\alpha)(n)$，都有 $\sigma(n)\in\omega$。若 $\sigma(n)<2^n$，那么 $\sigma(n)$ 通过 ϕ_n 编码了 I_n 的一个子集。令

$$\mathcal{B}_k=\left\{\phi_n\big(\sigma(n)\big)\subseteq I_n\colon \sigma\in g(\alpha)(n)\text{ and }\sigma(n)<2^n\right\}.$$

换言之，$g(\alpha)$ 通过编码向我们给出了 I_n 的子集的一个集合。此外，$h_\alpha(n)=h_\alpha(s_{\alpha+1}(k))=k$，因此 $\mathcal{B}_k$ 是一个至多含有 k 个 I_n 子集的集合。（虽然 $g(\alpha)(n)$ 的大小恰为 k，但某些 $\sigma\in g(\alpha)(n)$ 可能有 $\sigma(n)\geq 2^n$，在这种情况下，它们并不编码 I_n 的子集，也不会对 $\mathcal{B}_k$ 作出贡献。）这些 k 个集合生成了 I_n 的一个划分，其大小至多为 2^k。由于 $|J_\alpha\cap I_n|=k2^k$，$J_\alpha\cap I_n$ 中有若干个 k 成员都位于划分的同一部分中。因此，我们可以（也确实会）选取 $J_{\alpha+1}\cap I_n$，使其为 $J_\alpha\cap I_n$ 的一个大小为 k 的子集，并且 $J_{\alpha+1}\cap I_n$ 要么包含于每个 $B\in\mathcal{B}_k$ 中，要么与每个 $B\in\mathcal{B}_k$ 不相交。至此，构造 J_α 的后继步骤完成。显然，我们的递归假设得以保持：我们有 $J_{\alpha+1}\subseteq J_\alpha$，以及 $S_{\alpha+1}=\{n\geq 3\colon\ |J_\alpha\cap I_n|>2\}$，并且对所有 $k\geq 3$ 都有$|J_{\alpha+1}\cap I_{s_{\alpha+1}(k)}|=k$。

对于极限步骤，固定一个极限序数 $\alpha<\omega_1$，并回顾 S_α 是 $\{S_\xi$ 的伪交：$\xi<\alpha\}$，且对所有 $\xi<\alpha$ 都有 $s_\xi\leq^* s_\alpha$。我们将分两步定义 J_α：首先，通过描述对所有 $n\geq 3$ 的 $J^0_\alpha\cap I_n$ 来定义集合 J^0_α（如同后继步骤中对 $J_{\alpha+1}$ 的处理），然后将 J^0_α 缩减为所需的集合 J_α。作为递归假设（在后继步骤中显然保持成立，此时 $J_{\alpha+1}\subseteq J_\alpha$），假设 $\langle J_\xi\colon\ \xi<\alpha\rangle$ 是 $\subseteq^*$-递减的。

固定一个递增序列 $\langle\xi_n\colon\ n<\omega\rangle$，其中各项是小于 α 的序数，且满足 $\xi_0=0$ 和 $\sup_{n<\omega}\xi_n=\alpha$。接下来，固定一个严格递增的自然数序列 $\langle k_n\colon\ n<\omega\rangle$，满足 $k_0>3$，使得

- $S_\alpha\setminus k_n\subseteq S_{\xi_{n+1}}$, and
- if $i\geq k_n$ then $s_{\xi_{n+1}}(i)\leq s_\alpha(i)$, and
- $J_{\xi_{n+1}}\setminus s_{\xi_n}(k_n)\subseteq J_{\xi_n}$.

可以找到这样的序列，因为 $S_\alpha\subseteq^* S_{\xi_{n+1}}$、$s_{\xi_{n+1}}\leq^* s_\alpha$ 和 $J_{\xi_{n+1}}\subseteq^* J_{\xi_n}$ 对所有 n 都成立，而且每个 s_{ξ_n} 都是严格递增的。定义

通过取 $J^0_\alpha \subseteq \omega$

$$J^0_\alpha \cap I_j = J_0 \cap I_j = I_j \qquad \text{if } j \in \big[3, s_0(k_0)\big),$$
$$J^0_\alpha \cap I_j = J_{\xi_{n+1}} \cap I_j \qquad \text{if } j \in \big[s_{\xi_n}(k_n), s_{\xi_{n+1}}(k_{n+1})\big),$$

