arXiv:2601.20012v1 [math.QA] 27 Jan 2026

F 符号与 R 符号：Haagerup 子因子的 Drinfeld 中心

FABIAN MÄURER*、ULRICH THIEL* 和 GERT VERCLEYEN†

摘要。我们最近设计并实现了一种算法，并将其集成到软件包 TensorCategories.jl 中，用于计算融合范畴的 Drinfeld 中心。通过简化 Haagerup $\mathcal{H}_3$ 范畴的 F 符号、 R 符号和幺正系数所涉及的定义域，我们现在得以计算其 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$ 的显式 F 符号、 R 符号和幺正系数。本文将讨论如何获取这些数据。我们还介绍了一种新的通用算法，用于为无重数融合范畴寻找一种规范，使其符号属于最小域。

1. 引言

融合范畴广泛出现于数学和物理学的诸多分支，例如拓扑量子计算 [15, 30, 52, 40, 41], 结理论 [29, 39, 38, 44],弱 Hopf 代数与量子群的表示论 [29, 1], 低维拓扑和拓扑场论 [46, 6, 1, 8, 45],子因子理论和平面代数[28, 16, 4, 13], 顶点算子代数与共形场论 [34, 7, 13]。

对于任何实际的融合范畴研究方法，都需要知道其骨架数据，即编码结合子、幺半结构以及（若适用）编织的线性映射的系数。这些系数分别称为 F-符号、P-符号和 R-符号；至少在理论上，可以通过求解多项式方程和不等式组，从相应融合范畴的融合环中求得。这一过程称为融合环范畴化。在 [36],， $\mathcal{H}_3$ Haagerup 范畴的骨架数据是通过对其融合环进行范畴化而得到的；之后在 [49], ，这一方法被用于找出秩不超过七、带有编织结构和幺半结构的所有无重数融合范畴。这些数据可在

*德国凯泽斯劳滕-兰道莱茵兰-普法尔茨工业大学数学系，邮政信箱3049，67663 凯泽斯劳滕

†美国印第安纳州西拉斐特，47907，北大学街150号，普渡大学数学系电子邮箱地址: maeurer@mathematik.uni-kl.de, ulrich.thiel@math.rptu.de,gvercley@purdue.edu.日期: 2026年1月27日。

AnyonWiki [51], 上获取，它是 Anonyonica 软件包 [48],的一部分；最近也可通过 TensorCategories.jl 软件包 [32]获取。

遗憾的是，通过求解多项式方程组来范畴化融合环，目前仅在低秩无重数融合环的情形下取得了成效。这是因为随着融合环的重数和 Frobenius-Perron 维数增加，多项式方程的数量会急剧上升。获得范畴实例的另一种方法，是对较小的范畴应用某些构造，从而得到更大的范畴。本文关注的具体构造是 Drinfeld 中心。

最近，我们设计并实现了一种算法，用于计算刚性融合范畴 $\mathcal{C}$ 的 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 的 F-符号、R-符号和 P-符号（以下统称为符号）；该算法是我们软件包 TensorCategories.jl [33, 32] 的一部分。这个开源软件包基于 Julia 编程语言，并使用 OSCAR [37, 10] 计算机代数系统进行符号计算。借助 [49], 的数据，该软件包已用于计算所有秩不超过 5 的无重数融合范畴的中心的符号。

算法计算 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 符号的速度，除其他因素外，取决于 $\mathcal{C}$ 符号所属的域（C 的子域）。理想情况下，这些符号可以用分圆域表示。对于秩 7 及以下几乎所有无重数融合范畴，这确实可行。

不过，有 4 个例外 [35]：两个幺正范畴 $\mathrm{HI}(\mathrm{Z}_3)_{1,\ 0,\ 1} \cong \mathcal{H}_3$ 和 $\mathrm{HI}(\mathrm{Z}_3)_{2,\ 0,\ 1} \cong \mathcal{H}_2$，以及两个非幺正范畴 $\mathrm{HI}(\mathrm{Z}_3)^{3,0,1}$ 和 $\mathrm{HI}(\mathrm{Z}_3)^{4,0,1}$。这些范畴在 Morita 等价意义下，是表 1 中融合环可能的范畴化；此处我们采用 AnyonWiki 中的记法来表示具体的范畴化。范畴 $\mathcal{H}_3$ 和 $\mathcal{H}_2$ 通过伽罗瓦共轭相关。这些

表 1. $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_3$的融合规则。

	$\mathbb{1}$	α	α_*	ρ	$\alpha\rho$	$\alpha_*\rho$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	α	α_*	ρ	$\alpha\rho$	$\alpha_*\rho$
α	α	α_*	$\mathbb{1}$	$\alpha\rho$	$\alpha_*\rho$	ρ
α_*	α_*	$\mathbb{1}$	α	$\alpha_*\rho$	ρ	$\alpha\rho$
ρ	ρ	$\alpha_*\rho$	$\alpha\rho$	$\mathbb{1}+\rho+\alpha\rho+\alpha_*\rho$	$\alpha_*+\rho+\alpha\rho+\alpha_*\rho$	$\alpha+\rho+\alpha\rho+\alpha_*\rho$
$\alpha\rho$	$\alpha\rho$	ρ	$\alpha_*\rho$	$\alpha+\rho+\alpha\rho+\alpha_*\rho$	$\mathbb{1}+\rho+\alpha\rho+\alpha_*\rho$	$\alpha_*+\rho+\alpha\rho+\alpha_*\rho$
$\alpha_*\rho$	$\alpha_*\rho$	$\alpha\rho$	ρ	$\alpha_*+\rho+\alpha\rho+\alpha_*\rho$	$\alpha+\rho+\alpha\rho+\alpha_*\rho$	$\mathbb{1}+\rho+\alpha\rho+\alpha_*\rho$

这四个范畴源自 Haagerup 子因子 [17] ，通常被称为奇异的，因为它们似乎与任何已知的有限群和／或量子群构造都没有关联。

源自 Haagerup 子因子的范畴并非只是数学上的好奇现象。在有理共形场论（RCFT）的理论中，模融合范畴（MFC）作为 RCFT 顶点算子代数的表示范畴出现 [22, 23, 11]。一个尚未解决的问题是，任意模融合范畴是否都会对应一个 RCFT。对于许多模融合范畴而言，情况似乎确实如此 [24], ，但尽管近期已有数值和解析方面的研究 [21, 47]，源自 Haagerup 子因子的范畴的 Drinfeld 中心是否也如此，至今仍无定论。该范畴的奇异性 $\mathcal{H}_3$ 引起了凝聚态物理理论领域的极大关注，研究者正在考察晶格 $\mathcal{H}_3$ 对称性[2, 27, 5, 31]。这些研究关注的核心对象是 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$。我们希望，我们的结果能最终帮助解答这一开放问题。

Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$ 是一个庞大的对象：它拥有超过 160 万个 F-符号和1400 R-符号。我们首次尝试计算中心时，使用了来自 [36], [20], 的 $\mathcal{H}_3$ 以及来自 [49], 的 F-符号，它们包含在一个次数为 8 的数域 K 中。虽然我们确实能够在 K 上计算中心，但它在那里并未分裂，而且我们无法转入分裂域，也就是说，我们未能在 C 上计算中心。我们在 [33] 中讨论了分裂的技术细节。

本文提出了一种通用算法，可用一种规范表示无重数融合范畴 $\mathcal{C}$ 的符号；该规范所需的<stlyle id='2'>最小域 $M(\mathcal{C})$，见第 4 节。借助此算法，我们成功地将 $\mathcal{H}_3$ 的符号表示在一个次数为 4 的数域上，而此前所需的次数为 8。具体而言：

$$M(\mathcal{H}_2) = \mathbb{Q}(\alpha)\ , \quad \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0\ ,$$
$$M(\mathcal{H}_3) = \mathbb{Q}(\beta)\ , \quad \beta^4 + \beta^3 - \beta^2 + \beta + 1 = 0\ .$$

借助这些简化后的符号，我们最终确实能够在一个分裂域上计算出$\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$的所有符号。我们的数据（数值形式和符号形式）均可在 TensorCategories.jl 软件包和在线代码库 [14]中自由获取。计算简单对象耗时约 100 秒，计算 F-符号耗时约 3 天。

我们在第 3 节展示如何访问这些数据。在第 4 节中，我们提供了新的算法，用于将无重数刚性融合范畴的符号表示在一种规范下，使其定义所在的最小域成为该融合范畴的最小域。我们在第 2 节首先回顾融合范畴的定义和约定、它们通过融合系统的表示方式，以及它们的中心。

致谢。 本工作是德国研究基金会（DFG）“数学中的符号工具及其应用”项目 SFB-TRR 195（项目编号：28623755）的一项成果。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 4 3. $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$ 的数据 9 4. 无重数 pivotal 融合范畴的最小域 15 参考文献 22

2. 预备知识

我们将重新回顾所使用的核心定义，更多内容请参阅 [11, 33]。

2.1. 融合范畴和融合系统。设 k 为一个域。我们不要求 k 是代数闭域。

定义 2.1。 张量范畴 是一个局部有限的 k-线性阿贝尔刚性幺半范畴，其中单位对象是简单的，且幺半积对态射双线性。一个秩为 r 的融合范畴 是一个半单张量范畴，它有有限多个两两不同构的简单对象 $X_1, ..., X_r$，并且对所有 $i = 1, ..., r$，均有 $\mathrm{End}(X_i) \cong \mathbb{k}$。

