arXiv:2601.20039v1 [cs.DS] 27 Jan 2026

超图采样器：典型情况与最坏情况行为

Vedat Levi Alev* Uriya A. First†

2026年1月29日

摘要

本文研究在具有单侧或双侧错误的判定问题随机化算法中，使用k-均匀超图$H=([n],E)$（其中$n \geq \mathrm{poly}(k)$）进行错误缩减的作用与局限。具体而言，我们的错误缩减思路基于从H中抽取一条均匀随机超边，并将超边中的顶点作为随机种子，重复运行算法k次。值得注意的是，这是一个非常通用的范式，涵盖了所有不重复地选取k个种子的伪随机方法。我们证明了两个结果，它们共同表明：使用H进行错误缩减时，典型情况与最坏情况行为之间存在差距。

注意到，在单侧错误缩减的情形下，使用 k 个独立同分布种子可将错误概率从 p 降至 pk，代价是使用 k lgn 个随机比特。我们陈述第一个结果：在单侧错误缩减的情形下，若从 H 中随机选取一条超边可将错误概率从 p 降至 $\mathrm{pk}+\varepsilon$，则 H 的边数不能太少，即 $|E| = \Omega(\mathrm{nk}^{-1}\varepsilon^{-1})$。因此，将错误从 p 降至 $\mathrm{pk}+\varepsilon$ 所需的随机比特数不能低于 $\lg n + \lg(\varepsilon^{-1}) - \lg k + O(1)$。这里省略的常数仅取决于 p。等价地，一般而言，使用 $\lg n + \lg r$ 个随机比特选取 k 个种子的伪随机方法，无法将错误概率降至 $\mathrm{pk}+\Omega(r^{-1}k^{-1})$ 以下。对于平均均匀度为 k 的超图，这一结论同样成立。我们的结果还在某些参数范围内给出了分散器和顶点扩展器的新下界。

其次，只要H中的顶点度分布不至于过于极端，我们就能证明，在“99.99% 的情形下”（占比为（$1-o(1)$））， 使用H选取k个伪随机种子，可使错误概率至多比使用k个独立同分布种子时的错误概率高$o(1)$；这对具有单侧或双侧误差的算法都成立。因此，在错误缩减的背景下，尽管存在我们的下界，对于判定问题的随机化算法（及其输入）而言，除占比趋于零的一小部分外，与从任意合理的超图中均匀随机选取超边所得到的样本相比，使用真正的独立同分布样本几乎没有优势。特别地，任意一个具有k均匀超边的D-正则超图H，若其有$n \geq \mathrm{poly}(D,k)$个顶点，就能导出一种伪随机种子选取方法，该方法使用 $\lg|E| = \lg n + \lg D - \lg k$ 个随机比特，并且对于除占比趋于零的一小部分外的随机化算法（及其输入），可将单侧错误概率p降至$pk+o(1)$以下。对于具有双侧误差的随机化算法，也有类似的结论。

*海法大学 — vedatalev@math.haifa.ac.il
†海法大学 — ufirst@univ.haifa.ac.il

目录

1 引言 **1**

1.1 动机与概述 .11.2 采样器与限制器 .31.3 我们的贡献 .41.3.1 典型情形下的抽样 .41.3.2 最坏情形下的抽样 .51.3.3 间隙现象 .81.3.4 约束器的精细尺度界 .81.3.5 证明背后的思想 .101.3.6 对分散器的推论 .101.3.7 对顶点扩张器的推论 .111.4 与其他工作的关系 .111.5 论文结构 .131.6 致谢.13

2 预备知识 **13**

2.1 离散概率论 .132.2 超图.142.3 一些不等式 .15

3 超图采样器在典型情形下的性能 16

3.1 典型超几何收敛的证明（定理 3.1） .193.2 典型切尔诺夫界的证明（定理 3.2） .203.3 主要引理 3.4 的证明 .213.4 最坏情形约束概率下界的证明（推论 3.7） .23

4 执行　　最坏情形下超图限制器的表现 **24**

5 证明 o　证明 3 **1**

5.1 概率结果 .315.2 当最大度均匀度不大时定理 4.3(ii) 的证明 .335.3 定理 4.3(ii) 的证明：一般情形 .42

6 解析结果的证明 **45**

6.1 定理 5.9 的证明 .456.2 函数的性质 $f_{k,\ r}(x)$ .49

与分散器的关系 **52**

1 引言

1.1 动机与概述

重复运行是降低用于解决判定问题的随机化算法错误概率的一种自然策略，例如参见 [AB09，第 7 章。4]假设我们有一个能够解决判定问题、具有单边错误 p 的算法，也就是说，该算法从不报告假阴性，但以某个概率 $p \in$（0,1）报告假阳性。很容易看出，使用独立同分布随机种子并行运行该算法 k 次，可将错误概率从 p 降低到 p^k，代价是所需随机比特数从（例如）$\lg n$ 增加到 $k\lg n$。[1] 假设我们有一个具有双边错误 $p < 1/2$ 的算法，即该算法可能以 $p < 1/2$ 的概率出错（报告假阳性或假阴性）。切尔诺夫界表明，使用独立同分布随机种子并行重复运行该算法 k 次，并报告多数答案，同样也

[1] $\lg n$ 表示以 2 为底的 n 的对数。需要注意的是，n 与随机算法的时间复杂度完全无关，它度量的是随机种子的大小，即 $\lg n$ 是编码该种子所需的位数。

会使错误概率呈指数级下降，同时所需随机比特数也会从 $\lg n$ 增加到 $k\lg n$。

如果不介意所需随机比特数增加，这些方法效果很好；但如果还希望避免使用过多随机比特，就需要采用其他思路。一个常见且有效的思路是用伪随机种子序列替代独立同分布种子。例如，扩展图命中集引理 [AFWZ95、Kah95] 以及扩张器切尔诺夫界 [Kah97、Gil98],表明，只要让随机种子位于常度扩张图中一条长度为 k 的均匀随机路径上，该图有 n 个顶点，我们就能将所需随机比特数从 $k\lg n$ 降低至 $\lg n + O(k)$，同时在两种情况下都能获得与独立同分布样本类似的保证。

大量研究探讨了这些技术的能力与局限性。人们预期，扩张图上的随机游走会表现得像独立样本序列。许多研究使这一观点得到了精确阐述 [AFWZ95, Kah97, Gil98, Hea08, CPTS21, CMP+22, GV22, DH24, TSZ24]。这些研究可以视为对著名的扩张器混合引理的广泛推广；后者是此类结果中最简单的一个：在正则扩张图 G = (V,E) 中，两个集合 A,B ⊆V 之间边的比例，接近完全图 $(V, \binom{V}{2})$ 中 A 与 B 之间边的比例。

在这项工作中，我们采取了不同的思路，研究种子的广义伪随机选择（不重复）。形式上，我们不再使用扩张图中一条长度为 k 的随机路径上的顶点，而是取一个任意的 k 均匀超图 $H=(V,E)$，其定义在 n 个顶点上，即每条超边都包含 k 个顶点；我们想要了解，在错误缩减问题中，将随机超边上的顶点用作种子，效果如何。具体而言，给定一个密度为 p 的集合 $A \subseteq V$（即 $|A| = \lfloor p \cdot n \rfloor$），我们关注以下量：

- the 命中次数 $\mathbf{N}_H(A) = |\mathbf{e} \cap A|$，即在 H 中均匀随机选取的边 $\mathbf{e}$ 命中的次数 s A.
- 该约束概率 $\mathbb{P}[\mathbf{e} \subseteq A]$, ，即在 H 中均匀随机选取的边 $\mathbf{e}$ 完全包含于 A 中的概率。

我们注意到，命中次数 与上文描述的双侧错误缩减 问题有关。事实上，设 $A \subseteq V$ 为使我们的算法出错的种子集合。如果我们能够证明，在适当的假设下，$\mathbf{N}_H(A)$ 满足切尔诺夫型尾界，即其偏离均值 ε 的概率随 k 呈指数级衰减，那么我们就可以利用这一性质来缩减错误。同样地，如果 A 是使单侧误差算法出错的随机种子集合，那么约束概率就是单侧误差 情形下（重复 k 次后）的错误概率。

请注意，在双侧误差和单侧误差这两种情形下，超图 $H=(V,E)$ 的自然参数决定了错误缩减的效率 。具体而言，H 的均匀度，即 H 中每条超边所含的顶点数，就是算法重复运行的次数；超边与顶点之比 $|E|/n$ 则决定了在对 V 进行一次均匀抽样之外还需要消耗多少随机性。从这个角度来看，研究不一定均匀的 超图的约束概率 和命中次数 也很有意义；我们将对前者进行研究。

我们通过将从 k-均匀超图 H =(V,E) 中按一条超边抽取 k 个种子的错误缩减性能，与运行某算法的 k 个并行独立实例（不重复使用同一个种子）进行比较来衡量这一性能。后者相当于在 K =(V,$\binom{V}{k}$) 中一致地随机选取一条边；K 是以底集 V 为顶点集的完全 k-均匀超图。也就是说，对于每个密度为 p 的子集 A ⊆V，我们希望 N_H(A) 和 N_K(A)，分别是 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}\sim E(H)}[e \subseteq A]$ 和 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}\sim E(K)}[e \subseteq A]$, ，表现相近。$N_K$(A) 的分布始终是超几何分布 Hyp(k,⌊pn⌋,n), [2] 而当 k ≪n 时，它趋近于二项分布 Bin(k, p)。同样，$\mathbb{P}_{\mathbf{e}\sim E(K)}[e \subseteq A]$ 在 k ≪n 时趋近于 p^k。因此，我们会关注这样的超图 H：N_H(A) 尽可能接近 Bin(k, p)，或者 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}\sim E(H)}[e \subseteq A]$ 不比 p^k 大太多。为了衡量 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}\sim E(K)}[e \subseteq A]$ 与 N_H(A) 之间的距离，我们使用全变差距离 dtv ；回顾一下，它的定义如下

$$\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{N}_H(A), \mathrm{Bin}(k,p)) := \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\left|\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(A)=j] - \binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}\right|.$$

[2]也就是说，经过 k 次抽取且每次抽取后都不将球放回瓮中时，抽到 r 个命中的概率，与从包含 $\lfloor pn \rfloor$ 个红球和 $\lceil (1-p)n \rceil$ 个蓝球的瓮中抽取 r 个红球的概率相同。换言之，$\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(A)=r] = \frac{\binom{kr}{r}\binom{n-k\lfloor\ \rfloor-}{\lfloor\ \rfloor}pnrnpn}{}$。

我们的主要结果表明，在任何顶点度并非显著不均匀、且有 n ≥poly(k) 个顶点的 k-均匀超图 H =(V,E) 中，$N_H(A)$ 和 $\mathbb{P}_{e\sim E}[e \subseteq A]$，的典型行为与其最坏情况行为之间存在差距。更准确地说，对于每个固定的 $0 < p < 1$，密度为 p 的子集 A ⊆E 中有 a $1-o(1)$（“99.99%”）比例满足 $dtv(N_H(A),Bin(k,p)) \le o(1)$，并且还满足切尔诺夫界$\mathbb{P}\left[\left|N_H(A) - pk\right| \ge k\eta\right] \le 2\exp\left(-2k\eta^2\right) + o(1)$（此处为 $0 < \eta < 1$）。因此，对于密度为 p 的几乎所有 A，$\mathbb{P}_{e\sim E}[e \subseteq A] \in [p^k - o(1),\ p^k + o(1)]$。换言之，对于几乎所有密度为 p 的子集 A ⊆V，$N_H(A)$ 和 $\mathbb{P}_{e\sim E}[e \subseteq A]$ 的行为与最优情况相差 o(1)，也就是与完全 k-均匀超图中的行为相差 o(1)。然而，作为对比，假设 r := |E|/n 相对于 n 不太大，则存在密度为 p 的子集 A ⊆V，使得 $\mathbb{P}_{e\sim E}[e \subseteq A] \ge p^k + \Omega(r^{-1}k^{-1})$，因此 $dtv(N_H(A),Bin(k,p)) \ge \Omega(r^{-1}k^{-1})$。等价地，如果对于所有密度为 p 的子集 A ⊆V 都有$\mathbb{P}_{e\sim E}[e \subseteq A] \le p^k + \varepsilon$，那么 H 至少有 $\Omega(k^{-1}\varepsilon^{-1}n)$ 条超边，或者说，$|E|/n \ge \Omega(k^{-1}\varepsilon^{-1})$。在本节余下部分中，渐近记号中省略的常数都只依赖于 p，并假设 p 固定。

在错误缩减的语境下，我们的结果意味着以下几点：首先，对于一种随机算法，如果允许以大致相同的概率选取每个单独的种子，那么任何用于生成（恰好）k 个种子的伪随机方法，在“99.99% 的时间里”表现都几乎与进行 k 次独立重复相同，因此在实践中非常有效。另一方面，在单边错误缩减的语境下，任何以 lgn +lgr 的随机复杂度生成 k 个种子的伪随机方法，一般都无法将错误降低到 $p^k + \Omega(r^{-1}k^{-1})$ 以下。换言之，它不可能将错误降低到 $(p^k - o(1))$ 以下——正如预期的那样；即便要接近 p^k，也就是说保证错误为 $p^k + \varepsilon$，其代价也很高，因为这至少需要 lgn +lg(ε^{-1}) −lgk −O(1) 个随机比特。这个下界似乎是第一个被明确陈述的此类下界，特别意味着：(1) 对于固定的 k，随着 n 增长，仅使用 lgn +O(1) 个随机比特来使错误概率接近 p^k 是不可能的；(2) 要使错误概率关于 k 呈指数级变小，需要 lgn +Ω(k) 个随机比特。由于扩展图命中集引理表明，lgn +O(k) 个随机比特足以实现错误的指数级缩减，因此我们的下界在这一语境下是最优的。话虽如此，从其他角度来看，例如最优抽样或超图扩张的角度，我们的下界与扩展图命中集引理及类似结果所给出的界限之间仍存在差距。

此外，我们关于超图采样典型行为的结果对民意调查也有启示。为说明其用途，假设我们想通过调查大规模总体中仅n 人中的k 人，来估计某个特征在这个总体中有多常见。最好的做法是从中均匀随机抽取k 名不同成员，再据此作出判断，但这并不总是容易，有时甚至不可能。我们的结果表明，如果有充分理由认为，具有该特征的成员集合的行为类似于一个随机子集，其密度为p，且 $0 \ll p \ll 1$，那么以概率 $1-o(1)$，任何合理的伪随机采样策略（即满足我们适度假设的策略）都能达到与真正随机调查同样的效果。

最后，我们关于最坏情况采样行为的结果还意味着，在某些参数范围内，分散器和顶点扩展器有了新的界。

本引言余下部分将正式阐述我们的结果、其影响以及与其他工作的比较。

1.2 采样器与限制器

设 $\varepsilon > 0$ 为某个较小的值。为简化讨论，若一个定义在 n 个顶点上的 k-均匀超图 H =(V,E)，对于每个含有 ⌊pn⌋ 个元素的 A ⊆V，其随机变量 $N_H(A)$ 的分布与二项随机变量 ε-接近，我们就称它为 p-稠密子集的 ε-采样器，简称 (ε, p)-采样器。形式上，对于每个密度为 p 的 A ⊆V，我们要求 $N_H(A)$ 与 Bin(k, p) 之间的全变差距离至多为 ε，即

$$d_{tv}(\mathbf{N}_H(A), \mathrm{Bin}(k,p)) \le \varepsilon \qquad \forall\ A \in \binom{V}{\lfloor p\cdot n\rfloor}. \tag{ε-sampler}$$

根据二项分布的常用切尔诺夫界，每个 ε-采样器 对于 p-稠密集合，都满足一个近似切尔诺夫界

$$\mathbb{P}\left[\left|\mathbf{N}_H(A) - pk\right| \ge k\eta\right] \le 2\exp\left(-2k\eta^2\right) + \varepsilon \qquad \forall 0 < \eta \le 1,\ A \in \binom{V}{\lfloor p\cdot n\rfloor}. \tag{1.1}$$

我们称这类超图为针对 ϵ-稠密集合的切尔诺夫采样器，或称针对 p-稠密集合的切尔诺夫采样器，简称 (ϵ,p)-切尔诺夫采样器。（需要说明的是，文献中通常所说的“采样器”，经过重新参数化后，对应的是较弱的切尔诺夫采样器概念，参见 [Vad12，定义 3。29]。）

当 $\mathbb{P}[\mathbf{e}\subseteq A]$ 对于每个密度为 $\epsilon>0$ 的A集合p都不超过超图 $\mathrm{H}=(V,E)$ 是一个ϵ-限制器，用于p-稠密子集，简称为 (ϵ,p)-限制器。形式化地说，

$$\mathbb{P}[\mathbf{e}\subseteq A]\le\epsilon \qquad \forall\ A\in\binom{V}{\lfloor p\cdot n\rfloor}. \tag{ϵ-confiner}$$

注意，这一定义对于平均均匀度为 k 的非一致超图也有意义。作为我们某个结果的推论，任何具有 n 个顶点的 k-一致(ϵ,p)-限制器 必须满足$\epsilon\ge\binom{n}{k}^{-1}\binom{n-k}{\lfloor pn\rfloor-k}\ge p^k-k-1\ n-1$。左侧的数值$\binom{n}{k}^{-1}\binom{n-k}{\lfloor pn\rfloor-k}$是完全$k$-一致超图（顶点集为 V）中任意一个p-稠密顶点集的约束概率。

容易观察到，任何$(\epsilon,\ p)$-采样器都是一个$(p^k+\varepsilon,\ p)$-限制器。

我们将 有时会讨论这样的超图：它们是 ε-采样器(分别是 ϵ-限制器、 ε-Chernoff 采样器 s)，以获得更一般的 子集族 $A\subseteq V$，例如，密度为p 的子集族的子集。

备注1.1。在 n 个顶点和 m 条超边上的 $(\epsilon$,p)-限制器，本质上等同于一个 $(\lg((1-$p)n),$\epsilon)$-分散器，参见 [Vad12，命题 6.20]，[Sha04]，；它也本质上等同于 [Vad12，命题 4.7]意义下的 (=(1 − p)n,(1 − ϵ)m)-顶点扩展器。由于我们关注的是约束概率，(ϵ, p)-限制器的概念更适合我们的目的。我们将在介绍结果之后，解释这些结果对分散器和顶点扩展器的意义。

下文中，超图族是超图 $\{H_i=(V_i,E_i)\}_{i\ge1}$ 的一个无限序列，其中$|V_i|\to\infty$。若超图 $H=(V,E)$ 满足 $|E|\le r\,|V|$，则称其为 r-稀疏；H的稀疏度是其（超）边与顶点之比$|E|/|V|$。如果存在$r>0$，使得超图族中的所有超图都是r-稀疏的，则称该超图族是稀疏的。

除非另有说明，渐近记号$O_{a,b,\ldots}(\bullet)$表示，O记号中被省略的常数仅依赖于参数a、b、……。当我们写作$\Omega_{a、b、\ldots\ldots}(\bullet)$、$\Theta_{a、b、\ldots\ldots}(\bullet)$或 $\mathrm{poly}_{a、b、\ldots\ldots}(\bullet)$时，也采用相同的约定。

1.3 我们的贡献

1.3.1 典型情形下的抽样

我们的第一个结果表明，对于几乎所有p-稠密的V子集，只要其顶点度的分布并不过于极端，任意均匀超图$H=(V,E)$ 都是非常优秀的采样器（分别为 Chernoff 采样器、限制器）。

