arXiv:2601.20035v1 [econ.TH] 27 Jan 2026

# 显然策略无关的多维分配与选择的价值

奎茨´·Valenzuela-Stookey*

2026年1月27日

**摘要**

委托人必须在多个代理人之间分配一组异质任务（或对象）。委托人对分配有偏好。每个代理人都对自己被分配哪些任务有偏好，而这些偏好属于其私人信息。委托人受到一项限制：每个代理人都有权要求获得某种现状任务分配。我刻画了委托人在哪些条件下能够通过将部分分配控制权委托给代理人而获益。在一大类委托机制中，我进一步刻画了显然策略无关（OSP）的机制，并为如何在这些显然策略无关机制中进行选择提供指导。

考虑一位委托人，他需要在一组代理人之间分配一组任务，但受到代理人对任务的偏好无法观测这一事实的限制。例如，一家医院希望实施一种新机制，将病例分配给医生（Chu 等，2025年）。医院掌握了对每位医生处理不同类型病例的绩效估计，并希望利用这些信息改革现有的病例分配系统。然而，医生对自己处理哪些病例也有偏好；如果新机制导致分配结果不如他们所偏好的结果，他们就会抵制采用该机制。了解医生的偏好，可以帮助医院更高效地分配病例，同时确保医生的境况不会变差。然而，由于医生的偏好属于其私人信息

*加利福尼亚大学伯克利分校经济学系。电子邮箱：quitze@berkeley.edu。

医院面临着一项权衡：为了让病例分配能够响应医生的偏好，医院必须放弃对分配的一部分控制，从而降低对绩效指标的直接响应程度。这项权衡是否值得？如果值得，系统应如何设计？

这类权衡出现在许多情境中，包括将儿童保护服务的调查员分配到病例中（Baron 等人，2025年）、将税务征收员分配给家庭（Bergeron 等人，2024），以及将工人分配到任务中（Acemoglu 和 Restrepo，2018年；Valenzuela- Stookey，2025年）。此外，“任务”一词不必按字面理解；在其他分配问题中也会出现类似的作用力，例如将难民匹配到地点 Bansak 等人（2018年）；Ahani 等人（2021年）；Delacr´etaz 等人（2023年）。形式上，这些都是没有转移支付的多维筛选问题：设计者拥有已知的目标函数，但受到必须确保代理人参与的约束，而代理人的偏好并不为人所知。[1]本文探讨这类任务分配问题中出现的两个一般性概念问题。第一，采用能根据代理人对任务的偏好作出响应的机制，何时具有价值？换言之，何时赋予代理人影响分配的选择权才是最优的？第二，如果基于选择的机制确有价值，实践中应采用哪一种？

关于多维筛选的大量文献表明，识别最优机制通常在分析上难以处理（例如 Thanassoulis，2004；Manelli 和 Vincent，2006），甚至刻画激励约束也颇具挑战（例如 Rochet（1987）；Lahr 和 Niemeyer（2024））。尽管如此，我们仍有可能刻画基于选择的机制达到最优的条件。此外，我通过刻画一类受限交易机制中的显然策略无关（OSP）机制集合，推进了关于应采用何种机制的规范性问题。

设定如下：有 $I$ 种不同类型的任务，以及 $J$ 名代理人（两者均为有限数量）。由代理人 $j$ 完成类型为 $i$的任务会产生社会成本，该成本为设计者所知，并且可能因任务和代理人的不同而异。此外，代理人还拥有

[1]本文主要关注这样一类问题：设计者与代理人之间的货币转移不可行（如择校或器官交换，Roth，2007），或超出特定机制设计问题的讨论范围。例如，企业可能希望改善工人任务的分配，而这些工人的工资已由集体谈判协议确定。尽管如此，将转移支付纳入模型并不困难，详见第 1.2 节。

对分配给自己的任务的偏好，而这些偏好属于其私人信息。设计者的目标是在代理人之间分配任务，以尽量降低总社会成本。然而，设计者受到代理人偏好的约束：每位代理人都有一项任务分配作为外部选项，并有权要求获得该分配。[2]

交易机制是一类灵活的机制，它们将分配选择权部分委托给代理人。此类机制为每位代理人 $j$ 指定一个交易集合菜单 $\{T_j^k\}_{k\in K_j}$，其中每个交易集合 $T_j^k$ 都是 $\mathbb{R}_+^I$ 的子集，而 $K_j$ 是任意索引集（可以是有限集，也可以是无限集）。交易集合是代理人 $j$ 可以获得的任务组合所构成的集合。设计者要求每位代理人从其菜单中选择一个交易集合，并承诺遵守这些选择的选择规则：给定所选交易集合的组合，设计者必须选择一种分配，使每位代理人所获分配的任务组合都属于其所选集合。一种极端情形是，设计者可以向代理人 $j$ 提供一个单元素菜单，其中包含在任何可能的偏好下 $j$ 都会认为优于外部选项的所有分配。对所有 $j$ 都这样做，相当于在不向代理人获取信息的情况下选择一种分配。通过提供更大的菜单，设计者可以更灵活地回应代理人的偏好，但代价是对最终分配的控制有所减弱。直观而言，选择放宽了参与约束，但也引入了新的激励约束。交易机制种类丰富，既包括 Baron 等（2025）研究的“二元分类机制”，也包括广受研究的基于市场的机制的变体（例如 Hylland 和 Zeckhauser（1979）、Budish（2011））。

如果（宽泛地说）代理人遵循机制规定的策略时可能得到的最差结果，优于其通过任何偏离可能得到的最佳结果，那么该机制就是显然策略无关的（Li，2017）。显然策略无关通常被视为一种简单性概念，因为这意味着参与者很容易找到其所面临决策问题的解。[3]在当前这类偏好和分配可能具有较高维度的情境中，简单性尤其具有规范层面的吸引力。

第一个主　　一个结果——定理1——给出了以下问题的必要且充分条件：　　e

[2]例如，代理人的外部选项可以代表其当前合同的条款。更抽象地说，外部选项可以体现设计者对公平工作量的理解：设计者希望高效地分配任务，同时避免不公平地加重任何一位代理人的负担。参见 Baron 等（2025）。[3]在实验室实验中，Li（2017）表明，受试者在显然策略无关机制中更有可能采取占优策略。另见 Breitmoser 和 Schweighofer-Kodritsch（2022年）。

在 OSP 交易机制中，（非平凡）基于选择的机制的最优性。事实上，定理1表明，就判断选择是否具有价值而言，将范围限制在 OSP 交易机制内通常不会造成损失：如果在可以使用任何满足较弱的贝叶斯激励相容性（BIC）约束的机制（而不仅仅是交易机制）时，选择是最优的，那么在 OSP 交易机制中，选择也同样是最优的。

选择具有价值的条件并不苛刻，在大多数应用中都应当能够满足。那么接下来的问题就是应当使用哪些机制。第二个主要结果——定理 2——刻画了显然策略无关交易机制的集合。实际上，所有且仅有显然策略无关交易机制都具有以下形式：要么代理人没有选择权（即向其提供一个单元素菜单，其中包含所有明确优于其外部选项的分配），要么向其提供一个菜单，其中每个交易集合都是一条以现状分配为端点的射线。此外，构成代理人菜单的射线集合必须满足“极化”条件，该条件限制了任意两条射线之间的相似程度。我们将这类机制称为极化射线机制。

任何极化射线机制除了显然策略无关之外，还具备许多理想属性。每个代理人所获得的菜单规模至多为$I+1$（推论2）。此外，代理人需要了解的关于该机制的全部信息，仅仅是其交易集合所采取的形式；在他们看来，设计者的选择规则或其他代理人的交易集合等额外细节都无关紧要。因此，设计者可以自由选择任何选择规则，并且通过最优地选择该规则，能够保证相对于现状分配的（弱）改善（即所有代理人都获得其外部选项分配时的分配）。无论代理人的偏好概率分布如何，甚至无论这些偏好采取何种形式，情况都是如此。因此，该机制在这些维度上能够稳健应对模型设定错误。

鉴于这些性质，任何极化射线机制都是实践中值得采用的候选方案。另一方面，求解最优OSP机制通常是一项计算难题。尽管将考察范围限制在极化射线机制内能大幅简化问题，但优化规划仍然颇具挑战，我在此不予求解。不过，我通过研究最优设计问题的一种“大市场”松弛，为如何在极化射线机制中进行选择提供了一些指导

。在这种松弛中，对偶规划有一种便于使用的表述形式，有助于寻找最优机制。

## 相关文献

本文研究的任务分配问题属于多维筛选问题（其中“任务”一词应作广义理解）。[4] Budish（2012年）综述了这类问题的研究方法，并大致将其分为“良好性质”和“机制设计”两类。在良好性质（或公理化）方法中，设计者会指定一组理想性质（例如稳定性、帕累托效率），并找出满足这些性质的机制。延迟接受（Gale and Shapley，1962）、顶端交易循环（Shapley and Scarf，1974）以及基于市场的机制（Varian，1973；Hylland 和 Zeckhauser，1979；Budish，2011）或许最适合用这种方式来理解。相比之下，机制设计方法旨在“在满足约束的前提下最大化某个目标函数”。在单维情形中，Myerson（1981）的最优拍卖方法是一个经典例子。然而，在多维情形中，机制设计形式的解十分有限；大量研究表明，这类问题在技术上难以处理（Pavlov，2011；Daskalakis 等，2014、2015；Hart and Nisan，2019）。即便是以可处理的方式刻画激励相容性，也已被证明颇具挑战（Rochet，1987；Lahr and Niemeyer，2024）。

本文在一个特定的多维筛选情境下，对机制设计方法取得了（有限的）进展。[5] 本文的方法建立在两个基本前提之上。首先，我关注显然策略无关性，而非贝叶斯激励相容性等较弱的解概念（后者是机制设计方法中的标准概念）。显然策略无关性因其规范性吸引力而受到广泛研究，并被视为多维情境中的一个有前景的方向（Palacios-Huerta 等，2024）。[6] 其他多维问题中关于显然策略无关的研究包括 Feldman 等（2014）；D¨utting 等（2016）；Golowich and Li（2021）。然而，对此类情境中的显然策略无关进行解析刻画的研究仍然有限，而且显然策略无关尚未应用于本文研究的这类任务

[4]具体而言，这是一个存在类型依赖的参与约束且没有转移支付的筛选问题。[5]此外，还有实证文献研究基于选择的机制在其他情境中的价值。例如，Agarwal 等人（2025年）研究了这一问题在逝者捐赠肾脏候补名单中的情形。[6]Palacios-Huerta 等人（2024）写道：“我们认为，未来转向显然策略无关 [组合分配]形式所带来的行为影响不应被低估。”

分配问题。

其次，我主要将注意力限制在交易机制上。[7] 尽管这一限制牺牲了一定程度的普适性，但它使我能够完整刻画显然策略无关性。此外，交易机制仍然是一个丰富的机制类别，并且具有多项在规范意义上颇具吸引力的性质。交易机制可以被理解为一种委托形式（Holmstr¨om，1978；Holmstrom，1984）。通常，委托机制应用于这样的情境：代理人拥有与委托人决策直接相关的私人信息（例如 Alonso 和 Matouschek（2008））。而在本文中，代理人的私人信息仅具有间接相关性（因为设计者需要确保参与），因此委托的价值并不那么显而易见。尽管如此，我将证明，非平凡委托可能具有价值；事实上，只要更复杂的基于选择的机制能够实现收益，非平凡委托也能够实现这些收益。