对于每个 $n \in \omega$，我们选取 $k_n, k_{n-1}, \dots, k_0$时的第三项要求确保：若 $j \in \big[s_{\xi_n}(k_n)^{s_{\xi_{n+1}}}(k_{n+1})\big)$，则

$$J^0_\alpha \cap I_j = J_{\xi_{n+1}} \cap I_j \subseteq J_{\xi_n} \cap I_j \subseteq J_{\xi_{n-1}} \cap I_j \subseteq \ldots \subseteq J_{\xi_0} \cap I_j.$$

也就是说，对于所有 $\ell \leq n+1$，当 $j \in \big[s_{\xi_n}(k_n)\, {}^{s_{\xi_{n+1}}}(k_{n+1})\big)$ 时，$J^0_\alpha \cap I_j \subseteq J_{\xi_\ell} \cap I_j$。由此可知，对于所有 $\ell \in \omega$，$J_{\xi_\ell} \subseteq^* J^0_\alpha$。此外，若 $\xi < \alpha$，则存在某个 $\ell \in \omega$ 满足 $\xi < \xi_\ell$，因此 $J_\xi \supseteq^* J_{\xi_\ell} \supseteq^* J^0_\alpha$。因此，对于每个 $\xi < \alpha$，$J^0_\alpha \subseteq^* J_\xi$。

对于每个 $n \in \omega$，我们选取 k_n 时的前两项要求确保：如果 $j \in \big[s_{\xi_n}(k_n)\, {}^{s_{\xi_{n+1}}}(k_{n+1})\big)$ 且 $j = s_\alpha(i)$ 对某个 i 成立，那么对某个 $i' \geq i$，有 $s_\alpha(i) = {}^{s_{\xi_{n+1}}}(i')$。（由第一项要求，$s_\alpha(i) \in S_\alpha$ 蕴含 $s_\alpha(i) \in S_{\xi_{n+1}}$；由第二项要求，${}^{s_{\xi_{n+1}}}(i) \leq s_\alpha(i)$。$s_\alpha(i) \in S_{\xi_{n+1}}$ 蕴含对某个 i' 有 $s_\alpha(i) = {}^{s_{\xi_{n+1}}}(i')$，于是 $i \leq i'$，因为 ${}^{s_{\xi_{n+1}}}(i) \leq s_\alpha(i)$，且 ${}^{s_{\xi_{n+1}}}$ 严格递增。）在此情形下，我们有$|J^0_\alpha \cap I_{s_\alpha(i)}| = |J_{\xi_{n+1}} \cap I_{\sigma_{\xi_{n+1}}(i')}| = i' \geq i$。由于这对每个 n 都成立，因此若 $s_\alpha(i) > s_{\xi_0}(k_0)$，则$|J^0_\alpha \cap I_{s_\alpha(i)}| > i$。若 $s_\alpha(i) < s_{\xi_0}(k_0)$，则$|J^0_\alpha \cap I_{s_\alpha(i)}| = |I_{s_\alpha(i)}| = s_\alpha(i) \geq i$，因为 s_α 严格递增。这表明 $\big\{n \geq 3 \colon |J^0_\alpha \cap I_n| > 2\big\} \supseteq S_\alpha$，并且对所有 i，$|J^0_\alpha \cap I_{s_\alpha(i)}| \geq i$。

根据前一段，可以将 J^0_α缩小为一个集合 $J_\alpha \subseteq J^0_\alpha$，使得 $\big\{n \geq 3 \colon |J^0_\alpha \cap I_n| > 2\big\} = S_\alpha$，且对于所有 i，都有$|J^0_\alpha \cap I_{s_\alpha(i)}| = i$。根据倒数第二段，对于所有 $\xi < \alpha$，我们也有 $J_\alpha \subseteq J^0_\alpha \subseteq^* J_\xi$。这就完成了递归的极限步骤。

现在，我们可以按照证明开头所述，根据序列 $\langle J_\alpha$定义一个函数蝴蝶结：$\alpha < \omega_1\rangle$。对于每个 $\alpha < \omega_1$，令

$$D_\alpha = \bigcup\{J_\alpha \cap I_n \colon |J_\alpha \cap I_n| = 2\} = \bigcup_{n \in \omega \setminus S_\alpha} J_\alpha \cap I_n,$$

并令 f_α 为 D_α 的置换，它对每个 $n \in \omega \setminus S_\alpha$交换 $J_\alpha \cap I_n$中的两个元素。显然，每个 f_α 都没有不动点。