定理 1.2 （简化 推论 3.3 和 推论 3.6）。令 $0<p<1$，并令 $H=(V,\ E)$ 为一个定义在 $n\ge{}^{4}k^{2}p\ (1-p)$ 个顶点上的 k-均匀超图。令 $\beta\in(0,1]$，并假设 H 中没有顶点包含于超过边的 $an(n^{-\beta})$比例中（例如，当 H 为正则图像时，对于 $\beta=1-\lg k\lg n\ge\frac{1}{2}$，该条件成立）。则以下结论成立。

(*i*) 对于每个 $\alpha\in(0,1)$，我们有

$$\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{N}_H(A),\mathrm{Bin}(k,p))\le n^{-\frac{\beta(1-\alpha)}{2}}+\frac{k-1}{n-1} \tag{1.2}$$

对于除 $O(k^4p\ (1-p))\cdot n^{-\alpha\beta}$ 比例之外的所有满足 $|A|=p\cdot n$ 的子集 $A\subseteq V$，均有。

(*ii*) 对于所有 $\alpha\in(0,1]$、$\alpha'\in[0,1]$ 和 $\eta\ge0$，我们有

$$\mathbb{P}\left[\left|\mathbf{N}_H(A)-kp\right|>k\eta\right]\le2\exp(-k\eta^2)+\exp(-\tfrac{1-\alpha'}{2}k\eta^2)n^{-\frac{\beta(1-\alpha)}{2}} \tag{1.3}$$

对于所有子集 $A\subseteq V$ 中满足 $|A|=p\cdot n$ 的集合，除去一个 $O(k^4p(1-p))\exp(-\alpha'k\eta^2)\cdot n^{-\alpha\beta}$ 的比例。

(iii) 对于所有 $\alpha\in(0,1)$，我们有

$$\left|\mathbb{P}_{\mathbf{e}\sim E}[\mathbf{e}\subseteq A]-p^k\right|\le n^{-\frac{1-\alpha}{2}} \tag{1.4}$$

对于除 $O(k^{2}(1-p))\ p^k\cdot n^{-\alpha\beta}$比例的子集 $A\subseteq V$ 之外的所有子集，其中 $|A|=p\cdot n$。

换句话说，只要密度p与 0 和 1 的距离有界，且$n \geq \Omega_p(k^4)$，任何合理的k-一致超图H在n个顶点上都是一个$o(1)$采样器、一个$o(1)$-Chernoff 采样器，以及对于几乎所有密度为p的子集$A \subseteq V$而言的一个（$p^k+o(1)$）限制器。这意味着，除了数量可忽略的例外情况外，H的抽样性质与完全图（$V, \binom{V}{k}$）的抽样性质几乎完全相同。在误差降低的背景下，这进一步意味着，对于判定问题中除消失比例的随机化算法（及输入）之外的所有算法，使用真正的独立同分布种子重复该算法，相较于使用从近似度正则一致超图的均匀随机超边中获得的样本，其优势本质上是可忽略的。

备注 1.3. (i) $k-1)/(n-1)$ 在 (1.2) 中出现的加性因子，反映了超几何分布 Hyp(k,pn,n) 与二项分布 Bin(k, p) 之间的差异。事实上，我们证明，将 Bin(k,p) 替换为 Hyp(k, pn,n) 后，这个因子便可去掉，参见 推论 3.3。

(ii) 如果 D 是 $H=(V,E)$ 的最大顶点度，那么《定理 1.2》中“不存在任何顶点包含在不超过 $n^{-\beta}$ 比例的边中”这一条件，等价于 $D \leq n^{-\beta}|E|$。这样表述后，这只是一个非常宽松的假设。

(iii) 定理 1.2 的第 (iii) 部分k-均匀 (ϵ,p)-限制器 若顶点度不太大，则满足 $\epsilon \geq p^k - o(1)$。根据下一个定理，这实际上不需要对顶点度作任何假设，只需较弱地假设 H 的平均 均匀度 k。事实上，k 不必是整数。

定理 1.4 （推论 3.7的简化版本）。取一些实数 $0<p<1$ 和 $k>0$。设 $H=(V, E)$ 是一个具有 $n \geq 1/p(1-p)$ 个顶点、平均均匀度为~~k 的~~超图。如果 H 是一个 (ϵ, p) 限制器，那么 $\epsilon \geq p^k - 2k/n$。
此外，当 H 是 k-均匀时，我们有更强的下界 $\epsilon \geq \binom{n}{k}^{-1}\binom{n-k}{\lfloor pn \rfloor - k} \geq p^k - k_{-1}n_{-1}$。

1.3.2 最坏情形下的采样

定理 1.2 表明，设计 ε-采样器、 ε-Chernoff 采样器和 ϵ-限制器，使其对于除去趋于零比例之外的所有密度为 p 的集合 A $\subseteq$V 都几乎达到最优表现（如同完全超图），非常简单，因为只需控制超图 H =(V,E) 的均匀度和度，无需进一步考虑，便可轻易满足定理 1.2 的前提条件。有鉴于此，自然会寻找这样的例子：对于 p-稠密集合，k-均匀采样器（分别为 Chernoff 采样器、限制器）H =(V,E) 在所有 p-稠密的 A $\subseteq$V 上的表现都接近最优的典型行为。对于错误缩减等应用，这些例子应当尽可能稀疏。我们将在下文第 1.4 节概述目前已知的最佳构造，但先指出，目前尚无已知的稀疏采样器（分别为 Chernoff 采样器、限制器），其最坏情况行为接近定理 1.2 中的典型行为。

我们的下一个结果表明，寻找稀疏的k-均匀采样器和限制器族（但不包括 Chernoff 采样器），使其在所有密度为p 的集合上的表现，在其中“99.99%”的集合上接近最优表现，实际上是不可能的。此外，对于限制器，这一结论也适用于平均均匀度为k的超图，其中平均均匀度不必是整数。

定理 *1.5*（定理 *4.1* 的简化版本）。固定 $p \in (0,1)$。设 $H=(V,E)$ 是一个平均均匀度为 $k \geq 2$、有 n 个顶点和 $r \cdot n$ 条边（$r>0$）的超图，且 $n \geq poly(r,k,p^{-1},(1-p)^{-1})$。若 H 是一个 (ϵ, p)-限制器，则

$$\epsilon \geq \min\left\{p^k + \Omega\left(\frac{p(1-p)^2}{rk}\right), 1\right\}.$$

因此，若 H 是一个 k-均匀(ε,p)-采样器且 $\varepsilon < 1-p^k$，则 $\varepsilon \geq \Omega\left(\frac{p(1-p)^2}{rk}\right)$。

换言之，$(p^k+\varepsilon,p)$-限制器(以及更进一步地说，(ε,p)-采样器）不能过于稀疏：

推论 1.6 （定理 4.2的简化版本）。 设 p、k、n、H 如定理 *1.5*中所述，并设 $\varepsilon \in (0, 1-p^k)$。若 H 是一个$(p^k+\varepsilon, p)$-限制器（若 H 为 k-均匀，则为一个(ε,p)-采样器），那么

$$|E| \geq n \cdot \min\left\{\Omega\left(\frac{p(1-p)^2}{k\varepsilon}\right), \frac{n^c}{\mathrm{poly}(k, \frac{1}{p}, \frac{1}{1-p})}\right\},$$

where $c>0$是一个绝对常数（可以取 $c=\frac{1}{13}$）。特别地，如果 $n \geq$多项式$(k, \varepsilon^{-1}, p, (1-p)^{-1})$，那么

$$|E| \geq n \cdot \Omega\left(\frac{p(1-p)^2}{k\varepsilon}\right).$$

注 1.7. 定理 1.5 对任意 $k > 1$ 都成立，前提是将 $\Omega(\frac{p(1-p)^2}{r}k)$ 替换为一个更复杂的表达式，该表达式在 $k \to 1$ 时趋近于 0；参见 定理 4.1。推论 1.6 也同样如此；参见 定理 4.2。然而，对于 $k = 1$，这两个结果都 不成立；参见 注 4.10。

如第 1.1 节所述，在单边错误缩减的背景下，定理 1.4 和推论 1.6推出了以下关于单边错误缩减的新颖结论：

推论 1.8。 设 $\mathscr{A}$ 是一个随机化算法，输出{1,...,n} 的一个子集，且其元素个数的平均值为 k。给定另一个用于判定问题的随机化算法 $\mathscr{A}'$，它使用lg$n$ 位种子，且单边错误概率至多为 $p \in (0,1)$。令 $\mathscr{A}' := \mathscr{A}[\mathscr{A}]$ 表示该问题的判定算法：它使用$\mathscr{A}$ 生成 k 个种子（平均而言），用这些种子运行 $\mathscr{A}'$，并据此作出判定。那么：

(i) 若 $n \geq \frac{1}{p(1-p)}$，则存在如上所述的 $\mathscr{A}'$，使得 $A'[A]$ 的错误概率至少为 $p^k - O(k/n)$。

(ii) 如果对于每个如上所述的 $\mathscr{A}'$，$\mathscr{A}[\mathscr{A}]$ 的错误概率均不超过 $p^k + \varepsilon\ (0 < \varepsilon < 1 - p^k)$，那么 $\mathscr{A}$ 的随机复杂度至少为

$$\lg n + \min\left\{\lg(\varepsilon^{-1}) - \lg k - O_p(1),\ c\lg n - O_p(\lg k)\right\}$$

对于某个绝对常数 $c > 0$。事实上，可以取 $c = \frac{1}{13}$。

换句话说，一般而言，对于一个单侧错误概率为 p 的随机化算法的 k 次重复，无论采用何种伪随机方法来选择 k 个随机种子，都无法将错误概率降至 $p^k - O(k/n)$ 以下；如果保证此类伪随机方法能将错误概率降至 $p^k + \varepsilon$，那么其随机复杂度至少为 $\lg n + \lg(\varepsilon^{-1}) - \lg k - O_p(1)$ 与 $(1+c)\lg n - O_p(\lg k)$ 中的较小者。相比之下，定理 1.2(iii)指出，任何一种选择 k 个种子的伪随机方法，只要让每个种子被选中的概率大致相同，就能将错误概率从 p 降至 $p^k + o(1)$，而且对于除比例趋于零的一小部分随机化算法之外的所有算法都如此。

证明。 存在 $r > 0$，使得 $\mathscr{A}$的随机复杂度为 $\lg n + \lg r$。将 $\mathscr{A}$所有可能的rn个输出视为超图 $H = (V,E)$ 的超边，其顶点集为$V = \{1,...,n\}$。

根据定理 1.4，只要$n \geq \frac{1}{p(1-p)}$，就存在一个密度至多为p的子集$A \subseteq V$，使得 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}\in E}[\mathbf{e} \subseteq A] \geq p^k - \frac{2}{k}n$。现在，为了证明 (i)，考虑一个平凡的判定问题，其对每个实例的答案都是“是”，并令 $\mathscr{A}'$ 为这样一个随机化算法：当且仅当其随机种子属于A时，返回“否”。

接下来，(ii) 中的假设意味着H必定是一个$(p^k + \varepsilon, p)$-限制器，因此根据推论 1.6，我们有$rn = |E| \geq \min\{\Omega_p(k^{-1}\varepsilon^{-1}), n^c \mathrm{poly}_p(k)\}$。由于$\mathscr{A}$的随机复杂度为 $\lg n + \lg r$，这就证明了 (ii)。 □

例 1.9。假设 n 足够大，推论 1.8(ii) 表明，若要通过使用伪随机种子重复 k 次，将随机化算法的单侧错误概率从 p 降至 $(1+a)p^k$，除该随机化算法所需的随机比特外，至少还需要额外使用 $k\lg(p^{-1}) + \lg(a^{-1}) - \lg k - O_p(1)$ 个额外随机比特。更一般地，要使错误概率关于 k 呈指数级小，需要 $\Omega(k) - O_p(1)$ 个额外随机比特。

继续之前，我们先作几点说明。

首先，目前已知的稀疏 (ϵ,p)-限制器，其平均均匀度为k，在超边数量方面仍未达到我们的下界 $\Omega_p((\epsilon - p^k)^{-1}k^{-1}) \cdot n$。我们将在下文详细讨论这一点。

其次，在许多单边错误缩减的应用中，人们希望将原始错误概率 p 降低到 $\epsilon := p^k + \varepsilon$，使其关于 k 呈指数级小。然而，在这种情况下，一旦 $k \geq \Theta(\log n)$，推论 1.8(ii) 中随机复杂度的下界便为 $(1+c)\lg n - O_p(\lg k)$，进一步降低 ε 也不会改善这一界。这引出了一个问题：推论 1.8(ii) 中的项 $c\lg n - O_p(\lg k)$ 是否可以普遍增大？由于在 {1,...,n} 中生成 k 个独立种子的随机复杂度为 k lgn，我们所能期望的最好结果是得到如下随机复杂度下界：$\min\{\lg n + \lg(\varepsilon^{-1}) - \lg k - O_p(1), \Theta_p(k \lg n)\}$。这等价于将定理 1.5 中的假设 $n \geq \mathrm{poly}_p(r,k)$ 放宽为 $n \geq \mathrm{poly}_p(r^{\frac{1}{k}}, k)$。我们将此作为一个开放问题提出。

问题 1.10。 当 $n \geq$ 多项式$_p(r^{\frac{1}{k}}, k)$时，定理 *1.5* 是否仍然成立？

最后我们指出，我们不知道 定理 1.5 是否有适用于 Chernoff 抽样器的类似结论（参见(1.1)）。我们将其作为一个问题提出。

问题 *1.11*。固定某个 $p \in (0,1)$、$r > 0$、$k > 1$ 和较小的 $\eta > 0$。设 $H = (V,E)$ 是一个具有 n 个顶点且至多有 rn 条边的 k-均匀超图。若 $k \geq C(\eta)$，其中 $C(\eta) \geq 1$适当，是否存在一个顶点子集 $A \subseteq V$，其密度为 p，且 $N_H(A)$ 的尾部概率并不轻，即 $\mathbb{P}\left[\left|N_H(A) - kp\right| > k\eta\right]$ 有下界 $2exp(-\eta^2 k) + c(r,k,p,\eta)$，其中某个 $c(r,k,p,\eta) > 0$(不依赖于 n)?

若能得到肯定答案，我们就可以像在推论 1.8中证明单侧错误缩减的随机复杂度下界那样，推出双侧错误缩减的随机复杂度下界。

与分散器界限的比较。 如前所述，限制器和分散器经过重新参数化后是相同的对象——尽管研究它们时通常采用不同的参数范围。在[RTS00，定理 1.5(a)、定理 1.10(a)], 中，作者给出了分散器性能的界限，并进一步通过随机构造表明，在与分散器相关的参数范围内，这些界限基本上是最优的。我们在附录 A中用限制器的语言重述这些结果；它们表述如下：

(a) 设 H是一个 (ϵ,p)-限制器 ($0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$，其平均均匀度为 k，有 n个顶点和 nr条边。则$r \geq \Omega(\epsilon^{-1}k^{-1}\lg(\frac{1}{1-p}))$（定理 A.1）。 ——

(b) 固定某个 $0 < c < 1$。若 $\epsilon \geq e^{-c(1-p)k+1}$，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个正则的 (ϵ,p)-限制器，其上有 n个顶点，具有 平均均匀度 $\leq k$和稀疏度 $r \leq \Omega_p((1-c)^{-1}\epsilon^{-1}k^{-1})$（定理 A.2的简化形式）。

根据 $\epsilon \geq p^k - 2^{-k}n$ 以及我们的 定理 1.4，界 (a) 弱于 $r \geq \Omega(\frac{p(1-p)^2}{(\epsilon-p^k)k})$ 给出的界，即 推论 1.6中的界。此外，结论 (a) 的力度还不足以推出：不存在最坏情况性能接近最优的稀疏限制器族（更不用说 采样器了 ），适用于 p-稠密集合。

然而，当 $\epsilon \geq e^{-c(1-p)k+1} \geq e^{-(1-p)k}$ 时，相对于 ϵ，项 p^k 可以忽略。因此，在 $\epsilon \gg e^{-(1-p)k}$ 的范围内，(a) 得到了推论 1.6 的下界，而 (b) 表明其在相差依赖于 p 的常数因子以内是最优的。就单侧误差缩减而言，在假设 $\epsilon \gg e^{-(1-p)k}$ 下，这重新得出了我们先前的结论：一种用于选择 k 个种子的伪随机方法，若保证将单边错误概率从 p 降至 ϵ，则至少需要 $\lg(\epsilon^{-1}) - \lg k - O_p(1)$ 个额外随机比特（不计算法所需的随机比特）；此外，这也意味着，只要允许伪随机方法平均选择 k 个种子，而非恰好选择 k 个种子，那么仅增加 $\lg(\epsilon^{-1}) - \lg k + O_p(1)$ 个随机比特事实上就足够了。这些观察虽是从已知结果推导而来，但似乎是新的。

总之，我们的 定理 1.5 和 推论 1.6 改进了已知关于以下情形中（ϵ，p）-限制器的界： $\epsilon \ll e^{-(1-p)k}$，尤其是当 ϵ 从上方趋近于 p^k时。

与命中集引理的比较。从集合 V 中获取 k 个伪随机样本，最受研究的方法之一是在顶点集为 V 的 d-正则扩张图 G 上进行长度为 k 的随机游走 $\vec{v} = (v_1,\ldots,v_k)$。这等价于从超图 H =(V,E) 中随机选取一条边，其中超边是 G 中长度为 (k − 1) 的路径。[3] 著名的扩展图命中集引理（例如 [Kah95],）指出，若 $\lambda = \lambda(G)$ 是 G 的谱扩张，[4] 则

$$\mathbb{P}[\vec{v} = (v_1,\ldots,v_k) \subseteq A] \leq p \cdot \left((1-\lambda)p + \lambda\right)^{k-1} \qquad \forall\ A \subseteq V \text{ of density } p,$$

换句话说，这意味着超图 H是一个 $(p\cdot\left((1-\lambda)p+\lambda\right)^{k-1},\ p)$ -限制器。

通过选取 G为具有 $\lambda = 2\sqrt{d-1}\,d \approx 2d^{-1/2}$的最优扩展图，例如取自 [LPS86 构造的图族Mor94],，并令 $\epsilon := p((1-\lambda)p+\lambda)^{k-1} - p^k$，我们可以看到存在一个 k-一致

[3] 扩张器游走可能会出现重复，因此应将H 视为一个超图，其中每条超边的顶点都带有权重，用于表示各顶点重复出现的次数。为简单起见，我们忽略这一技术细节。此外，可以通过让随机游走的每一步都依据不同的扩张器进行，从而避免这一问题；这样重复出现的情况会变得极其罕见，因此可以忽略不计。另外，如果随机游走出现重复，我们可以人为地添加更多顶点，直到它恰好看到k 个顶点，而这只会降低任意顶点集合的约束概率。[4]谱扩张是G的归一化邻接矩阵的所有非平凡特征值中的最大绝对值，即 $\lambda(G) = \max\{\lambda_2(G), |\lambda_{\min}(G)|\}$