最后，本文还与其他关于任务分配问题的研究相关（Baron 等人，2025年；Valenzuela-Stookey，2025年）。本文的设定与 Baron 等（2025年）的研究最为相似。在那篇文章中，作者研究了受限于二元分类机制这一类别的贝叶斯激励相容机制设计；在该类别中，实际上只有两种任务类型。然而，事实证明，他们所研究问题的解本质上是一种特定的极化射线机制，其中每个代理人的菜单只有三个元素。本文表明，在一个更为广泛的类别中，如果目标是实现显然策略无关性，则只有极化射线机制是可接受的。Baron 等（2025年）还提出了一个两步程序，用于求解其问题的大市场版本；我们将在第 4 节对该程序加以推广。

本文其余部分安排如下。第 1 节介绍模型。随后，我将确定选择何时具有价值（第 2 节），并刻画显然策略无关的交易机制（第 3 节）。第 4 节将说明，研究模型的大市场版本如何简化最优设计问题。第 5 节总结全文。正文中省略的证明收录于附录。

[7]定理1是显然策略无关要求和交易机制限制的一个例外，因为它适用于所有贝叶斯激励相容机制。

# 1 模型

任务（或对象）构成有限集合，编号为 $i \in \mathcal{I} = 1, \ldots, I$（其中 $I \geq 2$），代理人也构成有限集合，编号为 $j \in \mathcal{J} = \{1, \ldots, J\}$。分配是一个矩阵 $Z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$，其行 $i$ 总和为 $n^i$，其中 $n^i$ 表示需要完成的任务 $i$ 的任务实例数量。[8] 令 $\mathcal{Z}$ 为分配集合。随机分配是分配上的概率分布。对于随机分配 $\mu \in \Delta(\mathcal{Z})$，令 $\mu_j \in \mathbb{R}_+^I$ 表示代理人 $j$的期望分配，其中 $\mu_j(i)$ 是分配给 $j$的任务 $i$的期望数量。为方便起见，在不致引起混淆的情况下，我将 $\Delta(\mathcal{Z})$ 中的元素简称为分配，并将 $\mu_j$ 称为 $j$的 分配。

设计者的目标是最小化预期总社会成本，其定义为

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \pi_j(i) \mu_j(i),$$

对于某些已知权重 $\pi_j(i)$。[9] 我们可以将 $\pi_j(i)$ 视为代理人 $j$ 在任务 $i$上的（可观测）绩效。

另一方面，设计者并不知道代理人对任务的偏好。令 $c_j(i) > 0$ 表示代理人 $j$ 完成任务 $i$的私人成本。那么，从随机分配 $\mu$ 中， $j$的总工作负荷为

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} c_j(i) \mu_j(i)$$

并且我们采用代理人偏好较低工作负荷这一归一化设定。[10] 令$\mathbf{C}$ 为偏好概况的集合，其典型元素为$\mathbf{c} = (c_j(\cdot))_{j=1}^J$。令 $F_j$ 表示代理人 $j$的偏好类型 $c_j$的概率分布。我们假设各代理人的类型相互独立，并且 $F_j$ 在超立方体 $C_j \subset \mathbb{R}_+^I$上具有全支撑。

代理人的外部选项由随机分配 $\sigma \in \Delta(\mathcal{Z})$ 定义，我们将其称为现状。每位代理人都有权要求获得其在现状下的边际分配 $\sigma_j$。这一参与决策发生在中间阶段，即每位代理人观察到自己的偏好之后、但尚未参与设计者的机制之时

[8]其中，$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示包含零在内的非负整数。[9]将目标表述为最小化社会成本，而不是最大化福利，仅仅是一种归一化。[10]实质性假设是 $c_j(i) > 0$，即所有任务对代理人收益的定性影响相同。

在参与设计者的机制之前，观察到自己的偏好。[11]

如果设计者可以在 $\Delta(\mathcal{Z})$中实施任意随机分配，那么社会成本最小化问题就会是一个简单的线性规划。然而，设计者在此受到两项限制： $i$) 代理人可以要求获得其现状分配；此外， $ii$) 设计者并不了解代理人的偏好。问题是，设计者能否通过使用基于选择的机制，在预期社会成本方面优于 $\sigma$（如果能，又该如何实现）。在回答这些问题之前，我们先介绍交易机制这一类机制。

## 1.1 交易机制

一个交易协议 由以下部分组成：一个禀赋 $\eta \in \Delta(\mathcal{Z})$；为每个代理人 $j$提供的交易集合菜单 $\{T_j^k\}_{k\in K_j}$，其中 $T_j^k \subset \mathbb{R}_+^I$ ，且 $K_j$ 是任意索引集（可以是有限集，也可以是无限集）；以及一个选择规则 $P\colon \prod_{j\in\mathcal{J}} K_j \to \Delta(\mathcal{Z})$，满足

$$P_j((k_j)_{j\in\mathcal{J}}) \in T_j^{k_j} \quad \forall \quad (k_j)_{j\in\mathcal{J}} \in \prod_{j\in\mathcal{J}} K_j,\ j \in \mathcal{J},$$

其中， $P_j$ 表示在 $P$下为 $j$ 指定的分配。协议的运作方式如下：每个代理人选择一个交易集 $k \in K_j$，给定选择组合 $k_{\mathcal{J}} = (k_j)_{j\in\mathcal{J}}$ 后，由选择规则 $P(k_{\mathcal{J}})$确定分配。其核心限制是，选择规则必须尊重代理人对交易集的选择。根据定义，交易协议必须是可行的，即必须存在这样的选择。此外，每个代理人都有权要求获得其禀赋，因此对于所有 $j$，$\{\eta_j\} \in \{T_j^k\}_{k\in K_j}$。请注意，现状 $\sigma$并未出现在此定义中。虽然我们主要关注满足$\eta = \sigma$的交易协议，但此处对交易协议作了更一般的定义，以便将激励约束与参与约束区分开来。

给定交易协议 $\mathcal{T}$，代理人 $j$ 的策略是一个映射 $s_j\colon C_j \mapsto K_j$。我们将一对 $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{J}})$ 称为交易机制，其中 $\mathcal{T}$ 是交易协议， $s_{\mathcal{J}} = \{s_j\colon C_j \mapsto K_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ 是策略组合。

[11]特别是，如果设计者的机制涉及随机化，参与决策会在随机化结果实现之前作出。事实上，下文将介绍的 OSP交易机制满足更强的事后参与约束；该约束在所有类型揭示之后（但在设计者的随机化结果确定之前）仍然成立。

**示例**。我们介绍三种交易机制。

- 双边交易机制。 最简单的交易机制由 $\gamma \in \mathbb{R}^I$和两个代理人 $j'$， $j''$ 定义如下：向代理人 $j'$ 提供选择：维持现状，或交易至 $\sigma_{j'}+\gamma$；向代理人 $j''$ 提供选择：是否从 $\sigma_{j''}$ 交易至 $\sigma_{j''}-\gamma$。当且仅当 $j'$ 和 $j''$ 都希望交易时，交易才会发生。其他所有代理人均维持现状。自然策略是：代理人 $j'$ （代理人 $j''$）当且仅当 $\gamma \cdot c_{j'} \leq 0$（ $\gamma \cdot c_{j''} \geq 0$）时进行交易。

  要推广双边交易机制，可以从一个方面着手，允许多个代理人之间进行交换，从而超越双边交易。另一个方面是提供更多和/或规模更大的交易集合，以扩大交易范围。

- 双价格二元分类机制。 Baron 等（2025）提出的二元分类机制中，存在（实质上的）两个任务， $A$ 和 $B$。[12] 双价格二元分类机制是指这样一种机制：每个代理人可获得两个价格（$p_j^1$， $p_j^2$），并可报告是否愿意以少 $p_j^1$ 个任务 $B$的比率交易（让出）任务 $A$（是否愿意以多$p_j^2$ 个任务 $B$的比率交易）。这定义了一个交易协议，其中 $j$ 的菜单为 $\{\{\sigma_j\},\{(\sigma_j(A) \quad \sigma_j(B)) + x(\mathbf{1}, \ -p_j^1) : \ x \in \mathbb{R}_+\}, \ \{(\sigma_j(A) \quad \sigma_j(B)) + x(-1, \ p_j^2) : \ x \in \mathbb{R}_+\}\}$。

- 伪市场机制。 这类组合分配问题的自然基准是基于市场的机制（Varian，1973；Hylland 和 Zeckhauser，1979；Budish，2011）。其思路是为每位代理人赋予其现状 $\sigma_j$，并以虚拟货币为单位，为每项任务设定一个“价格”。随后，代理人可以按指定价格自由买卖任务。在标准做法中，价格可以根据实际需求进行调整，以实现市场出清。由于个体代理人会对价格产生非零影响，这类机制在大型（有限）市场中只能近似实现策略无关。这类伪市场机制并非交易协议，但我们可以指定一种交易协议版本的

[12]形式化地说，给定任意一组任务，将任务二元划分为 $A$和 $B$ 两类，并且机制仅取值于 $\mu \in \Delta(\mathcal{Z})$，使得 $\mu$ 和 $\sigma$ 在每一类条件下具有相同的边际分布。换言之，每个代理人的分配可表示为一对$(n_j^A, \ n_j^B) \in \mathbb{R}_+^2$，其中代理人按照 $\sigma$的条件分布，从 $k \in \{A, B\}$ 类中获得$n_j^k$任务。

机制：预先 $p$固定 一个价格向量，代理人根据 $p$提交其所需的任务分配，随后由设计者仅执行能够在市场出清条件下实现的交易。在这一交易协议中，对于预算 $\{x \in \mathbb{R}^I_+$ 上的每个点 $x$ ，都存在 $k \in K_j$ 使得 $\{x, \sigma_j\} = T^k_j$。我们还可以推广这一交易协议，允许代理人提交非退化的需求集，此时交易集合的形式为 $\{A, \sigma_j\}$ ，其中 $A \subset \{x \in \mathbb{R}^I_+ : \ p \cdot x = p \cdot \sigma_j\}$。

目标　　是刻画显然策略无关交易机制的集合　　.

**定义**。给定交易协议 $\mathcal{T}$，行动 $k \in K_j$ 对于类型为 $c_j$ 的代理人$j$ 显然占优，当且仅当

$$\sup_{k_{-j} \in K_{-j}} c_j \cdot P_j(k, k_{-j}) \leq \inf_{k_{-j} \in K_{-j}} c_j \cdot P_j(k', k_{-j})$$

对所有 $k' \in K_j$均成立。

**定义**。给定交易协议 $\mathcal{T}$，若策略组合 $\{s_j : C_j \mapsto K_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ 满足：对于所有 $j \in \mathcal{J}$ 和 $c_j \in C_j$， $s_j(c_j)$ 均显然占优，则称其为显然策略无关（OSP）。若对于所有 $j$，交易机制 $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{J}})$ 在给定 $\mathcal{T}$时满足 $s_j$ 为 OSP，则称该交易机制为 OSP。

注意，对于任何实现的类型剖面，带有 $\eta = \sigma$ 的 OSP 交易机制都能事后满足代理人的参与约束，而不仅仅是在中间阶段满足。[13]

## 1.2 建模假设讨论

**为什么要采用显然策略无关?**

采用显然策略无关的机制有助于实际实施，因为它能降低代理人的认知负荷（Li，2017）。此外，尽管多维筛选问题中的贝叶斯激励相容尚未得到易于处理的刻画，但我们发现，可以对显然策略无关的交易机制给出一种简单的刻画。

即使设计者愿意采用非显然策略无关机制，显然策略无关机制仍有助于计算选择价值的下界：代理人拥有

[13]如果机制涉及设计者进行随机化，那么此处的事后阶段发生在该随机化结果确定之前。

显然占优策略意味着每个代理人的最佳响应问题都相对容易求解；而要估计非策略真实机制（无论是否显然策略无关机制）所带来的收益，则需要求解一个不动点问题，以确定诱导博弈的均衡。