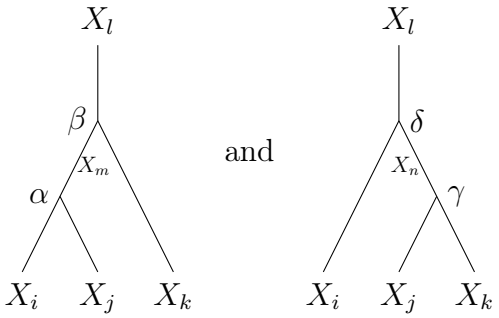
关于任意域上的张量范畴的详细内容，请参阅 [33] 或 [3]。设 $\mathcal{C}$是 k 上的一个融合范畴，其简单对象为 $X_1, ..., X_r$。我们称空间 $H^k_{i,j} := \mathrm{Hom}(X_i \otimes X_j, X_k)$ 为重数空间。这个名称是合理的，因为对于任意融合范畴，$\dim_{\mathbb{k}} H^k_{i,j}$ 就是 X_k 在 $X_i \otimes X_j$中的重数。最大值 $\max\{\dim H^k_{i,j}\}$ 称为该范畴的重数。我们为所有重数空间 $H^k_{i,j}$固定一组基。选择的自由度称为规范自由度，而选择基也称为固定规范。

重数空间的基的选取会产生这些空间的典范基

$$\mathrm{Hom}((X_i \otimes X_j) \otimes X_k, X_l), \quad \text{and} \quad \mathrm{Hom}(X_i \otimes (X_j \otimes X_k), X_l)$$

通过对所有简单对象进行分解，并将 X_m 和 X_n 处理如下：

(2.1)



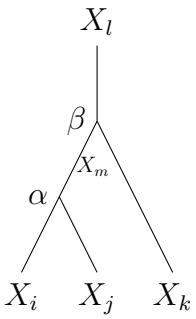
其中 $\alpha \in \mathrm{Hom}(X_i \otimes X_j,\ X_m)$、$\beta \in \mathrm{Hom}(X_m \otimes X_k,\ X_l)$、$\gamma \in \mathrm{Hom}(X_j \otimes X_k,\ X_n)$ 以及 $\mathrm{Hom}(X_i \otimes X_n,\ X_l)$。

结合子态射 $a_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ 随后由表示该诱导映射的矩阵编码

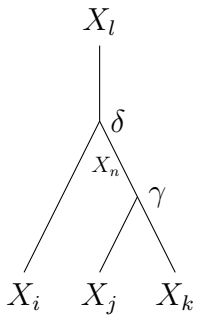
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}((X_i \otimes X_j) \otimes X_k, X_l) &\simeq \mathrm{Hom}(X_i \otimes (X_j \otimes X_k), X_l) \\ f &\mapsto f \circ a^{-1}_{X_i,X_j,X_k}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

特别地，该映射在结合子作用于基向量时所诱导的像可表示为

(2.3)



$$\circ\, a^{-1}_{X_i,X_j,X_k} = \sum_{n=1}^{r} \sum_{\substack{\gamma \in H^n_{j,k} \\ \delta \in H^l_{i,n}}} \left[F^l_{i,j,k}\right]^{(m,\beta,\alpha)}_{(n,\gamma,\delta)}$$



其中 $[F^l_{i,j,k}]^{(n,\beta,\alpha)}_{m\,\gamma\,\delta}{}_{(,,)} \in \mathbb{k}$。系数 $[F^l_{i,j,k}]^{(n,\beta,\alpha)}_{m\,\gamma\,\delta}{}_{(,,)}$称为 F-符号 $\mathcal{C}$。请注意，文献中标签顺序的约定并不一致。在所有计算中，我们都采用这一确切顺序，导出的数据也采用相同顺序。

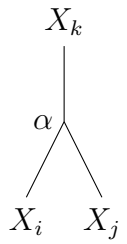
若 $\mathcal{C}$ 具有编织结构 $\sigma_{X,Y}\colon X \otimes Y \simeq Y \otimes X$，则同样的过程可得到编织关于选定基的表示，即编织在该同构下的像

$$\mathrm{Hom}(X_i \otimes X_j, X_k) \simeq \mathrm{Hom}(X_j \otimes X_i, X_k) \tag{2.4}$$

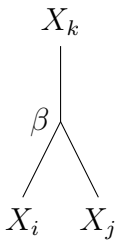
$$f \mapsto f \circ \sigma^{-1}_{X_i,X_j} \tag{2.5}$$

可以用矩阵表示为

(2.6)



$$\circ\, \sigma^{-1}_{X_i,X_j} = \sum_{\beta \in H^k_{i,j}}^{r} \left[R^k_{i,j}\right]^{\alpha}_{\beta}$$



其中，值 $\left[R^k_{i,j}\right]^{\alpha}_{\beta} \in \mathbb{k}$ 称为 R-符号。

同样，若 $\mathcal{C}$ 是带有幺半结构 $\psi_X : X \to X^{**}$ 的幺正的，则通过规范选择，可将 ψ 表示为列表 $\{P_i \in \mathbf{k} | i = 1, \ldots, r\}$，称为 $\mathcal{C}$ 的幺正系数 或 P- 符号。

在实践中，域 $\mathbf{k}$ 上的融合范畴 $\mathcal{C}$ 通常表示为融合系统，其定义如下

定义 2.2. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbf{k}$ 上的融合范畴。通过规范选择，$\mathcal{C}$ 可表示为一个融合系统，它是一个元组 $\Phi_{\mathcal{C}} = (\mathbf{L}, *, \mathbf{N}, \mathbf{F})$，其中

(1) $\mathbf{L} = \{1, \ldots, r\}$ 是 $\mathcal{C}$的简单对象同构类的一组代表（或标签）。这里，r 是该融合范畴的秩。(2) $* : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ 是一个映射，使得 $1^* = 1$ 和 $(i^*)^* = i, \forall i \in \mathbf{L}$，它来自 $\mathcal{C}$的刚性。(3) $\mathbf{N} = \left\{ N_{i,j}^k \middle| i, j, k = 1, \ldots, r \right\}$，其中 $N_{i,j}^k := \dim(H_{i,j}^k)$，是 $\mathcal{C}$的 Grothendieck 环的结构常数集合；(4) $\mathbf{F} = \left\{ [F_{i,j,k}^l]_{m\,\beta\,\alpha}^{(n,\delta,\gamma)}{}_{(,,)\in\mathbf{k}} \right\}$ 是表示结合子的 F- 符号列表。其取值取决于具体的规范选择。

如果 $\mathcal{C}$ 是无重数的，即 $\max \dim\{H_{i,j}^k\} = 1$，那么我们称 $\Phi_{\mathcal{C}}$ 为无重数融合系统。

通过添加额外的结构，我们得到刚性、球形、编织、带状和模融合系统的概念。

定义 2.3. 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbf{k}$ 上的一个融合范畴。

- 如果 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbf{k}$ 上的刚性融合范畴，那么通过选择一种规范，它可以表示为一个刚性融合系统 $(\mathbf{L}, *, \mathbf{N}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$，即一个融合系统及一组 $\{P_i \in \mathbf{k} | i = 1, \ldots, r\}$，它表示 $\mathcal{C}\bullet$ 的刚性结构。刚性融合系统的左量子维数 $\{d_a^L \in \mathbf{C} | a \in L\}$ 定义为

$$d_a^L := \frac{P_a}{[F_{a^*,a,a^*}^{a^*}]_{(1,1,1)}^{(1,1,1)}}. \tag{2.7}$$

  如果对所有 $a \in \mathbf{L}$都有 $d_a^L = d_{a^*}^L$，则称刚性结构 $\mathbf{P}$ 是球形的 。此时，该刚性融合系统称为球形融合系统，其左量子维数称为该系统的量子维数 ，记作d_a ，而非d_a^L。

- 如果 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbf{k}$ 上的编织融合范畴，那么通过选择一个规范，它可以表示为一个编织融合系统 $(\mathbf{L}, *, \mathbf{N}, \mathbf{F}, \mathbf{R})$，该系统是一个融合系统，并带有一组有限的 R- 符号 $\left\{ [R_{a,b}^c]_\beta^\alpha \in \mathbf{k} \right\}$，用于表示编织结构。

• 带状融合系统 (**L**，$*$，**N**，**F**，**P**，**R**) 是一个球面辫 braided 融合系统。• 模融合系统 (**L**，$*$，**N**，**F**，**P**，**R**) 是一个带状融合系统，其中的S-矩阵 matrix $S \in$Mat$_{r\times r}$(k) 的元素为

$$[S]_b^a = \sum_{c=1}^{r} \sum_{i=1}^{N_{a,b^*}^c} \sum_{j=1}^{N_{c,b}^a} \sum_{k=1}^{N_{b^*,a}^c} \sum_{l=1}^{N_{a,b^*}^c} d_a d_b [(F_{a,b^*,b}^a)^{-1}]_{(c,j,i)}^{(1,1,1)} [R_{b^*,a}^c]_k^i [R_{a,b^*}^c]_l^k [F_{a,b^*,b}^a]_{(1,1,1)}^{(c,j,l)}, \tag{2.8}$$