$(p^k+\varepsilon, p)$-限制器，稀疏度为 $r=d^{k-1}$。将 r、d 和 λ 视为 ε 的函数，初等微积分表明，当 $\varepsilon\to 0$ 时，我们有 $\lambda = p^{1-k}(1-p)^{-1}(k-1)^{-1}(\varepsilon+O_{p,k}(\varepsilon^2))$，因此 $r \approx (\frac{\lambda}{2})^{-2(k-1)} = (2p^{k-1}(1-p)(k-1))^{2(k-1)}\varepsilon^{-2(k-1)}(1+O_{p,k}(\epsilon))$。我们得出结论：一旦 k 和 p 固定，对于每个 $\varepsilon \geq 0$，都存在一个稀疏度为

$$r \leq \Omega_{k,p}(\varepsilon^{-2(k-1)}).$$

遗憾的是，这与我们的下界 $r \geq \Omega_p(k^{-1}\varepsilon^{-1})$ 不符。缩小这两个界之间的差距是一个有趣的问题。

最后我们指出，利用命中集引理构造 k-均匀稀疏 (ϵ,p)-限制器，仅在 $\epsilon \leq 2^{-\Theta_p(k)}$ 时才有意义。（这与由分散器的随机构造产生的限制器的情况相反，参见我们前面的讨论。）事实上，所保证的约束概率 $\epsilon = p((1-\lambda)p+\lambda)^{k-1}$总是 关于$k$呈指数级。

1.3.3 间隙现象

通过将定理 1.2 与定理 1.5 结合起来，我们可以看到，对于具有不太离谱的顶点度的稀疏均匀超图，密度为p的集合，其典型（“99.99%”）约束概率与最坏情况（“100%”）约束概率之间存在间隙。形式化地说：

推论 1.12。 固定某个 $p \in (0,1)$。设 $k>1$ 为整数，$r>0$ 和 $0<\beta<1$ 为实数。假设 $H=(V,E)$ 是一个 k-均匀超图，具有 $n \geq \mathrm{poly}(k, r, \frac{1}{p}, \frac{1}{1-p})$ 个顶点和 $r\cdot n$ 条边，且没有任何顶点属于超过边的 $n^{-\beta}$比例。则以下陈述同时成立：

- （“99.99%”情形）对于每个 $\alpha \in (0,1)$，我们有 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}\subseteq A] \leq p^k + O(n^{-\beta(\alpha-1)^2})$ 对所有密度为 p 的子集 $A \subseteq V$ 中，除去 $O(k^2 p^{k-1}(1-p)\cdot n^{-\alpha\beta})$ 比例的子集之外都成立；
- （“100.0%”情形）存在一个密度为 p 的子集 $A \subseteq V$，使得 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}\subseteq A] \geq p^k + \Omega(p(1-p)^2(r+1)k)$。

我们注意到，这种二分情形在平均情形复杂性中并不少见。参见 [AB09，第 17 章。2]： *Impagliazzo* 硬核引理（[Imp95]）指出，一个难以计算的函数在平均情形下，应当在一小部分输入上极其难以计算，但在其余输入上则确实可以很容易地计算。

1.3.4 限制器的精细尺度界

稍微转换一下视角，考虑这样的情形：给定固定的 $r>0$、$k>1$ 和 $p\in(0,1)$，我们希望找到一个无限的 (ϵ, p)-限制器族，其中每个限制器的平均均匀度至多为 k，稀疏度（超边与顶点之比）至多为 r。ϵ 能有多小？定理 1.4 表明，当 $k \geq 2$ 时，存在一个非平凡的下界 $\epsilon \geq p^k + \Omega_p(r^{-1}k^{-1})$（而当 $1<k<2$ 时，下界的形式稍复杂一些，参见定理 4.1）。事实上，我们可以给出一个更好且更精确的下界。

定理 1.13 (定理 4.3的简化版)。 设 $r>0$、$k>1$ 和 $p\in(0,1)$。假设存在一个由 (ϵ,p)-限制器组成的族（其顶点数趋于 ∞），且该族中的每个成员的平均均匀度为 k，稀疏度为 $\leq r$，并且要么是正则的，要么最小顶点度为 ≥ 3。那么

$$\epsilon \geq f_{k,r}(p) := 1-(1-p)^{\frac{1}{rk}} + (1-p)^{\frac{1}{rk}}(1-(1-p)^{\frac{rk-1}{rk}})^k.$$

备注 1.14. 如果只假设 H 的每个顶点都包含在某条超边中，则较弱的界$\epsilon \geq f_{k,3r}(p)$成立。我们猜想，更强的界 $\epsilon \geq f_{k,r}(p)$一般也成立，因此为求简洁，这里仍采用它。此外，通过标准的对偶化论证（命题 2.7），定理意味着 $\epsilon \geq 1-f^{-1}_{k,1/r}(1-p)$。这对较小的 $p>0$带来微不足道的改进。关于我们所有下界的总结，见推论 4.4 和推论 4.5。

可以证明，对于 $k \geq 2$，我们有 $f_{k,r}(p) \geq p^k + \Omega(p(1-p)^2 rk)$（定理 6.9），这实际上也是我们证明定理 1.4 的方法。对于较小的 k 和 r 值，$f_{k,r}(p)$ 与 p^k之间的差距很明显，如图 1 所示。

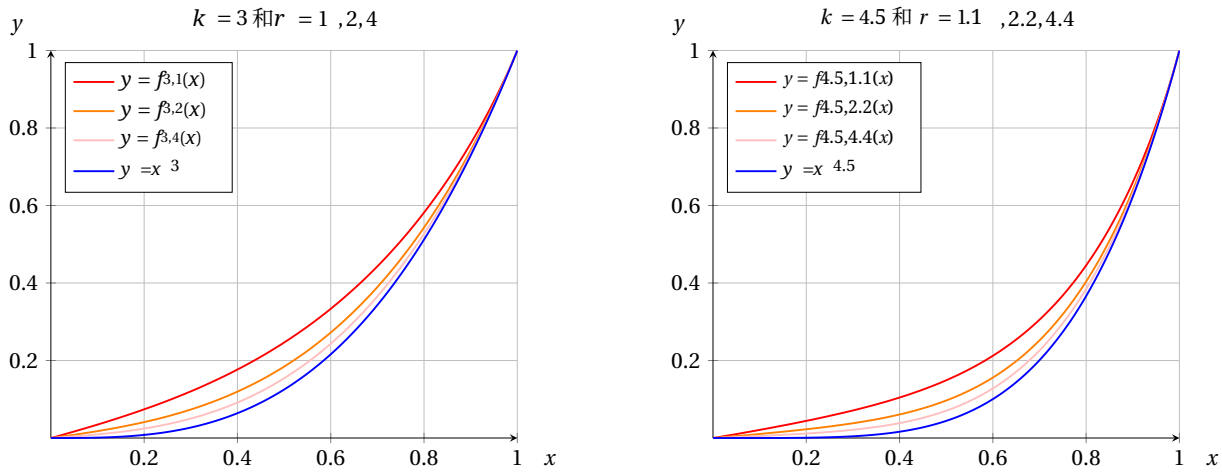

图1：对于某些值的 k 和 r，图像 $y = x^k$ 与 $y = f_{k,r}(x)$ 之间的间隙。

作为比较，我们先前对命中集引理的讨论表明，当 k 为整数且 $r = d^{k-1}$，其中 $d \geq 3$ 为整数时，存在无限族 r-稀疏 k-一致的 (ϵ, p)-限制器，其

$$\epsilon = p\left(p + (1-p)\cdot\frac{2\sqrt{d-1}}{d}\right)^{k-1} = p\left(p + (1-p)\frac{2\sqrt{\sqrt[k-1]{r}-1}}{\sqrt[k-1]{r}}\right)^{k-1} =: g_{k,r}(p).$$

此外，通过用限制器的语言重述 [RTS00] 关于随机分散器的结果（我们在 附录 A 中完成），可知对于每个 $k > 1$ 和 $\frac{1}{k} \lesssim r \lesssim \ln((1-p)^{-1})\, k\, e^{(1-p)k-1}$，都存在一个由 ~~$\leq k$ 平均均匀度的 r-~~稀疏 (ϵ, p)-限制器构成的无限族，其中

$$\epsilon \approx \frac{\ln((1-p)^{-1})}{kr}.$$

（关于 r 和 ϵ 上约束的精确表述见定理A.2(ii)，并注意到我们总有 $\epsilon \geq e^{-(1-p)k+1}$）。将这个 ϵ 记为 $h_{k,r}(p)$，对于某些 r、k，在所有函数均有定义的范围内，函数 $f_{k,r}(p)$、$g_{k,r}(p)$ 和 $h_{k,r}(p)$ 的图像以及 p^k 的图像均展示于图2。从这些图像可以看出，我们对 (ϵ,p)-限制器所得的下界与命中集引理或随机构造所产生的限制器之间仍有相当大的差距。这引出了以下问题，而这个问题似乎非常困难。

问题1.15。对于每个 $r > 0$、$k > 1$ 和 $p \in (0,1)$，求 $\epsilon(k, r, p)$ 的上确界，其中集合中的 $\epsilon > 0$ 满足存在一个由 r-稀疏 (ϵ, p)-限制器构成的无限族，其平均均匀度为 k。

目前，我们只能得出 $\epsilon(k,r,p) \in [f_{k,r}(p), \min\{g_{r,k}(p), h_{r,k}(p)\}]$，但看起来下界和上界都不太可能是紧的。

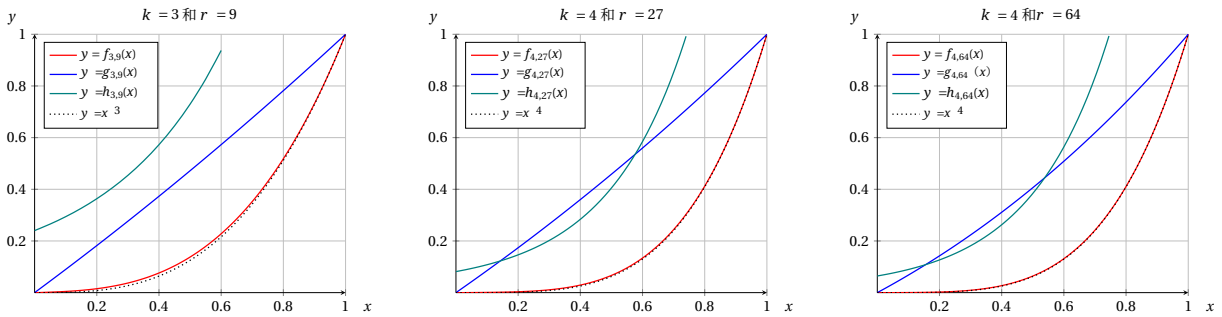

图2：比较我们关于存在由 r-稀疏 k-一致 (ϵ,p)-限制器（$\epsilon \geq f_{k,r}(p)$ 始终成立）的下界，与命中集引理 ($\epsilon \leq g_{k,r}(p)$ 有可能成立）和已知随机构造所给出的上界（$\epsilon \leq h_{k,r}(p)$ 有可能成立）；这里取某些 k 和 r 值。

1.3.5 我们证明背后的思路

设 H =(V,E) 是一个有 n 个顶点和 r n 条边的 k-均匀超图。对于顶点集合 A ⊆V，我们将 E_r(A) 记作满足 |e ∩A| = r 的超边 e ∈H 的集合，而 E(A) 表示包含在 A 中的超边集合（因此 E(A) = E_k(A)）。类似地，我们将 V (B) = ⋃e∈B e 记作被 B ⊆E 中的边所触及的顶点子集。固定 p ∈(0,1)，并从 V 的所有密度为 p 的子集中均匀随机选取 A。

关于 H 中抽样典型行为的定理 1.2，是通过求出 $|E_r(A)|$ = ℙ[|e ∩A| = r] for 0 ≤r ≤k 的期望而得到的；结果表明该期望接近 $\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}$，[5] 并且其方差非常小；精确表述见引理 3.4。有了这一结果，切比雪夫不等式意味着 $|E_r(A)|$ 几乎必然非常接近 $\binom{k}{r}p^r(1-p)^{1-r}$。随后，结合一些代数论证和这一事实，即可证明定理 1.2。定理 1.4 则仅由我们对 $|E_r(A)|$ 的期望的计算得出。

我们关于最坏情形约束概率的结果是由定理 1.13 推导得出的，而该定理的证明要复杂得多。为了证明它，我们需要找到一个密度不超过 p 的集合 A ⊆V，使得 E(A) 尽可能大。保证 E(A) 中含有许多边的一种方法，是从超边集合 B ⊆E 开始，并取 A =V (B)，这样可以保证 E(A) ⊇B。我们建立的一项关键结果表明，如果以某个固定密度随机选取 B ⊆E，那么平均而言，E(A) = E(V (B)) 在 E 中的密度会严格大于 B 的密度。下面的命题对此作了正式表述；为简化起见，我们将讨论范围限制在正则超图。

命题 *1.16*（命题 *5.5* 的简化版本）。设 $H=(V,E)$ 是一个 d-正则超图（$d\geq 2$），其超边与顶点之比为 $r:=|E|/|V|$，且对所有 $e\in E$ 均有 $|e|(d-1)<|E|$。假设 $\gamma\in(0,1)$，并通过独立地以概率 γ 将每条边 $e\in E$ 纳入 B，从而随机抽取 $B\subseteq E$。那么，

$$\mathbb{E}\left[\frac{|E(V(\mathbf{B}))|}{|E|}\right]\geq \gamma+(1-(1-\gamma)^{d-1})^{\frac{d}{r}}. \tag{1.5}$$

在(1.5)的右侧，项 γ 源于$\mathbf{B}\subseteq E(V(\mathbf{B}))$这一事实，而额外项$(1-(1-\gamma)^{d-1})^{d}{}_{r}$是对被边$\mathbf{B}$无意覆盖的超边集合平均密度的一个下界。正是这个额外项最终使我们能够证明，密度为p的顶点集合的最坏情形约束概率为$p^k+\Omega_p(r^{-1}k^{-1})$。

为了将命题 1.16 用于我们的目的，我们证明存在某个特定的 γ 值，使得 A = V (B) 的密度几乎必然为 p + o(1)。值得注意的是，我们通过将关于抽样典型行为的结果应用于 H 的对偶超图来做到这一点——事实上，在 H 的对偶超图中，补集 V −A 是被约束在“顶点”集合 E −B 中的“边”集合，因此这是一个关于典型约束概率的问题（但所涉及的超图可能非均匀）。结合命题 1.16 与 A 几乎必然具有密度 p +o(1}这一事实，足以证明存在某个密度为 γ的 B ⊆E，使得集合 A = E(B) 在 V 中的密度为 p +o(1)，同时集合 E(A) = E(V (B)) 的密度至少为 $\gamma+(1-(1-\gamma)^{d-1})^{d}r$）；在非正则情形下，则为更复杂的表达式。随后，通过证明 $|E(V(B))|$ 与 $|E|$ 的下界至少为 $f_{r,k}(p)$，定理 1.13 的证明便告完成。当 H 是 d-正则时，最后这一步显然成立，因为 $\gamma+(1-(1-\gamma)^{d-1})\,d\,r$）恰好等于 $f_{r,k}(p)$；但在一般情形下，这正是技术性很强的定理 5.9 的内容。

我们希望，我们的方法，尤其是 命题 1.16，能够得到进一步的应用。

还值得指出的是，我们对命题 1.16 一般版本的证明表明，当任意两个超边至多共享一个顶点时，$E(V(\mathbf{B}))$ 的密度最小。特别是，这意味着单纯 或 胞腔复形 不太可能是最优的限制器，参见 注 5.6。

1.3.6 对分散器的推论

分散器是单边随机算法错误缩减中使用的一种基本对象，参见 [NTS99、Sha04、Gol11、Vad12]。根据 [Vad12，定义 6.19]（例如），(k,ϵ)-分散器是一个函数 $F:\{0,1\}^n\times\{0,1\}^d\to\{0,1\}^m$，其中对于每个 2^k 元子集 $A\subseteq\{0,1\}^n$，A 在 $F\times\{0,1\}^d$下的像至少包含 $2^m(1-\epsilon)$

[5]更准确地说，结果表明，这等于按照超几何分布 Hyp(*k*,*pn*,*n*) 抽取数字r 的概率，即 $\binom{kr}{}\binom{n-kpn}{}\binom{}{rmpn}$。

个元素。其背后的想法是，给定一个随机字符串 $w \in \{0,1\}^n$，它的分布可能是非均匀的，但宽泛地说，其熵为 k 比特；我们可以用均匀随机的 $v \in \{0,1\}^d$ 计算 $F(w,v)$，从而得到一个 m 比特的“近乎”随机字符串。人们希望在尽可能增大 m 的同时，让 d 尽可能小。后者等价于要求熵损失 $\ell := k+d-m$ 尽可能小。令 $N = 2^n$、$M = 2^m$、$D = 2^d$ 且 $K = 2^k$。那么，我们可以将 F 看作表示一个具有 N 个顶点和 M 条边的 D-正则超图中的关联；在这种情况下，满足 (K,ϵ)-分散器的要求，等价于满足 $(\epsilon,(1-K/N))$-限制器的要求。结合这一观察与我们的定理 1.4 和定理 1.5，我们得到以下关于分散器的新界，这些界在 $k = n - O(1)$ 且熵损失 $\ell = k + d - m$ 为 $O(1)$ 的范围内最适用。

用分散器的语言来说，我们的结果表明：

定理 1.17. 固定 $u \in \mathbb{N}$。令 $F : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^d \to \{0,1\}^m$ 为一个熵损失为 $\ell = (n-u) + d - m$ 的 $(n-u,\epsilon)$-分散器，并令 $L = 2^\ell$ 和 $U = 2^u$。那么，

(i) $\epsilon \geq (1-\frac{1}{U})^{LU} - \frac{2LU}{N} \approx e^{-L} - \frac{2LU}{N}$，

(ii) 令 $\varepsilon := \epsilon - (1-1/U)^{LU}$，并假设 $n \geq \Theta_u(\varepsilon^{-1}+\ell)$，则有 $d \geq -\lg[\epsilon - (1-1/U)^{LU}] - O_u(1)$。

这里，隐藏常数仅依赖于 u。

证明。令 H 为上述相应的、具有 N 个顶点和 M 个顶点的 D-正则超图。由于 $2^{n-u}/N = 1/U$，它是一个 $(\epsilon, 1-1/U)$-限制器。此外，H 的稀疏度为 $R := M/N$，其平均均匀度为 $D/R = 2^{n+d-m} = LU$（命题 2.6）。因此，根据定理 1.4，$\epsilon \geq (1-1/U)^{L/U} - 2/LU$。进一步，对于定理中的 ε，由定理 1.5 可知 $R \geq \Omega_u((LU)^{-1}\varepsilon^{-1})$，前提是 $N \geq \mathrm{poly}_u(\varepsilon^{-1}, UL)$，而当 $n \geq \Theta_u(\varepsilon^{-1}+u+\ell) = \Theta_u(\varepsilon^{-1}+\ell)$ 时该条件成立（因为 u 是固定的）。将 $R \geq \Omega_u((LU)^{-1}\varepsilon^{-1})$ 两边乘以 LU，并回想 $D = R \cdot LU$，可得 $D \geq \Omega_u([\epsilon - (1-1/U)^{LU}]^{-1})$；取对数即得 (ii)。 □

这一结果也有一个图论类比，但为避免重复已呈现的内容，我们在此不再陈述。定理 定理 1.17 的第 (ii) 部分改进了 $d \geq -\lg\epsilon + \lg u - O(1)$ 的下界[RTS00，定理 1.5(a)]，，不过后者不要求 u 为常数，也不对 n作限制。定理 定理 1.17 的第 (i) 部分似乎是新的。

1.3.7 对顶点扩展器的推论

(K, A)-顶点扩展器是一个超图[6] $H = (V,E)$，其中每个包含至多 K 个顶点的集合 $S \subseteq V$ 都至少接触 $A \cdot |S|$ 条边，参见 [Vad12，定义 4。1]，例如。在 [Vad12，问题 47]，中介绍了一个稍弱的概念：若超图 H 中每个恰好包含 K 个顶点的集合 $S \subseteq V$ 都接触至少 AK 条超边，则称 H 是一个 $(=K, A)$-顶点扩展器。考察 S 的补集可知，这等价于说 H 是一个 $(1-K/|E|, 1-A/|V|)$-限制器。因此，我们的定理 1.4 和 1.5 推出了以下新的界。

推论 1.18. 令 $\varepsilon, \delta \in (0,1)$，并设 $H = (V,E)$ 为一个含有 n 个顶点、$r \cdot n$ 条超边且平均均匀度为 k 的超图。假设 H 中每个由 $\lceil \delta n \rceil$ 个顶点组成的集合至少与 $\lceil \varepsilon r n \rceil$ 条超边相交。那么：

(i) $\varepsilon \leq 1 - (1-\delta)^k + \frac{2k}{n}$, *and*

(ii) $\varepsilon \leq 1 - (1-\delta)^k - \Omega(\frac{\delta^2(1-\delta)}{rk})$, *provided* $n \geq \mathrm{poly}_\delta(r,k)$.