回顾一下，S_α 和 J_α 都是严格 $\subseteq^*$-递减的。这意味着D_α 严格 $\subseteq^*$-递增。显然，若 $\alpha \leq \beta$，那么由于$J_\beta \subseteq^* J_\alpha$ 和 J_α，且 J_β 与每个 I_n 至少有两个交点，对于除有限多个 n 之外的所有 n，若 $|J_\alpha \cap I_n| = 2$，则 $J_\alpha \cap I_n = J_\beta \cap I_n$。因此，$f_\alpha =^* f_\beta \restriction D_\alpha$。

因此，$\langle f_\alpha \colon \alpha < \omega_1\rangle$ 满足函数蝴蝶结定义中的前两项要求，接下来只需证明它满足第三项。固定 $A \subseteq \omega$。令 a为上述用于编码 A 的函数：即，$A = \bigcup_{n\in\omega} \Phi(a)(n) = \bigcup_{n\in\omega} \phi_n(a(n))$。回顾一下，对所有 $n \geq 3$，都有 $a(n) < 2^{|I_n|} = 2^n$，这意味着 a 有一个来自 V的函数作为上界。由于g 见证了 $\langle h_\alpha \colon \alpha < \omega_1\rangle$的拉弗性质（LP），集合 $\{\alpha < \omega_1 \colon g(\alpha)$ 捕获 $a\}$ 是非空的。固定某个 $\delta < \omega_1$，使得 $g(\delta)$捕获 a。

令 $\delta_A = \delta + 1$。在构造的第 δ_A 阶段，当我们定义J_{δ_A}时，对于每个$n = s_{\delta_A}(k) \in S_{\delta_A}$，我们都选择$J_{\delta_A} \cap I_n$为 $J_\delta \cap I_n$的一个大小为k的子集，使得$J_{\delta_A} \cap I_n$ 要么包含于每个 $B \in \mathcal{B}_k$中，要么与每个 $B \in \mathcal{B}_k$不相交，其中

$$\mathcal{B}_k = \left\{\phi_n\big(\sigma(n)\big) \subseteq I_n : \sigma \in g(\delta)(n) \text{ and } \sigma(n) < 2^n\right\}.$$

由于 $g(\delta)$ 捕捉了 a，我们有 $a(n) \in \{\sigma(n) : \sigma \in g(\delta)(n)\}$ 对每个 n 都成立。因此，$A \cap I_n = \phi_n\big(a(n)\big) \in \mathcal{B}_k$ 对每个 n 都成立。由此可知，对于每个 $n \in S_\alpha$，$J_{\delta_A} \cap I_n$ 要么包含于 $A \cap I_n$，要么与 $A \cap I_n$ 不相交。

现在固定一个满足 $\delta_A \leq \alpha < \omega_1$的 α。我们有 $D_{\delta_A} \subseteq^* D_\alpha$，此外，$D_\alpha \setminus D_{\delta_A}$ 是由形如 $J_\alpha \cap I_n$ 且满足 $|J_\alpha \cap I_n| = 2$ 的集合组成的无限并，其中 $n \in S_{\delta_A} \setminus S_\alpha$。对于这类 n，除有限多个之外，均有 $J_\alpha \cap I_n \subseteq J_{\delta_A} \cap I_n$（因为 $J_\alpha \subseteq^* J_{\delta_A}$）。根据前一段，对于 $n \in S_{\delta_A}$，集合 $J_{\delta_A} \cap I_n$ 的选取方式保证了 $J_{\delta_A} \cap I_n$ 要么包含于 A，要么与 A 不相交。由于 f_α 只是交换这些点对中的两个点，我们看到，除有限多个情形外，$f_\alpha \setminus f_{\delta_A}$ 要么将 A 中的两点互换，要么将不在 A 中的两点互换。换言之，$D_\alpha \setminus D_{\delta_A}$ 几乎是 f_α-不变的。□

推论 3.6. 存在一个函数蝴蝶结，因此存在一个非平凡的自同构 -，它作用于 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$，并存在于拉弗模型、*Mathias* 模型、米勒模型、萨克斯模型和西尔弗模型中。

证明. 这可由定理 2.1、3.3 和 3.5 立即推出。 □

4. Automorphisms in the Mathias model

Shelah 和 Steprāns 在 [23] 中证明了，在萨克斯模型中，$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的所有自同构都某处平凡。本节中，我们将证明 Mathias 模型也有相同结论。

令 $\mathbb{M}$ 表示 Mathias 强迫偏序集：

$$\mathbb{M} = \left\{(a, A) : a \in [\omega]^{<\omega},\ A \in [\omega]^\omega,\ \text{and}\ \max(a) < \min(A)\right\},$$