### 为什么采用交易机制?

交易机制的类别范围广泛且相当灵活，但我并不认为它涵盖了所有有趣且相关的机制。再次强调，限制关注范围、只考察交易机制的一个原因是可处理性。如上所述，多维分配问题的“机制设计”方法进展有限，原因在于这些问题难以处理；但在交易机制这一类别中，我们能够取得一些进展。除了可处理性之外，交易机制在实际应用中也具有一些吸引人的特性。首先，它们相对容易描述。此外，显然策略无关的交易机制对模型设定错误具有稳健性，尤其是对代理人偏好分布的设定错误；而在实践中，设计者可能只能掌握有关该分布的有限信息。

### 转移支付

如上所述，本文关注的是这样一些情形：设计者与代理人之间的转移支付不可行（Roth, 2007），或超出机制设计工作的范围。虽然有许多应用符合这一描述，但也确实存在其他应用，在这些应用中，转移支付是设计者工具箱中的重要组成部分。

通过将其中一项“任务” $m$设为代理人向设计者支付的款项，可以扩展模型以纳入转移支付。这可能需要对模型做两处修改。首先，我们假设所有任务对代理人收益的定性影响相同。如果任务令人感到负担，那么我们可以继续使用归一化$c_j(m) > 0$。但是，如果任务是“商品”，那么 $m$ 的影响就会相反，因此我们需要 $c_j(m) < 0$。（我们还假设分配是非负的；在某些情形下，我们可能希望放宽对 $m$ 的这一限制，以便设计者能够向代理人支付款项。）其次，我们假设每项任务的供给量固定。在包含转移支付的情形下，这相当于要求机制产生固定水平的收入。在

许多应用中，我们可能希望放宽这一约束，这会改变可行机制的空间。

总之，在某些条件下，我们可以将转移支付直接纳入当前模型（例如，任务令人厌烦、支付必须为非负数，且收入必须等于某个预先设定的数值）。更一般地说，为纳入转移支付所需的修改似乎并不大。不过，这些情形的分析留待未来研究。

# 2 何时选择有用?

我们首先回答这样一个问题：让代理人对分配拥有一定的控制权，是否能帮助设计者降低预期社会成本。我们既关注设计者受限于显然策略无关的交易机制时这一问题的答案，也关注设计者可以使用任意贝叶斯激励相容（BIC）机制时的答案。此外，考察放宽现状约束后选择的价值也很有启发性。设 $m$ 为一个机制，其中 $m(\mathbf{c}) \in \Delta(\mathcal{Z})$ 是代理人报告类型剖面 $\mathbf{c}$ 时分配的概率分布，并将 $m_j(i|\mathbf{c})$ 记为分配给代理人 $j$ 的 $i$ 的期望数量。在放宽后的现状约束下，设计者只能采用满足以下条件的机制：

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} c_j(i)\mathbb{E}_{-j}[m_j(i|c_j,c_{-j})] \le \beta_j \sum_{i\in\mathcal{I}} c_j(i)\sigma_j(i) \quad \forall\, j\in\mathcal{J},\ c_j\in C_j,$$

其中 $\beta_j \ge 1$。换言之，任何代理人的预期工作量都不能超过其在现状下预期工作量的 $\beta_j$ 倍。基准情形为 $\beta_j = 1$，而 $\beta_j > 1$ 则允许这一约束存在松弛。

考虑一般的 BIC 机制设计问题：除了现状约束和市场出清条件（即每个任务实例都恰好分配给一名代理人）之外，我们不对用于分配任务的机制施加任何进一步限制。根据标准的揭示原理，将注意力限制在激励相容的直接揭示机制上不会损失最优性。

于是，设计者的规划问题为

$$\min_{m} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\pi_j(i)\ m_j(i|\mathbf{c})\right] \tag{1}$$

$$s.t. \quad \sum_{i\in\mathcal{I}} c_j(i)\mathbb{E}_{-j}[m_j(i|c_j,c_{-j})] \le \beta_j \sum_{i\in\mathcal{I}} c_j(i)\sigma_j(i) \ \ \forall\ j\in\mathcal{J},\ c_j\in C_j \tag{SQ}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} c_j(i)\ \mathbb{E}_{-j}[m_j(i|c_j,c_{-j})] \le \sum_{i\in\mathcal{I}} c_j(i)\ \mathbb{E}_{-j}[m_j(i|c'_j,c_{-j})] \quad \forall\ j\in\mathcal{J},\ c_j,c'_j\in C_j \tag{IC}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} m_j(i|\mathbf{c}) = n^i \quad \forall\ i\in\mathcal{I},\ \mathbf{c}\in\mathbf{C} \tag{MC}$$

这里的设计者面临一个带有类型依赖的参与约束的多维筛选问题。尽管该问题的解仍是一个开放问题，但事实证明，我们可以回答一个范围更有限的问题：最优机制是否必须对代理人的偏好作出非平凡的响应。

如果存在一个机制 $m$ 满足 IC、SQ 和 MC 约束，并且不是偏好概况上的恒定机制，且其预期社会成本严格低于现状，就称选择优于现状。如果设计者在式（1）中的规划问题的所有解都是非恒定机制，就称选择是最优的。[14]

我们的第一个结果表明，在许多情况下，我们应当预期选择是最优的。若对所有 $i\in\mathcal{I}$，$j\in\mathcal{J}$，均有 $\sigma_j(i)>0$，则称现状具有全支撑。若对所有 $j$，$j'\in\mathcal{J}$，均有 $C_j=C_{j'}$（不同代理人的概率分布仍可能不同），则称偏好具有共同支撑。当偏好具有共同支撑时，该支撑必须是非退化的，选择才能发挥作用。若 $C_j$ 是一个有界超立方体，则称偏好具有有界支撑。令 $\bar{c}^i_j=\max\{c_j(i):\ c_j\in C_j\}$，且 $\underline{c}^i_j=\min\{c_j(i):\ c_j\in C_j\}$，则 $[\underline{c}^i_j,\bar{c}^i_j]$ 是代理人 $j$ 在维度 $i$ 上偏好的定义域。若对所有代理人均有 $\pi_{j'}=\pi_{j''}$ 对所有 $j'$，$j''\in\mathcal{J}$，则称绩效相同。

**定理1**。如果偏好具有共同的有界支撑，且现状具有全支撑，那么以下条件等价

[14]从设计的角度来看，我们可以先求出最优确定性机制，并将其设为现状；在这种情况下，唯一的问题就是选择能否优于现状。不过，了解在给定现状约束下何时选择是最优的，也很有用。

i. 代理人的偏好概率分布是非退化的，且不同代理人之间的绩效并不相同。

ii. 在显然策略无关交易机制中，选择优于现状。

iii. 对任意 $(\beta_j)_{j\in\mathcal{J}}$，在所有 BIC机制中，选择优于现状。

此外，若对所有 $j$，$\beta_j = 1$，且代理人偏好的支持集维度为 $I$，那么以下条件也等价于 $i$-$iii$.

iv. 在显然策略无关交易机制中，选择是最优的（因此在所有 BIC机制中也最优）。[15]

定理1中的条件$i.$ 显然是选择优于现状的必要条件；如果偏好分布是退化的，选择便无从发挥作用；如果绩效相同，也就没有改进的空间。$i.ii.$与$iii.$ 等价，这表明在相当温和的条件下（偏好的共同支持集以及具有全支持的现状），只要问题并非平凡，选择就优于现状，无论设计者是否受到显然策略无关交易机制的限制。此外，在基准情形下，即现状约束不存在松弛，且代理人的偏好在任何维度上都不是退化的，只要问题并非平凡，选择也是最优的。

## 2.1 定理1的证明

为理解定理1，将其拆分为若干组成部分会很有帮助。首先，考虑“选择优于现状”与“选择是最优的”之间的差距。我们将这一差距与现状约束中的松弛程度以及偏好范围联系起来，分别由 $\beta_j$ 和 $[\underline{c}^i_j, \bar{c}^i_j]$ 参数化。定义 $\hat{c}^i := \max_{j\in\mathcal{J}} \underline{c}^i_j$，则 $\hat{c}^i \in [\underline{c}^i_j, \bar{c}^i_j]$ 对所有 $i$，$j$ 当且仅当$\cap_{j\in\mathcal{J}} C_j \neq \varnothing$。

[15]“在 OSP 交易机制中，选择是最优的”意味着，当设计者被进一步限制只能使用 OSP交易机制时，其规划问题的每个解都是非恒定机制。

**引理 1**。 假设 $\cap_{j\in\mathcal{J}} C_j \neq \varnothing$。如果分配 $m \in \Delta(\mathcal{Z})$（即一种非基于选择的机制）满足 (SQ)和(MC)，则

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \left(\bar{c}_j^i - \hat{c}^i\right)\left(m_j(i) - \beta_j\sigma_j(i)\right)^+ \leq \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \hat{c}^i\left(\beta_j - 1\right)\sigma_j(i).$$

证明。 假设 $m \in \mathcal{Z}$ 满足 (SQ)，即

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} m_j(i)c_j(i) \leq \beta_j \sum_{i\in\mathcal{I}} \sigma_j(i)c_j(i) \quad \forall\, j \in \mathcal{J},\ \forall\, c_j \in C_j. \tag{SQ}$$

那么，对于任意 $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$，必有

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \left(m_j(i) - \beta_j\sigma_j(i)\right)c_j(i) \\ &= \sum_{i\in\mathcal{I}} \hat{c}^i \sum_{j\in\mathcal{J}} \left(m_j(i) - \beta_j\sigma_j(i)\right) + \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \left(m_j(i) - \beta_j\sigma_j(i)\right)\left(c_j(i) - \hat{c}^i\right) \end{aligned} \tag{2}$$

其中，第一行的不等式是将 (SQ) 约束对 $j$ 求和后得到的，第二行则是简单的代数运算。若 $m$ 满足 (MC)，则式 (2) 中的第一项等于

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \hat{c}^i\left(1 - \beta_j\right)\sigma_j(i)$$

那么，要使式 (2) 成立，必须有

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \hat{c}^i\left(\beta_j - 1\right)\sigma_j(i) \geq \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \left(m_j(i) - \beta_j\sigma_j(i)\right)\left(c_j(i) - \hat{c}^i\right)$$

对所有 $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$ 均成立。在假设 $\cap_{j\in\mathcal{J}} C_j \neq \varnothing$ 下，对于所有 $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$，我们有 $\bar{c}_j^i \geq \hat{c}^i$。然后令 $c_j(i) = \hat{c}^i$，若 $(m_j(i) - \beta_j\sigma_j(i)) < 0$；否则令 $c_j(i) = \bar{c}_j^i$，则有

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \hat{c}^i\left(\beta_j - 1\right)\sigma_j(i) \geq \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} \left(\bar{c}_j^i - \hat{c}^i\right)\left(m_j(i) - \beta_j\sigma_j(i)\right)^+$$

证毕。 □

**推论 1**。如果 $\beta_j = 1$ 对于所有 $j \in \mathcal{J}$，且 $\cap_{j\in\mathcal{J}} C_j$ 的维度为 $I$，那么唯一的非选择 -

型机制是满足（SQ）和（MC）的现状机制。特别地，当且仅当选择优于现状时，选择才是最优的。

证明。 由关于 $\beta_j = 1$ 的引理 1 可知，(SQ) 和 (MC) 意味着，对于任意非基于选择的机制 $m \in \Delta(\mathcal{Z})$,

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}}\left(\bar{c}_j^i - \hat{c}^i\right)\left(m_j(i) - \sigma_j(i)\right)^+ \leq 0.$$