1.4 与其他工作的关系

与基于扩张器游走的采样器的比较。许多研究探讨了扩张图上的长度为 $(k-1)$ 的随机游走作为采样器、Chernoff 采样器和限制器时的表现。具体来说，设$G = (V,E)$ 是一个具有谱扩张率 d 的正则图 $\lambda := \lambda(G)$，并设 $H = (V,E')$ 是一个超图，其超边为 $k-1$ 长度的 G 中的路径。[7] 那么，著名的 (扩张器)命中集引理 指出

$$\mathbb{P}[\vec{v} = (v_1,\ldots,v_k) \subseteq A] \leq p \cdot \big((1-\lambda)p + \lambda\big)^{k-1} \qquad \forall\ A \subseteq V \text{ of density } p, \qquad \text{(Hitting Set Lemma)}$$

[6]大多数文献将其描述为双侧图。[7]如第 7 页所述，我们略去随机游走可能多次重复经过同一顶点这一技术细节。参见 脚注 3。

这意味着 H′是一个 (p((1 − λ)p + λ)$^{k-1}$,p)-限制器。（在此情形下，关于 ℙ[¯v ⊆A] 的下界也已为人所知，参见 [AFWZ95, TSZ24]。）此外，经过一系列研究 [Kah97, Gil98, Hea08, GV22]，N_H(A) 满足类似切尔诺夫的尾界

$$\mathbb{P}\left[\left|\mathbf{N}_H(A) - kp\right| \geq k\eta\right] \leq \exp\left(-\Omega(1-\lambda)\cdot k\eta^2\right) \quad \forall\ A \subseteq V \text{ of density } p \qquad \text{（扩张器切尔诺夫界）}$$

对所有 $\eta > 0$，[8] 且命中次数近似服从二项分布，即

$$d_{tv}(\mathbf{N}_H(A), \mathrm{Bin}(k,p)) \leq \Theta(\lambda) \qquad \text{for every } A \subseteq V \text{ of density } p, \tag{1.6}$$

也就是说，H 是一个 Θ(λ)-采样器。

我们的定理 1.2 与这些结果之间有三个主要区别。第一，这些结果适用于密度为 p 的所有子集 A ⊆V，而定理 1.2 的结论仅适用于几乎所有这样的集合。第二，上述结果仅适用于（由扩张器游走产生的）图，而我们的结果适用于所有均匀超图。第三，当要求扩张图 G 稀疏（即 d =O(1)）时，我们的定理 1.2 对约束概率、尾界和抽样给出了好得多的界，尽管只对密度为 p 的 A 中的“99.99%”成立。事实上，若 G 的度 d 固定，则根据阿隆–博帕纳界，$\lambda \geq \sqrt[2]{d-1}\,d = \Theta(1)$ [Alo86]，；在这种情况下，当 n → ∞ 趋于无穷（且 k 相对于 n 不太大）时，定理 1.2 中的界 (1.2)、(1.3)、(1.4) 最终会优于上文回顾的扩张器游走对应界。在与二项分布的距离这一情形下，这一点尤其值得注意：(1.6) 给出，对于所有密度为 p 的 A，dtv(N_H(A),Bin(k, p)) ≤ Θ(1)；而定理 1.2 表明，对于几乎所有这样的 A，dtv(N_H(A),Bin(k, p)) ≤ o(1)。尽管根据 [GV22，定理 5]，，在一般的扩张器游走中，不可能对所有 A 将 dtv(N_H(A),Bin(k, p)) ≤ Θ(λ) 改进，后一个结论仍然成立。最后要指出的是，任何顶点度不至于过分离谱的稀疏超图采样器，其表现都优于基于稀疏扩张器游走的采样器，而且这种情况占“99.99%”。

备注1.19。 [GV22] 的工作研究了 N_H(A) 收敛到 Bin(k,p) 的过程，并以全变差距离衡量。先前的工作研究了在柯尔莫哥洛夫距离[9] 等较弱距离下分布之间的收敛，例见 [Lez01, Klo18, Klo19]。 [CPTS21, CMP$^+$22] 的工作对这些先前成果进行了推广，给出了全变差距离下的界，但其界弱于 [GV22]的结果。这些工作还研究了对于某些类别的电路，与基于扩张图游走的样本相比，独立同分布样本所带来的优势。

后续工作 [Gol23]（具体而言，是其中的定理 14）由 [GK21, CPTS21, CMP$^+$22, GV22], 发展而来，并证明了一个 Berry–Esseen 型定理：对于由长度为 (k − 1) 的扩张图游走生成的超图 H，N_H(A) 与某个离散类高斯分布之间的全变差距离至多为 O(λ/$k^{1/2-o(1)}$)（该分布一般不必是 Bin(k, p)，正如 [GV22, 定理 5], 在我们前文讨论中所述）。不过，我们注意到，极限类高斯分布与扩张图 G 以及集合 A ⊆V 存在非平凡的依赖关系。由此看来，[GV22, 定理 5], 中的下界、我们的典型情形界定理 1.2，以及 [Gol23, 定理 14] 中的上界之间的差异，可以这样理解：对于密度为 p 的典型 A ⊆V，极限分布应当呈二项分布；但对于一小部分趋于零的 p-稠密集合，极限分布可能与二项分布相去甚远。[10]

我们将来自扩展子随机游走的限制器与我们在小节 1.3.2 和1.3.4中关于最坏情况下限制概率的结果进行了比较。

与高维扩张子上的 Chernoff 界的比较。 针对由单纯复形（而非扩张器游走）产生的超图的 Chernoff 型（次高斯）尾界，已在以下文献中得到证明：[DH24] ，其前提是满足一定的 高维扩张 假设。然而，要使这些界成立，所需的高维扩张 假设，远强于扩张器游走所需的扩张 假设。因此，当图像G 具有常数度时，这些界不足以恢复扩张器切尔诺夫界。因此，对于扩张器游走，定理 1.2(ii) 所蕴含的尾界在典型情况下更优。

[8]参见 [GV22，第 2]条推论，了解更定量化的表述。[9]设 X、Y 是以实数为支撑集的分布。距离 dK (X,Y) 定义为：dK (X,Y) = $\sup_{t\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}[X \leq t] - \mathbb{P}[Y \leq t]|$[10]正如 [GV22，第 4]条推论所证明的 Op(λ) 上界所允许的那样。

其他相关工作。 我们关于命中集性质的下界，也可以视为超图扩张性的下界。文献 [LPR22] 与我们的工作思路相近，并比较了超图扩张性与几种高维扩张概念，相关概念见 [AJT19、DD19、GLL22、AP23、DH24]。

就在不久前，一项突破性成果 [HLM+25] 构造出了显式的无损顶点扩展器。这些对象与我们研究过的 ϵ限制器密切相关，详见 [Vad12，问题 4。7]。

1.5 论文结构

在第 2 节中，我们回顾一些将在全文中用到的一般定义和结果。在第 3 节中，我们陈述并证明典型情形下的结果。在第 4 节中，我们介绍关于最坏情形抽样的结果。这些结果的证明见第 5 节，但一些技术性的分析论证除外，它们留待第 6 节讨论。在附录 A中，我们用限制器的语言重述一些关于分散器的已知结果。

1.6 致谢

我们感谢 Max Hopkins 和 Dor Minzer 进行了有益且富有见地的讨论，并感谢 Amit Levi 对本手稿早期版本提出的反馈。第二位作者感谢麻省理工学院数学系在撰写本手稿期间给予的接待。

本研究得到 ISF 资助项目编号 721/2024 的支持。

2 预备知识

2.1 离散概率论

全文中，我们将使用粗体字体（例如 $\mathbf{X}$）来表示随机变量。设 $\mathbf{X}$ 是一个取值于集合 Ω的离散随机变量。我们将用 $\mathbb{E}\mathbf{X}$ 和 $\mathrm{Var}(\mathbf{X})$ 分别表示随机变量 $\mathbf{X}$ 的期望和方差。

我们回顾以下由马尔可夫和切比雪夫提出的著名不等式，参见例如 [Was13，定理 4.1、4.2]:

事实 2.1（马尔可夫不等式）。设 $\mathbf{X}$ 是一个取值于非负实数的离散随机变量。那么，对于任意 $t > 0$，有：

$$\mathbb{P}[\mathbf{X} > t] \le \frac{\mathbb{E}\mathbf{X}}{t}.$$

事实 2.2（切比雪夫不等式）。设$\mathbf{X}$ 是一个取值范围为实数的离散随机变量。那么，对于任意 $t > 0$，都有：

$$\mathbb{P}[|\mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X}| > t] \le \frac{\mathrm{Var}(\mathbf{X})}{t^2}.$$

回顾一下，取值于 $\{0,\dots,k\}$ 的随机变量称为服从二项分布，其参数为 (k,p)，记作$\mathbf{X} \sim \mathrm{Bin}(k,p)$，当且仅当其概率质量函数满足：

$$\mathbb{P}[\mathbf{X} = \ell] = \binom{k}{\ell} \cdot p^{\ell}(1-p)^{k-\ell} \qquad \text{（二项分布）}$$

作为一种抽球实验，$\mathrm{Bin}(k,p)$ 表示从一个含有n 个球的瓮中有放回地抽取k 个球时，所抽到的红球数量的分布；其中，红球占p，其余为蓝球。

进一步回顾，取值于 $\{0,\dots,k\}$ 的随机变量$\mathbf{X}$ 称为服从超几何分布，其参数为 (k,m,n)，记作$\mathbf{X} \sim \mathrm{Hyp}(k,m,n)$，当且仅当其概率质量函数满足：

$$\mathbb{P}[\mathbf{X} = \ell] = \frac{\binom{k}{\ell}\cdot\binom{n-k}{m-\ell}}{\binom{n}{m}} \quad \forall \ell = 0,\dots,k. \qquad \text{（超几何分布）}$$

与二项分布类似，$\mathrm{Hyp}(k,m,n)$ 是一种分布，用于描述从一个包含m 个红球和$n-m$ 个蓝球的瓮中，不放回地取出k 个球时，取到的红球数量。

当n较大时，二项分布和超几何随机变量会趋于集中在其均值附近。这称为切尔诺夫界 [Was13，定理 4。5]。

事实 2.3（切尔诺夫界）。设 $\mathbf{X} \sim \mathrm{Bin}(k,p)$ 或 $\mathbf{X} \sim \mathrm{Hyp}(k,pn,n)$。则对所有 $\eta > 0$，有：

$$\mathbb{P}\big[\big|\mathbf{X} - pk\big| > k\cdot\eta\big] \le 2\exp\big(-2k\eta^2\big).$$

注释 2.4。切尔诺夫界通常用于独立随机变量之和。对于二项随机变量 $\mathbf{X} \sim \mathrm{Bin}(k,p)$，我们可以将 $\mathbf{X}$ 看作 $\sum^{k}{}_{i=1}\mathbf{Z}_i$，其中 $\mathbf{Z}_i$ 是服从分布 $\mathrm{Ber}(p)$ 的独立随机变量。证明推广到超几何随机变量也并不困难，例如参见 [Mul18，定理 5。2]。

接下来，我们回顾一下 全变差距离：两个随机变量 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 取值于同一个集合 Ω 时，其定义为

$$\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega}\big|\mathbb{P}[\mathbf{X}=x] - \mathbb{P}\big[\mathbf{Y}=y\big]\big| = \max_{A\subseteq\Omega}|\mathbb{P}[\mathbf{X}\in A] - \mathbb{P}[\mathbf{Y}\in A]|. \qquad \text{(total variation)}$$

为简化记号，若已知$\mathbf{Y}$ 服从分布律 μ，我们将用 $\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{X},\mu)$ 代替 $\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$。

众所周知，当k 相对于n较小时，超几何分布 $\mathrm{Hyp}(k,m,n)$ 与二项分布在全变差意义下接近：

定理 2.5 ([Kün98])**.** 设 $k,m,n \in \mathbb{N}$ 满足 $k \le m \le n$。记 $p = m/n$，$q = 1-p$，若 $npq \ge 1$，则有：

$$\frac{1}{28}\cdot\frac{k-1}{n-1} \le \mathrm{d_{tv}}(\mathrm{Hyp}(k,pn,n),\mathrm{Bin}(k,p)) \le \frac{k-1}{n-1}$$

对定理 2.5 的直观解释是，随着 n 相对于 k 增大，在超几何分布抽球实验中不将球放回所产生的影响会变得可以忽略。

2.2 超图

就我们的目的而言，超图 $H=(V,E)$（超边可能重复）由顶点集合$V=V(H)$、超边集合 $E=E(H)$以及一个关联关系构成，该关系指定哪些顶点属于哪些超边。我们用 $v<e$ 表示顶点 v 属于超边 e，并用 $\mathrm{Vert}(e)$ 或 $\mathrm{Vert}_H(e)$ 表示 e 中顶点的集合，即 $\{v\in V\colon v<e\}$。不过，在不会造成混淆时，我们将 e 视为其顶点集合 $\mathrm{Vert}_H(e)$。除非另有说明，我们假设所有超图都是有限的，且至少有一个顶点和一条超边。

设$H=(V,E)$是一个超图。给定顶点集合$A\subseteq V$，我们用$E(A)$或$E_H(A)$表示所有顶点都属于A的超边集合，即

$$E(A) = E_H(A) = \{e\in E \,:\, \mathrm{Vert}(e)\subseteq A\}.$$

我们也称$E(A)$中的边被限制在A内。类似地，给定边集$B\subseteq E$，我们用$V(B)$或$V_H(B)$表示由B中的边覆盖的顶点集合，即

$$V(B) = V_H(B) = \bigcup_{e\in B}\mathrm{Vert}(e).$$

超边$e\in E$的均匀度是其中所含顶点的数量，记作 $|e|$ 或 $|e|_H$.¯若超图H 中每条边的均匀度均为k，则称H 为k-一致超图。按照惯例，超图$H=(V,E)$的平均均匀度$\bar{k}$和最大均匀度$k^\star$ 定义为

$$\bar{k} = \frac{1}{|E|}\cdot\sum_{e\in E}|e| \quad \text{and} \quad k^\star = \max_{e\in E}|e|.$$

We a还要注意，顶点 $v\in V$在 H中的度，是包含它的超边 $e\in V$的数量，即 ，

$$\deg_H(v) = \big\{e\in V \,:\, v<e \ \ (\text{or equivalently } v\in\mathrm{Vert}(e))\big\}.$$

当所有顶点具有相同的正度 d时，我们称 H 是 d-正则的。如果某个 $d > 0$ 使得超图 H 是 d-正则的，则称超图 H 为正则超图（但当所有顶点的度都为 0，即所有超边都是空集时，不认为该超图是正则的）。一般而言，H的平均度和最大度分别为 $\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}\deg v$和 $\max\{\deg v: v \in V\}$。我们回顾下面的结果，它正是握手引理在超图中的类似形式：

Prop **命题 2.6.** 设 $H=(V,E)$ 是一个平均均匀度为 k、平均度为 d 的超图。那么：

$$\frac{|E|}{|V|}=\frac{\bar{d}}{\bar{k}}.$$

证明。 这等价于证明 $|E|k = |V|d$。这是因为

$$|E|\bar{k}=\sum_{e\in E}\sum_{v:v<e}1=\sum_{v\in V}\sum_{e:e>v}1=|V|\bar{d}. \qquad \square$$

给定超图 H =(V,E) 和子集 A ⊆V，我们将 $N_H(A)$ 记为这样一个随机变量：均匀随机地选取一条边 e ∈E，并统计其中有多少个顶点属于 A，即 $N_H(A) = |e\cap A|$（这里我们将 e 视为其顶点集合）。我们称 $N_H(A)$ 为集合 A 中的命中次数。最后，回顾一下，H =(V,E) 的对偶超图是超图 $H^*=(V^*,E^*)$，它通过互换顶点和超边的角色得到。也就是说，$V^*=E$ 且 $E^*=V$，并且在 H^* 中，e <v 当且仅当在 H 中 v <e。注意，H 是 k-均匀的当且仅当 H^* 是 k-正则的。我们还有：

命题 **2.7.** 设 $H=(V,E)$ 是一个 (ϵ,p)-限制器。那么，对每个 $\epsilon'>$，$H^*=(E,V)$ 都是一个 $(1-p,1-\epsilon')$-限制器。 ϵ.