其序关系定义为：$(b,\ B) \leq (a,\ A)$ 当且仅当 $b \supseteq a$、$B \subseteq A$ 和 $b \subseteq a \cup A$。*Mathias* 模型 指在满足连续统假设的模型上，通过长度为 ω_2 的 $\mathbb{M}$ 可数支撑迭代强迫得到的任意模型。本节的主要定理是：

定理 4.1。在 *Mathias* 模型中，$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的每个自同构都某处平凡。

我们主要通过拼接文献中的事实来证明这个定理。首先回顾一下，非主超滤子 $\mathcal{U}$ 在 ω 上是 *Ramsey* 的，指的是对于每个无限划分 $\{A_n : n \in \omega\}$ of ω，要么存在某个 n 使得$A_n \in \mathcal{U}$，要么存在某个 $S \in \mathcal{U}$使得对于所有 n都有 $|S \cap A_n| \leq 1$。更一般地，如果 V 和 W 是两个满足 $V \subseteq W$的集合论模型，则滤子$\mathcal{U} \in W$在 V上是 *Ramsey over* 的，指的是对于每个满足 $\{A_n : n \in \omega\} \in V$的无限划分 $\{A_n : n \in \omega\}$ of ω，要么存在某个 n使得 $A_n \in \mathcal{U}$，要么存在某个 $S \in \mathcal{U} \cap V$使得对于所有 n都有 $|S \cap A_n| \leq 1$。换言之，$\mathcal{U}$是

在 V上 Ramsey over $\mathcal{U}\cap V$，如果 $\mathcal{U}\cap V$满足在V内部对 Ramsey 超滤子的定义（但我们不要求 $\mathcal{U}\cap V\in V$）。

再次假设， V和 W 是满足 $V\subseteq W$的两个集合论模型。若 $X\subseteq\omega$ 且 $X\in W$，则 $\{A\in V\colon\ X\subseteq^* A\subseteq\omega\}$ 是一个滤子，我们称之为由 X 在 V上诱导的滤子。若此滤子在 V上是 Ramsey 的，则称 X 在 V上诱导出一个 *Ramsey* 超滤。反过来看，注意到超滤子 $\mathcal{U}\in V$ 由集合 $X\in W$ 诱导，当且仅当 X 是 W中 $\mathcal{U}$ 的一个伪交。

若 $\mathcal{U}$ 是 ω上的一个超滤子，则

$$\mathbb{M}(\mathcal{U})\ =\ \{(a,A)\in\mathbb{M}\colon A\in\mathcal{U}\}\,.$$

这是 Mathias强迫的一种变体，有时称为由超滤子 $\mathcal{U}$“引导”的 Mathias强迫。若 G 是 V上的一个 $\mathbb{M}(\mathcal{U})$-泛滤子，则对某个 $A\}$， $S\ =\ \bigcup\{a\colon\ (a,\ A)\in G$是$V[G]$中 $\mathcal{U}$的一个伪交。特别地，若 $\mathcal{U}$在 V中是 Ramsey 的，则 $\mathbb{M}(\mathcal{U})$会添加 ω 的一个子集，该子集在 V上诱导出一个 Ramsey 超滤，即 $\mathcal{U}$。

回顾一下，通过 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 进行强迫会在 ω上添加一个 Ramsey 超滤子。具体而言，若 G是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$上的 V-泛滤子，则 $\mathcal{U}=\{A\subseteq\omega\colon\ [A]_{\mathrm{Fin}}\in G\}$是 ω 上的一个 Ramsey 超滤子，且属于 $V[G]$ （也就是说， G 本身就是一个 Ramsey 超滤子，只需按照从 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 到 $\mathcal{P}(\omega)$ 的自然转移来理解）。以下事实由 Mathias 在 [15]中证明：

引理 4.2 (Mathias)。偏序集 $\mathbb{M}$ 与以下 2 步迭代 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}*\mathbb{M}(\mathcal{U})$在强迫意义下等价，其中 $\mathcal{U}$ 是一个名称，表示通过 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$进行强迫所添加的泛 *Ramsey* 超滤子，如上所述。

下文中，通过强迫添加的超滤子 $\mathbb{M}$ 特指该分解第一阶段所添加的 Ramsey 超滤子。Mathias 对此引理的证明表明，若 G 是 $\mathbb{M}$上的 V-泛滤子，那么通过 $\mathbb{M}$ 进行强迫所添加的超滤子可在 $V[G]$ 中定义为

$$\mathcal{U}\ =\ \{B\subseteq\omega\colon \text{there is some } (a,A)\in G \text{ with } A\subseteq^* B\}\,.$$