如果 $\cap_{j\in\mathcal{J}} C_j$ 的维度为 $I$，那么对于所有 $i$, $j$, $\bar{c}_j^i > \hat{c}^i$。如果 $m$ 满足 (MC) 和 $m \neq \sigma$，那么对于某个 $i$, $j$, $m_j(i) - \sigma_j(i) > 0$，因此上述不等式不成立。因此，唯一满足 (SQ) 和 (MC) 的确定性机制就是现状。

□

现在考虑定理1中的 $i.$、$ii.$ 和$iii.$ 之间的等价性。这种等价性基于上述介绍的简单双边交易机制类别，该类别可用于改善现状。设 $j'$, $j''$ 为参与该机制的代理人，$\gamma \in \mathbb{R}^I$ 为交易，并假设代理人 $j'$（代理人 $j''$）遵循如下策略：当且仅当 $\gamma \cdot c_{j'} \leq 0$（$\gamma \cdot c_{j''} \geq 0$）时进行交易。我们从以下简单观察开始。

**引理2。 </style}针对代理人，** $j''$、交易为 $\gamma$ 的双边交易机制是可行的，且优于现状，当且仅当

i. $\sigma_{j'} + \gamma \geq 0$ 和 $\sigma_{j''} - \gamma \geq 0$, ii. $(\pi_{j'} - \pi_{j''}) \cdot \gamma < 0$, iii. $\min\{\gamma \cdot c_{j'} : c_{j'} \in C_{j'}\} < 0$, iv. $\max\{\gamma \cdot c_{j''} : c_{j''} \in C_{j''}\} > 0$。

证明。 根据条件 $i.$，交易是可行的。代理人 $j'$（分别地，$j''$）愿意交易，当且仅当 $\gamma \cdot c'_j \leq 0$（分别地，$\gamma \cdot c_{j''} \geq 0$）。因此，条件 $iii.$ 和 $iv.$ 确保交易以正概率发生（在概率分布具有全支撑这一既定假设下）。条件 $ii.$ 意味着，交易一旦发生，就会降低社会成本。

□

真正的问题是，我们能否找到一种满足这些条件的双边交易。以下充分条件保证这样的机制存在，并立即推出定理1的结论。

**命题 1.** 若存在 $j', j''$ 使得

i. $\pi_{j'} \neq \pi_{j''}$;

ii. $C_{j'} \cap C_{j''}$ 非空且非退化；并且

iii. 对所有 $i \in \mathcal{I}$， $\sigma_{j'}(i) > 0$ 且 $\sigma_{j''}(i) > 0$；

then 存在一种优于现状的双边交易机制 .

证明。 我们先给出一个中间结果。

**引理3**。 如果对所有 $i \in \mathcal{I}$ 都有 $\pi'_j \neq \pi_{j''}$； $\sigma_{j'}(i)\ \sigma_{j''}(i) > 0$，并且存在点 $c'$, $c'' \in \cap_{j \in \mathcal{J}} C_j$，使得 cvh($c''$，0)∩cvh($\pi_{j'} - \pi_{j''}$， $c'$，0) $= \{0\}$；那么存在一个满足引理2条件的双边交易机制。

证明。 首先，由于对所有 $i$ 都有 $\sigma_{j'}(i)\ \sigma_{j''}(i) > 0$，如果我们能找到满足 $ii. - iv.$ 的 $\gamma$，那么就可以对其进行缩放，使其满足 $i.$

不妨假设存在 $i \in \mathcal{I}$ 使得 $\pi^i_{j'} - \pi^i_{j''} > 0$ （否则只需交换 $j'$ 和 $j''$ 的角色）。于是，0 是 cvh($\pi_{j'} - \pi_{j''}$， $c'$，0) 的极点。因此，cvh($\pi_{j'} - \pi_{j''}$， $c'$，0) $\setminus \{0\}$ 和 cvh($c''$，0) $\setminus \{0\}$ 不相交、非空且为凸集。根据分离超平面定理，存在 $\gamma \in \mathbb{R}^I$，使得 $(\pi_{j'} - \pi_{j''}) \cdot \gamma < 0$, $\gamma \cdot c' < 0$，并且 $\gamma \cdot c'' > 0$。由于 min $\{\gamma \cdot c_{j'} \in C_{j'}\} \leq \gamma \cdot c'$ 和 max $\{\gamma \cdot c_{j''} \in C_{j''}\} \geq \gamma \cdot c''$，引理2的条件$ii. - iv.$ 得到满足。

□

为证明命题 1，还需证明：若 $C_{j'} \cap C_{j''}$ 非空且非退化，则存在满足引理3条件的点 $c', c'' \in C_{j'} \cap C_{j''}$。

令 $\delta = \pi_{j'} - \pi_{j''}$。由于 $C_{j'} \cap C_{j''}$ 是一个非退化超立方体，存在 $c^1, c^2 \in C_{j'} \cap C_{j''}$，使得 $c^1, c^2, \delta$ 两两线性无关。只需证明 cvh($c^1$, 0) ∩cvh($\delta, c^2$,0) $= \{0\}$ 和/或 cvh($c^2$, 0) ∩ cvh($\delta, c^1$, 0) $= \{0\}$。

要看出这一点，请注意，cvh($c^1$,0) ∩ cvh($\delta, c^2$,0) $\neq \{0\}$ 当且仅当 $c^1$ 属于由 $(\delta, c^2)$ 生成的凸锥。也就是说，存在 $\alpha, \rho \geq 0$ 使得 $c^1 = \alpha c^2 + \rho\delta$。此外，

$\alpha, \rho > 0$ 因为 $c^1, c^2, \delta$ 两两线性无关。对称地，$\text{cvh}(c^2, 0) \cap \text{cvh}(\delta, c^1, 0) \neq \{0\}$ 当且仅当存在 $\hat{\alpha}, \hat{\rho} > 0$ 使得 $c^2 = \hat{\alpha} c^1 + \hat{\rho}\delta$。反设两者均成立。那么

$$\begin{aligned} c^1 &= \alpha(\hat{\alpha} c^1 + \hat{\rho}\delta) + \rho\delta \\ &= \alpha\hat{\alpha} c^1 + (\alpha\hat{\rho} + \rho)\delta \end{aligned}$$

这与 $c^1$ 和 $\delta$ 的线性无关性矛盾。 □

命题 1 表明，在较弱的条件下，双边交易机制能够改善现状。命题 1 最严格的条件是，对于所有 $i \in \mathcal{I}$，$\sigma_{j'}(i) > 0$ 且 $\sigma_{j''}(i) > 0$。然而，只需将考察范围限制在满足 $\sigma_{j'}(i) > 0$ 且 $\sigma_{j''}(i) > 0$ 的维度上，就能放宽这一条件，代价是需要引入额外的记号。

我们已经证明，一般而言，采用能够响应代理人偏好的机制是有价值的。具体来说，我们已经表明，通过一类简单的双边交易机制可以获得收益。要量化选择的价值，下一步是更一般地了解哪些机制可以使用。

# 3 显然策略无关的分配

除非另有说明，本节始终假设 $C_j = \mathbb{R}^I_+$。特别地，如果 $C_j = \mathbb{R}^I_{++}$，我们就称 $j$ 的偏好是严格单调 的。

我们用 $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{J}})$ 和 $(\mathcal{T}, \hat{s}_{\mathcal{J}})$ 表示不同的交易机制，其中 $s_{\mathcal{J}} = (s_j)_{j \in \mathcal{J}}$，$\hat{s}_{\mathcal{J}} = (\hat{s}_j)_{j \in \mathcal{J}}$，$\mathcal{T} = (\eta_j, ((T_j^k)_{k \in K_j})_{j \in \mathcal{J}}, P)$ 和 $\hat{\mathcal{T}} = (\hat{\eta}_j, ((\hat{T}_j^k)_{k \in \hat{K}_j})_{j \in \mathcal{J}}, \hat{P})$。

**定义**。若对于所有 $j \in \mathcal{J}$，交易机制 $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{J}})$ 被交易机制 $(\mathcal{T}, \hat{s}_{\mathcal{J}})$**支配**，则称前者被后者支配

1. $\eta_j = \hat{\eta}_j$；2. $K_j = K_j$ 且
$s_j = \hat{s}_j$；且 3. 对所有 $k \in K_j$，
$T_j^k \subset \hat{T}_j^k$；且

换言之，在支配机制中，策略和禀赋保持不变，但每个交易集都扩大了。请注意，我们不对设计者的选择规则施加任何限制。在支配机制中，设计者在选择分配时拥有更大的灵活性。

如果某些交易集 $T_j^k$包含在 $P$下从未被选择的分配，则交易协议存在冗余。从设计者和代理人的角度来看，这种冗余都无关紧要。给定一个交易协议 $\mathcal{T}$，我们将其本质约化定义为：保持禀赋和选择规则不变，但将每个交易集 $T_j^k$替换为 $\{x \in T_j^k\colon\ x = P_j(k, k_{-j})$，其中 $k_{-j} \in K_{-j}\}$。当 $\mathcal{T}$是 $\mathcal{T}$的本质约化时，我们称机制 $\tilde{}$ $\tilde{}(\mathcal{T},\ s_{\mathcal{J}})$为 $(\mathcal{T},\ s_{\mathcal{J}})$的本质约化。如果一个机制等于其本质约化，我们就称其为非冗余。如果机制 $(\mathcal{T},\ s_{\mathcal{J}})$ 的本质约化被 $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{J}})$支配，则称机制 $\hat{}(\mathcal{T},\ s_{\mathcal{J}})$ 被 $(\mathcal{T},\ s_{\mathcal{J}})$有效支配。

定义代理人 $j$ 的短视最优选择

$$a_j^*(c_j|\mathcal{T}) := \underset{k\in K_j}{\arg\min}\left\{\min\left\{c_j \cdot x\ :\ x \in \tilde{T}_j^k\right\}\right\}.$$

其中， $\tilde{T}_j^k$是 $T_j^k$的本质约化。换言之，如果偏好为 $c_j$的代理人 $j$可以从 $\cup_{k\in K_j} T_j^k$中自由选择其分配（忽略冗余分配），那么选择一个 $x \in T_j^k$用于 $k \in a_j^*$（$c_j$）将是最优的。若代理人总是做出此类选择，我们就称其策略是短视最优的。由此可得以下简单观察。

**引理4**。如果交易 机制是显然策略无关的，那么代理人的策略就是短视最优的。

证明。假设不然，那么存在一个 $x \in \tilde{T}_j^k$，使得对于 $k \neq s_j$（$c_j$），对所有$x' \in T^{s_j(c_j)}$ $j$ 都有 $c \cdot x < c \cdot x'$。但这样一来， $s_j$（$c_j$）就不会显然优于 $k$。 □

引理4将显然策略无关机制的范围缩小到策略短视最优的机制，但并未告诉我们交易协议应采取何种形式。事实证明，以下这类交易机制在本分析中发挥着至关重要的作用。

**定义**。代理人 $j$ 的交易集是极化射线，当且仅当

1. 对于每个 $k \in K_j$，集合 $T_j^k$都是一条端点为 $\eta_j$的非单调射线，即 $T_j^k = \{x \in \mathbb{R}^I : (x - \eta_j) = y\kappa_j^k, \quad y \in \mathbb{R}_+\}$，其中存在某个 $\kappa_j^k \in \mathbb{R}^I$ 使得 $\kappa_j^k \geq 0$ 且 $\kappa_j^k \leq 0$，并且

2. 对于任意 $k', k'' \in K_j$，存在标量 $y', y'' \geq 0$，其中至少一个严格为正，使得 $y'\kappa_j^{k'} + y''\kappa_j^{k''} \geq 0$