证明。记 n =|V|，m =|E|。设 B ⊆E 是一个密度为 $1-\epsilon'$（即 $|B|=\lfloor(1-\epsilon')m\rfloor$）的子集，并令 A 为 H 中仅与 B 中的边关联的顶点集合，即 $A=E_{H^*}(B)$。我们需要证明 $|A|\le(1-p)n$。显然，$E_H(V-A)\supseteq E-B$。由于 $|E-B|\ge\epsilon'm>\epsilon m$ 且 H 是一个 (ϵ,p)-限制器，因此必有 $|V-A|\ge pn$，从而 $|A|\le(1-p)n$。

□

2.3 一些不等式

我们回顾几个在下文中会多次用到的不等式。为完整起见，我们列出它们的简单证明。

引理 2.8. 设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 为一个区间，且 $f:I\to\mathbb{R}$ 是一个可微函数，满足对于所有 $x\in I$，均有 $A\le f'(x)\le B$。那么对于 I 中任意 $x<y$，均有 $A(y-x)\le f(y)-f(x)\le B(y-x)$。

证明. $A(y-x)=\int_{yx}A\,dt\le\int_{yx}f'(t)dt=f(y)-f(x)$。另一个不等式的证明类似。

□

引理 2.9. 设 x,y,k,ε 为非负实数，且满足 $x<y$。

(i) 若 $k\ge1$ 或 $k=0$，则 $y^k-x^k\le k\,y^{k-1}(y-x)$。特别地，当 $x,y\in[0,1]$时，$y^k-x^k\le k(y-x)$。

(ii) 若 $0<k\le1$ 且 $x<1$，则 $y^k-x^k\le y-x\,e^{x(1-x)}$。

证明。（i）当 k =0 时结论显然成立，因此设 k ≥1。令 f (t) =t^k。那么对于 t ∈[x, y],，有 f ′(t) =$kt^{k-1}\le k\,y^{k-1}$，因此由引理 2.8 可得，$y^k-x^k\le k\,y^{k-1}(y-x)$。

(ii) Since $0<k\le1$，函数 $f(t)=t^k$ 在 $(0,\infty)$ 上是凹函数。因此，对于每个 $a,\varepsilon\ge0$，我们有

$$(a+\varepsilon)^k=f(a+\varepsilon)\le f(a)+\varepsilon\cdot f'(a)=a^k+\varepsilon\cdot ka^{k-1}.$$

当 $a<1$时，初等分析表明，函数 $k\mapsto ka^{k-1}$ 在 $\left(\frac{1}{\ln(a^{-1})},\frac{1}{ea\ln(a^{-1})}\right]$ 处取得全局最大值，因此

$$(a+\varepsilon)^k\ge a^k+\varepsilon\cdot\frac{1}{ea\ln(a^{-1})}\le a^k+\varepsilon\cdot\frac{1}{ea(1-a)}$$

（在第二个不等式中，我们用到了 $\ln a\le a-1$）。将其应用于 $a=x$和 $\varepsilon=y-x$，即可得到所需结论。

□

引理 2.10. 对于每个 $x,t\in(0,1)$，都有 $t\,x<1-(1-t)^x\le-\ln(1-t)x$。右侧不等式实际上对每个实数 x 都成立。

证明. 左侧不等式等价于 $(1-t)^x < 1-t\,x$，这是伯努利不等式的一个变体，可以如下证明：函数 $f(x) = (1-t)^x$ 严格凸，因此连接 $(0, f(0)) = (0,1)$ 和 $(1, f(1)) = (1, 1-t)$ 的线段位于函数 $f(x)$ 的图像上方。该线段的方程为 $y = 1 - t\,x$，因此不等式得证。右侧不等式成立，因为 $1-(1-t)^x = 1 - e^{x\ln(1-t)} \le 1-(1+\ln(1-t)x) = -\ln(1-t)x$。（这里用到了对所有实数 a，$e^a \ge 1+a$ 的事实。）

□

引理 2.11. 对于每个 $x \in (0,1)$，都有 $\ln(1-x) > -x + 0.5x^2$。

证明。

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots > -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} - \cdots$$
$$= -x - \frac{x^2}{2}(1 + x + x^2 + \ldots) = -x - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{-x(1-x) - 0.5x^2}{1-x} = \frac{-x + 0.5x^2}{1-x}.$$

□

引理 2.12. 设 $a > 0$。那么对于每个 $x \ge (2a)^{2/a}$，都有 $\ln x \le x^a$。

证明。 当 $a \ge 1$ 时，这显然成立，因为对于所有 $x > 0$，$\ln x \le x \le x^a$，所以不妨设 $a \in (0,1)$。然后，根据初等分析，函数 $f(x) = x^a - \ln x$ 在 $x \ge (1/a)^{1/a}$ 时递增。因此只需验证 $f((2/a)^{2/a}) \ge 0$。确实，

$$f\left(\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{2}{a}}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^2 - \frac{2}{a}\ln\left(\frac{2}{a}\right) \ge \left(\frac{2}{a}\right)^2 - \frac{2}{a}\cdot\frac{2}{a} \ge 0.$$

□

3 超图采样器在典型情形下的性能

本节将证明若干具有共同主题的结果：每个 k-均匀超图 $H = (V,E)$，只要其顶点度没有过于极端，其采样性质几乎总是与 V 上的完全 k-均匀超图几乎一样好。

回顾（第 2.2 节），给定 $A \subseteq V$，命中次数 $\mathbf{N}_H(A)$ 表示在 E 中均匀随机选取的一条边命中集合 A 的次数。本节的第一个主要结果指出，若我们感兴趣的抽样集合 $A \subseteq V$ 是从所有密度为 V 的子集中均匀随机选取的 p，那么几乎必然，命中次数的分布接近超几何分布 $\mathrm{Hyp}(k, pn, n)$，其中 $n = |V|$。形式化地说：

定理 3.1 (典型超几何收敛)。 设 $H = (V,E)$ 是一个具有 n 个顶点的 k-均匀超图，其中每个顶点的度至多为 D。给定 $p \in \{0/n, 1/n, \ldots, n/n\}$，并设 $\mathbf{A} \subseteq V$ 是一个基数为 $|\mathbf{A}| = p \cdot n$ 的均匀随机子集。那么，只要 $n \ge \max\{4k^2, 2k/p(1-p)\}$，就有

$$\mathbb{P}_{\mathbf{A}}\left[\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{N}_H(\mathbf{A}), \mathrm{Hyp}(k, pn, n)) \ge \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\left(\frac{a_{3.1}(k,p)}{n} + \frac{D-1}{|E|}\cdot b_{3.1}(k)\right)$$

其中，函数 $a_{3.1}(k, p)$ 和 $b_{3.1}(k)$ 定义如下：

$$a_{3.1}(k,p) = \frac{e}{2}\cdot k\cdot(k+1)^2\left(\frac{k-1}{p(1-p)} + 4k\right) \quad \textit{and} \quad b_{3.1}(k) = 0.325\cdot k\cdot(k+1)^2.$$

我们在第 3.1 节中证明第 3.1 节。

众所周知，超几何分布满足切尔诺夫界（事实 2.3）。我们的下一个结果表明，对于几乎所有密度为 p 的子集 $A \subseteq V$，随机变量 $\mathbf{N}_H(A)$ 同样满足切尔诺夫界，因此会强烈集中在均值 kp 附近。此外，满足这一性质的 A 的比例若不成立，则其数量会随 指数级 k 减小（除此之外，还会随 $n = |V|$ 多项式级减小）。

定理 3.2 （典型切尔诺夫界）。设 $H = (V, E)$ 是一个具有 n 个顶点的 k-均匀超图，其中每个顶点的度至多为 D。给定 $p \in \{0/n, 1/n, \ldots, n/n\}$，并且 $\mathbf{A} \subseteq V$ 是一个基数为 $|\mathbf{A}| = p \cdot n$ 的均匀随机子集。假设 $n \ge \max\{4k^2, 2k/p(1-p)\}$。那么，对每个 $\eta > 0$，都有[11]

$$\mathbb{P}_{\mathbf{A}}\left[\mathbb{P}\left[\left|\mathbf{N}_H(\mathbf{A}) - kp\right| \ge k\cdot\eta\right] \ge 2\exp(-2k\eta^2) + \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{a_{3.2}(k,p,\eta)}{n} + \frac{D-1}{|E|}\cdot b_{3.2}(k,\eta)\right),$$

[11]更多精确 LHS 中的 $2\exp(-2k\eta^2)$ 可以精确地替换为二项分布/超几何分布的任意尾部估计。 s, 执行一个 中的类似变化 $a_{3.2}$ 和 $b_{3.2}$。

其中

$$a_{3.2}(k,p,\eta) = 16a_{3.1}(k,p)\exp(-4k\eta^2) = 8ek(k+1)^2\left(\frac{k-1}{p(1-p)}+4k\right)\exp(-4k\eta^2)$$
$$b_{3.2}(k,\eta) = 8b_{3.1}(k)\exp(-2k\eta^2) = 2.6k(k+1)^2\exp(-2k\eta^2)$$

以及函数 $a_{3.1}(k,p)$ 和 $b_{3.1}(k)$ 的定义与 定理 *3.1* 中相同。

我们将在定理 3.2中第 3.2 节证明。

将定理 3.2中的$a_{3.2}$ 和$b_{3.2}$ 替换为$a_{3.1}$ 和$b_{3.1}$ ，即可直接从定理 3.1推出类似结论，只需利用全变差距离的定义即可。定理 3.2在此基础上实现了（关于k的）指数级改进。事实上，当$k\eta^2=\Omega(\log k)$ 时，指数项 $\exp(-k\eta^2)$ 的衰减速度远快于 k 的多项式前因子 $a_{3.1}$ 、 $b_{3.1}$ 的增长速度。

上述结果和定理 2.5的一个直接推论是以下推论，它意味着定理 1.2的第 (i) 和 (ii) 部分。

推论 3.3。 设 $H=(V,E)$ 是一个具有 n 个顶点、最大度至多为 D 的 k-均匀超图。设 $p\in\{0/n, 1/n, \ldots, n/n\}$ 且 $\alpha\in(0,1]$ 已给定，并假设 $n\geq\max\{4k^2, 2^k/p(1-p)\}$。那么，记 $\widetilde{n}=|E|/D$（例如，若 H 是正则的，则为 $\widetilde{n}=nk$），我们有

$$d_{tv}(\mathbf{N}_H(A),\mathrm{Hyp}(k,pn,n))<\widetilde{n}^{-\frac{1-\alpha}{2}} \qquad and \qquad d_{tv}(\mathbf{N}_H(A),\mathrm{Bin}(k,p))<\widetilde{n}^{-\frac{1-\alpha}{2}}+\frac{k-1}{n-1}$$

除去至多$(a_{3.1}(k,p)+b_{3.1}(k))\cdot\widetilde{n}^{-\alpha}$比例的集合 $A\subseteq V$（满足 $|A|=p\cdot n$）之外。

此外，对于任意 $\eta>0$ 和 $\alpha'\in[0,1]$，我们有

$$\mathbb{P}\left[\left|\mathbf{N}_H(A)-kp\right|>k\eta\right]\leq 2\exp(-2k\eta^2)+\exp\left(-\frac{(1-\alpha')k\eta^2}{2}\right)\cdot\widetilde{n}^{-\frac{1-\alpha}{2}}$$
$$\leq(2+\widetilde{n}^{-\frac{1-\alpha}{2}})\exp\left(-\frac{(1-\alpha')k\eta^2}{2}\right)$$

除去至多$16(a_{3.1}(k,p)+b_{3.1}(k))e^{-\alpha' k\eta^2}\widetilde{n}^{-\alpha}$比例的集合 $A\subseteq V$（满足 $|A|=p\cdot n$）之外。

证明。 对于第一个陈述，取 $\varepsilon=\widetilde{n}^{-\frac{1-\alpha}{2}}$ 在定理 3.1 中，并注意到 $n\geq nk\geq\frac{|E|}{D}$由 命题 2.6可得。第二个陈述由第一个陈述和 定理 2.5推出。对于第三个陈述，取 $\varepsilon=\widetilde{n}^{-\frac{1-\alpha}{2}}\exp(-\frac{(1-\alpha')k\eta^2}{2})$ 于 定理 3.2。 □

我们对定理 3.1 和定理 3.2 的证明依赖于以下引理及其后续推论。这些结果表明，只要k在n中增长得足够慢，与均匀随机子集$\mathbf{A}$ 发生交集且交集大小恰好为r 的边的比例的方差就会趋于零，其中$\mathbf{A}$ 的密度为p 。换句话说，我们证明了恰好r 次命中$\mathbf{A}$的边所占比例在均方 意义下收敛于超几何概率 $\binom{k}{r}\binom{n-k}{pn-r}\binom{n}{pn}^{-1}$.[12] 形式化地说：

引理 3.4 (主引理)。 设 $H=(V,E)$ 是一个有 n 个顶点的 k-均匀超图，每个顶点的度至多为 D。给定 $p\in\{0/n, 1/n, \ldots, n/n\}$，且$\mathbf{A}\subseteq V$ 是一个基数为 $|\mathbf{A}|=p\cdot n$ 的均匀随机子集。对于整数 r，我们用 $E_r(\mathbf{A})$ 表示 H 中与随机集合 $\mathbf{A}$交集大小为 r 的边集。于是[13]

$$\mathbb{E}\left[\frac{|E_r(\mathbf{A})|}{|E|}\right]=\frac{\binom{k}{r}\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}}. \tag{3.1}$$

此外，若 $n\geq\max\left\{4k^2, 2^r/p, 2^{(k-r)}/(1-p)\right\}$，则

$$\mathrm{Var}\left[\frac{|E_r(\mathbf{A})|}{|E|}\right]\leq\left(\frac{C_{3.4}(k,r,p)}{n}+C'_{3.4}(k,r)\cdot\frac{D-1}{|E|}\right), \tag{3.2}$$

其中

$$C_{3.4}(k,r,p)=2e\binom{k}{r}^2p^{2r}(1-p)^{2(k-r)}k\left(\frac{k-1}{pq}+4k\right) \quad and \quad C'_{3.4}(k,r)=p^r(1-p)^{k-r}\cdot 1.3k\cdot\binom{k}{r}$$

[12]关于概率分布之间收敛的更多信息，请参阅 [Was13, 第 5]章。
[13]这里，按照惯例，当$m\notin[0,n]$ 或$n<0$时，二项式系数$\binom{n}{m}$ 定义为 0。

我们在 第 3.4 引理 第 第 3.3 节中证明。

利用 引理 3.4 并运用切比雪夫不等式（事实 2.2），我们证明，对于 几乎 所有密度为 p的子集 $A \subseteq V$，$\mathbf{N}_H(A) = r$的概率与超几何随机变量 $\mathrm{Hyp}(k,pn,n)$ 取值为 r的概率非常接近。形式化地说：

推论 3.5。 采用 引理 *3.4*中的记号和假设 $\varepsilon > 0$，对所有

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{A}}\left[\left|\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(\mathbf{A}) = r] - \frac{\binom{k}{r}\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}}\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\left(\frac{C_{3.4}(k,r,p)}{n} + \frac{D-1}{|E|}\cdot C'_{3.4}(k,r)\right).$$

证明。 设$A \subseteq V$为一个固定子集。根据$\mathbf{N}_H(A)$的定义，我们有

$$\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(A) = r] = \frac{|\{e \in E : |e \cap A| = r\}|}{|E|} = \frac{|E_r(A)|}{|E|}$$

将 A替换为随机集合 $\mathbf{A}$后，得到 $\mathbb{P}_{\mathbf{A}}[\mathbf{N}_H(A) = r] = \frac{|E_r(\mathbf{A})|}{|E|}$。现在，根据 引理 3.4 和切比雪夫不等式（事实 2.2），

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{A}}\left[\left|\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(\mathbf{A}) = r] - \frac{\binom{k}{r}\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}}\right| \geq \varepsilon\right] &= \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{A}}\left[\left|\frac{|E_r(\mathbf{A})|}{|E|} - \mathbb{E}\left[\frac{|E_r(\mathbf{A})|}{|E|}\right]\right| \geq \varepsilon\right], \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}(\mathbf{E}_r(\mathbf{A}))}{\varepsilon^2}, \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\left(\frac{C_{3.4}(k,r,p)}{n} + \frac{D-1}{|E|}\cdot C'_{3.4}(k,r)\right).
\end{aligned}$$

□

在 推论 *3.5*中令 $r = k$和 $r = 0$，即可得到下一个推论。它蕴含 定理 1.2(iii)，并且还将用于证明我们在 第 4 节中关于最坏情形约束概率的下界。

推论 3.6. 设 $H = (V, E)$ 是一个具有 n 个顶点、最大度为 D 的 k-均匀超图。给定 $p \in \{0/n, 1/n, \ldots, n/n\}$和 $\alpha \in [0,1]$，令$\mathbf{A} \subseteq V$ 为一个基数为 $|\mathbf{A}| = p \cdot n$ 的均匀随机子集，并令$\mathbf{e}$表示 E 中一条均匀随机超边。假设 $n \geq \max\{4k^2, 2k/p(1-p)\}$。那么，令 $\tilde{n} = |E|/D$，我们有

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{A}}\left[\left|\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \cap \mathbf{A} = \emptyset] - (1-p)^k\right| \geq n^{-\frac{1-\alpha}{2}}\right] \leq C_{3.6}\cdot\frac{(1-p)^k\cdot k^2\cdot\tilde{n}^{-\alpha}}{p} \leq \frac{4C_{3.6}}{e^2 p(\ln(1-p))^2}\cdot\tilde{n}^{-\alpha}$$

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{A}}\left[\left|\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \subseteq \mathbf{A}] - p^k\right| \geq n^{-\frac{1-\alpha}{2}}\right] \leq C_{3.6}\cdot\frac{p^k\cdot k^2\cdot\tilde{n}^{-\alpha}}{1-p} \leq \frac{4C_{3.6}}{e^2(1-p)(\ln p)^2}\cdot\tilde{n}^{-\alpha}$$

其中 $C_{3.6} > 0$ 是与 n、k、p、D 无关的某个绝对常数。事实上，我们可以取 $C_{3.6} = 114$。

证明。 由于$\mathbf{e} \subseteq \mathbf{A}$当且仅当$\mathbf{e} \cap (V - \mathbf{A}) = \emptyset$，且$V - \mathbf{A}$在$V$的 $(1-p)$-稠密子集上均匀分布，因此，关于 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \subseteq \mathbf{A}]$ 的陈述，可由关于 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \cap \mathbf{A} = \emptyset]$ 的陈述推出，只需将p替换为 $1-p$。因此，只需证明关于 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \cap \mathbf{A} = \emptyset]$的陈述。

事件 $\{\mathbf{e} \cap \mathbf{A} = \emptyset\}$ 当且仅当 $\mathbf{N}_H(\mathbf{A}) = 0$成立。根据 推论 3.5，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{A}}\left[\left|\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \cap \mathbf{A} = \emptyset] - \frac{\binom{n-k}{pn}}{\binom{n}{pn}}\right| \geq \varepsilon\right] &= \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\left(\frac{C_{3.4}(k,0,p)}{n} + \frac{D-1}{|E|}C'_{3.4}(k,0)\right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\left(2e\cdot\frac{(1-p)^{2k-1}\cdot k(5k-1)}{p\cdot n} + (1-p)^k\frac{D-1}{|E|}\cdot 1.3k\right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{(10e+1.3)(1-p)^k k^2}{p\cdot\tilde{n}},
\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了在$n \geq |E|/D$的推论 3.3证明中展示的事实。根据定理 2.5，注意到 $\binom{n-k}{pn}/\binom{n}{pn}$ 和 $(1-p)^k$分别是从超几何分布和二项分布中产生k次命中中的概率，我们有：

$$\left|\frac{\binom{n-k}{pn}}{\binom{n}{pn}} - (1-p)^k\right| \leq \frac{k-1}{n-1} \leq \frac{k}{n} := \delta.$$

因此，我们得到：

$$\mathbb{P}_{\mathbf{A}}\Big[\Big|\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}\cap\mathbf{A}=\emptyset]-(1-p)^k\Big|\geq\varepsilon\Big]\leq\frac{1}{(\varepsilon-\delta)^2}\cdot\frac{(10e+1.3)\cdot(1-p)^k\cdot k^2}{p\cdot\tilde{n}}.$$

取 $\varepsilon=n^{-\frac{1-\alpha}{2}}$。我们的假设 $n\geq 4k^2$ 意味着

$$\varepsilon=n^{-\frac{1-\alpha}{2}}=\frac{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}{n}\geq\frac{2k}{n}=2\delta,$$

因此 $(\varepsilon-\delta)^{-2}\leq(\varepsilon/2)^{-2}=4n^{-(1-\alpha)}$。于是我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{A}}\Big[\Big|\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}\cap\mathbf{A}=\emptyset]-(1-p)^k\Big|\geq n^{-\frac{1-\alpha}{2}}\Big]&\leq\frac{4}{n^{-(1-\alpha)}}\cdot\frac{(10e+1.3)(1-p)^k\cdot k^2}{p\cdot\tilde{n}}\\&\leq\tilde{n}^{-\alpha}\cdot\frac{4(10e+1.3)(1-p)^k\cdot k^2}{p}.\end{aligned}$$