是可逆的。

在 [9], 中证明，上述每个系统都定义了一个带有相应修饰词的融合范畴，且该范畴在等价意义下唯一。

然而，由于规范自由度和融合环自同构，存在无穷多个表示同一范畴的融合系统。对于无重数融合范畴，dim $H_{i,\ j}^k \in \{0,1\}$，因此改变 $H_{i,\ j}^k$ 的基（即施加规范变换），归结为将每个 $H_{i,\ j}^k$ 先前选定的基向量乘以一个非零因子 $g_{i,\ j}^k$，该因子属于 **k** 的一个（可能是平凡的）域扩张。这在相应无重数融合系统的 F-、R-和 P-符号上诱导出如下映射 φ。

$$\begin{aligned}
\varphi :&[F_{i,j,k}^l]_n^m \mapsto \frac{g_{i,j}^m g_{m,k}^l}{g_{i,n}^l g_{j,k}^n} [F_{i,j,k}^l]_n^m, \\
\varphi :&R_{i,j}^k \mapsto \frac{g_{i,j}^k}{g_{j,i}^k} R_{i,j}^k, \\
\varphi :&P_i \mapsto \frac{g_{i^*,i}^1 g_{1,i^*}^{i^*}}{g_{i^*,1}^{i^*} g_{i,i^*}^1} P_i
\end{aligned}$$

其中，我们将 $[F_{i,j,k}^l]_{n\ 1\ 1}^{(m,1,1)}{}_{(,,)}$ 记作 $[F_{i,j,k}^l]_n^m$，并将 $[R_{i,j}^k]_1^1$ 记作 $R_{i,\ j}^k$。融合环自同构 σ 是一个映射 $\mathbf{L} \to \mathbf{L}$，满足 $N_{\sigma\ i}^{\sigma(k)}{}_{()\ \sigma(j)} = N_{i,\ j}^k$，对所有 i，j，$k \in \mathbf{L}$ 均成立。对于无重数融合范畴，自同构 σ 在 F-、R-和 P-符号上诱导出如下映射

$$\begin{aligned}
\sigma :&[F_{i,j,k}^l]_n^m \mapsto [F_{\sigma(i),\sigma(j),\sigma(k)}^{\sigma(l)}]_{\sigma(n)}^{\sigma(m)} \\
\sigma :&R_{i,j}^k \mapsto R_{\sigma(i),\sigma(j)}^{\sigma(k)} \\
\sigma :&P_i \mapsto P_{\sigma(i)}
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_3$ 范畴是一个刚性融合范畴。两个具有相同结构常数 **N** 的无重数枢轴融合系统在同构意义下定义同一个融合范畴，当且仅当它们的 F-与 P-符号由规范变换与融合环自同构的组合相关联。在第 4 节中，我们将看到可以利用这一自由度，为 $\mathcal{H}_3$ 的融合系统找到一个规范，使得其 F-与 P-符号属于一个

最小域 这对于降低求中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$ 的计算复杂度是必要的。

2.2. **融合范畴的复扩张**。TensorCategories.jl 软件包支持在多种域上处理融合范畴，范围从抽象域到嵌入于 C 的子域，再到 Q 的代数闭包（甚至还支持有限域，但这超出了本文的讨论范围）。与抽象域而非嵌入域配合使用，可以使计算更加灵活、快速。然而，对于物理学应用，则需要复融合范畴，即定义在嵌入于 C 的子域上的融合范畴。这是因为 F、 R 和 P 符号的复共轭在确定算子的幺正性，以及涉及任意子的过程所产生的概率结果方面发挥着根本作用。本节将回顾融合范畴复扩张的理论，并说明定义在抽象域上的融合范畴可以导出多个彼此不等价、定义在嵌入域上的融合范畴。

设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 k-线性范畴。k-线性 Deligne 积 $\mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathcal{D}$ 是以下范畴的完备化：其对象为 $X \boxtimes Y$，且 $\mathrm{Hom}(X \boxtimes Y, X' \boxtimes Y') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \otimes_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$。若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是张量范畴，则 $\mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathcal{D}$ 也是张量范畴。更多细节见 [11]。

定义 2.4. 设 $\mathcal{C}$ 是域 k 上的融合范畴。设 $\mathrm{k} \hookrightarrow \mathrm{K}$ 为域扩张，$\mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$ 为 K 上有限维向量空间构成的范畴。则范畴 $\mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathrm{K} := \mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$ 称为 $\mathcal{C}$ 关于 K 的标量扩张。

范畴 $\mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathrm{K}$ 是 K 上的张量范畴。若 $\mathrm{k} \hookrightarrow \mathrm{K}$ 是可分扩张，则 $\mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathrm{K}$ 也是半单的 [43, 42]。此外，若 $\mathcal{C}$ 是幺半范畴（球形），则 $\mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathrm{K}$ 也是如此。这意味着若 $\mathcal{C}$ 是融合范畴，则 $\mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathrm{K}$ [11, 43, 42] 也是融合范畴。

设 $(\mathbf{L}, *, \mathbf{N}, \mathbf{F})$ 是一个对应于复数域 C 上融合范畴 $\mathcal{C}$ 的融合系统。由于这些值构成一个有理多项式方程组的解，因此 F-符号 $\mathbf{F}$ 的值属于某个数域 $\mathrm{Q} \subset \mathrm{k} \subset \mathrm{C}$，该数域是 Q 的有限次扩张。因此，我们可以考虑融合系统 $(\mathbf{L}, *, \mathbf{N}, \mathbf{F}')$，其中 F' 是 $\mathbf{F}$ 在 k 上的限制。于是，相应的融合范畴 $\mathcal{C}'$ 定义在 k 上，并且 $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}' \boxtimes_{\Bbbk} \mathrm{C}$。

给定一个定义在抽象域 k 上的融合系统（或范畴），通过选取一个嵌入 $\mathrm{k} \hookrightarrow \mathrm{C}$ 并考虑标量扩张 $\mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathrm{C}$，可以得到一个复融合范畴。

定义 2.5。 范畴 $\mathcal{C} \boxtimes_{\Bbbk} \mathrm{C}$ 被称为 $\mathcal{C}$ 的复扩张。

注意，不同的复扩张可能导致不等价的复融合范畴。

例 2.6。 解斐波那契融合环的五边形方程的两组 F-符号在代数上无法区分。然而，这两个伽罗瓦共轭

Q(ϕ) 的嵌入，其中 $\phi^2-\phi-1=0$ 会导出不等价的复融合范畴。对于 $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，这是斐波那契范畴；对于 $\phi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，这是杨-李范畴。这两个范畴并不等价，因为前者是酉的，而后者不是。

2.3. 德　　林德中心。设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴　　.

D定义 2.7。设 $X\in\mathcal{C}$。X 上的一个半编织 是一个自然同构

$$\gamma=\{\gamma(Y)\colon X\otimes Y\to Y\otimes X\mid Y\in\mathcal{C}\} \tag{2.9}$$

使得

$$\begin{array}{ccccc} & & (Y\otimes X)\otimes Z & \xrightarrow{a_{Y,X,Z}} & Y\otimes(X\otimes Z) & & \\ & \overset{\gamma(Y)\otimes\mathrm{id}_Z}{\nearrow} & & & & \overset{\mathrm{id}_Y\otimes\gamma(Z)}{\searrow} & \\ (X\otimes Y)\otimes Z & & & & & & Y\otimes(Z\otimes X) \\ & \underset{a_{X,Y,Z}}{\searrow} & & & & \underset{a_{Y,Z,X}}{\nearrow} & \\ & & X\otimes(Y\otimes Z) & \xrightarrow{\gamma(Y\otimes Z)} & (Y\otimes Z)\otimes X & & \end{array} \tag{2.10}$$

对所有 Y，$Z\in\mathcal{C}$ 以及 $\gamma(\mathbf{1})=\mathrm{id}_X$均可交换。

定义 2.8。$\mathcal{C}$ 的 ***Drinfeld*** 中心（或简称中心）$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$由元组 $(X,\ \gamma)$ 组成，其中 $X\in\mathcal{C}$，且 γ 是一个半编织。元组 $(X,\ \gamma_X)$ 与 $(Y,\ \gamma_Y)$ 之间的态射由态射 f 给出：$X\to Y$，满足

$$\begin{array}{ccc} X\otimes Z & \xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}_Z} & Y\otimes Z \\ \downarrow{\scriptstyle\gamma_X(Z)} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_Y(Z)} \\ Z\otimes X & \xrightarrow{\mathrm{id}_Z\otimes f} & Z\otimes Y \end{array} \tag{2.11}$$

对所有 $Z\in\mathcal{C}$均可交换。

3. The data of $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$

本节将说明如何获得我们计算出的全部数据。我们假设读者可以使用一台计算机，并已按照 [33, 32]中的说明安装最新版本的 Julia 以及 Oscar 和 TensorCategories.jl 软件包。在 Julia 中启动后，第一步是按如下方式加载软件包

朱莉娅

```
julia> using TensorCategories, Oscar
```

中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$ 范畴可按如下方式访问。

julia

```
julia> Z = haagerup_H3_center();
```

请注意，由于该范畴包含海量数据，加载它大约需要 30 分钟。以这种方式获得的 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$ 范畴是一种数据结构，可通过专用函数访问其属性，这些函数列于表 2 中。相关说明见软件包文档 [32]。

方法	返回值
`haagerup_H3()`	融合范畴 $\mathcal{H}_3$
`haagerup_H3_center()`	Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$
`multiplication_table(C::Category)`	范畴的融合环的融合矩阵
`smatrix(C::Category)`	范畴的S-矩阵
`tmatrix(C::Category)`	范畴的T-矩阵
`fpdim(C::Category)`	范畴的 Frobenius–Perron 维数
`simples(C::Category)`	范畴的简单对象
`F_symbols(C::Category)`	F-符号的范畴
`R_symbols(C::Category)`	R-符号的范畴
`numeric_F_symbols(C::SixJCategory)`	F-符号作为复数
`numeric_R_symbols(C::SixJCategory)`	R-符号作为复数