直观地说，定义代理人交易集合的射线发生极化，意味着这些集合会将代理人的分配推向不同方向。理解这一点的一种方式是：极化的必要（但非充分）条件是，任意两条射线都不能“拿走”同一项任务，也就是说，任意两条射线的负坐标集合必须互不相交。图1展示了一个例子。

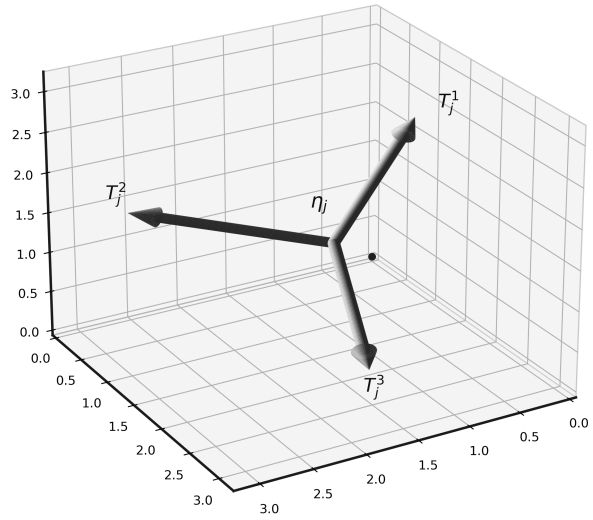


图1：极化射线

**定义**。 一个极化射线机制由交易协议 $\mathcal{T}$ 和策略组合 $\{s_j : C_j \mapsto K_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ 构成，且对任意代理人 $j$

1. 要么 $j$ 的交易集合是极化射线，要么 $j$ 获得两个交易集合： $\{\eta_j\}$和$\{x \in \mathbb{R}_+ : x \leq \eta_j\}$；并且

2. $j$的策略是短视最优的，即对于所有 $c_j \in C_j$， $s_j(c_j) \subset a_j^*(c_j)$ .

**示例**。 从上文介绍的示例来看

- 双边交易机制（显然）是一种极化射线机制。
- 双价格二元分类机制是极化射线机制，当且仅当对于所有 $j$， $p_j^1 \le p_j^2$。

**定理 2**。 任何极化射线机制都是显然策略无关的。若偏好严格单调，则任何显然策略无关的交易机制都被极化射线机制有效支配。

证明。 假设我们有一个显然策略无关的机制（$\mathcal{T}$， $a^*_{\mathcal{T}}$）。我们先给出一些中间断言。

断言 *1*。 对于所有 $j \in \mathcal{J}$ 和 $k \in K_j$， $\eta_j \in T_j^k$。

断言 *1* 的证明。 如果每个代理人都选择 $\{\eta_{j'}\}$，那么市场出清要求将 $j$ 分配给 $\eta_j$。因此，对于所有 $k \in K_j$，必有 $\eta_j \in T_j^k$。 □

断言 *2*。 对于任意 $c_j$，对于所有 $k \neq s_j^*(c_j)$ 和 $x \in T_j^k$，必有 $c_j \cdot x \ge c_j \cdot \eta_j$。

断言 *2* 的证明。 假设存在 $k \neq s_j^*(c_j)$ 和 $x \in T_j^k$，使得 $c_j \cdot x < c_j \cdot \eta_j$。根据断言 1，$\eta_j \in T_j^{s_j(c_j)}$。但这样一来，$\eta_j$ 可以通过行动 $s_j(c_j)$ 来选择，而 $x$ 可以通过行动 $k$ 来选择，因此 $s_j(c_j)$ 并未明显优于 $k$。 □

断言 *3*。 如果 $x'$， $x'' \in T^k$，那么不存在 $c_j \in \mathbb{R}_+^I$，使得 $c_j \cdot x' < c_j \cdot \eta_j$ 且 $c_j \cdot x'' > c_j \cdot \eta_j$。

断言 *3* 的证明。 根据断言 2，如果存在这样的 $c_j$，那么 $s_j(c_j) = k$，因为 $c_j \cdot x' < c_j \cdot \eta_j$。但由于 $x'' \in T_j^k$ 和 $c_j \cdot x'' > c_j \cdot \eta_j$，选择 $k$ 并未明显优于选择 $\{\eta_j\}$。

□

命题 *4*. 对于每个 $j \in \mathcal{J}$ 和 $k \in K_j$，以下情况之一成立

1. 对于所有 $x \in T_j^k$， $x \ge \eta_j$。
2. 对于所有 $x \in T_j^k$， $x \le \eta_j$。
3. $T_j^k$ 包含在一条以 $\eta_j$ 为起点的非单调射线中，即 $T_j^k \subset \{x \in \mathbb{R}^I : (x' - \eta_j) = y\kappa, y \in \mathbb{R}_+\}$ 对于某个 $\kappa \in \mathbb{R}^I$，使得 $\kappa \not\ge 0$ 且 $\kappa \not\le 0$。

命题 *4* 的证明。 如果 $x'$ 或 $x''$ 等于 $\eta_j$，则结论成立，因此假设情况并非如此。考虑断言 3 中的条件。根据 Farkas引理，以下条件等价

1. 不存在 $c_j \in \mathbb{R}_+^I$ 使得 $c_j \cdot x' < c_j \cdot \eta_j$ 且 $c_j \cdot x'' > c_j \cdot \eta_j$。

2. 存在 $y', y'' \in \mathbb{R}_+$，其中至少一个严格为正，使得 $y'(x' - \eta_j) \geq y''(x'' - \eta_j)$。

因此，断言 3 意味着上述第二个条件成立。交换 $x'$ 和$x''$ 的角色，我们也可得，存在 $\hat{y}'$, $\hat{y}'' \in \mathbb{R}_+$，其中至少一个严格为正，使得 $\hat{y}'(x' - \eta_j) \leq \hat{y}''(x'' - \eta_j)$。

假设 $y' > 0$ （若 $y'' > 0$，则可作对称论证）。于是 $x' - \eta_j \geq \frac{y''}{y'}(x'' - \eta_j)$。因此我们有 $\hat{y}''(x'' - \eta_j) \geq \hat{y}' \frac{y''}{y'}(x'' - \eta_j)$。这意味着以下情况之一成立

1. $x'' - \eta_j \geq 0$ 和 $\hat{y}'' \geq \hat{y}' \frac{y''}{y'}$ 2.
$x'' - \eta_j \leq 0$ 和 $\hat{y}'' \leq \hat{y}' \frac{y''}{y'}$。 3.
$x'' - \eta_j \not\geq 0$、 $x'' - \eta_j \not\leq 0$ 和 $\hat{y}'' = \hat{y}' \frac{y''}{y'}$。

—

如果属于第一种情况，即 $x'' - \eta_j \geq 0$ 和 $\hat{y}'' \geq \hat{y}' \frac{y''}{y'}$，那么 $x' - \eta_j \geq 0$ 也成立。由于$x'$和 $x''$是从 $T_j^k$中任意选取的，因此对于所有 $(x - \eta_j) \in T_j^k$，都有 $x \geq 0$。类似地，在第二种情况下，即 $x'' - \eta_j \leq 0$ 和 $\hat{y}'' \leq \hat{y}' \frac{y''}{y'}$，对于所有 $x \in T_j^k$，都有 $(x - \eta_j) \leq 0$。

考虑第三种情形，其中 $x'' - \eta_j \not\geq 0$、 $x'' - \eta_j \not\leq 0$ 和 $\hat{y}'' = \hat{y}' \frac{y''}{y'}$。注意，若此条件成立，则 $y''$, $\hat{y}'$, $\hat{y}''$ 必须严格为正（并且我们仍假设 $y' > 0$），因此 $\hat{\frac{y''}{y'}} = \frac{y''}{y'} \hat{}$。于是我们有

$$\frac{y''}{y'}(x'' - \eta_j) \geq (x' - \eta_j) \quad \text{and} \quad \frac{y''}{y'}(x'' - \eta_j) \leq (x' - \eta_j)$$

因此 $\frac{y''}{y'}(x'' - \eta_j) = (x' - \eta_j)$。换言之，$(x'' - \eta)$ 和 $(x' - \eta)$ 位于同一射线上。于是 $T_j^k$ 包含在一条起点为 $\eta_j$ 的射线上。 □

如果对于所有 $x \in T_j^k$ 都有 $x \leq \eta_j$，我们称集合 $T_j^k$ 为补救型；如果对于所有 $x \in T_j^k$ 都有 $x \geq \eta_j$，则称其为冗余。命题 *5*。如果 $T_j^{k'}$ 和 $T_j^{k''}$ 都不是补救型，则它们是极化的。

命题 *5* 的证明。如果 $T_j^{k'}$和 $T_j^{k''}$中有一个是冗余的，那么它们显然是极化的，因此不妨假设二者都不冗余。由命题 4 可知，$T_j^{k'}$和 $T_j^{k''}$都包含在从 $\eta_j$出发的射线中。因此，只需证明存在 $x' \in T_j^{k'}$、 $x'' \in T_j^{k''}$ 和 $y', y'' \geq 0$，其中至少一个严格为正，使得 $y'x' + y''x'' \in \mathbb{R}_+^I$。

令 $x' \in T_j^{k'}$、 $x'' \in T_j^{k''}$为满足 $x' \neq \eta_j$、 $x'' \neq \eta_j$的任意选择。注意，不可能存在 $c_j \geq 0$ 使得 $c_j \cdot x' \leq c_j\eta_j$ 且 $c_j \cdot x'' < c_j\eta_j$。若情况如此，那么由于 $x' - \eta_j \not\geq 0$，我们可以找到 $c_j'$使得 $c_j'x' < c_j'\eta_j$且 $c_j'x'' < c_j' \cdot \eta_j$，这与断言 2 矛盾。根据 Farkas引理，以下各项等价

i. 不存在满足 $c_j \cdot x' \leq c_j\eta_j$ 和 $c_j \cdot x'' < c_j\eta_j$ 的 $c_j \geq 0$ 。

ii. 存在 $y' \geq 0,\ y'' > 0$，使得 $y'(x' - \eta_j) + y''(x'' - \eta_j) \geq 0$。

第二个条件恰恰就是我们想要证明的内容。 □

断言*6*。 如果 $T_j^k$ 是补救型，且 $T_j^k \neq \{\eta_j\}$，那么对于所有 $k' \in K_j$， $T_j^{k'}$ 都是补救型或冗余的。断言*6*的证明。 根据命题 4，如果 $T_j^{k'}$ 既非补救型也非冗余，那么它包含在一条从 $\eta_j$ 出发的非单调射线中。于是存在 $c_j \geq 0$、 $c_j \neq 0$ 和 $x' \in T_j^{k'}$，使得 $c_j \cdot x' < c_j \cdot \eta_j$。那么对于任意 $x \in T_j^k$、 $x \neq \eta_j$，我们也可以选择 $c_j$，使得 $c_j \cdot x < c_j \cdot \eta_j$。但这与断言 2 矛盾。

□

称代理人 $j$ 的机制是 补救型的，当且仅当对于所有满足 $T_j^k \neq \{\eta_j\}$ 的 $k \in K_j$， $T_j^k$ 都是补救型的。

我们已经得出结论：对于任意 $j \in \mathcal{J}$， $j$ 的交易集合族具有以下两种形式之一。

1. 对于所有 $k \in T_j^k$， $T_j^k$ 都是补救型的或冗余的。

2. $(T_j^k)^{k \in K_j}$ 可以划分为一组包含于来自 $\eta_j$ 的极化射线集合中的集合，以及一组冗余集合。

此外，如果偏好是严格单调的，那么任何冗余集合都不可能被选中（选择冗余集合显然被选择 $\{\eta_j\}$ 所支配），因此，移除冗余集合后，我们可以得到一个等价的机制。于是，该机制被极化射线机制所支配。