最后，取 $C_{3.6}=114\geq 4(10e+1.3)$，并注意到根据初等分析，$(1-p)^k\cdot k^2\leq$ $^4e^2(\ln(1-p))^2$。 ———— □

现在假设 $H=(V,E)$ 是一个均匀度可能不一致、平均均匀度为 k 的超图，同时也是一个（ϵ,p）-限制器。最后注意到，引理 3.4 与凸性论证给出了关于 ϵ的以下下界，其证明将在 第 3.4 节中给出。我们将在第 4节为稀疏超图给出一个更好的下界。与本节的其他主要结果不同，这并非关于 p-稠密 V 子集的约束概率的典型行为，而是关于其最坏情形（即最大可能）约束概率的结果。

推论 3.7（最坏情形约束概率下界 [一般情形]）。设 $H=(V,E)$ 为一个平均均匀度为 k、含 n 个顶点的超图（不一定是均匀超图）。若 H 是一个（ϵ，p）-限制器 且 $n\geq$ ^1p（1−p），则 $\epsilon\geq p^k-2k/n$。 ————

此外，当 $H=(V,E)$ 是 k-均匀超图且 pn 为整数时，我们有改进后的界 $\epsilon\geq\binom{n}{k}^{-1}\binom{n-k}{pn-k}\geq p^k-(k-1)/(n-1)$。

我们将在以下小节中给出结果的证明 定理 3.1 、定理 3.2、引理 3.4和推论 3.7 。

3.1 典型超几何收敛的证明（定理3.1）

定理 定理 *3.1*的证明。 设 $A\subseteq V$是一个基数为 $p\cdot n$的固定集合。根据 全变差 距离的定义，可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{N}_H(A),\mathrm{Hyp}(k,pn,n))&=\frac{1}{2}\cdot\sum_{r=0}^{k}\Big|\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(A)=r]-\mathbb{P}\big[\mathrm{Hyp}(k,pn,n)=r\big]\Big|,\\&=\frac{1}{2}\cdot\sum_{r=0}^{k}\left|\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(A)=r]-\frac{\binom{k}{r}\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}}\right|\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中，第二个等式是根据超几何分布的定义得到的。根据鸽巢原理，如果 $\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{N}_H(A),\mathrm{Hyp}(k,pn,n))\geq\varepsilon$，那么必然存在某个$r\in\{0,\ldots,k\}$，使得

$$\left|\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(A)=r]-\frac{\binom{k}{r}\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}}\right|\geq\frac{2\varepsilon}{k+1}.$$

随机选择$\mathbf{A}$ 并利用上述观察结果：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{A}}\big[\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{N}_H(\mathbf{A}),\mathrm{Hyp}(k,pn,n))\geq\varepsilon\big]&\leq\mathbb{P}_{\mathbf{A}}\left[\exists\ r\in\{0,\ldots,k\}\ \text{ s.t. }\left|\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(\mathbf{A})=r]-\frac{\binom{k}{r}\binom{n-k}{np-r}}{\binom{n}{pn}}\right|\geq\frac{2\varepsilon}{k+1}\right],\\&\leq\sum_{r=0}^{k}\mathbb{P}_{\mathbf{A}}\left[\left|\mathbb{P}[\mathbf{N}_H(\mathbf{A})=r]-\frac{\binom{k}{r}\binom{n-k}{np-r}}{\binom{n}{pn}}\right|\geq\frac{2\varepsilon}{k+1}\right],\\&\leq\frac{(k+1)^2}{4\varepsilon^2}\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{C_{3.4}(k,r,p)}{n}+\frac{D-1}{|E|}\cdot C'_{3.4}(k,r)\right).\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由简单的并集界得到，第三个不等式由推论 3.5得到。我们注意到，

$$(k+1)^2\sum_{r=0}^{k} C'_{3.4}(k,r) = 1.3k(k+1)^2\sum_{r=0}^{k} p^r(1-p)^{k-r}\binom{k}{r} = 1.3k(k+1)^2 = 4b_{3.1}(k)$$

根据二项式公式。此外，我们有

$$\textstyle\sum_{r=0}^{k} C_{3.4}(k,r,p) = 2e\cdot k\cdot\left(\frac{k-1}{p(1-p)}+4k\right)\cdot\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}^2 p^{2r}(1-p)^{2(k-r)} \le 2e\cdot k\left(\frac{k-1}{p(1-p)}+4k\right) = \frac{4a_{3.1}(k,p)}{(k+1)^2},$$

其中，我们利用各项都是平方后的概率，在将总和上界为 1 时得到了这一点。

综合以上各点，我们有

$$\mathbb{P}\left[\mathrm{d_{tv}}(\mathbf{N}_H(\mathbf{A}),\mathrm{Hyp}(k,pn,n)) \ge \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\left(\frac{a_{3.1}(k,p)}{n}+\frac{D-1}{|E|}\cdot b_{3.1}(k)\right),$$

这正是我们要证明的。 □

3.2 典型切尔诺夫界的证明（定理 3.2）

定理 *3.2* 的证明。令 固定， $\subseteq V$ 并令 $\mathbf{Z} \sim \mathrm{Hyp}(k,pn,n)$ 是一个超几何随机变量。注意，对于每个 $\eta>0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\left|\mathbf{N}_H(A)-kp\right| \ge k\cdot\eta\right] &= \sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} \mathbb{P}\left[\mathbf{N}_H(A)=j\right] \\
&\le \sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} \left(\mathbb{P}\left[\mathbf{Z}=j\right]+\left|\mathbb{P}\left[\mathbf{N}_H(A)=j\right]-\mathbb{P}\left[\mathbf{Z}=j\right]\right|\right) \\
&= \sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} \mathbb{P}\left[\mathbf{Z}=j\right] + \sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} \left|\mathbb{P}\left[\mathbf{N}_H(A)=j\right]-\mathbb{P}\left[\mathbf{Z}=j\right]\right| \\
&= \mathbb{P}\left[\left|\mathbf{Z}-kp\right|>k\eta\right] + \sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} \left|\mathbb{P}\left[\mathbf{N}_H(A)=j\right]-\mathbb{P}\left[\mathbf{Z}=j\right]\right| \\
&\le 2\exp(-2k\eta^2) + \sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} \left|\mathbb{P}\left[\mathbf{N}_H(A)=j\right]-\mathbb{P}\left[\mathbf{Z}=j\right]\right|, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们用到了适用于超几何随机变量的切尔诺夫界（事实 2.3）。因此，如果我们有

$$\mathbb{P}\left[\left|\mathbf{N}_H(A)-kp\right|>k\cdot\eta\right] \ge 2\exp(-2k\eta^2)+\varepsilon,$$

那么根据鸽巢原理，(3.4) 中求和的各项至少有一项应大于 ε_{k+1}。因此，令 $J=\{j\in[0,k]:\,|j-kp|>k\eta\}$，并令 $\mathbf{A}\subseteq V$按照定理中的方式随机选取，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathbf{A}}\left[\mathbb{P}\left[\left|\mathbf{N}_H(\mathbf{A})-kp\right|\ge k\cdot\eta\right]\ge 2\exp(-2k\eta^2)+\varepsilon\right] &\le \mathbb{P}\left[\exists\, j\in J \text{ s.t. } \left|\mathbb{P}\left[\mathbf{N}_H(\mathbf{A})=j\right]-\mathbb{P}\left[\mathbf{Z}=j\right]\right|\ge\frac{\varepsilon}{k+1}\right] \\
&= \sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} \mathbb{P}_{\mathbf{A}}\left[\left|\mathbb{P}\left[\mathbf{N}_H(\mathbf{A})=j\right]-\mathbb{P}\left[\mathbf{Z}=j\right]\right|\ge\frac{\varepsilon}{k+1}\right] \\
&\le \frac{(k+1)^2}{\varepsilon^2}\sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}}\left(\frac{C_{3.4}(k,j,p)}{n}+\frac{D-1}{|E|}C'_{3.4}(k,j)\right) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

其中我们利用了 推论 3.5 来得到最终的不等式 (3.5)。现在，我们分别对 (3.5)中出现的各个求和进行界定。我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} C_{3.4}(k,j,p) &= 2ek\left(\frac{k-1}{p(1-p)}+4k\right)\sum_{\substack{j\in[k+1],\\ |j-kp|>k\eta}}\binom{k}{j}^2 p^{2j}(1-p)^{2(k-j)}, \\
&\le 2ek\left(\frac{k-1}{p(1-p)}+4k\right)\left(\sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}}\binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}\right)^2.
\end{aligned}$$

记 $\mathbf{B} \sim \mathrm{Bin}(k,p)$ 为一个服从二项分布的随机变量，我们可知

$$\sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} = \mathbb{P}\big[|\mathbf{B}-kp|>k\eta\big] \le 2\exp(-2k\eta^2),$$

其中我们在不等式（事实 2.3）中应用了二项随机变量的切尔诺夫界。因此，

$$\sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} C_{3.4}(k,j,p) \le 2ek\left(\frac{k-1}{p(1-p)}+4k\right)\cdot 4\exp(-4k\eta^2) \tag{3.6}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} C'_{3.4}(k,j) &= 1.3k \sum_{\substack{j\in[0,k],\\ |j-kp|>k\eta}} p^j(1-p)^{k-j}\binom{k}{r}\\ &= 1.3k\,\mathbb{P}\big[|\mathbf{B}-kp|>k\eta\big]\\ &\le 2.6k\exp(-2k\eta^2).\end{aligned} \tag{3.7}$$

结合（3.6）和（3.7）中的界以及（3.5），我们得到

$$\begin{aligned}&\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{A}}\big[\mathbb{P}\big[\big|\mathbf{N}_H(\mathbf{A})-kp\big|\ge k\cdot\eta\big]\ge 2\exp(-2k\eta^2)+\varepsilon\big]\\ &\qquad\le \frac{(k+1)^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{8ek}{n}\left(\frac{k-1}{p(1-p)}+4k\right)\exp(-4k\eta^2)+\frac{D-1}{|E|}2.6k\exp(-2k\eta^2)\right)\\ &\qquad= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{a_{3.2}(k,p,\eta)}{n}+\frac{D-1}{|E|}\cdot b_{3.2}(k,\eta)\right),\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

3.3 主要引理 3.4的证明

引理 *3.4*的证明。 设$\mathbf{A}\subseteq V$按照引理中的方式随机选取。对于所有$e\in E$，定义 e

$$\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A}) = \begin{cases}1 & |e\cap\mathbf{A}|=r,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

那么 $|E_r(\mathbf{A})| = \sum_{e\in E}\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})$。

现在请注意，对于任意超边 $e\in E$，交集的大小 $|e\cap\mathbf{A}|$ 服从超几何分布 $\mathrm{Hyp}(k,pn,n)$。因此，只要

$$\mathbb{E}\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A}) = \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{A}}[|e\cap\mathbf{A}|=r] = \frac{\binom{k}{r}\cdot\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}}.$$

由于 $\frac{|E_r(\mathbf{A})|}{|E|} = \frac{1}{|E|}\cdot\sum_{e\in E}\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})$ 由期望的线性性可得 (3.1)。

为了证明 (3.2)，我们首先假设以下界：

断言 3.8。我们有

$$\mathrm{Var}\left(\frac{|E_r(\mathbf{A})|}{|E|}\right) \le \binom{k}{r}^2 \underbrace{\left(\frac{\binom{n-2k}{pn-2r}}{\binom{n}{pn}}-\frac{\binom{n-k}{pn-r}^2}{\binom{n}{pn}^2}\right)}_{\mathrm{term}_1} + \frac{k\cdot(D-1)}{|E|}\cdot\binom{k}{r}\underbrace{\frac{\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}}}_{\mathrm{term}_2}.$$

不等式 (3.2)将通过仔细分析以下各项而得出：项$_1$ 和 项$_2$，它们出现在断言 3.8中。我们将进行这项分析，并把 断言 3.8 的证明推迟到本小节末尾。

设 $n \geq \max\{4k^2, {}^2rp, {}^2(k-r)(1-p)\}$. 令 $q = 1-p$且$s = k-r$，并注意到关于 n的假设意味着$pn \geq 2r$且 $qn \geq 2s$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}} &= \frac{(n-k)!\cdot(pn)!\cdot(qn)!}{n!\cdot(pn-r)!(qn-s)!} \\
&= \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(pn-i)\cdot\prod_{j=0}^{s-1}(qn-j)}{\prod_{\ell=0}^{k-1}(n-\ell)} \\
&= p^r q^s \cdot \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(n-i/p)\cdot\prod_{j=0}^{s-1}(n-j/q)}{\prod_{\ell=0}^{k-1}(n-\ell)} \\
&= p^r q^s \cdot \prod_{i=0}^{r-1}\frac{n-i/p}{n-i}\cdot\prod_{j=0}^{s-1}\frac{n-j/q}{n-(r+j)}.
\end{aligned}$$

在这个表达式中，因子 $n-i/pn-i$和 $n-j/qn-(r+j)$ 位于区间 $\left[1-c(p,r,s)\ n, 1-k-1\ n-(k-1)\right]$内，其中

$$c(p,r,s) = \max\left\{\frac{r-1}{p}, \frac{s-1}{q}\right\} \leq \frac{k-1}{pq}.$$

因此，

$$p^r q^s \cdot \left(1-\frac{c(p,r,s)}{n}\right)^k \leq \frac{\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}} \leq p^r q^s \cdot \left(1+\frac{k-1}{n-(k-1)}\right)^k \tag{3.8}$$

通过类似的论证

$$p^{2r} q^{2s} \cdot \left(1-\frac{c(p,2r,2s)}{n}\right)^{2k} \leq \frac{\binom{n-2k}{pn-2r}}{\binom{n}{pn}} \leq p^{2r} q^{2s} \cdot \left(1+\frac{2k-1}{n-(2k-1)}\right)^{2k}. \tag{3.9}$$

利用(3.8) 和 (3.9) 可得

$$\mathsf{term}_1 = \frac{\binom{n-2k}{pn-2r}}{\binom{n}{pn}} - \frac{\binom{n-k}{pn-r}^2}{\binom{n}{pn}^2} \leq p^{2r} q^{2s} \cdot \left(\left(1+\frac{2k-1}{n-(2k-1)}\right)^{2k} - \left(1-\frac{c(p,r,s)}{n}\right)^{2k}\right),$$

并且引理 2.9 推出

$$\left(\left(1+\tfrac{2k-1}{n-(2k-1)}\right)^{2k} - \left(1-\tfrac{c(p,r,s)}{n}\right)^{2k}\right) \leq 2k\left(\tfrac{2k-1}{n-(2k-1)} + \tfrac{c(p,r,s)}{n}\right)\cdot\left(1+\tfrac{2k-1}{n-(2k-1)}\right)^{2k-1}.$$

由于

$$\left(1+\frac{2k-1}{n-(2k-1)}\right)^{2k-1} \leq \left(\exp\left(\frac{2k-1}{n-(2k-1)}\right)\right)^{2k-1} = \exp\left(\frac{(2k-1)^2}{n-(2k-1)}\right),$$

我们得到

$$\left(\left(1+\tfrac{2k-1}{n-(2k-1)}\right)^{2k} - \left(1-\tfrac{c(p,r,s)}{n}\right)^{2k}\right) \leq \left(\tfrac{2k-1}{n-(2k-1)} + \tfrac{c(p,r,s)}{n}\right)\cdot 2k\cdot\exp\left(\tfrac{(2k-1)^2}{n-(2k-1)}\right)$$

因此，我们有

$$\mathsf{term}_1 = \frac{\binom{n-2k}{pn-2r}}{\binom{n}{pn}} - \frac{\binom{n-k}{pn-r}^2}{\binom{n}{pn}^2} \leq p^{2r} q^{2s} \cdot \left(\frac{2k-1}{n-(2k-1)} + \frac{c(p,r,s)}{n}\right)\cdot 2k\cdot\exp\left(\frac{(2k-1)^2}{n-(2k-1)}\right).$$

由于我们假设 $n \geq 2(2k-1)$，因此可以进一步写成

$$\mathsf{term}_1 \leq p^{2r} q^{2s} \cdot \frac{1}{n}\big(c(r,p,s) + 2(2k-1)\big)\cdot 2k\cdot\exp\left(\frac{(2k-1)^2}{n-(2k-1)}\right).$$

我们还可以使用(3.8)来得到，

$$\mathsf{term}_2 \leq \frac{\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}} \leq p^r q^s \cdot \exp\left(\frac{k(k-1)}{n-(k-1)}\right).$$

将前面的结果代入断言 3.8，我们得到：

$$\mathrm{Var}(\mathbf{E}_r(\mathbf{A})) \le \frac{1}{n}\cdot\left(p^{2r}q^{2s}\cdot(c(r,p,s)+2(2k-1))\cdot 2k\cdot\exp\left(\frac{(2k-1)^2}{n-(2k-1)}\right)\right)+\frac{(D-1)}{|E|}p^r q^s\cdot\left(k\cdot\binom{k}{r}\cdot\exp\left(\frac{k(k-1)}{n-(k-1)}\right)\right).$$

根据我们的假设 $n \ge 4k^2$，，我们有 $(2k-1)^2 n-(2k-1) \le 1$ 以及 $k(k-1)\ n-(k-1)\ \le \frac{1}{4}$，因此最后一个不等式意味着：

$$\mathrm{Var}(\mathbf{E}_r(\mathbf{A})) \le \frac{1}{n}\cdot\left(2e\cdot\binom{k}{r}^2 p^{2r}q^{2s}\cdot k\cdot(c(r,p,s)+4k)\right)+\frac{(D-1)}{|E|}\cdot p^r q^s\left(\sqrt[4]{e}k\cdot\binom{k}{r}\right).$$

最后，利用 $c(r,p,s) \le (k-1)/pq$ 以及 $\sqrt[4]{e} < 1.3$，我们得到

$$\mathrm{Var}(\mathbf{E}_r(\mathbf{A})) \le \frac{1}{n}\cdot\left(2e\cdot\binom{k}{r}^2 p^{2r}q^{2s}\cdot k\cdot\left(\frac{k-1}{pq}+4k\right)\right)+\frac{(D-1)}{|E|}\cdot p^r q^s\left(1.3\cdot k\cdot\binom{k}{r}\right),$$

这就证明了引理的(3.2) 断言。

断言 *3.8* 的证明。 令 $\mathbf{Y} = \frac{1}{|E_r|}\,\mathbf{(A)}E_\circ$ 由于 $\mathbf{Y} = \frac{1}{|E|}\cdot\sum_{e\in E}\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathbf{Y}) &= \mathbb{E}[\mathbf{Y}^2]-\mathbb{E}[\mathbf{Y}]^2\\
&= \frac{1}{|E|^2}\left(\sum_{e,f\in E}\mathbb{E}[\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})\mathbf{X}_r(f,\mathbf{A})]\right)-\mathbb{E}[\mathbf{Y}]^2\\
&= \frac{1}{|E|^2}\sum_{e,f:e\cap f=\emptyset}\mathbb{E}[\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})\mathbf{X}_r(f,\mathbf{A})]+\frac{1}{|E|^2}\sum_{e,f:e\cap f\neq\emptyset}\mathbb{E}[\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})\mathbf{X}_r(f,\mathbf{A})]]-\mathbb{E}[\mathbf{Y}]^2.
\end{aligned}$$