等价地，这是由 $\mathbb{M}$-泛实数在 V 上诱导的滤子 $\mathcal{U}_X$

$$X\ =\ \bigcup\{a\in[\omega]^{<\omega}\colon \text{there is some } A \text{ with } (a,A)\in G\}\,.$$

特别地，通过对 $\mathbb{M}$ 进行强迫而加入的超滤子 $\mathcal{U}$ 在 $V[G]$中有一个伪交，而 $\mathcal{U}$ 则由这个伪交在 V 上诱导出来。

我们还需要以下由 Shelah 和 Spinas 在 [20] 中证明的两个结果。这些结果在 [20]，中是“从基模型”表述的，但我们更倾向于将其表述为“从扩张”出发。对于这两个结果的表述，设 $V\models$为连续统假设，令 $\mathbb{M}_{\omega_2}$ 表示 $\mathbb{M}$ 的长度为 ω_2 的可数支撑迭代，并令 G 为 sobre V 的 $\mathbb{M}_{\omega_2}$-泛滤子。对每个 $\alpha<\omega_2$，令 $\mathbb{M}_\alpha$ 表示该迭代的前 α 个阶段，并令 $G_\alpha=G\restriction\mathbb{M}_\alpha$。

回顾一下，如果任意递增的 ω_1-序列在 C 中的极限都属于 C，那么 $C\subseteq\omega_2$ 就是一个 ω_1-俱乐部 。

引理 4.3 (Shelah-Spinas)。 存在一个 ω_1-俱乐部 $C \subseteq \omega_2$，使得对所有 $\alpha \in C$, 以下结论成立：如果 $A \subseteq \omega$ 在 $V[G_\alpha]$ 上诱导出一个 *Ramsey* 超滤，那么存在某个 $A' \in V[G_{\alpha+1}]$，使得 A 和 A' 在 $V[G_\alpha]$ 上诱导出同一个超滤子。

证明。 这是对 [20] 中命题 2.3 的释义。 □

回顾一下，若两个滤子 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 定义在 ω 上，且存在双射 $h\colon \omega \to \omega$ 使得 $A \in \mathcal{U}$ 当且仅当 $h[A] \in \mathcal{V}$，则称它们*RK* 等价。在这种情况下，我们称 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 通过函数 hRK 等价。

引理 4.4 (Shelah-Spinas)。 令 $\mathcal{U} \in V[G_{\alpha+1}]$ 表示在迭代的第 α 阶段，对 $V[G_\alpha]$ 进行强迫 $\mathbb{M}$ 所添加的 *Ramsey* 超滤。设$A \subseteq \omega$ 且 $A \in V[G_{\alpha+1}]$。若 A 在 $V[G_\alpha]$上诱导出 *Ramsey* 超滤 $\mathcal{V}$，则 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 通过某个 $h \in V[G_\alpha]$*RK* 等价。

证明。 这是对 [20]中命题 2.4 的释义。 □

在本节余下部分，我们稍微滥用记号，令$F(A)$表示等价类 $F\big([A]_{\mathrm{Fin}}\big)$的某个（任意）代表元，其中 F是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的自同构，且 $A \subseteq \omega$。我们还将滤子 $\mathcal{U}$在 F下的像记作 $F(\mathcal{U})$，而不写作 $F[\mathcal{U}]$。

引理 4.5. 设 F 是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的自同构，并令 $\mathcal{U}$ 为通过 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$强迫所添加的泛超滤子的典范名称。那么， $\Vdash_{\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}} F(\mathcal{U})$ 是 *Ramsey* 的。

证明。 这个证明与通常证明 $\Vdash_{\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}} \mathcal{U}$ 是 Ramsey 的证明基本相同。令 G 是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$-泛的，且在 V上，并令 $\mathcal{U} = \{A \subseteq \omega\colon [A]_{\mathrm{Fin}} \in G\}$表示通过 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$强迫所添加的泛超滤子。由于 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$是可数闭强迫，它不会添加新的实数，特别是不会添加 ω的新划分。