表 2. Tensor- Categories.jl 软件包中获取 $\mathcal{H}_3$ 和 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$ 数据的函数

以下小节包含其用法示例和预期结果。

3.1. 融合环。 Frobenius–Perron 维数可按如下方式获得

julia

```
julia> fpd = fpdim(Z)
{a2: 1276.27}
julia> minpoly(fpd)
x^2 - 1287*x + 13689
```

由此可得

$$D_{FP}(\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)) = \frac{117}{2}\left(3\sqrt{13}+11\right). \tag{3.1}$$

要获取结构常数并将其赋值给变量 `mt`，可以使用以下代码。

julia

```
julia> mt = multiplication_table(Z);
```

变量 `mt` 是一个 $12 \times 12 \times 12$ 数组，其值为融合环的结构常数。代码 `mt[`n`,:,:]` 返回第 n 个融合矩阵，即融合环左正则表示的第 n 个矩阵。例如，要获取第 4 个融合矩阵，可以执行以下代码。

julia

```
julia> mt[4,:,:]
12×12 Matrix{Int64}:
 0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0
 0  1  1  2  1  1  1  1  1  1  1  1
 0  1  1  1  2  2  1  1  1  1  1  1
 1  2  1  2  1  1  1  1  1  1  1  1
 0  1  2  1  1  2  1  1  1  1  1  1
 0  1  2  1  2  1  1  1  1  1  1  1
 0  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
 0  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
 0  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
 0  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
 0  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
 0  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
```

3.2. F 符号、R 符号和 P 符号。 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$ 范畴共有 1,630 个329 F-符号和 1 个401 R-符号。这些符号存储在字典中，字典的键是由整数组成的元组（对应于符号的标签），值则是符号的取值。可以按如下方式获取精确值

朱莉娅

```
julia> fs = F_symbols(Z)
Dict{Vector{Int64}, AbsSimpleNumFieldElem} with 1630329 entries:
[4, 12, 9, 5, 7, 1, 1, 6, 1, 1]   => 611786//765375*_a^47 - 3134042//331662...
[3, 9, 3, 5, 7, 1, 1, 7, 1, 1]    => -962781102528//1842313687825* a^47 + 1..._
[9, 2, 12, 4, 10, 1, 1, 2, 1, 1]  => 14209426039//60020962625* a^47 - 95649..._..
⋮                                 => ⋮
```

```
julia> rs = R_symbols(Z)
Dict{Vector{Int64}, AbsSimpleNumFieldElem} with 1401 entries:
[7, 3, 4, 1, 1]    => -10068//86125*_a^47 - 1234//17225*_a^46 + 341//86125*_...
[11, 12, 3, 1, 1]  => -197//1625* a^47 - 10457//1625* a^34 - 231139//1625* a...
_                   _                    _
[9, 5, 5, 1, 1]    => -98//1625* a^41 - 5198//1625* a^28 - 114741//1625* a^1...
_                   _                    _                  => ⋮
julia> ps = P_symbols(Z)
Dict{Vector{Int64}, Nemo.AbsSimpleNumFieldElem} with 12 entries[3]  => 1
[7]  => 1[4]  => 1[2]  => 1[10] => 1[5]  => 1[12] => 1[8]  => 1[1]  => 1[6]  => 1
[11] => 1[9]  => 1
```

请注意，这些条目并未按键的字典序排序。这些精确值是在数域 Q(x) 上表示的，该数域可按如下方式得到

julia

```
julia> base_ring(Z)
Number field with defining polynomial x^48 - x^47 + 2*x^46 - 2*x^45 + 2*x^44 - x^43 - x
    ^42 + 4*x^41 - 8*x^40 + 12*x^39 - 15*x^38 + 15*x^37 - 10*x^36 + 51*x^35 - 31*x^34 +
    57*x^33 - 27*x^32 + 2*x^31 + 59*x^30 - 141*x^29 + 229*x^28 - 313*x^27 + 342*x^26 -
    285*x^25 + 85*x^24 + 285*x^23 + 342*x^22 + 313*x^21 + 229*x^20 + 141*x^19 + 59*x^18
    - 2*x^17 - 27*x^16 - 57*x^15 - 31*x^14 - 51*x^13 - 10*x^12 - 15*x^11 - 15*x^10 - 12*
    x^9 - 8*x^8 - 4*x^7 - x^6 + x^5 + 2*x^4 + 2*x^3 + 2*x^2 + x + 1
 rational field
```

域 Q(x) 满足 Q(x) $\cong M(\mathcal{H}_3)(\xi_{39})$，其中我们采用约定 $\xi_n := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$，即 ξ_{39} 是一个本原 39 次单位根。特别地，该域是 $\mathcal{H}_3$ 所存储的融合系统的最小域的分圆扩张。虽然可能存在 Q(x) 的子域，使得 F-符号和 R-符号可在其中定义，但在

使用分圆扩张有利于提高计算速度。

在物理学应用中，通常需要 F-符号和 R-符号的浮点近似。可按以下方式获得：

julia

```
julia> nfs = numeric_F_symbols(Z, precision = 8) # precision is in bits
Dict{Vector{Int64}, AcbFieldElem} with 1630329 entries:
[4, 12, 9, 5, 7, 1, 1, 6, 1, 1]   => [-0.049 +/- 6.64e-4] + [0.028 +/- 3.23e-4]*im
[3, 9, 3, 5, 7, 1, 1, 7, 1, 1]    => [-0.1775 +/- 5.56e-5] + [-0.4611 +/- 4.05e-5]*im
[9, 2, 12, 4, 10, 1, 1, 2, 1, 1]  => [-0.11520 +/- 7.59e-6] + [-0.7539 +/- 3.68e-5]*im
⋮                                  => ⋮


julia> nrs = numeric_R_symbols(Z, precision = 8)
Dict{Vector{Int64}, AcbFieldElem} with 1401 entries:
[7, 3, 4, 1, 1]    => [0.7091 +/- 6.75e-5] + [0.7050 +/- 7.82e-5]*im
[11, 12, 3, 1, 1]  => [-0.35 +/- 7.07e-3] + [-0.93 +/- 7.17e-3]*im
[9, 5, 5, 1, 1]    => [-0.885 +/- 6.32e-4] + [0.465 +/- 4.39e-4]*im
⋮                  => ⋮
```

字典中的值是任意精度复数球。通过计算以下内容等方式，可以将这些值转换为原生浮点数，

朱莉娅

```
julia> float_rs = Dict(key => convert(ComplexF64, val) for (key, val) in nrs)
Dict{Vector{Int64}, ComplexF64} with 1401 entries:
[7, 3, 4, 1, 1]    => 0.709142+0.705066im
[11, 12, 3, 1, 1]  => -0.354605-0.935016im
⋮                                  => ⋮
```

注记 3.1。 F符号和 R符号并非采用酉规范。这是因为，为了使计算保持在合理范围内，必须为 F符号选择一个较小的域。酉 F符号需要一个次数为 16 [36, 20] 或 8 [51] 的域，因此，中心需要定义在次数至少为192或96的域上。这会使目前的计算无法进行。

3.3. 模数据。 $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_3)$的 S矩阵最初是在 [25]中计算的，并在[12]中化简。我们能够进一步化简 S矩阵，得到

$$
\begin{pmatrix}
1 & d^2 & 1+d^2 & 1+d^2 & 1+d^2 & 1+d^2 & 3d & 3d & 3d & 3d & 3d & 3d \\
d^2 & 1 & 1+d^2 & 1+d^2 & 1+d^2 & 1+d^2 & -3d & -3d & -3d & -3d & -3d & -3d \\
1+d^2 & 1+d^2 & 2+2d^2 & -1-d^2 & -1-d^2 & -1-d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1+d^2 & 1+d^2 & -1-d^2 & 2+2d^2 & -1-d^2 & -1-d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1+d^2 & 1+d^2 & -1-d^2 & -1-d^2 & -1-d^2 & 2+2d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1+d^2 & 1+d^2 & -1-d^2 & -1-d^2 & 2+2d^2 & -1-d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3d & -3d & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
3d & -3d & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 \\
3d & -3d & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_2 & a_1 \\
3d & -3d & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_6 & a_5 & a_1 & a_2 \\
3d & -3d & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\
3d & -3d & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4
\end{pmatrix}. \tag{3.2}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{3+\sqrt{13}}{2} = -\xi_{39}^{23} - \xi_{39}^{17} - \xi_{39}^{14} + \xi_{39}^{12} - \xi_{39}^{10} + \xi_{39}^{9} - \xi_{39}^{4} + \xi_{39}^{3} - \xi_{39} + 2 \\
a_1 &= 3\xi_{39}^{23} - 6\xi_{39}^{21} + 3\xi_{39}^{20} - 6\xi_{39}^{18} + 6\xi_{39}^{17} + 3\xi_{39}^{14} - 3\xi_{39}^{12} + 3\xi_{39}^{10} - 6\xi_{39}^{9} + 3\xi_{39}^{7} - 3\xi_{39}^{6} \\
&\quad + 6\xi_{39}^{4} - 3\xi_{39}^{3} + 3\xi_{39} - 6 \\
a_2 &= 3\xi_{39}^{23} + 6\xi_{39}^{20} - 3\xi_{39}^{14} + 3\xi_{39}^{12} + 3\xi_{39}^{10} + 6\xi_{39}^{7} - 6\xi_{39}^{6} - 3\xi_{39}^{3} - 3\xi_{39} + 3 \\
a_3 &= -3\xi_{39}^{23} - 6\xi_{39}^{21} - 6\xi_{39}^{18} + 3\xi_{39}^{17} - 3\xi_{39}^{10} - 3\xi_{39}^{9} + 3\xi_{39}^{4} + 3\xi_{39}^{3} + 3 \\
a_4 &= -3\xi_{39}^{23} + 3\xi_{39}^{21} - 6\xi_{39}^{20} + 3\xi_{39}^{18} - 3\xi_{39}^{17} - 3\xi_{39}^{10} + 3\xi_{39}^{9} - 6\xi_{39}^{7} + 6\xi_{39}^{6} - 3\xi_{39}^{4} + 3\xi_{39}^{3} \\
a_5 &= 3\xi_{39}^{23} + 3\xi_{39}^{21} + 3\xi_{39}^{20} + 3\xi_{39}^{18} + 3\xi_{39}^{10} + 3\xi_{39}^{7} - 3\xi_{39}^{6} - 3\xi_{39}^{3} - 3 \\
a_6 &= -6\xi_{39}^{23} + 6\xi_{39}^{21} - 6\xi_{39}^{20} + 6\xi_{39}^{18} - 9\xi_{39}^{17} - 3\xi_{39}^{14} + 3\xi_{39}^{12} - 6\xi_{39}^{10} + 9\xi_{39}^{9} - 6\xi_{39}^{7} + 6\xi_{39}^{6} \\
&\quad - 9\xi_{39}^{4} + 6\xi_{39}^{3} - 3\xi_{39} + 9
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