现在注意：由于 $\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})$ 是布尔随机变量，我们有 $\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})\mathbf{X}_r(f,\mathbf{A}) \le \mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})$。我们利用这一观察来界定第二个和。对于每个 $e \in E$，至多有 $k(D-1)$ 条与e相交的超边 $f \in E$，因此我们进行如下处理：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathbf{E}_r(\mathbf{A})) &\le \frac{1}{|E|^2}\sum_{e,f:e\cap f=\emptyset}\mathbb{E}[\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})\mathbf{X}_r(f,\mathbf{A})]+\frac{k(D-1)}{|E|^2}\sum_{e\in E}\mathbb{E}[\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})]-\mathbb{E}[\mathbf{Y}]^2\\
&= \frac{1}{|E|^2}\sum_{e,f:e\cap f=\emptyset}\mathbb{E}[\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})\mathbf{X}_r(f,\mathbf{A})]+\frac{k(D-1)}{|E|}\mathbb{E}[\mathbf{Y}]-\mathbb{E}[\mathbf{Y}]^2\\
&= \frac{1}{|E|^2}\sum_{e,f:e\cap f=\emptyset}\mathbb{E}[\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})\mathbf{X}_r(f,\mathbf{A})]+\frac{k(D-1)}{|E|}\frac{\binom{k}{r}\binom{n-k}{pn-r}}{\binom{n}{pn}}-\frac{\binom{k}{r}^2\binom{n-k}{pn-r}^2}{\binom{n}{pn}^2},
\end{aligned}$$

其中第二个等号用到了(3.1) 。

最后注意，对于$e \cap f = \emptyset$，通过借鉴建立(3.1)时所用的类似论证，我们得到

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})\mathbf{X}_r(f,\mathbf{A})] = \frac{\binom{k}{r}\binom{k}{r}\binom{n-2k}{pn-2r}}{\binom{n}{pn}}.$$

由于满足e、$f \in E \times E$的$e \cap f = \emptyset$ 配对数至多为 $|E|^2$，因此

$$\frac{1}{|E|^2}\sum_{e,f:e\cap f=\emptyset}\mathbb{E}[\mathbf{X}_r(e,\mathbf{A})\mathbf{X}_r(f,\mathbf{A})] \le \frac{\binom{k}{r}^2\binom{n-2k}{pn-2r}}{\binom{n}{pn}}$$

并且断言 3.8 得证。由此完成引理 3.4的证明。 □

3.4 最坏情形约束概率下界的证明（推论 3.7)

证明 推论 *3.7*。 假设 pn 是一个整数。若 $H = (V,E)$ 是一个 k-均匀超图，那么结论可由 引理 3.4推出：令 $A \subseteq V$ 为一个密度为 p 的固定集合。 $\mathbf{e}$ 被

限制在集合 A 中，即 $\mathbf{e} \subseteq A$，其概率等于所有顶点均来自 A 的超边所占的比例，即 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \subseteq A] = |E_k(A)| / |E|$。此外，注意到从所有密度为$p$的集合中均匀随机选取$\mathbf{A}$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{A}} \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{e}\sim E}[\mathbf{e} \subseteq A] = \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{A}}\left[\frac{|E_k(\mathbf{A})|}{|E|}\right] = \frac{\binom{n-k}{pn-k}}{\binom{n}{pn}} \geq p^k - \frac{k-1}{n-1} \tag{3.10}$$

其中等号由 (3.1) 得出，不等式则由 定理 2.5 得出（这里需要 $n \geq (p(1-p))^{-1}$）。因此，至少存在一个子集 $A \subseteq E$，其密度为 p，使得 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \subseteq A] \geq p^k - (k-1)/(n-1)$.

对于 H不是均匀的情况，我们将边集分解为互不相交的集合 $E = E_0 \sqcup E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_K$，其中 K是 H 的最大均匀度。于是，对于所有 $j = 0,\ldots,K$，$H^j := (V, E_j)$ 都是一个 j-均匀图。记$f_j = |E_j|/|E|$为 H 中 j-均匀边所占的比例，我们首先注意到，平均均匀度假设意味着

$$\sum_{j=0}^{K} f_j \cdot j = k. \tag{3.11}$$

于是，根据全期望公式，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{A}} \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{e}\sim E}[\mathbf{e} \subseteq \mathbf{A}] &= \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{A}}\left[\sum_{j=0}^{K} \mathbb{P}\left[\mathbf{e} \in E_j\right] \cdot \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{e}\sim E_j}[\mathbf{e} \subseteq \mathbf{A}]\right] \\
&= \sum_{j=0}^{K} f_j \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{A}}\left[\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{e}\sim E_j}[\mathbf{e} \subseteq \mathbf{A}]\right] \\
&\geq \sum_{j=0}^{K} f_j \cdot \left(p^j - \frac{j-1}{n-1}\right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{K} f_j \cdot p^j\right) - \frac{k-1}{n-1},
\end{aligned}$$

其中，不等式用到了 (3.10)，最后一个等号用到了 (3.11)。现在，利用 $x \mapsto p^x$ 的凸性及 (3.11) 可得

$$\sum_{j=0}^{K} f_j p^j \geq p^k \quad \text{and consequently} \quad \mathop{\mathbb{E}}_{\mathbf{A}} \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{e}\sim E}[\mathbf{e} \subseteq \mathbf{A}] \geq p^k - \frac{k-1}{n-1}.$$

因此，仍至少存在一个密度为 p的$A \subseteq V$，满足 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \subseteq A] \geq p^k - (k-1)/(n-1)$；当 pn 为整数时，这便完成了证明。

当 pn 不是整数时，令 $p' \in (0,1)$，使得 $p'n = \lfloor pn \rfloor$。那么，上述论证表明，存在一个 p-稠密集合 $A \subseteq V$，使得 $\mathbb{P}_{\mathbf{e}}[e \subseteq A] \geq (p')^k - (k-1)/(n-1)$。根据引理 2.9，我们有 $(p')^k \geq p^k - k/n$，因为 $|p - p'| \leq 1/n$。因此，我们有

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{e}}[\mathbf{e} \subseteq A] \geq p^k - \frac{k-1}{n-1} - \frac{k}{n} \geq p^k - \frac{2k}{n}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了 $(k-1)/(n-1) \leq k/n$。 □

4 最坏情形下超图限制器的性能

我们已在推论 3.7 中看到，若有一族(ϵ, p)-限制器，且每个限制器的平均均匀度至多为k，则必有 $\epsilon \geq p^k$。本节给出更好的下界，这些下界适用于该族稀疏的情形，即族中的每个超图$H = (V,E)$都满足 $|E| \leq r|V|$，其中 r 为某个固定值。这些界总结于推论 4.4中。我们的第一个也是主要的此类结果表明，$\epsilon \geq p^k + \Omega_{p,k}(r^{-1})$。形式化地说：

定理 4.1。存在常数 a，b，u，v，w，$C > 0$，使得以下结论成立。设 $k > 1$、$r > 0$和 $\delta \in (0,1)$是实数。设 $H = (V, E)$ 是一个有 n 个顶点、rn 条边且平均均匀度为 k 的超图。如果

$$n \geq C k^a r^b \delta^{-u} (1-\delta)^{-v} \min\{1, k-1\}^{-w} = r^b \cdot \mathrm{poly}(k, \tfrac{1}{k-1}, \tfrac{1}{\delta}, \tfrac{1}{1-\delta}),$$

那么存在一个 $A \subseteq V$，其大小为 $\lfloor \delta n \rfloor$，使得

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq \min\left\{\delta^k + \frac{c_{4.1}(k,\delta)}{r}, 1\right\},$$

其中

$$c_{4.1}(k,\delta) = \tfrac{1}{30}\delta(1-\delta)^2 \min\{\tfrac{1}{k}, \tfrac{k-1}{2}\}.$$

此外，取 $t = 7+\sqrt{33}$，我们可以令 $b = w = t \leq 12.75$，$a = u = 5t \leq 63.73$，且 $v = 2t \leq 25.49$。

因此，我们得到以下定理，它扩展了推论 1.6 中的结论。

定理 4.2. 设 a、b、u、v、w、C 如定理 4.1 中所述（例如，我们可以取 $b = 7+\sqrt{33} \leq 12.75$），并设 $k > 1$，$\delta \in (0,1)$ 和 $\varepsilon \in (0, 1-\delta^k)$ 为实数。设 $H = (V,E)$ 是一个有 n 个顶点、平均均匀度为 k 的超图，同时也是一个 $(\delta^k+\varepsilon, \delta)$-限制器。若 $k \geq 2$，则

$$\frac{|E|}{|V|} \geq \min\left\{\frac{\delta(1-\delta)^2}{30k}\cdot\varepsilon^{-1}, \left(\frac{n}{Ck^a\delta^{-u}(1-\delta)^{-v}}\right)^{\frac{1}{b}}\right\} = \min\left\{\Omega_{k,\delta}(\epsilon^{-1}), \Omega_{k,\delta}(n^{\frac{1}{b}})\right\},$$

且若 $1 < k < 2$，则

$$\frac{|E|}{|V|} \geq \min\left\{\frac{\delta(1-\delta)^2(k-1)}{60}\cdot\varepsilon^{-1}, \left(\frac{n}{Ck^a\delta^{-u}(1-\delta)^{-v}(k-1)^{-w}}\right)^{\frac{1}{b}}\right\} = \min\left\{\Omega_{k,\delta}(\epsilon^{-1}), \Omega_{k,\delta}(n^{\frac{1}{b}})\right\}.$$

利用定理 4.1 证明定理 4.2。令 r = |E| / |V| 为 H 的稀疏度。若 n ≤ C k^a r b δ^{-u}(1−δ)^{-v} min{1,k −1}^{-w}，则 r ≥ (n Ck^a δ^{-u}(1−δ)^{-v} min{1,k−1}^{-w})^{1/b}，显然结论成立。因此，我们可以假设 n ≥Ck^a r b δ^{-u}(1−δ)^{-v} min{1,k −1}^{-w}。现在，根据定理 4.1，存在一个密度为 δ 的 A ⊆V，使得

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq \min\left\{\delta^k + \frac{c_{4.1}(k,\delta)}{r}, 1\right\}.$$

另一方面，由于 H 是一个 $(\delta^k+\varepsilon,\ \delta)$-限制器，

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \leq \delta^k + \varepsilon < 1.$$

综上可得 $\delta^k + c_{4.1}(k,\delta)\, r \leq \delta^k + \varepsilon$，整理后得到 $r \geq c_{4.1}(k,\delta)\varepsilon^{-1}$。 □

定理 4.1 是一个更强下界的推论，该下界适用于 H 的每个顶点都包含在某条边中的情形。为陈述这一结果，先注意到，关于 H 的额外假设意味着其平均度（根据命题 2.6，为 rk）至少为 1，因此 $r \geq 1/k$。鉴于此，对于每个实数 $k \geq 1$ 以及 $r \geq 1/k$，定义函数

$$f_{k,r}(x) = 1 - (1-x)^{\frac{1}{rk}} + (1-x)^{\frac{1}{rk}}\left(1-(1-x)^{\frac{rk-1}{rk}}\right)^k \tag{4.1}$$

我们将在第 6.2 节中证明，函数 $f_{r,k}(x)$ 具有以下性质：

- $f_{k,r}(x) \geq f_{k,r'}(x)$ 对所有 $r \leq r'$ 以及 $x \in [0,1]$（命题 6.7）。
- $\lim_{r\to\infty} f_{k,r}(x) = x^k$（初等微积分）。
- $f_{k,r}(x) \geq x^k + \min\{\frac{1}{k}, \frac{k^{-1}}{2}\}\cdot\frac{x(1-x)^2}{r}$（定理 6.9）。
- $f_{r',k,r}(x) \in [\frac{1}{rk}, k]$ 对所有 $x \in [0,1]$ 均成立（命题 6.4）。特别地，$f_{k,r}(x)$ 严格递增。

显然也可以看出 $f_{1,r}(x) = x$。图像 $f_{k,r}(x)$ 在某些 k,r 取值下的图像与 $y = x^k$ 在引言中的图 1 进行了比较。

我们的下一个定理指出，若一个 (ϵ,δ)-限制器中的每个顶点都包含在某条边中，则必有 $\epsilon \geq f_{k,3r}(\delta) - o(1)$，其中 k 和 r 分别是 H 的稀疏度和平均均匀度。此外，若 H 是正则的，或其最小顶点度为 3，则有更好的下界 $\epsilon \geq f_{k,r}(\delta) - o(1)$。

定理 4.3. 对于每个 $\sigma \in (0, 1/6)$，都存在正常数 $a,b,u,v,C > 0$，使得以下结论成立：设 $k \geq 1$、$r > 0$ 和 $\delta \in (0,1)$ 为实数。设 $H = (V,E)$ 是一个具有 n 个顶点、$r \cdot n$ 条边且平均均匀度为 k 的超图。进一步假设 H 的每个顶点都包含在某条边中。

(i) 若 $n \geq Ck^a r^b \delta^{-u}(1-\delta)^{-v}$，则存在 $A \subseteq V$，使得 $|A| = \lfloor \delta n \rfloor$，满足

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq f_{k,3r}(\delta) - 63200\, k^4 \delta^{-3} n^{-\sigma} = f_{k,3r}(\delta) - \mathrm{poly}(k, \delta^{-1}) \cdot O(n^{-\sigma}).$$

(ii) 若除 *(i)* 中的假设外，H 还是正则的，或者对所有 $v \in V$ 都有 $\deg(v) \geq 3$，则存在 $A \subseteq V$，使得 $|A| = \lfloor \delta n \rfloor$，满足

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq f_{k,r}(\delta) - 63200\, k^4 \delta^{-3} n^{-\sigma} = f_{k,r}(\delta) - \mathrm{poly}(k, \delta^{-1}) \cdot O(n^{-\sigma}).$$

此外，对于 *(ii)*，我们可以取

$$a = 12, \quad b = \tfrac{24}{1-6\sigma}, \quad u = v = 6, \quad C = 3 \cdot 10^6,$$

或者我们可以取 $\sigma = \frac{7-\sqrt{33}}{16} = 0.07846\ldots$ 并选择

$$a = b = u = \sigma^{-1} = 7 + \sqrt{33} = 12.7445\ldots, \quad v = \tfrac{\sigma^{-1}}{2} = 6.3722\ldots, \quad C = 7.6 \cdot 10^6.$$

对于 *(i)*，若将 C 替换为 $3^b C$，则可以使用 *(ii)* 中相同的 a,b,u,v。

定理 *4.1* 的证明假设定理 *4.3*。固定某个 $\sigma \in (0, 1/6)$，并令 a', b', u', v', C' 为定理 4.3给出的常数 a,b,u,v,C；稍后我们将指定 σ 和这些常数。记 $c(k) = \min\{1/k, k^{-1}/2\}$。

由于H可能含有度为 0 的顶点，我们无法直接应用定理 4.3。我们通过移除这些顶点来解决这一问题。具体而言，令$V_1 = \{v \in V : \deg_H v \geq 1\}$，并令$H_1 = (V_1, E)$，也就是说，$H_1$ 是从H中移除所有度为 0 的顶点后得到的超图。令 $\alpha = |V_1|/|V|$。那么H_1有 αn个顶点、rn条边，平均均匀度为k。因此，其稀疏度为$r_1 := r/\alpha$。接下来分三种情况讨论。

情况 *I.* $\alpha \leq \delta$. 在这种情况下，$A := V_1$ 的密度至多为 δ，且满足 $|E_H(A)|/|E| = |E_H(A)|/|E_1| = 1$。

情况 *II.* $\alpha > \delta$ 和 $\alpha \geq \frac{1}{2}$. 假设 $\alpha n \geq C' k^{a'} r_1^{b'} \delta^{-u'}(1-\delta)^{-v'} = \alpha^{-b'} C' k^{a'} r^{b'} \delta^{-u'}(1-\delta)^{-v'}$。由于 $\alpha > \delta$，当以下条件成立时，该条件得到满足

$$n \geq C' k^{a'} r^{b'} \delta^{-u'-b'-1}(1-\delta)^{-v'} := N_1.$$

现在，应用定理 4.3 于H_1，，我们得到一个子集$A \subseteq V_1$，其在 δ 中的密度为V_1，且满足

$$\frac{|E_H(A)|}{|E|} = \frac{|E_{H_1}(A)|}{|E|} \geq f_{k,3r_1}(\delta) - 63200 k^4 \delta^{-3} (\alpha n)^{-\sigma} = (\star).$$

利用我们回顾过的关于$f_{k,r}(x)$（定理 6.9）的事实以及我们的假设 $\alpha > \delta$ 和 $\alpha \geq \frac{1}{2}$（它们蕴含$r_1 \leq 2r$），还可进一步得到

$$(\star) \geq \left(\delta^k + \frac{c(k)\delta(1-\delta)^2}{3r_1}\right) - 63200 k^4 \delta^{-3} (\delta n)^{-\sigma} \geq \delta^k + \frac{c(k)\delta(1-\delta)^2}{6r} - 63200 k^4 \delta^{-4} n^{-\sigma}.$$

情形 *III.* $\frac{1}{2} > \alpha > \delta$。令 $\delta_1 = \frac{\delta}{2\alpha}$。则 $\delta \leq \delta_1 \leq \frac{1}{2}$，因此 $1 - \delta_1 \geq \frac{1}{2}$。由此，条件 $\alpha n \geq C' k^{a'} r_1^{b'} \delta_1^{-u'}(1-\delta_1)^{-v'} = \alpha^{-b'} C' k^{a'} r^{b'} \delta_1^{-u'}(1-\delta_1)^{-v'}$成立的条件是

$$n \geq C' k^{a'} r^{b'} \delta^{-u'-b'-1}(0.5)^{-v'} = (2^{v'} C') k^{a'} r^{b'} \delta^{-u'-b'-1} =: N_2.$$

在此假设下，定理 4.3 告诉我们存在一个$\subseteq V_1$，其密度为 δ_1，位于V_1 中，使得

$$\frac{|E_H(A)|}{|E|} = \frac{|E_{H_1}(A)|}{|E|} \geq f_{k,3r_1}(\delta_1) - 63200 k^4 \delta_1^{-3} (\alpha n)^{-\sigma} = (\star\star),$$

并且与情况 II 类似，

$$\begin{aligned}(\star\star) &\geq \left(\delta_1^k + \frac{c(k)\delta_1(1-\delta_1)^2}{3r_1}\right) - 63200k^4\delta_1^{-3}(\delta n)^{-\sigma} \\ &\geq \delta^k + \frac{c(k)\cdot\frac{\delta}{2\alpha}\cdot(\frac{1}{2})^2}{\frac{3r}{\alpha}} - 63200k^4\delta^{-4}n^{-\sigma} \\ &= \delta^k + \frac{c(k)\delta(1-\delta)^2}{24r} - 63200k^4\delta^{-4}n^{-\sigma}.\end{aligned}$$

还需注意，$|A| \leq \frac{\delta}{2\alpha}\cdot\alpha n = \frac{\delta}{2}n$，因此$A$的密度小于 δ。

现在，由于情况 I–III 中至少有一种成立，若$n \geq \max\{N_1, N_2\}$，则存在一个$A \subseteq V$，其密度至多为 δ，使得

$$\frac{|E_H(A)|}{|E|} \geq \min\left\{\delta^k + \frac{c(k)\delta(1-\delta)^2}{24r} - 63200k^4\delta^{-4}n^{-\sigma}, 1\right\}.$$

如果我们进一步假设

$$n \geq \left(120\cdot\frac{r}{c(k)\delta(1-\delta)^2}\cdot 63200k^4\delta^{-4}\right)^{\sigma^{-1}} =: N_3,$$