在基模型中，令 $\{A_n\colon n \in \omega\}$ 是 ω的一个无限划分，并固定一个条件 $[A]_{\mathrm{Fin}} \in \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$。若存在某个 n 使得 $F(A)\cap A_n$ 是无限的，则 $[A\cap F^{-1}(A_n)]_{\mathrm{Fin}} \leq [A]_{\mathrm{Fin}}$ 且 $[A\cap F^{-1}(A_n)]_{\mathrm{Fin}} \Vdash A_n \in F(\dot{\mathcal{U}})$。另一方面，若对所有 n， $F(A)\cap A_n$ 都是有限的，则存在一个无限的$S \subseteq F(A)$，使得对所有 n 都有 $|S \cap A_n| \leq 1$；于是 $[F^{-1}(S)]_{\mathrm{Fin}} \leq [A]_{\mathrm{Fin}}$ 且$[F^{-1}(S)]_{\mathrm{Fin}} \Vdash S \in F(\dot{\mathcal{U}})$。无论哪种情况， $[A]_{\mathrm{Fin}}$ 都有一个扩张，强迫 “要么存在某个 n，使得 $A_n \in F(\mathcal{U})$；要么存在某个 $S \in \mathcal{U}$，使得对所有 n 都有 $|S \cap A_n| \leq 1$。”

因此，在扩张中，要么存在某个 n，使得 $A_n \in F(\mathcal{U})$；要么存在某个 $S \in F(\mathcal{U})$，使得对于所有 n，都有 $|S \cap A_n| \leq 1$。由于这对任意划分 $\{A_n\colon n \in \omega\}$（属于 V）都成立，而且 ω在 $V[G]$中的每个划分都已属于 V，这表明 $F(\mathcal{U})$ 在 $V[G]$中是 Ramsey 的。□

引理 4.6. 设 F 是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的自同构，且 $A \in [\omega]^\omega$，而h是从 A到 $F(A)$的几乎双射。若 $F\restriction \mathcal{P}(A)/\mathrm{Fin}$不是由 h诱导的，则存在一个无限的 $B \subseteq A$，使得 $F(B)\cap h[B]$ 是有限的。

证明。假设 $F \restriction {}^{\mathcal{P}(A)}/_{\mathrm{Fin}}$ 不是由 h诱导的，则存在某个无限的$C \subseteq A$，使得 $F(C) \triangle h[C] = (F(C) \setminus h[C]) \cup (h[C] \setminus F(C))$是无限的。若$h[C] \setminus F(C)$是无限的，则令 $B = C \setminus h^{-1}[F(C)]$。若 $F(C) \setminus h[C]$ 是无限的，则令 $B = h^{-1}[F(C) \setminus h[C]]$。□

下述引理可以视为在 [13] 或 [20], 中隐含成立，尽管两者都未明确陈述该引理。

引理 4.7。设 F 是 ${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$ 的处处非平凡自同构，并且设 $\mathcal{U}$ 是通过 ${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$ 强迫添加的泛超滤子的名称。那么 $\Vdash_{\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}} \mathcal{U}$ 与 $F(\mathcal{U})$ 不是 *RK* 等价的。

证明。设 G 是在 V 上泛的 ${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$，并令 $\mathcal{U} = \{A \subseteq \omega \colon [A]_{\mathrm{Fin}} \in G\}$ 表示通过 ${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$ 强迫添加的泛超滤子的名称。由于 ${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$ 是可数闭强迫，它不会添加新的实数，特别是不会添加新的双射 $\omega \to \omega$。因此，若 $h \in V[G]$ 是一个双射 $\omega \to \omega$，则 $h \in V$。于是，为了证明 $\mathcal{U}$ 与 $F(\mathcal{U})$ 在 $V[G]$ 中不是 RK 等价的，只需证明它们之间不存在由双射 $h \in V$ 诱导的 RK 等价。

在基模型中，固定一个双射 $h \colon \omega \to \omega$，并固定一个条件$[A]_{\mathrm{Fin}} \in {}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$。由于我们假设 F 处处非平凡，$F \restriction {}^{\mathcal{P}(A)}/_{\mathrm{Fin}}$ 并非由 $h \restriction A$诱导。根据引理 4.6，存在一个无限 $B \subseteq A$，使得$F(B) \cap h[B]$ 是有限的。因此 $[B]_{\mathrm{Fin}} \leq [A]_{\mathrm{Fin}}$，并且

$$[B]_{\mathrm{Fin}} \Vdash B \in \dot{\mathcal{U}},\ F(B) \in F(\dot{\mathcal{U}}),\ \text{and consequently, } h[B] \notin F(\dot{\mathcal{U}}).$$

因此，任意条件 $[A]_{\mathrm{Fin}} \in {}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$ 都有一个扩张，强迫 $\mathcal{U}$ 和$F(\mathcal{U})$ 不是通过 h实现的 RK 等价。

因此，在 $V[G]$中，$\mathcal{U}$和 $F(\mathcal{U})$ 不是通过 h等价的。由于 h是 V中的任意双射，且 $V[G]$ 中的每个双射都已属于 V，这表明在 $V[G]$中，$\mathcal{U}$和$F(\mathcal{U})$ 不是 RK 等价的。□