而 T-矩阵的对角线为

$$
(1, 1, 1, 1, \xi_3^{-1}, \xi_3, \xi_{13}^{-2}, \xi_{13}^{-6}, \xi_{13}^{2}, \xi_{13}^{-5}, \xi_{13}^{6}, \xi_{13}^{5}). \tag{3.4}
$$

julia

```
julia> Float64.(real.(numeric_smatrix(Z, precision = 8)))
12×12 Matrix{Float64}:
  1.0     10.9082   11.9082   11.9082   11.9082  ...   9.9082     9.9082     9.9082
 10.9082   1.0      11.9082   11.9082   11.9082       -9.9082    -9.9082    -9.9082
```

```
 11.9082  11.9082   23.8164  -11.9082  -11.9082        0.0        0.0        0.0
 11.9082  11.9082  -11.9082   23.8164  -11.9082        0.0        0.0        0.0
 11.9082  11.9082  -11.9082  -11.9082  -11.9082        0.0        0.0        0.0
 11.9082  11.9082  -11.9082  -11.9082   23.8164  ...   0.0        0.0        0.0
  9.9082  -9.9082    0.0       0.0       0.0         -17.5459   -11.2568    14.832
  9.9082  -9.9082    0.0       0.0       0.0           7.02686   14.832     19.2402
  9.9082  -9.9082    0.0       0.0       0.0          14.832     -2.38843  -17.5459
  9.9082  -9.9082    0.0       0.0       0.0          -2.38843   19.2402   -11.2568
  9.9082  -9.9082    0.0       0.0       0.0     ...  19.2402   -17.5459     7.02686
  9.9082  -9.9082    0.0       0.0       0.0         -11.2568     7.02686   -2.38843

 julia> numeric_twists(Z, precision = 16)
 12-element Vector{AcbFieldElem}:
  1.00000
  1.00000
  1.00000
  1.00000
  [-0.50000 +/- 7.63e-6] + [-0.86602 +/- 7.84e-6]*im
  [-0.500000 +/- 6e-11] + [0.86602 +/- 7.84e-6]*im
  [0.568064746 +/- 9.13e-10] + [-0.822983866 +/- 8.40e-10]*im
  [-0.970941817 +/- 5.06e-10] + [-0.2393156643 +/- 5.06e-11]*im
  [0.568064747 +/- 4.37e-10] + [0.822983866 +/- 2.58e-10]*im
  [-0.748510748 +/- 3.82e-10] + [-0.663122658 +/- 3.86e-10]*im
  [-0.97094 +/- 8.00e-6] + [0.23932 +/- 6.88e-6]*im
  [-0.748510748 +/- 2.65e-10] + [0.663122658 +/- 2.69e-10]*im
```

3.4. **数据的正确性**。我们得到的乘法表、遗忘函子和 S 矩阵与 $[25, 19]$ 中的结果相符。此外，利用 TensorCategories.jl 软件包，已证明 F 符号和 R 符号满足五边形方程和六边形方程。

4. 无　　重数自由刚性融合范畴的最小域

如 2.1 节所述，枢轴（编织）融合范畴的 F-、（R-）和 P-符号的取值，以及它们所属的域，都取决于对重数空间$H_{i,\ j}^{k}$所作的基选择（也称为规范选择）。使用符号代数的算法的性能很大程度上取决于输入所表示的域。因此，寻找一种规范选择，使 F-、R-和 P-符号的取值落在一个良好的域中，是很有意义的。理想情况下，我们希望数据属于某个分圆域。然而，事实证明，对于 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_3$ [35]，这是不可能的。因此，问题就变成了

数据所属的域可以在多大程度上得到简化。事实证明，对于定义在 Q 的域扩张上的无重数融合系统，存在最小域这一概念。由于该 $\mathcal{H}_3$ 范畴不是编织的，我们只定义刚性融合范畴的最小域概念；将其推广到刚性辫融合范畴则是显而易见的。

在定义最小域并介绍构造它的算法之前，我们先引入一些记号和若干定义。我们将区分形式符号及其取值。设 Φ 是定义在 $\mathbf{k} \supset \mathbf{Q}$ 上的刚性融合系统。形式 F-符号、 P-符号和规范符号被视为函数 $F\colon \ \mathbf{L}^6 \to \mathbf{k}$、 $P\colon \ \mathbf{L} \to \mathbf{k}$ 以及$g\colon \ \mathbf{L}^3 \to \mathbf{k}^\times$ ，其取值无关紧要。我们分别用 L_F^Φ、 L_P^Φ 和 L_g^Φ 表示无重数刚性融合系统 Φ 的形式 F-符号、P-符号和规范符号列表； Φ 的形式 F-符号、 P-符号和规范符号构成的有理函数环记为 $\mathcal{L}_\Phi = \mathbf{k}(L_F^\Phi,\ L_P^\Phi,\ L_g^\Phi)$。注意，该环仅取决于 $\mathbf{N}$ ，与符号的任何取值无关。我们用符号 γ 表示一个形式规范变换，它按照方程 (2.9) 变换形式 F-和 P-符号，其中 $g_{i,\ j}^k$ 则是形式规范符号。

给定一个取值于 $\Gamma = \left\{g_{ij}^k \in \mathbf{C}\backslash\{0\}\right\}$ 的规范变换 φ ，我们定义求值同态

- $\Phi\colon \ \mathcal{L}_\Phi \to \mathcal{L}_\Phi\colon \ \rho \mapsto \Phi(\rho)$ 为如下映射：将形式 F-符号和 P-符号的所有出现都取值为它们在 Φ 中的值；而 $\Gamma\colon \mathcal{L}_\Phi \to \mathcal{L}_\Phi\colon \ \rho \mapsto \Gamma(\rho)$ 为如下映射：将规范符号的所有出现都取值为它们在 Γ 中的值。

要为 F-符号和 P-符号找到一个具有最小域的规范，关键在于为 Φ [50] 构造一种所谓的 规范分裂基 。为了定义这样的基，我们需要区分 F-符号和 P-符号的有理表达式实现规范不变的不同方式。

定义 4.1。 设 Φ 是一个无重数枢轴融合系统。称元素 $\rho \in \mathcal{L}_\Phi$ 为

- 法律意义上的规范不变 当且仅当它仅包含形式的 F-和 P-符号，且 $\gamma(\rho) = \rho$。 事实上规范不变 当且仅当它仅包含形式的 F-和 P-符号， ρ 的分子均不为 0，且 $\Phi(\gamma(\rho)) = \Phi(\rho)$。

请注意，要确定 $\rho \in \mathcal{L}_\Phi$ 是否为法律意义上的规范不变，无需知道 F-符号或 P-符号的取值。只需知道 $\mathbf{N}$ 即可判断。然而，要确定 ρ 是否为事实上的规范不变，可能还需要有关 F-符号和 P-符号取值的额外信息。具体需要哪些信息取决于 ρ 的形式。例如，若 ρ 是形式 F-符号和 P-符号的有理单项式，我们只需知道哪些 F-符号的取值为 0，因为 P-符号始终非零。

于是，无重数枢轴融合系统 Φ 的规范分裂基可定义如下。

定义 4.2。设 $\mathcal{M}_\Phi \subset \mathcal{L}_\Phi$ 为形式 $F-$、$P-$以及规范符号所构成的首一有理单项式（或词）的（自由阿贝尔）子群。Φ 的规范分裂基（GSB）是一个元组（I，D），其中 $I=(\iota_1,\ldots\ldots,\iota_m)\in\mathcal{M}_\Phi^m$，$D=(\delta_1,\ldots\ldots,\delta_n)\in\mathcal{M}_\Phi^n$，其中 $m,\ n\in\mathbf{N}$ 满足$m+n=|L_F^\Phi|+|L_P^\Phi|$和 $n\leq|\mathbf{N}|$，并且满足以下性质。