剩下要证明的是，任何极化射线机制都是显然策略无关的。任何 $j$ 拥有补救型机制的人都有一个平凡的占优策略。假设 $j$的机制由极化射线组成。那么（如命题 5 的证明中利用 Farkas引理所示），如果 $c_j \cdot x' \leq c_j \cdot \eta_j$ 对于某个 $x' \in T_j^{k'}$ 成立，那么 $c_j \cdot x'' \geq c_j \cdot \eta_j$对于所有 $x'' \in T_j^{k''}$, $k'' \neq k'$都成立。因此，选择 $k'$是显然占优的。

□

定理 2 大幅降低了设计者需要搜索的机制空间的维度。具体而言，该刻画意味着，对于所有 $j$， $|K_j| \leq I+1$。

**推论2**。 在$\mathbb{R}^I$ 中的任意极化射线集合至多有 $I$ 个成员。因此，在任何非冗余 OSP 机制中都有 $|K_j| \leq I+1$ 。

证明。 设$(\kappa_j^k)^{k\in K_j}$ 是定义 $j$的极化射线的向量。根据定义，对于任何 $k' \in K_j$都有 $\kappa_j^{k'} \ngeq 0$ ，因此它至少有一个严格为负的坐标。此外，如果 $\kappa_j^{k'}(i) < 0$，那么 $\kappa_j^{k''}(i) \geq 0$，因为否则对于任何 $y'$， $y'' \geq 0$ 都会至少有一个严格为正的坐标，从而 $y'\kappa_j^{k'} + y''\kappa_j^{k''} \ngeq 0$ 。因此，这样的向量至多有 $I$ 个。

□

定理 2 的另一个推论是，除了决定机制的本质约化之外，选择规则与确定交易机制（$\mathcal{T}$， $s_{\mathcal{J}}$）是否为显然策略无关无关。

**^推论 3.** 假设偏好严格单调，且 $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{J}})$ 显然策略无关。令 $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{J}})$ 为本质支配 $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{J}})$ 的极化射线机制（根据定理 2，该机制存在）。^ 那么，将 $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{J}})$ 中的选择规则替换为任意替代规则，所得机制也显然策略无关。

鉴于推论 3，对于设计者而言，采用如下形式的事后最优分配规则不会损失最优性

$$P(k_{\mathcal{J}}) \in \underset{\mu\in\Delta(\mathcal{Z})}{\arg\min} \sum_{j\in\mathcal{J}} \pi_j \cdot \mu_j \quad s.t. \quad \mu_j \in T_j^{k_j} \ \ \forall\, j \in \mathcal{J}.$$

我们将采用此选择规则的极化射线机制称为事后最优极化射线（EOPR）机制。结合前述观察，选择交易机制的问题由此大为简化。

## 3.1 稳健性

考虑任意一个带有 $\eta_j = \sigma_j$ 的 EOPR机制。由于，对于所有 $j \in \mathcal{J}$ 和 $k \in K_j$， $\eta_j \in T_j^k$设计者始终可以选择现状分配，而不受代理人

行动的影响。因此，该机制确保预期社会成本不高于现状下的社会成本。特别是，无论代理人偏好的概率分布如何，该机制都能确保获得预期收益，因此在这一维度上对设定错误具有稳健性。事实上，这一结论甚至不依赖于代理人的偏好是线性的。[16] 因此，任何EOPR机制都是可供实践采用的合理候选方案。尽管如此，如果设计者对类型分布有所了解，他们可能会希望利用这些知识，在不同的 EOPR机制中进行选择。

# 4 迈向最优交易机制

根据定理 2 和推论 3，设计者不失最优性地可以将注意力限制在 EOPR机制上，即采用如下选择规则的极化射线机制

$$P(k_{\mathcal{J}}) \in \underset{\mu \in \Delta(\mathcal{Z})}{\arg\min} \sum_{j \in \mathcal{J}} \pi_j \cdot \mu_j \quad s.t. \quad \mu_j \in T_j^{k_j} \ \ \forall\, j \in \mathcal{J}.$$

尽管维度大幅降低，设计者的目标函数仍然有些复杂。对于给定的机制和偏好概况，显然策略无关使代理人的最优响应问题变得简单明了。然而，要确定分配，设计者还需要求解一个额外的线性规划，该规划以一种并不完全直观的方式将不同代理人的机制联系起来。

我们可以通过研究“大市场”松弛来简化这一规划。在这种松弛中，设计者规划的某些部分可以在代理人之间分离。随后，可以将松弛规划的解作为寻找原始规划之解的起点；我们证明，对于大市场，松弛规划的解在原始规划中近似最优。一般而言，松弛规划无法通过解析方法求解，其计算复杂度仍是一个悬而未决的问题。尽管如此，大市场松弛所带来的并行化确实降低了计算负担。此外，在任务类型为两种的特殊情况下，该规划存在解析解。

[16]如果偏好是非线性的，那么该机制可能不再是显然策略无关的。不过，在所诱导博弈的任何均衡中，设计者仍能保证取得（弱）改进。

## 4.1 大市场模型

在设计者的真实规划中，对于每一种实现的偏好概况，每项任务都必须分配给一位代理人。假设我们改为只要求每项任务在对偏好概况取期望的意义下得到分配。也就是说，对于机制 $m$，我们将式（1）中的市场出清条件替换为

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j\in\mathcal{J}} m_j(i|\mathbf{c})\right] = n^i \quad \forall\, i \in \mathcal{I}. \tag{3}$$

对这种放宽的一种解释是，每个代理人实际上代表一群绩效相同、总质量为单位质量的代理人，而 $F_j$ 描述了这一群体中的偏好分布。因此，我们将这种放宽称为大市场出清（LM-MC）约束。

固定一个禀赋 $\eta \in \Delta(\mathcal{Z})$。令 $\{T_j^k\}_{k\in K_j}$ 为每个 $j$ 的交易集构成的集合，其禀赋为 $\eta_j$；令 $s_j : C_j \mapsto K_j$ 为针对 $j$ 的短视最优策略。令 $(P_j : K_j \mapsto \mathbb{R}_+^I)_{j\in\mathcal{J}}$ 为设计者的一组个体层面的选择规则，其中我们要求 $P_j(k) \in T_j^k$，但不要求它们合在一起时满足事后市场出清。若每个代理人根据策略 $s_j$ 从 $K_j$ 中进行选择，且设计者根据 $P_j$ 从 $T^{s_j(c_j)}\ j$ 中进行选择，则该间接机制满足 LM-MC 约束，当且仅当

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} E_j[P_j(s_j(c_j))] = (n_1, \ldots, n_I).$$

反之，如果我们用一个满足事后市场出清的（合法）选择规则 $P : \prod_{j\in\mathcal{J}} K_j \mapsto \Delta(Z)$ 替换个体层面的选择规则 $(P_j)_{j\in\mathcal{J}}$，那么 LM-MC 必然也成立。因此，以下规划给出了选择

具有禀赋 $\eta$ 的最优 OSP 交易机制的价值上界：

$$\min_{(\{T_j^k\}_{k\in K_j},P_j)_{j\in\mathcal{J}}} \quad \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\pi_j(i)\ \mathbb{E}\left[m_j(i|\mathbf{c})\right] \tag{4}$$

$$s.t.\ \text{的交易集合要么是极化射线，要么 } j \text{ 接收}$$

$$\text{two trading sets: } \{\eta_j\} \text{ and } \{x\in\mathbb{R}_+ \ :\ x\le\eta_j\}; \text{ and} \tag{OSP}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} E_j[P_j(s_j(c_j))] = (n_1,\ldots,n_I). \tag{LM-MC}$$

我们可以进一步放宽这一规划，允许设计者针对每个 $j$，在交易集合和选择规则上进行随机化。在大市场规划的总体解释下，随机化等同于将每个“代理人”拆分为若干子集，并让这些子集接收不同的机制。因此，为了简化记号，我们不在规划（等式（4））中明确建模随机化，因为可以通过重新定义 $\mathcal{J}$ 来表示随机化。[17] 我们将（4）中的规划（允许随机化）称为大市场 *OSP* 规划。

## 4.2 求解大市场 OSP 规划

将规划中仅依赖于$\mathbb{E}_j[P_j(s_j(c_j))]$的部分单独列出会很方便。定义 $j$ 的*OSP* 可行集 如下：

$\mathcal{F}_j :=$ cvh $\Big\{\mathbb{E}_j[P_j(s_j(c_j))]\in\mathbb{R}_+^I:\ P_j:K_j\to\mathbb{R}_+^I$; 且 $j$ 的交易集合要么是极化射线，要么 $j$ 接收两个交易集合：$\{\eta_j\}$ 和 $\{x\in\mathbb{R}_+:\ x\le\eta_j\}\Big\}$.

其中 cvh 表示凸包。换言之，$\mathcal{F}_j$ 是可以通过满足规划 (4) 除 (LM-MC) 之外所有条件的（随机）交易协议和选择规则诱导出的$j$ 的期望配置集合。于是，大市场 OSP 规划的值与

[17]严格来说，只有当随机化涉及有理权重时，这种记号技巧才成立，但这不应造成混淆。

具有相同的值

$$\min_{(x_j)_{j\in\mathcal{J}}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \pi_j \cdot x_j \tag{5}$$

$$s.t. \quad x_j \in \mathcal{F}_j \quad \forall\ j \in \mathcal{J}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} x_j(i) = n^i \quad \forall\ i \in \mathcal{I} \tag{LM-MC}$$

我将式 (5) 称为外层规划。研究该规划的对偶问题很有启发意义，其可写为

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^I} \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda^i n^i - \sum_{j\in\mathcal{J}} S_j(\lambda - \pi_j) \tag{6}$$

其中， $S_j(w) := \max\{w \cdot y : \ y \in \mathcal{F}_j\}$ 是凸集 $\mathcal{F}_j$的支撑函数。强对偶成立，这意味着式 (5) 中外层规划的值与式 (6) 中其对偶问题的值相同。

**命题 2.** 外层规划满足强对偶。此外，若 $\lambda_*$ 是式 (6) 中规划的一个解，则存在一些选择

$$x_j \in \arg\max\{(\lambda_* - \pi_j) \cdot y \ : \ y \in \mathcal{F}_j\}$$

使得 $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ 满足市场出清，且这些选择构成式 (5) 中规划的一个解。

证明. 证明见 A.1 节。 □

给定支撑函数（$S_j$）$_{j\in\mathcal{J}}$，式（6）中的对偶规划是一个简单的 $I$维凸最小化规划。唯一的难点在于刻画支撑函

数。将定义这些函数的规划更明确地写出，我们得到

$$
\begin{aligned}
S_j(w) = \max_{\{T_j^k\}_{k\in K_j}, P_j, s_j} \quad & w \cdot \mathbb{E}_j[P_j(s_j(c_j))] \\
s.t. \quad & s_j \text{ is myopically optimal;} \\
& P_j : K_j \to \mathbb{R}_+^I \text{ ; and} \\
& \text{either } j\text{'s trading sets are polarized rays, or } j \text{ receives} \\
& \quad \text{two trading sets: } \{\eta_j\} \text{ and } \{x \in \mathbb{R}_+ \ : \ x \leq \eta_j\}.
\end{aligned}
$$