定理 *4.1* 的证明。假设 $V \models$ 连续统假设。令 $\mathbb{M}_{\omega_2}$ 表示 $\mathbb{M}$的长度为-ω_2的可数支撑迭代，并令 G 为 V上的一个 $\mathbb{M}_{\omega_2}$-泛滤子。对每个 $\alpha < \omega_2$，令 $\mathbb{M}_\alpha$ 表示该迭代的前 α 个阶段，并令$G_\alpha = G \restriction \mathbb{M}_\alpha$。

为导出矛盾，假设 F 是 ${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$ 在 $V[G]$中的处处非平凡自同构。对于每个 $\alpha < \omega_2$，令 $F_\alpha = F \restriction V[G_\alpha]$。通过标准的反射论证，存在一个 ω_1-club $C \subseteq \omega_2$，使得对于所有$\alpha \in C$，$F_\alpha \in V[G_\alpha]$ 和 $V[G_\alpha] \models$ “F_α 是${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$的处处非平凡自同构”。将 C 与引理 4.3中描述的 ω_1-club 集相交后，我们可以（并且确实）假设：如果 $\alpha \in C$ 和 $A \subseteq \omega$ 在 $V[G_\alpha]$上诱导出一个 Ramsey 超滤，那么存在某个 $A' \in V[G_{\alpha+1}]$，使得 A 和 A' 在 $V[G_\alpha]$ 上诱导出相同的超滤子。

固定 $\alpha \in C$。在迭代的第 α 阶段，我们在 $V[G_\alpha]$ 中使用 $\mathbb{M}$ 进行强迫，以得到 $V[G_{\alpha+1}]$。根据引理 4.2，我们可以将其视为一个两步过程：$V[G_{\alpha+1}] = V[G_\alpha][H][K]$，其中 H 是在 $V[G_\alpha]$ 上的 ${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$-泛型，而 K 是在 $V[G_\alpha][H]$ 上的 $\mathbb{M}(\mathcal{U})$-泛型，其中 $\mathcal{U} \in V[G_\alpha][H]$ 表示通过使用 ${}^{\mathcal{P}(\omega)}/_{\mathrm{Fin}}$ 进行强迫而添加的 Ramsey 超滤。设定在 $V[G_\alpha][H]$ 中，引理 4.5

告诉我们， $F(\mathcal{U})$ 是一个 Ramsey 超滤，而引理 4.7 告诉我们， $\mathcal{U}$ 与 $F(\mathcal{U})$ 并非 RK 等价。

在 $V[G]$ 中，滤子 $\mathcal{U}$ 不再是超滤子：它有一个伪交S，这是在 $V[G_\alpha][H]$上通过强迫 $\mathbb{M}(\mathcal{U})$ 加入的。由于 F是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的一个自同构，这意味着 $F(S)$也应当是 $F(\mathcal{U})$的一个伪交。换言之， $F(\mathcal{U})$在 $V[G_\alpha][H]$ 中是一个超滤子，并且

$$F(\mathcal{U}) = \{X \in V[G_\alpha][H] \colon F(S) \subseteq^* X \subseteq \omega\}.$$

因此， $F(S)$在 $V[G_\alpha]$上诱导出一个 Ramsey 超滤，即 $F(\mathcal{U})$。

由于 $\alpha \in C$，存在某个 $A' \subseteq \omega$ ，使得 $A' \in V[G_{\alpha+1}]$ ，并且 A'在 $V[G_\alpha]$上诱导出超滤子 $F(\mathcal{U})$。由引理 4.4，这意味着 $\mathcal{U}$和$F(\mathcal{U})$通过某个 $h \in V[G_\alpha]$是 RK 等价的，这与引理 4.7 矛盾。□