（1）I中的每个词 ρ只包含形式上的 $F-$和 $P-$符号，并且 $\Phi(\rho)$有定义。（2）I 中的每个词都是事实上的规范不变的。（3）D 中的每个词都依赖规范；此外，对于任意 $n-$元组 $w\in(\mathbf{k}^\times)^n$，存在一个变量为 Γ 的规范变换，使得 $\Phi(\Gamma(\gamma(D)))=w$。（4）对于任意词 $\rho\in\mathcal{M}_\Phi$，存在唯一的整数 $a_1,\ldots\ldots,a_m,\ b_1,\ldots\ldots,\ b_n$，使得

$$\rho=\prod_{i=1}^{m}\iota_i^{a_i}\prod_{i=1}^{n}\delta_i^{b_i} \tag{4.1}$$

注记 4.3。“基”一词源自性质 (4)：该性质表明，任意由形式上的 F- 和 P- 符号组成的词，都可以唯一地写成 I 和 D 中元素的幂的乘积。

注记 4.4。在 [18]以及 [9], 的附录中，讨论了一种利用规范不变集合来检验两组 F-符号是否规范等价的方法。该集合与本文中的集合 I 相同。尽管我们确信 [18] 的作者了解规范分裂基的所有性质，但他们从未为其定义一个术语。

例 4.5。设 $\Phi=[\mathrm{Fib}]_{1,1,1}$（也记作 AnyonWiki [51] 上的 $\mathrm{FC}^{2,1,0}_{1,1,1,1}$）为具有 $\mathbf{L}=\{1,2\}$ 且融合规则如下的融合系统

$$1\otimes1\cong1, \tag{4.2}$$

$$1\otimes2\cong2\otimes1\cong2, \tag{4.3}$$

$$2\otimes2\cong1\oplus2. \tag{4.4}$$

以下是 Φ 的规范分拆基

$$I=\Bigg([F^1_{1,1,1}]^1_1,[F^2_{1,2,1}]^2_2,P_1,[F^2_{1,1,2}]^1_2[F^1_{1,2,2}]^2_1,[F^2_{2,1,1}]^2_1[F^1_{2,2,1}]^1_2,\frac{[F^1_{2,1,2}]^2_2}{[F^2_{1,1,2}]^1_2[F^2_{2,1,1}]^2_1},$$
$$[F^2_{1,1,2}]^1_2[F^2_{2,1,1}]^2_1\,[F^2_{2,2,2}]^1_1,P_2[F^2_{1,1,2}]^1_2[F^2_{2,1,1}]^2_1\Bigg),$$
$$D=\left([F^2_{1,1,2}]^1_2,[F^2_{2,1,1}]^2_1\right).$$

I 的任意元素都是规范不变的，而通过选择合适的规范变换， D 的每个元素都可以设为任意非零值。此外， Φ 的任意 F 符号和 P 符号，都可以唯一地写成 I 和 D 中元素的幂的乘积。

我们有如下有用的结果

引理 4.6。 任意无重数枢轴融合系统都有无限多个规范分裂基。

在证明引理 4.6 之前，我们将介绍一个有用的定义和引理。考虑自由阿贝尔群 $\mathcal{M}_\Phi^{|L_{FP}^\Phi|}$，它由取 $\mathcal{M}_\Phi$ 的 $|L_{FP}^\Phi|$ 份的直积得到。所有形式 F 和 P 符号的列表 L_{FP}^Φ（长度为 $|L_{FP}^\Phi|$）随后可视为 $\mathcal{M}_\Phi^{|L_{FP}^\Phi|}$ 的一个元素，而形式 F 和 P 符号的 m 个词则可利用如下乘积生成

定义 4.7。 设 $\Phi = (\mathbf{L}, *, \mathbf{N}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ 是一个无重数枢轴融合系统，且 $m \in \mathbf{N}$ 和 $n := |L_{FP}^\Phi|$。我们定义

$$
\begin{aligned}
-\uparrow- \;:\; & \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{M}_\Phi^{|L_{FP}^\Phi|} \to \mathcal{M}_\Phi^m, \\
& [M\uparrow v]^i = \prod_{j=1}^{n} \left([v]^j\right)^{[M]_j^i},
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

其中， $[v]^j$ 是 v 的第 j 个元素，而 $[M]_j^i$ 是 M 的第 (i,j) 个矩阵系数。

备注 4.8。 如果将阿贝尔群 $\mathcal{M}_\Phi^{|L_{FP}^\Phi|}$ 中元素的乘法写成加法形式，我们就可以直接使用通常的矩阵乘积记号。为避免混淆，我们没有这样做。

引理 4.9。 若 $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ $B \in \mathrm{Mat}_{n\times l}(\mathbb{Z})$ 则 $A\uparrow(B\uparrow v) = (AB)\uparrow v$。特别地， $\uparrow$ 将 $\mathcal{M}_\Phi^{|L_{FP}^\Phi|}$ 变成一个左 $\mathrm{Mat}_{|L_{FP}^\Phi|\times|L_{FP}^\Phi|}(\mathbb{Z})$-模。

现在我们将证明引理 4.6。虽然可以借助由形式上的 F- 和 P 符号生成的自由群语言给出一个简短证明，但我们决定通过构造 GSB 给出一个更长、更明确的证明。这样做的优点是容易将其转化为算法，例如 Anyonica 使用的算法。

证明。 设 $\Phi = (\mathbf{L}, *, \mathbf{N}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ 是定义在 $\mathsf{k} \supset \mathsf{Q}$ 上的无重数枢轴融合系统。令 n_z 为 Φ 中取值为 0 的 F-符号的数量。令 L 为去掉取值为 0 的形式 F-符号后的 Φ，令 $k = |L_{FP}^\Phi| - n_z$ 为其长度，并令 $l = |L_F^\Phi| - n_z$ 为取值不为 0 的形式 F-符号的数量。令 γ 为一个形式规范变换

并定义

$$G_i := \begin{cases} \frac{g^{e_i}_{a_i,b_i} g^{d_i}_{e_i,c_i}}{g^{d_i}_{a_i,f_i} g^{f_i}_{b_i,c_i}} & \text{if} \quad i \le l \\ \frac{g^{1}_{a_i^*,a_i} g^{a_i^*}_{1,a_i^*}}{g^{a_i^*}_{a_i^*,1} g^{1}_{a_i,a_i^*}} & \text{if} \quad i > l \end{cases} \tag{4.6}$$

作为规范变换 $[L]^i \mapsto \gamma([L]^i) = G_i[L]^i$ 中出现的整体乘法规范因子 F，形式上任意由非零 P-符号和 $[L]^1$、.....、$[L]^k$ 组成的词都可以写成

$$\rho_p = p \uparrow L \tag{4.7}$$

$$= ([L]^1)^{[p]_1}([L]^2)^{[p]_2} \cdots ([L]^k)^{[p]_k}, \quad [p]_i \in \mathbb{Z}, \tag{4.8}$$

其中我们将 $p \in \mathbf{Mat}_{1\times k}(\mathbf{Z})$ 视为一个整数行向量。为了使 ρ_p 事实上的规范不变，我们需要满足

$$\Phi(\gamma(\rho_p)) = \Phi(\rho_p) \tag{4.9}$$

$$\Leftrightarrow \Phi((G_1[L]^1)^{[p]_1} \cdots (G_k[L]^k)^{[p]_k}) = \Phi(([L]^1)^{[p]_1}([L]^2)^{[p]_2} \cdots ([L]^k)^{[p]_k}) \tag{4.10}$$

$$\Leftrightarrow \quad (G_1)^{[p]_1} \cdots (G_k)^{[p]_k} = 1, \tag{4.11}$$

$$\tag{4.12}$$

其中，方程 (4.10) 和 (4.11) 是等价的，因为 L 中的任何元素取值都不为 0。展开后，G_i 方程 (4.11) 等价于

$$\left(\frac{g^{e_1}_{a_1,b_1} g^{d_1}_{e_1,c_1}}{g^{d_1}_{a_1,f_1} g^{f_1}_{b_1,c_1}}\right)^{[p]_1} \cdots \left(\frac{g^{e_l}_{a_l,b_l} g^{d_l}_{e_l,c_l}}{g^{d_l}_{a_l,f_l} g^{f_l}_{b_l,c_l}}\right)^{[p]_l} \left(\frac{g^{1}_{a^*_{l+1},a_{l+1}} g^{a^*_{l+1}}_{1,a^*_{l+1}}}{g^{a^*_{l+1}}_{a^*_{l+1},1} g^{1}_{a_{l+1},a^*_{l+1}}}\right)^{[p]_{l+1}} \cdots \left(\frac{g^{1}_{a^*_k,a_k} g^{a^*_k}_{1,a^*_k}}{g^{a^*_k}_{a^*_k,1} g^{1}_{a_k,a^*_k}}\right)^{[p]_k} = 1. \tag{4.13}$$

现在假设 (a,b,c) 上的 $g^c_{a,b}$ 按字典序排列在一个长度为 h 的列表中，并将列表中出现的第 j 个变量记为 g_j。在方程 (4.13) 中收集因子 g_j，可得

$$g_1^{\sum_{i_1}[M]^1_{i_1}[p]_{i_1}} g_2^{\sum_{i_2}[M]^2_{i_2}[p]_{i_2}} \cdots g_h^{\sum_{i_h}[M]^l_{i_h}[p]_{i_h}} = 1, \tag{4.14}$$