最终，这个规划需要通过计算求解。支撑函数可以针对每个代理人分别刻画，这一点有所帮助，但问题仍然颇具挑战。不过，通过一些观察，我们可以在一定程度上简化这个规划。首先请注意，提供 $j$ 补救菜单的选项，即两个交易集 $\{\eta_j\}$和$\{x \in \mathbb{R}+ : \ \ x \leq \eta_j\}$ ，只有在 $w \leq 0$时才真正有价值，此时 $S_j(w) = 0$。[18] 因此，唯一困难的情况是 $w \not\leq 0$，此时我们求解

$$
\begin{aligned}
S_j(w) = \max_{\{T_j^k\}_{k\in K_j}, P_j, s_j} \quad & w \cdot \mathbb{E}_j[P_j(s_j(c_j))] \\
s.t. \quad & s_j \text{ is myopically optimal;} \\
& P_j : K_j \to \mathbb{R}_+^I \text{ ; and} \\
& j\text{'s trading sets are polarized rays}
\end{aligned}
$$

现在考虑这样一项约束： $j$的交易集必须是极化射线。我们已经指出，这类射线至多有 $I$ 条（推论2）。设$\kappa_j^k$ 是定义射线$T_j^k$的向量（其中$\kappa_j^k = 0$适用于$T_j^k = \{\eta_j\}$）。那么，极化射线约束为

$$
\text{cvh}\left\{\kappa_j^{k'}, \kappa_j^{k''}\right\} \cap \mathbb{R}_+^I \neq \varnothing \quad \forall\ k', k'' \in K_j.
$$

[18]形式上，如果 $w \not\leq 0$，那么通过设置 $x^*(i) = \eta_j(i)$（当 $w(i) \geq 0$时）以及 $x^*(i) = 0$（否则），即可求得 $\max\{w \cdot x : \ x \leq \eta_j\}$。接着令 $\kappa_j = x^* - \eta_j$。采用集合 $\{\{\eta_j\}, \{y\kappa_j + \eta_j, y \in \mathbb{R}_+\}\}$的交易协议会产生与补救菜单相同的结果。这些并不完全是极化射线，因为 $\kappa_j \leq 0$。不过，如果在 $w^*(i) > 0$时将 $\varepsilon > 0$ 加入 $\kappa_j(i)$，就能将其构造成极化射线机制。如果 $j$的类型是连续分布的，那么这种交易机制产生的结果近似相同。或者，我们可以扩展极化射线机制的定义，允许 $\kappa_j(i) \leq 0$。再或者，我们也可以直接求解最优极化射线机制，并将其与 $\max\{w \cdot x : \ x \leq \eta_j\}$的价值进行比较。

我们还可以应用Farkas引理，重新表述极化射线约束。

**引理 5.** 当且仅当由向量 $\{\kappa_j^k\}_{k\in K_j}$ 定义的射线 $\{T_j^k\}_{j\in K_j}$ 是极化的

$$\min_{c_j\in R_+^I}\left\{c_j\cdot\kappa_j^{k'}\ :\ c_j\cdot\kappa_j^{k''}\le 0\right\}\ge 0\quad\forall\ k'\neq k''\text{ with }T_j^{k''}\neq\{\eta_j\}.$$

证明。 证明见 A.2节。 □

尽管作了这些简化，但如何有效地刻画 $S_j$ 仍是一个悬而未决的问题，我们将其留待今后研究。

注 1。 Baron 等（2025）研究了仅包含两种任务类型、但允许任意 BIC机制的大市场规划版本。不过，他们证明，在类型分布满足正则性条件的情况下，最优机制实际上是一种极化射线机制（包含两条射线）。在这种情况下，将范围限制为显然策略无关交易机制并不会损失最优性（就大市场规划而言），且可以解析地刻画支撑函数。

## 4.3 从大市场回到小市场

如上所述，任何 EOPR机制都能改善现状，无论从设计者的角度还是从每位代理人的角度来看都是如此。大市场规划的一个解是自然的候选方案。代理人数量较大且有限时，这一机制（并不令人意外）近似最优。为使这一论断形式化，考虑一个由整数 $N$ 索引的复制经济序列。在 $N$ 复制经济中，每位代理人有 $N$ 个绩效相同的副本，但其偏好是从同一概率分布中独立抽取的。我们将这些代理人称为“群组 $j$”。此外，还有 $Nn^i$ 个任务 $i$ 的副本。

固定大市场规划的一个解，它是一个 EOPR机制，记为 $m^*$。对于每个 $N$，我们实施机制 $m^*$。如果 $m^*$ 涉及对代理人 $j$ 进行随机化（大市场规划允许这样做），那么我们就在 $N$ 复制经济中复制这种随机化：将随机化机制支持集中的每种交易协议，提供给比例相应的 $N$组-$j$代理人。[19] 令 $V_{LM}^*(N)$ 表示该机制下社会成本对应的

[19]也就是说，如果在 $m^*$ 代理人 $j$ 收到交易协议 $\{T_j^k\}_{k\in K}$ $_j$ 的概率为 $\varepsilon$，那么 $\lfloor\varepsilon N\rfloor$ 的

随机变量，并令 $V^*(N)$ 表示 $N$ 复制经济中最优机制所对应的随机变量（它们是随机的，因为取决于实际实现的偏好概况）。如果市场不断扩大时，大市场规划的解满足渐近最优，那么我们称该解为渐近最优；若 $\frac{1}{N}V^*_{LM}(N) \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{N}V^*(N)$，当 $N \to \infty$ 时。

**命题 3.** 随着市场规模扩大，大市场规划中的最优机制在原始规划中渐近最优。

证明。 证明见 A.3 节。 □

# 5 结论

本文研究了在代理人的偏好属于私人信息且每位代理人都可以坚持现状分配时，如何在代理人之间分配异质任务（或对象）的问题。本文的首要贡献是，明确刻画了设计者在何种条件下，放弃控制权以允许分配通过基于选择的机制响应代理人的偏好才是最优的。定理1表明，在现状和偏好异质性的丰富程度满足温和条件时，只要底层分配问题并非平凡问题，选择就具有价值：只要代理人的绩效并不完全相同且偏好分布非退化，就存在能够严格改善现状的机制。此外，该结果还表明，在判断选择是否有价值时，将考察范围限制在显而易见策略占优的交易机制上，相对于考察完整的贝叶斯激励相容机制类别，并不会造成损失。

第二项贡献是对显然策略无关交易机制这一类机制给出明确且具有实践价值的刻画。定理 2 表明，所有显然策略无关的交易机制实际上都是极化射线机制：代理人要么无法作出有效选择，要么在一个由现状发出的极化射线菜单中进行选择。这一刻画在交易集合的形状和菜单规模两方面都实现了维度约简

组-$j$ 代理人采用此交易协议（任何剩余代理人都可以分配给 $m^*$ 支持集中的任意机制，因为这不会影响渐近结果）。

。此外，这类机制具有稳健性：事后最优极化射线（EOPR）机制无论偏好分布如何，都能保证相对于现状带来弱改善。最后，本文通过构建一个具有（相对）易处理的对偶表述的大市场松弛，并证明由此得到的设计在大型复制经济中渐近最优，为实践中从 OSP候选方案中进行选择提供了一条有理论依据的途径。

仍有许多有趣的问题尚未得到解答。例如，当我们允许转移支付时，显然策略无关机制的刻画将如何变化？在任务属于“商品”的情形下（见第1.2节），这种刻画可能会发生更大的变化？另一个问题是，我们如何识别那些根据设计者目标函数表现良好的EOPR机制。正如第4节所讨论的，大市场规划的对偶表述简化了这一问题。然而，这种方法需要刻画支撑函数$S_j$，这意味着要解决一个困难的优化问题，其中选择的定义域是极化射线菜单。在实践中，若能采用计算方法近似求解该规划，将会很有用。

# 参考文献

D. Acemoglu和P. Restrepo。《建模自动化》。载于*AEA*论文与会议录，第108卷，第48–53页。美国经济学会，2014 Broadway，Suite 305，Nashville，TN 37203，2018年。

N. Agarwal、C.Hodgson 和 P. Somaini。分配机制中的选择与结果：逝世者捐赠肾脏的分配。《计量经济学》，93(2):395–438，2025年。

N. Ahani、T. Andersson、A. Martinello、A. Teytelboym 和 A. C. Trapp。难民安置中的安置优化。《运筹学》，69(5):1468–1486，2021年。

R. Alonso 和 N. Matouschek。最优委托。《经济研究评论》，75(1):259–293，2008年。

K.Bansak、J.Ferwerda、J. Hainmueller、A. Dillon、D.Hangartner、D.Lawrence 和 J.Weinstein。通过数据驱动的算法分配改善难民融入。《科学》，359(6373):325–329，2018年。

E. J. Baron、R. Lombardo、J. P. Ryan、J. Suh 和 Q. Valenzuela-Stookey。《任务分配的机制改革》。技术报告，美国国家经济研究局，2025年。

A. Bergeron、P. Bessone、J. K. Kabeya、G. Z. Tourek 和 J. L. Weigel。超模官僚：来自刚果民主共和国随机分配税务征收员的证据。技术报告，工作论文，2024。Y. Breitmoser 和 S. Schweighofer-Kodritsch。无时无刻不显然。《实验经济学》，25(2)：483–513，2022。E. Budish。组合分配问题：基于等额收入的近似竞争均衡。《政治经济学期刊》，119(6)：1061–1103，2011。E. Budish。匹配“对比”机制设计。《ACM SIGecom Exchanges》，11(2)：4–15，2012。

B. Chu、B. Handel、J. Knecht、J. Kolstad、U. Malmendier 和 F. Matjeka。思考与行动：认知能力、决策和医学诊断。工作论文，2025。C. Daskalakis、A. Deckelbaum 和 C. Tzamos。最优机制设计的复杂性。载于第二十五届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集，第 1302–1318 页。SIAM，2014。C. Daskalakis、A. Deckelbaum 和 C. Tzamos。多商品垄断者的强对偶性。载于第十六届 *ACM*经济学与计算会议论文集，第 449–450 页，2015。D. Delacr´etaz、S. D. Kominers 和 A. Teytelboym。难民安置的匹配机制。《美国经济评论》，113(10)：2689–2717，2023。P. D¨utting、M. Feldman、T. Kesselheim 和 B. Lucier。标价、光滑性与组合先知不等式。《arXiv预印本 arXiv:1612.03161》，2016。M. Feldman、N. Gravin 和 B. Lucier。通过标价进行组合拍卖。载于第二十六届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集，第 123–135 页。SIAM，2014。D. Gale 和 L. S. Shapley。大学录取与婚姻稳定性。《美国数学月刊》，69(1)：9–15，1962。L. Golowich 和 S. Li。关于显然策略无关机制的计算性质。《arXiv预印本 arXiv:2101.05149 》，2021。S. Hart 和 N. Nisan。销售多个相关商品：收益最大化与菜单规模复杂性。《经济理论杂志》，183：991–1029，2019。B. Holmstrom。关于委托理论。技术报告，讨论论文，1984。B. R. Holmstr¨om。组织中的激励与控制。斯坦福大学，1978。A. Hylland 和 R. Zeckhauser。个人向职位的有效配置。《政治经济学期刊》，87(2)：293–314，1979。