References

[1] A. R. Blass, 《连续统的组合基数特征》，载于 *Handbook of Set Theory* 2010 395 ，M. Foreman 和 A. Kanamori 编，Springer-Verlag（），第–489页。[2]B. De Bondt、I. Farah 和 A. Vignati, 《约化积之间的平凡同构》，即将发表于 *Israel Journal of Mathematics*，目前可见于 https://arxiv.org/abs/2307.06731。[3] W. R. Brian, 《$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 知道左右之分吗？》，预印本，目前可见于 https://arxiv.org/abs/2402.04358。[4] W. R. Brian 和 I. Farah, 《共轭 $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathrm{Fin}$的平凡自同构》，即将发表于 *Transactions of the American Mathematical Society*，目前可见于 https://arxiv.org/abs/2410.08789。[5] D. Chodounsk´y 和 O. Guzman, 《Silver 扩张中不存在-点》，*Journal of Mathematics* **232** 2019 759 773 （），第–页。[6] K. Devlin 和 S. Shelah, 《一个由推出的 $\diamondsuit$ $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ *Israel* 弱版本》，*Israel Journal of Mathematics* **29** 1978 239 247 （），第–页。[7] A. Dow, 《$\mathcal{P}(\omega)$/fin 的自同构与大连续统》，预印本，目前可见于 https://arxiv.org/abs/2207.10557。[8] A. Dow 和 S. Shelah, 《$\mathbb{N}^*$ 中的系结点与不动点》，*Topology and its Applications* **155** 2008 1661 1671 （），第–页。[9] E. K. van Douwen, 《整数与拓扑学》，载于 *Handbook of Set-Theoretic Topology* 1984 ，K. Kunen 和 J. E. Vaughan 编，North-Holland，阿姆斯特丹，。[10] P. Erd˝os 和 N. G. de Buijn, 《无限图的着色问题与关系理论中的一个问题》， *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* **54** （1951），第371–373页。[11] I. Farah 和 S. Shelah, 《平凡自同构》， *Israel Journal of Mathematics* **201** （2014），第701–728页。[12] Z. Frol´ık, 《极端不连通空间与完备布尔代数的映射的不动点》， *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*， *Series of Mathematics*， *Astronomy and Physics* **16** 1968 269 275 ，（），第–页。[13] M. Goldstern 和 S. Shelah, 《Ramsey 超滤与收割数——Con($\mathfrak{r} < \mathfrak{u}$)》， *Annals of Pure and Applied Logic* **49** 1990 121 142 （），第–页。[14] M. Hru˘s´ak, 《另一个类似 ♢的原理》， *Fundamenta Mathematicae* **167** （2001），第277–289页。[15] A. R. D. Mathias, 《快乐族》， *Annals of Mathematical Logic* **12**（1977），第59–111页。

[16] J. T. Moore, 《关于开着色公理的几点说明》, *Annals of Pure and Applied Logic* **172** 2021 102912 （），论文编号。

[17] J. T. Moore、M. Hrušák 和 M. Džamonja, 《参数化原理》, （），第–页。[18] W. Rudin, 《Čech 紧化理论中的齐性问题》, *Transactions of the American Mathematical Society* **356** 2003 2281 2306 ♢ *Transac-* *Duke Mathematical Journal* **23** 1956 409 419 , （），第–页。1982

[19] S. Shelah, *Proper Forcing*, 《数学讲义》, 第940卷, Springer-Verlag, 柏林, [20] S. Shelah 和 O. Spinas, 《$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 及其平方的分配数》, *Transactions of the American Mathematical Society* **352**（2000）, 第2023–2047页。[21] S. Shelah 和 J. Stepr$\bar{\text{a}}$ns, 《PFA 蕴含所有自同构都是平凡的》, *Proceedings of the American Mathematical Society* **104** 1988 1220 1225 （），第–页。[22] S. Shelah 和 J. Stepr$\bar{\text{a}}$ns, 《不依赖连续统假设的 $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ 非平凡自同构》, *Fundamenta Mathematicae* **132**（1989）, 第135–141页。[23] S. Shelah 和 J. Stepr$\bar{\text{a}}$ns, 《某处平凡的自同胚》, *Journal of the London Mathematical Society* **49** 1994 569 580 （），第–页。[24] S. Shelah 和 J. Stepr$\bar{\text{a}}$ns, 《由小支配数的变体得到的 $\mathcal{P}(\mathbb{N})/[\mathbb{N}]^{<\aleph_0}$ 非平凡自同构》, *European Journal of Mathematics* **1**, 第3卷（2015）, 第534–544页。[25] S. Todorčević, *Partition problems in topology*, 《当代数学》, 第84卷（1989）, 罗得岛州普罗维登斯：美国数学会。[26] B. Veličković, *Proceedings of the American Mathematical Society* **96** 1986 130 135 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 《（）的可定义自同构》, （），第–页。[27] B. Veličković, *Topology and Its Applications* **49** 1992 1 12 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 《OCA 与（）的自同构》, （），第–页。

W. R. Brian, Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, NC (USA) *Email address*: wbrian.math@gmail.com *URL*: wrbrian.wordpress.com

A. S. Dow, Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, NC (USA) *Email address*: adow@charlotte.edu *URL*: https://webpages.uncc.edu/adow