其中 M 是一个整数系数矩阵。方程 (4.14) 只有在每个 g_i 的每个指数恒等于零时才成立，即

$$M.p^T = \mathbb{0}. \tag{4.15}$$

使得 ρ_p 规范不变的向量 p 所构成的空间，与 M的核同构；而使得 ρ_q 依赖规范的向量 q 所张成的空间，与 M的余核同构。M 的核和余核可以通过史密斯分解构造。事实上，若我们写作 $M = U.S.V$，其中 U，V是可逆整数矩阵，且 S是对角矩阵，则

M的 dim (ker) 等于 S的零列数，而 ker M由 V^{-1}的最后 m列张成。 V^{-1} 的前 $k-m=:$ n列张成 coKer M。注意，任意整数矩阵都有史密斯分解。

令 $A=(V^{-1})^T \oplus \mathbb{1}_{nZ\times nZ}$。令 K 为 L 与任意顺序排列的形式 F-符号（其取值为 0 ）的串接。特别地， $|K|=|L_{FP}^{\Phi}|$ 和 K 中最后的 n_z 个元素是取值为 0 的形式 F-符号。令 $v=A\uparrow K$, $D\in\mathcal{M}_{\Phi}^{n}$ 为由 v 的前 n 个元素组成的向量，令 $I\in\mathcal{M}_{\Phi}^{|\mathbf{F}|-n}$ 为由 v 中其余元素组成的向量。$(I,\ D)$ 因而具有以下性质。

(1) I 和 D 中的每个字 ρ 都是由 L_{FP}^{Φ} 中的形式 F-符号和 P-符号构成的字。此外，由于 I 和 D 都不含取值为 0 的 F-符号的负次幂，因此对 I 和 D 中的每个字 ρ， $\Phi(\rho)$ 都有定义。

(2) 根据构造， I 中的每个元素都是事实上的规范不变的。
(3) 根据构造， D 中的每个元素都依赖规范。此外，令 $w\in(\mathbf{k}^{\times})^n$，则

$$\Phi(\Gamma(\gamma(D)))=w \tag{4.16}$$

对于变量 $\left\{g_{ij}^{k}\in\mathbf{C}\backslash\{0\}\right\}$，至少存在一个解。事实上，令 $B=(V^{-1})^T$, G为系数为 $[G]^i=G_i$ 的向量， g 为系数为 $[g]^i=g_i$ 的向量，则对于所有 $j=1,\ \ldots,\ n$

$$[\Phi(\Gamma(\gamma(D)))]^j = \Phi(\Gamma(\gamma([A\uparrow K]^j)))=\Phi(\Gamma(\gamma([B\uparrow L]^j))) \tag{4.17}$$

$$= \prod_{i=1}^{|L|}\Phi(\Gamma(\gamma([L]^i)))^{[B]_i^j}=\prod_{i=1}^{|L|}\Gamma([G]^i)^{[B]_i^j}\prod_{i=1}^{|L|}\Phi([L]^i)^{[B]_i^j} \tag{4.18}$$

$$= [B\uparrow\Gamma(G)]^j[B\uparrow\Phi(L)]^j. \tag{4.19}$$

由于

$$[B\uparrow\Gamma(G)]^j=[B\uparrow M^T\uparrow\Gamma(g)]^j=[(BM^T)\uparrow\Gamma(g)]^j=[(US)^T\uparrow\Gamma(g)]^j, \tag{4.20}$$

我们有

$$\Phi(\Gamma(\gamma(D))) = w \tag{4.21}$$

$$\Leftrightarrow [(US)^T\uparrow\Gamma(g)]^j = \frac{[w]^j}{[B\uparrow\Phi(L)]^j}=:[X]^j,\quad j=1,\ldots,n \tag{4.22}$$

这里我们用到了 L 中没有任何元素取值为 0 这一事实。令 C 为元素为 $[C]_j^i=[US]_i^j$ 的 $n\times h$ 矩阵，则 $[(US)^T\uparrow\Gamma(g)]^j=[C\uparrow\Gamma(g)]^j$ 对于 ~ ~j = 1、.....、 n 成立。由于 C 的秩为 n，存在一个 C 使得 $CC=\mathbb{1}_{n\times n}$，并且我们

˜发现，对于这样的 C

$$[\Gamma(g)]^i = [\tilde{C} \uparrow X]^i, \quad i = 1, \dots h \tag{4.23}$$

$$\Rightarrow \Phi(\Gamma(\gamma(D))) = w \tag{4.24}$$

(4) 任意字 ρ 都具有如下形式： $\rho = p \uparrow L_F$ ，其中 p唯一。由于 A 可逆 $D \oplus I = v = A \uparrow L_F$。根据引理 4.9 $L_F = A^{-1} \uparrow (D \oplus I)$，因此$\rho = (p.A^{-1}) \uparrow (D \oplus I)$，其形式如方程 (4.1) 所示。

在 [26], 中，证明了存在无限多个整数变换矩阵U， V 它们会得到相同的对角矩阵 S ，因此存在无限多个不同的规范分裂基。□

定理 4.10。设 Φ 是定义在 $\mathbb{k} \supset \mathbb{Q}$ 上的无重数枢轴融合系统，且 (I, D) 是 Φ 的一个 *GSB*。设 L^{Φ}_{FP} 是列表 L^{Φ}_{F} 和 L^{Φ}_{P} 的串接，且 $M(I) = \mathbb{Q}(\Phi(I))$ 是 $\mathbb{Q}$ 的最小域扩张，包含 $\Phi(I)$ 的所有取值。则

(1) 存在一种规范变换，使得 $\Phi(\Gamma(\gamma(s))) \in M(I)$ 对所有 $s \in L^{\Phi}_{FP}$ 都成立；也就是说，存在一种规范，使所有 F-符号和 P-符号都属于域 $M(I)$。*(2)* $M(I)$ 与 *GSB* 的选择无关；也就是说，对于 Φ 的任意两组 *GSB*（I_1, D_1）和（I_2, D_2），都有 $M(I_1) = M(I_2)$。*(3)* 对于任意规范变换，我们有 $M(I) \subseteq Q(\Phi(\Gamma(\gamma(L^{\Phi}_{FP}))))$。换言之，对于任意规范， F-符号和 P-符号的取值所属的域都必须包含 $M(I)$ 作为子域。*(4)* $M(I)$ 在融合环自同构的作用下保持不变；也就是说，对于任意融合系统 Φ'，若其符号由对 Φ 应用融合环自同构得到，则有 $Q(\Phi'(I)) = Q(\Phi(I)) = M(I)$。特别地， $M(I)$ 是由 Φ 表示的融合范畴的不变量。

定义 4.11. 定理 4.10 中的域 $M(I)$ 称为 Φ （及其融合范畴 $\mathcal{C}$）的最小域。我们将其记作 $M(\Phi)$ 或 $M(\mathcal{C})$。如果 $M(\Phi)$ 包含于某个分圆域中，那么包含 $M(\Phi)$ 的次数最低的分圆域称为 Φ 的最小圆分域。 $M(\mathcal{C})$

注记 4.12。请注意，引理 4.6 的证明中使用的矩阵 A 可用于将一组 F–和 P–符号进行规范变换，使其变为只需最小域即可表示这些符号的规范。事实上，给定刚性融合系统 Φ的一组规范分裂基 (I, D)，我们可以将 D 中的每个元素都设为 1，进而得到新的 F–和 P–符号值如下。设 n_D为 D的长度， n_I为 I的长度，则 $L'_{FP} = \Phi(A^{-1} \uparrow v)$，其中 $[v]^i = 1$对 $i = 1, \dots, n_D$成立，且 $[v]^i = [I]^i$对$i = n_D + 1, \dots, n_D + n_I$成立，由此得到一组新的 F–和 P–符号，它们可在域 $M(\Phi)$中表示。

注记 4.13。 可以为无重数融合系统定义 GSB，同样也可以将 GSB 的概念推广到无重数（刚性）编织融合系统。引理 4.6 和定理 4.10 可以作相应调整以适用于这些情形，而最小域的概念仍然成立。

对于范畴 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_3$，Any onWiki 和 Anyonica 上的融合系统给出以下最小域

- $M(\mathcal{H}_2) = \mathbb{Q}(\alpha)$，其中 $\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$；
- $M(\mathcal{H}_3) = \mathbb{Q}(\beta)$，其中 $\beta^4 + \beta^3 - \beta^2 + \beta + 1 = 0$。