P. Lahr 和 A. Niemeyer。多维筛选中的极点。*arXiv* 预印本 *arXiv:2412.00649*，2024。S. Li。显然策略无关机制。《美国经济评论》，107(11):3257– 3287，2017。A. M. Manelli 和 D. R. Vincent。捆绑销售作为多商品垄断者的最优销售机制。《经济理论杂志》，127(1):1–35，2006。R. B. Myerson。最优拍卖设计。《运筹学数学》，6(1):58–73，1981。I. Palacios-Huerta、D. C. Parkes 和 R. Steinberg。组合拍卖的实践。《经济文献杂志》，62(2):517–553，2024。G. Pavlov。出售两种商品的最优机制。《*The BE Journal of Theoretical Economics*》，11(1)，2011。J.-C. Rochet。拟线性环境中可理性化性的充要条件。《数理经济学杂志》，16(2):191–200，1987。A. E. Roth。厌恶作为市场约束。《经济展望杂志》，21 (3):37–58，2007。L. Shapley 和 H. Scarf。论核心与不可分性。《数理经济学杂志》，1 (1):23–37，1974。J. Thanassoulis。替代品讨价还价。《经济理论杂志》，117(2):217–245，2004。Q. Valenzuela-Stookey。信息不对称下的自动化与任务分配。工作论文，2025年。H. R. Varian。公平、嫉妒与效率。《经济理论杂志》，1973。

# A 省略的证明

## A.1 命题 2 的证明

证明。我们首先验证，式（6）中的规划确实是式（5）的对偶。令 $\lambda^i$ 为 LM-MC 约束上的乘子，我们有

$$\begin{aligned}
&\min_{(x_j)_{j\in\mathcal{J}}} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^I} \sum_{j\in\mathcal{J}} \pi_j \cdot x_j - \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda^i \left( \sum_{j\in\mathcal{J}} x_j(i) - n^i \right) \quad s.t. \quad x_j \in \mathcal{F}_j \quad \forall\, j \in \mathcal{J} \\
&\quad \geq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^I} \min_{(x_j)_{j\in\mathcal{J}}} \sum_{j\in\mathcal{J}} \pi_j \cdot x_j - \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda^i \left( \sum_{j\in\mathcal{J}} x_j(i) - n^i \right) \quad s.t. \quad x_j \in \mathcal{F}_j \quad \forall\, j \in \mathcal{J} \\
&\quad = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^I} \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda^i n^i - \sum_{j\in\mathcal{J}} \max_{x_j\in\mathcal{F}_j} \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\lambda^i - \pi_j(i)\right) x_j^i \\
&\quad = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^I} \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda^i n^i - \sum_{j\in\mathcal{J}} S_j(\lambda - \pi_j)
\end{aligned}$$

第二行中的不等式由弱对偶性得出，最后一行则由支撑函数的定义得出。

由于向代理人 $j$ 提供单一交易集 $\{\eta_j\}$ 是可行的，我们有 $\eta_j \in \mathcal{F}_j$。若对于所有 $j$，$\eta_j$ 都位于 $\mathcal{F}_j$ 的内部，则斯莱特条件成立，证明即告完成。否则，定义一个扰动问题，令

$$\mathcal{F}_j^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}_+^I \ : \exists\ y \in \mathcal{F}_j \text{ with } |x - y| \leq \varepsilon\}.$$

对于 $\varepsilon \geq 0$，并令 $S_j^\varepsilon$ 为该集合的支撑函数。于是对于所有 $j$，$\eta_j$ 都位于 $\mathcal{F}_j^\varepsilon$ 的内部，因此若将 $\mathcal{F}_j$ 替换为 $\mathcal{F}_j^\varepsilon$，则对于任意 $\varepsilon > 0$，斯莱特条件均成立。令 $P_\varepsilon$ 和 $D_\varepsilon$ 分别表示 $\varepsilon$ 处原问题和对偶规划的值。注意，$\mathcal{F}_j^\varepsilon$ 是紧的且为凸值，而 $\varepsilon \mapsto \mathcal{F}_j^\varepsilon$ 在 $\mathbb{R}$+ 上是上半连续和下半连续的。因此，根据伯格最大值定理，$\varepsilon \mapsto P_\varepsilon$ 是连续的，并且当 $\varepsilon \to 0$ 时收敛到 $P_0$。

现在注意到 $\varepsilon \mapsto S_j^\varepsilon(w)$ 是递增的，因此 $\varepsilon \mapsto D_\varepsilon$ 是递减的。此外，弱对偶（对于一个最小化问题）意味着 $P_0 \geq D_0$。于是，对于所有 $\varepsilon > 0$，都有 $P_\varepsilon = D_\varepsilon \leq D_0 \leq P_0$，并且当 $\varepsilon \to 0$ 时 $P_\varepsilon \to P_0$，这意味着 $D_0 = P_0$。

□

## A.2 引理 5 的证明

证明。 由 $\kappa_j^{k'}, \kappa_j^{k''}$ 定义的射线是极化的（根据定义）当且仅当存在标量 $y', y'' \geq 0$，其中至少有一个严格为正，使得 $y'\kappa_j^{k'} + y''\kappa_j^{k''} \geq 0$。不失一般性，假设 $y' > 0$。根据Farkas引理，以下各项等价

i. 不存在 $c_j \in \mathbb{R}_+^I$ 使得 $c_j \cdot \kappa_j^{k''} \leq 0$ 且 $c_j \cdot \kappa_j^{k'} < 0$。

ii. 存在 $y'' \geq 0, y' > 0$，使得 $y'\kappa_j^{k'} + y''\kappa_j^{k''} \geq 0$。

第一个条件可以重述为： $c_j \cdot \kappa_j^{k'} \geq 0 \ \ \forall\, c_j \in \mathbb{R}_+^I$ 使得 $c_j \cdot \kappa_j^{k''} \leq 0$，这正是我们要证明的。

□

## A.3 命题3的证明

证明。 为简化记号，假设大市场机制不涉及随机化。通过细分各组，将论证直接推广到涉及随机化的情形。

由于该机制显然策略无关，每个代理人的策略都独立于 $N$。令 $d_j^k(N)$ 表示在 $N$ 复制经济中选择交易集 $T_j^k$ 的组-$j$ 代理人集合对应的随机变量。该机制允许设计者为 $d_j^k(N)$ 中的代理人选择不同的分配。然而，为了证明渐近收敛，我们可以假设设计者并未这样做（尽管这可能并非最优）。定义随机变量

$$\tilde{V}_{LM}^*(N) = \min_{(\mu_j^k)} \sum_{j\in\mathcal{J}} \sum_{k\in K_j} |d_j^k(N)|\pi_j^k \cdot \mu_j^k \quad s.t. \quad \mu_j^k \in T_j^k \ \forall\ j \in \mathcal{J},\ k \in K_j,$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j\in\mathcal{J}} \sum_{k\in K_j} \mu_j^k |d_j^k(N)| = (n_1, \ldots, n_I)$$

令 $V_{LM}^*(\infty)$ 表示大市场规划中得到的值，它是任意 $N$ 下 $\frac{1}{N}V^*(N)$ 的下界。因此，要证明该结果，只需证明当 $N \to \infty$ 时， $\frac{1}{N}\tilde{V}_{LM}^*(N) \ \to V_{LM}^*(\infty)$ 几乎必然成立。定义随机变量 $\rho_j^k(N) := \frac{|d_j^k(N)|}{N}$（注意

$\sum_{k\in K_j}\rho_j^k=1$ 对所有 $j$ 均成立）。于是可以写成

$$\frac{1}{N}\tilde{V}_{LM}^*(N)=\min_{(\mu_j^k)}\sum_{j\in\mathcal{J}}\sum_{k\in K_j}\rho_j^k(N)\pi_j^k\cdot\mu_j^k \tag{7}$$

$$s.t.\quad \mu_j^k\in T_j^k\ \forall\ j\in\mathcal{J},\ k\in K_j, \tag{8}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}}\sum_{k\in K_j}\mu_j^k\rho_j^k(N)=(n_1,\ldots,n_I) \tag{9}$$

滥用记号，令 $\tilde{V}_{LM}^*(\rho)$ 表示该规划关于 $\rho=(\rho_j^k)_{j\in\mathcal{J},k\in K_j}$ 的取值。若 $\rho_j^k=\mathbb{E}_j[\mathbb{1}\{s_j(c_j)=k\}]$，则 $\tilde{V}_{LM}^*(\rho)=V_{LM}^*(\infty)$。根据强大数定律，$\rho_j^k(N)\xrightarrow{a.s.}\mathbb{E}_j[\mathbb{1}\{s_j(c_j)=k\}]$，当 $N\to\infty$ 时，对所有 $j,k$ 均成立。因此，我们只需证明 $\tilde{V}_{LM}^*(\rho)$ 在 $\mathbb{E}_j[\mathbb{1}\{s_j(c_j)=k\}]$ 处上半连续。

令 $\kappa_j^k$ 为定义射线 $T_j^k$ 的向量，并选取它使非负约束在 $\eta_j+\kappa_j^k$ 处取等号。那么，任何满足约束 (8) 的 $\mu_j^k$ 都可以写成 $\mu_j^k=\eta_j+\alpha_k^j\kappa_j^k$，其中 $\alpha_j^k\in[0,1]$ 为缩放因子。令 $(\hat{}\alpha_j^k)$ 为定义大市场规划之解的缩放因子。不失一般性，假设 $\hat{}\alpha_j^k>0$，否则只需将 $T_j^k$ 替换为 $\eta_j$。另请注意，对于任意 $\delta\in[0,1]$，由 $(\delta\hat{}\alpha_j^k)$ 定义的分配也满足市场出清，因为由此得到的机制只是大市场解与禀赋 $\eta$ 的凸组合，因此 $(\delta\hat{}\alpha_j^k)$ 也是大市场规划中的一个有效机制。于是，对于任意 $\varepsilon\geq 0$，我们可以选择 $\delta<1$，使得 $(\delta\hat{}\alpha_j^k)$ 在大市场规划中的取值（记为 $V_\delta^*$）不超过 $V_{LM}^*(\infty)+\varepsilon$.~因此，要证明 $V_{LM}^*(\rho)$ 在 $\mathbf{E}_j[\mathbb{1}\{s_j(c_j)=k\}]$ 处上半连续，只需证明：对于任意 $\varepsilon>0$ 和 $\delta\in(0,1)$，存在 $\sigma>0$，使得 $|\mathbb{E}_j[\mathbb{1}\{s_j(c_j)=k\}]-\rho_j^k|<\sigma$~ 蕴含 $V_{LM}^*(\rho)\leq V_\delta^*+\varepsilon/2$。

由于目标函数关于 $\rho$ 连续，我们只需证明，通过取一个足够接近 $\mathbb{E}_j[\mathbb{1}\{s_j(c_j)=k\}]$ 的 $\rho_j^k$ suffi，可以确保存在 $(\alpha_j^k)$，使得由此得到的机制满足市场出清约束 (9)，并且 $(\alpha_j^k)$ 可以任意接近 $(\delta\hat{}\alpha_j^k)$。作为 $(\alpha_j^k)$ 的函数，市场出清约束为

$$\sum_{j\in\mathcal{J}}\eta_j+\sum_{k\in K_j}\alpha_j^k\kappa_j^k\rho_j^k=(n_1,\ldots,n_I)$$

如上所述，$(\delta\hat{}\alpha_j^k)$ 满足大市场规划中的市场出清，这意味着若 $\alpha_j^k = \delta\hat{}\alpha_j^k$ 且 $\rho_j^k = \mathbb{E}_j[\mathbb{1}\{s_j(c_j) = k\}]$，则前述条件成立。因此，若 $\alpha_j^k = \frac{\delta}{1+\gamma_j^k}\hat{}\alpha_j^k$ 且 $\rho_j^k = (1+\gamma_j^k)\mathbb{E}_j[\mathbb{1}\{s_j(c_j) = k\}]$，该条件也成立。此外，由于 $\delta < 1$，只要 $|\gamma_j^k|$ 足够小，我们就有 $\frac{\delta}{1+\gamma_j^k}\hat{}\alpha_j^k \leq 1$，因此 $(\alpha_j^k)$ 是有效的缩放因子（即由此得到的机制不会违反非负约束）。

□