参考文献

[1] Bojko Bakalov 和 A.A. Kirillov。《张量范畴与模函子的讲义》。载于：*Amer.Math. Soc. Univ. Lect. Ser.* 21（2001年1月）。[2] Lea E Bottini 和 Sakura Schäfer-Nameki。《构造具有 Haagerup 对称性的无能隙相》。载于：《物理评论快报》134.19（2025年），第 191602 页。[3] Alain Bruguieres 和 Alexis Virelizier。《关于融合范畴的中心》。载于：《太平洋数学杂志》264.1（2013年），第 1–30 页。[4] Frank Calegari、Scott Morrison 和 Noah Snyder。《分圆整数、融合范畴与子因子》。载于：《数学物理通讯》303.3（2011年5月），第 845–896 页。doi: 10.1007/s00220-010-1136-2。[5] Luke Corcoran 和 Marius de Leeuw。可积与临界 *Haagerup* 自旋链。2024年。arXiv：2410.16356 [cond-mat.stat-mech]。网址：https://arxiv.org/abs/2410.16356。[6] Louis Crane、Louis H. Kauffman 和 David N. Yetter。《四维流形的状态和不变量》。载于：《结理论及其应用杂志》06.02（1997年），第 177–234 页。doi：10 .1142 / S0218216597000145。[7] Thomas Creutzig。《容许层上的仿射顶点代数的融合范畴》。载于：《数学精选》25.2（2019年6月），第 27 页。doi：10.1007/s00029-019-0479-6。[8] Shawn X. Cui 和 Zhenghan Wang。《由球面多重融合范畴得到的三维流形状态和不变量》。载于：《结理论及其应用杂志》26.14（2017年12月），第 1750104 页。doi：10.1142/S0218216517501048。[9] Orit Davidovich、Tobias Hagge 和 Zhenghan Wang。关于算术模范畴。2013年5月。arXiv：1305.2229 [math].[10] Wolfram Decker、Christian Eder、Claus Fieker、Max Horn 和 Michael Joswig 编。计算机代数系统 *OSCAR*：算法与示例。第1版。第32卷。数学中的算法与计算。施普林格，2025年。doi：10.1007/978-3-031-62127-7。[11] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。张量范畴。第205卷。数学调查与专著。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015年，第 xvi+343 页。doi：10.1090/surv/205。[12] David E Evans 和 Paulo R Pinto。《模不变量与 Haagerup 子因子的双》。载于：算子代数与数学物理进展。（锡纳亚 *2003*），*F.-P. Boca*、*O. Bratteli*、*R. Longo*、*H. Siedentop* 编（2006年），第 67–88 页。

[13] David E. Evans 和 Terry Gannon。《近群融合范畴及其双》。载于：Adv. Math. 255（2014年），第 586–640 页。doi：10.1016/j.aim.2013.12.014。[14] F-Symbols-Double-Haagerup。https://github.com/FabianMaeurer/F-Symbols-Double-Haagerup。访问日期：2026-01-25。[15] Michael H. Freedman、Alexei Kitaev、Michael J. Larsen 和 Zhenghan Wang。《拓扑量子计算》。载于：第40卷。第1期。21世纪的数学挑战（洛杉矶，加利福尼亚州，2000年）。2003年，第 31–38 页。doi：10.1090/S0273-0979-02-00964-3。[16] Pinhas Grossman、Scott Morrison、David Penneys、Emily Peters 和 Noah Snyder。《扩展 Haagerup 融合范畴》。载于：Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 56.2（2023年），第 589–664 页。doi：10.24033/asens.2541。[17] Uffe Haagerup。《指标范围 $4 < [M : N] < 3 + \sqrt{2}$ 内子因子的主图》。载于：子因子（Kyuzeso，1993年）。World Sci. Publ.，River Edge，新泽西州，1994年，第 1–38 页。[18] Tobias Hagge 和 Matthew Titsworth。《融合范畴的几何不变量》。2015年。arXiv：1509.03275 [math.QA]。网址：https://arxiv.org/abs/1509.03275。[19] Seung-Moon Hong、Eric Rowell 和 Zhenghan Wang。《关于奇异模张量范畴》。载于：Commun. Contemp. Math. 10（2008年），第 1049–1074 页。doi：10.1142/S0219199708003162。[20] Tzu-Chen Huang 和 Ying-Hsuan Lin。《具有 $G = \mathrm{Z}_{2n+1}$ 的透明 Haagerup-Izumi 范畴的 F 符号》。2020 年。arXiv：a2007.00670。[21] Tzu-Chen Huang 、Ying-Hsuan Lin、Kantaro Ohmori、Yuji Tachikawa 和 Masaki Tezuka。《Haagerup 共形场论的数值证据》。载于：Physical Review Letters 128.23（2022年），第 231603 页。[22] Yi-Zhi Huang。《顶点算子代数、Verlinde 猜想与模张量范畴》。载于：美国国家科学院院刊 102.15（2005年），第 5352–5356 页。[23] Yi-Zhi Huang。《顶点张量范畴的刚性与模性》。载于：Commun. Contemp. Math. 10（2008年），第 871–911 页。doi：10.1142/S0219199708003083。[24] Yi-Zhi Huang、James Lepowsky 和 Lin Zhang。《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论，I：引言、强分次代数及其广义模》。载于：《共形场论与张量范畴：北京国际数学研究中心举办的研讨会论文集》。施普林格。2014年，第 169–248 页。[25] Masaki Izumi。《与 Longo-Rehren 包含相关的扇区结构。II. 示例》。载于：Rev. Math. Phys. 13.5（2001年），第 603–674 页。doi：10.1142/S0129055X01000818。[26] Gerold Jäger。《Smith 标准形变换矩阵的约化》。载于：Computing 74.4（2005年），第 377–388 页。[27] Zhian Jia。《具有 Haagerup 融合范畴对称性的量子簇态模型》。载于：Advanced Quantum Technologies（2025年10月）。doi：10.1002/qute.202500305。网址：http://dx.doi.org/10.1002/ qute.202500305。[28] Vaughan F. R. Jones、Scott Morrison 和 Noah Snyder。《指标至多为 5 的子因子分类》。载于：《美国数学会通报》51.2（2013年12月），第 277–327 页。doi：10.1090/S0273-0979-2013-01442-3。[29] Christian Kassel。《量子群》。第155卷。数学研究生教材。纽约州纽约市：Springer New York，1995年。doi：10.1007/978-1-4612-0783-2。[30] Alexei Kitaev。《精确求解模型中的任意子及其他》。载于：《物理年鉴》321.1（2006年1月），第 2–111 页。doi：10.1016/j.aop.2005.10.005。[31] Yuhan Liu、Yijian Zou 和 Shinsei Ryu。《由波函数重叠得到的算子融合：普适有限尺寸修正及其在 Haagerup 模型中的应用》。载于：Phys. Rev. B 107（2023年4月15日），

第 155124 页。doi: 10.1103/PhysRevB.107.155124。网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB. 107.155124.[32] Fabian Maeurer。*TensorCategories.jl*。版本 0.5.2。doi: 10.5281/zenodo.17440975。网址：https: // github.com/FabianMaeurer/TensorCategories.jl.[33] Fabian Mäurer 和 Ulrich Thiel。计算融合范畴的中心。2024年。arXiv: 2406.13438[math.RT].[34] Gregory Moore 和 Nathan Seiberg。“经典与量子共形场论。”载于：《数学物理通讯》123.2（1989年6月），第 177–254 页。doi: 10.1007/BF01238857.[35] Scott Morrison 和 Noah Snyder。“非分圆融合范畴。”载于：《美国数学会汇刊》364.9（2012年），第 4713–4733 页。[36] Tobias J Osborne、DenizE Stiegemann 和 Ramona Wolf。*H3* 融合范畴的 *F* 符号。2019年。arXiv: 1906.01322.[37] *OSCAR*——开源计算机代数研究系统，*1.6.0* 版。OSCAR团队，2025年。网址：https://www.oscar-system.org.[38] N. Reshetikhin 和 V. G. Turaev。“通过链环多项式和量子群得到的三维流形不变量。”载于：《数学创刊》103.1（1991年12月），第 547–597 页。doi: 10.1007/BF01239527.[39] N. Y. Reshetikhin 和 V. G. Turaev。“由量子群导出的带状图及其不变量。”载于：《数学物理通讯》127.1（1990年1月），第 1–26 页。doi: 10.1007/ BF02096491.[40] E C Rowell。“拓扑量子计算数学导论。”载于：《物理学杂志：会议系列》698（2016年3月），第 012012 页。doi: 10.1088/1742-6596/698/1/012012.[41] Eric Rowell 和 Zhenghan Wang。“拓扑量子计算数学。”载于：《美国数学会通报》55.2（2018年1月），第 183–238 页。doi: 10.1090/bull/1605.[42] Sean Sanford。“非代数闭域上的融合范畴。”载于：《代数杂志》663（2025年），第 316–351 页。doi: 10.1016/j.jalgebra.2024.09.010.[43] Sean C. Sanford。《非代数闭域上的融合范畴》。博士论文。2022年。网址：https://www.proquest.com/dissertations-theses/fusion-categories-over-non-algebraically-closed/docview/2715420938/se-2.[44] V. G. Turaev。纽结与三维流形的量子不变量。第 2 次修订版。德格鲁伊特数学研究丛书 18。柏林；纽约：德格鲁伊特，2010年。[45] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。幺半范畴与拓扑场论。第 322 卷。数学进展。Cham：施普林格国际出版，2017年。doi: 10.1007/978-3-319- 49834-8.[46] Vladimir G. Turaev。“模范畴与三维流形不变量。”载于：《现代物理学国际杂志 *B*》06.11n12（1992年6月），第 1807–1824 页。doi: 10.1142/S0217979292000876.[47] Robijn Vanhove、Laurens Lootens、Maarten Van Damme、Ramona Wolf、Tobias J Osborne、Jutho Haegeman 和 Frank Verstraete。“Haagerup 共形场论的临界格点模型。”载于：《物理评论快报》128.23（2022年），第 231602 页。[48] Gert Vercleyen。*Anyonica*。2024年2月。doi: 10.5281/zenodo.10686860.[49] Gert Vercleyen。关于低秩无重数融合范畴。2024年。arXiv: 2405.20075 [math-ph]。网址：https://arxiv.org/abs/2405.20075.[50] Gert Vercleyen。“用于区分秩不超过 7 的无重数融合范畴的实用不变量表。”载于：（2025年）。arXiv: 2507.00652。

[51] Gert Vercleyen 和 Joost Slingerland。$AnyonWiki$。doi: 10.5281/zenodo.15863113。网址: https: //anyonwiki.github.io/.[52] Zhenghan Wang。拓扑量子计算。112。美国数学会，2010年。