那么我们将得到

$$\frac{|E_H(A)|}{|E|} \geq \min\left\{\delta^k + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right)\frac{c(k)\delta(1-\delta)^2}{r}, 1\right\} = \min\left\{\delta^k + \frac{c(k)\delta(1-\delta)^2}{30r}, 1\right\}.$$

此外，我们可以向A 中添加顶点，直到其在V中的密度为 δ，而不会影响该结论的有效性。因此，只需选取a、b、u、v、w、C，使得

$$Ck^a r^b \delta^{-u}(1-\delta)^{-v}\min\{1, k-1\}^{-w} \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}.$$

容易验证，我们可以取

$$\begin{aligned} a &= \max\{a', 5\sigma^{-1}\}, & b &= \max\{b', \sigma^{-1}\}, \\ u &= \max\{u' + b' + 1, 5\sigma^{-1}\}, & v &= \max\{v', 2\sigma^{-1}\}, \\ w &= \sigma^{-1}, & C &= \max\{2^{v'}C', (2\cdot 120\cdot 63200)^{\sigma^{-1}}\}. \end{aligned}$$

我们最终选择 $\sigma = \frac{7-\sqrt{33}}{6}$ ~~和~~ $\overline{a' = b' = u' = \sigma'^{-1} = 7+\sqrt{33}}$、$v' = \frac{1}{2}\sigma' = \frac{7+\sqrt{33}}{2}$，~~从而~~得到定理中指定的 a、b、u、v、w。计算可得，C略小于 $10^{91.52}$。 □

接下来，我们注意到定理 4.3 的 (i) 部分可由 (ii) 部分推出。

在假设定理 4.3(ii) 成立的条件下证明定理 4.3(i)。设 a、b、u、v、C 是 (ii) 部分所保证存在的常数。假设 n ≥C k^a (3r)$^b\delta^{-u}(1-\delta)^{-v}$ =(3^{b}C)k^{a}r b $\delta^{-u}(1-\delta)^{-v}$。令 H$^{(3)}$ 为由 H 得到的超图，其中每条超边重复 3 次。形式化地，H$^{(3)}$ =(V,E ×{1,2,3})，对于超边 (e,i) ∈E ×{1,2,3} =E(H$^{(3)}$)，我们令 Vert$_{H^{(3)}}$(e,i) =Vert$_H$(e)。显然，|E(H$^{(3)}$)|/|V (H$^{(3)}$)| = 3|E |/|V | = 3r，且对所有 v ∈V，deg$_{H^{(3)}}$(v) =3deg$_H$(v)。由于我们假设 H 不含度为 0 的顶点，因此 H$^{(3)}$ 中的每个顶点的度至少为 3。于是，对 H$^{(3)}$ 应用定理 4.3(ii)，可知存在 A ⊆V，其中含有 ⌊δn⌋ 个元素，使得

$$\frac{|E_{H^{(3)}}(A)|}{|E(H^{(3)})|} \geq f_{k,3r}(\delta) - 63200k^4\delta^{-3}n^{-\sigma}.$$

然而，不难看出

$$\frac{|E_{H^{(3)}}(A)|}{|E(H^{(3)})|} = \frac{|E_H(A)\times\{1,2,3\}|}{|E\times\{1,2,3\}|} = \frac{|E_H(A)|}{|E|},$$

因此，A 就是我们要找的集合。 □

总结前面的讨论，我们已经将证明 定理 4.1 和 定理 4.3(i) 转化为证明 定理4.3(ii) 中最坏情况下约束概率的更强下界。

证明定理 4.3(ii) 的过程相当复杂，占据了第 5 节 以及第 6 节的半数篇幅。现在我们先概述这一证明，再深入讨论细节。

令 k、r 和 d 分别表示 V 的平均均匀度、稀疏度和平均顶点度，并注意到 d =kr（命题 2.6）。首先假设 H 的最大顶点度和最大均匀度都不太大，即分别不超过 dn^{α} 和 kn^{α}，其中 $\alpha>0$ 足够小。在此假设下，我们通过一个随机过程证明定理 4.3(ii)：固定某个 $\gamma\in(0,1)$，通过独立地以概率 γ 将每条 e $\in$E 纳入 B，从 E 中随机选取一个子集 B；令 A 为 B 中各边所覆盖的顶点组成的集合，即 A = $\bigcup_{e\in B}$ Vert(e)。这样选择的理由是，E(A) 必然包含 B，而 B 约占 H 中边的 γ 比例。我们证明，对于精心选取的 γ 值，A 以正概率同时满足 $|A|\le\delta n$ 和 $|E(A)|\ge f_{k,r}(\delta)-o(1)$，因此定理 4.3(ii) 所需的集合 A 确实存在。我们在第 5.2 节中分三个主要步骤证明这一概率结论：

——

(1) 首先，我们证明 **A** 的大小几乎必然非常接近某个特定数值，该数值由 γ以及 H (命题 5.4中出现的顶点度决定。有趣的是，这一结论利用了第 3 节的结果得以证明。例如，当 H为正则超图时，其对偶超图 $H^*=(E,V)$（见第 2.2 节）是一个均匀超图，而集合**A** 恰好是与集合 H^*-边相交的 H^*-顶点**B**的集合，因此我们可以使用推论 3.6 来估计其大小。对于非正则超图，我们采用类似但更为复杂的论证。

(2) 接下来，我们证明 E(**A**) 中边的期望数量有下界 $|E|$ 乘以某个取决于 γ 以及 H (命题 5.5) 中顶点度的特定数值。我们注意到，E(**A**) 必然包含 **B**，而几乎所有工作都集中于估计那些不属于 **B** 但仍被 **A**覆盖的边所作出的贡献。为证明这一步，我们建立了一个关于随机子集与其他某些子集相交之概率的一般性结果（命题 5.1），该结果本身也可能具有独立的研究价值。

(3) 最后，我们证明，若选择 γ，使得由 (1) 确定的 A 的期望大小为 δn，那么 $\mathbb{E}(|E(A)|)$ 的下界至少为 $f_{k,r}(\delta)\cdot|E|$。这是定理 5.9 中所确立的、极其技术性的多变量不等式的内容。只需将 δ 略微调小一些，就足以证明 $|A|\le\delta$n 和 $|E(A)|\ge f_{k,r}(\delta)-o(1)$ 以正概率同时成立（定理 5.13，另见引理 5.8）。

——

例如，在 H 为正则的特殊情形下（正则度为 d =r k），(1) 中 A 的期望大小结果为 $1-(1-\gamma)^{rk}$，因此我们需要选择 $\gamma=1-(1-\delta)^{1/rk}$，才能使 $|A|\approx\delta n$ 几乎必然成立。对于这个 γ，(2)中 $|E(A)|$ 的期望大小结果为 $f_{k,r}(\delta)$，因此在这种情形下，步骤 (3) 并非必需。（事实上，在这种情形下，$f_{r,k}(\delta)$ 中的项 $1-(1-\delta)^{1/rk}\approx|E(A)|/|A|$ 是 B 中边的贡献，而剩余项 $(1-\delta)^{1/rk}(1-(1-\delta)^{r/k-1}rk)^k$ 则是 E(A) − B 中边的贡献。）

在一般情形下，也就是说，当 H 确实存在度较大的顶点或大小较大的边时，我们首先修改H，以消除这些顶点和边。这只会影响数量可忽略不计的顶点和边，因此我们仍可断言定理 4.3(ii)。这一修改的具体细节将在第 5.3 节中讨论，并将在该节中完成定理 4.3(ii) 的证明。

我们以一些推论和说明结束本节。首先给出以下推论，它总结了定理 4.1 和 定理 4.3 （以及推论 3.7）对限制器的意义。

推论 4.4。 设 $H=(V,E)$ 是一个有 n 个顶点、rn 条边（$r>0$）且平均均匀度为 k 的超图。假设 H 也是一个(ϵ,p)-限制器，其中 $\epsilon,p\in(0,1)$。那么：

(i) $\epsilon\ge p^k-2/kn$，前提是 $n\ge\delta^{-1}(1-p)^{-1}$；

(ii) $\epsilon\ge p^k+\min\{1/k,k^{-1/2}\}\cdot p^{(1-p)30}\cdot r^{-1}$，前提是 $n\ge r^{12.75}\cdot\mathrm{poly}(k,1/p,1/(1-p))$ 且 $k>1$；

(iii) $\epsilon\ge f_{k,3r}(p)-$多项式$(k,p^{-1})\cdot n^{-0.078}$，条件是 $n\ge r^{12.75}\cdot$多项式$(k,1/p,1/(1-p))$，$k\ge1$，且 H 的最小顶点度至少为1；

(iv) $\epsilon \ge f_{k,r}(p)$ − 多项式$(k, p^{-1}) \cdot n^{-0.078}$，条件是 $n \ge r^{12} \cdot 75 \cdot$ 多项式$(k, \frac{1}{k-1}, \frac{1}{p}, \frac{1}{1-p})$，$k \ge 1$，且 H 是正则的，或其最小顶点度至少为3。

推论 4.4 中的每个下界在渐近意义上都强于前一个下界，即 $p^k \le p^k + \min\{\frac{1}{k}, k_2^{-1}\} \cdot p(1-p)_{30}^{2} \cdot \frac{1}{r} \le f_{k,3r}(p) \le f_{k,r}(p)$；但另一方面，它适用的假设更强。

回顾 命题 2.7 可知，一个（ϵ, p）-限制器的对偶超图是一个（$1-p, 1-\epsilon'$）-限制器，对所有$\epsilon' > \epsilon$均成立。将此结果与 推论 4.4结合，可得：

推论 4.5。 采用推论 *4.4*中的记号和假设：

(i)* $\epsilon \ge 1-(1-p)^{\frac{1}{rk}} - \frac{2k}{ep(1-p)n}$, *provided* $n \ge \frac{4k}{p(1-p)}$ *and* $rk \ge 1$;

（*iii**） $\epsilon \ge 1 - f^{-1}_{rk,3/r}(1-p) - \text{poly}(r,k,\frac{1}{p},\frac{1}{1-p})n^{-0.078}$，条件是 $n \ge \text{poly}(r,k,\frac{1}{p},\frac{1}{1-p})$，$rk \ge 1$，且 H 没有空超边；

(iv)* $\epsilon \ge 1 - f^{-1}_{rk,1/r}(1-p) - \text{poly}(r,k,\frac{1}{p},\frac{1}{1-p})n^{-0.078}$，前提是 $n \ge \text{poly}(r,k,\frac{1}{p},\frac{1}{1-p})$，$rk \ge 1$，且 H 的最小均匀度至少为3。

这里，$f^{-1}_{k,r}(x)$ 是 $f_{k,r}\colon [0,1] \to [0,1]$ 的反函数。与推论 4.4 一样，推论 4.5 的每一项都断言了渐近上比前一项更强的下界，但同时也提出了更强的假设。当 p 较小时，推论 4.5 的三个下界都与推论 4.4(iv) 中的下界 $f_{k,r}(p)$ 非常接近。事实上，通过检查 $p = 0$ 处的导数，可以发现这些界都变为$\epsilon \ge p\,rk\,(1+o(1))$，当 $p \to 0$ 时成立。不过要注意，(i*) 只需非常温和的假设，且其证明与 (iv) 相比非常简单。相反，当 p 趋近于 1 时，(i*) 和 (iii*) 中的界弱于推论 4.4(i) 的界 $\epsilon \ge p^k - o(1)$；检查图像 $1-(1-x)^{rk}$，$1-f^{-1}_{rk,3/r}(1-x)$ 和 x^k 在点 (1,1) 处的斜率分别为 ∞、3k 和 k，即可看出这一点。最后，关于渐近上最强的两个下界 (iv) 和 (iv*)，实验表明存在一个 $a(r,k) \in (0,1)$，使得当 $0 < p < a$ 时 (iv*) 更强，而当 $a < p < 1$ 时 (iv) 更强。似乎在定理 4.1 中使用 (iv*) 取代 (iv) 也不会带来显著改进。

证明 推论 *4.5*。 在全文中，H 均假设为一个 (ϵ, p)-限制器。

(i*) 令 $c_1 = 1-(1-p)^{rk}$，且 $c_0 = 1-(1-p/2)^{rk}$。假设 n 足够大，使得 $\epsilon_0 := 1-(1-p+2k/n)^{rk} > c_0$ 且 $rn \ge \max\{\frac{1}{\epsilon'(1-\epsilon')} \mid \epsilon' \in [c_0, c_1]\}$。在此假设下，我们声称 $\epsilon \ge \epsilon_0$。事实上，反设不然，则存在 $\epsilon' \in (\epsilon, \epsilon_0) \cap [c_0, c_1]$（此处需要 $c_0 < \epsilon_0$）。根据命题 2.7，H^* 是一个 $(1-p, 1-\epsilon')$-限制器。另请注意，H^* 有 rn 个顶点、n 条边、平均均匀度 rk（这是 H 的平均度），且稀疏度为 r。此外，我们对 n 的假设意味着 $rn \ge \frac{1}{\epsilon'(1-\epsilon')}$。因此，根据推论 4.4(i)，$1-p \ge (1-\epsilon')^{rk} - 2rk/n$。整理后得 $\epsilon' \ge 1-(1-p+2k/n)^{rk} = \epsilon_0$，这与我们对 ϵ' 的选择矛盾。由此可知，必有 $\epsilon \ge \epsilon_0$。

现在，为了证明 (i*)，只需验证 $\epsilon_0 \ge 1-(1-p)^{rk} - 2k/(ep(1-p)n)$，并确认当 $n \ge 4k/(p(1-p))$ 时，我们的假设$\epsilon_0 > c_0$ 以及 $rn \ge \max\{\frac{1}{\epsilon'(1-\epsilon')} \mid \epsilon' \in [c_0, c_1]\}$ 均成立。不等式 $\epsilon_0 \ge 1-(1-p)^{rk} - 2k/(ep(1-p)n)$ 等价于 $(1-p+2k/n)^{rk} - (1-p)^{rk} \le 2k/(ep(1-p)n)$；由引理 2.9(ii)和我们的假设 $rk \ge 1$可知，该不等式成立。条件 $\epsilon_0 > c_0$可重写为 $(1-p+2k/n)^{rk} < (1-p/2)^{rk}$，由于 $n \ge 4k/(p(1-p)) > 4k/p$，该条件成立。最后，若 $\epsilon' \in [c_0, c_1]$，，则

$$\frac{1}{\epsilon'(1-\epsilon')} \le \frac{1}{c_0(1-c_1)} = \frac{1}{(1-(1-\frac{p}{2})^{\frac{1}{rk}})(1-p)^{\frac{1}{rk}}} \le \frac{1}{\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{rk}\cdot(1-p)} = r\cdot\frac{2k}{p(1-p)} \le rn,$$

这里我们用到了引理 2.10 以及$rk \ge 1$。

(iii*) 令$N(k,r,p)$ 和$C(k,p)$分别表示推论 4.4(iii)陈述中出现的多项式$(k, r, \frac{1}{p}, \frac{1}{1-p})$和多项式$(k, \frac{1}{p}, \frac{1}{1-p})$，并令 $\sigma = 0.078$。于是，根据该推论，$\epsilon \ge f_{k,r}(p) - C(k,p)n^{-\sigma}$当$n \ge N(k,r,p)$。

令 $c_1 = 1 - f^{-1}_{kr,3/r}(1-p)$、$c_0 = 1 - f^{-1}_{kr,3/r}(1-p/2)$，并定义

$$M(k,r,p) = \max_{\epsilon' \in [c_0,c_1]} N(kr, \tfrac{1}{r}, 1-\epsilon'), \qquad D(k,r,p) = \max_{\epsilon' \in [c_0,c_1]} C(kr, 1-\epsilon'),$$
$$\epsilon_0 = 1 - f^{-1}_{kr,3/r}(1-p+D(k,r,p)n^{-\sigma}).$$

首先，假设 n 足够大，使得 $n \geq {}^{1}r\,M(k,r,p)$ 且 $\epsilon_0 > c_0$。我们声称 $\epsilon \geq \epsilon_0$。事实上，为了导出矛盾，假设 $\epsilon < \epsilon_0$。那么存在 $\epsilon' \in (\epsilon, \epsilon_0) \cap [c_0, c_1]$（这里我们需要 $\epsilon_0 > c_0$）。根据命题 2.7，H^* 是一个 $(1-p, 1-\epsilon')$-限制器；并且根据我们对 n 的假设，有 $r\,n \geq M(k,r,p) \geq N(kr, {}^{1}r, 1-\epsilon')$。因此，根据推论 4.4(iii)（应用于 H^*），我们有

$$1 - p \geq f_{kr,3/r}(1-\epsilon') - C(k, 1-\epsilon')n^{-\sigma} \geq f_{kr,3/r}(1-\epsilon') - D(k,r,p)n^{-\sigma}.$$

整理后得到 $\epsilon' \geq 1 - f^{-1}\,kr,3/r(1-p+D(k,r,p)n^{-\sigma}) = \epsilon_0$，这与 ϵ' 的选择相矛盾。因此，我们得出结论：我们的主张必定成立。

现在，为了证明 (iii*)，只需证明当 $n \geq \mathrm{poly}(k,r,{}^{1}p, {}^{1}_{1-}p)$ 时，我们有 $\epsilon_0 \geq 1 - f^{-1}\,kr,3/r\,(1-p) - \mathrm{poly}(k,r,{}^{1}p, {}^{1}_{1-}p)n^{-\sigma}$, $\epsilon_0 \geq c_0$ 且 $n \geq {}^{1}r\,M(k,r,p)$。首先注意，根据命题 6.4，$[0,1], f_{kr}$ 的导数 $_{3/r}(x)$ 的取值范围为 $[{}^{1}_{3}k, kr]$，因此 $f^{-1}\,kr,3/r\,(x)$ 的导数取值范围为 $[{}^{1}kr, 3k]$。于是，根据引理 2.8，

$$\epsilon_0 = 1 - f^{-1}_{kr,3/r}(1-p+D(k,r,p)n^{-\sigma}) \geq 1 - f^{-1}_{kr,3/r}(1-p) - 3kD(k,r,p)n^{-\sigma}.$$

此外，很容易看出，$\epsilon_0 > c_0$ 当且仅当 $n^{\sigma} \geq {}^{2}p \cdot D(k,r,p)$。因此，只需证明 ${}^{1}r\,M(k,r,p)$ 和 $D(k,r,p)$ 属于 $\mathrm{poly}(k,r,{}^{1}p, {}^{1}_{1-}p)$ 这一类。根据定义，这两个函数都被某个 $\epsilon' \in [c_0, c_1]$ 所对应的 $\mathrm{poly}(k,r,{}^{1}r, {}^{1}_{\epsilon'}, {}^{1}_{1-\epsilon'})$ 所界定，因此只需证明 ${}^{1}r \leq \mathrm{poly}(k)$ 且 ${}^{1}_{\epsilon'}, {}^{1}_{1-\epsilon'} \leq \mathrm{poly}(r,k,{}^{1}p, {}^{1}_{1-}p)$。第一个结论由我们的假设 $rk \geq 1$ 得出，该假设意味着 ${}^{1}r \leq k$。对于第二个结论，由于 ${}^{1}_{\epsilon'} \leq {}^{1}c_0$ 且 ${}^{1}_{1-\epsilon'} \leq {}^{1}_{1-}c_1$，只需证明 ${}^{1}c0, {}^{1}_{1-}c_1 \leq \mathrm{poly}(r,k,{}^{1}p, {}^{1}_{1-}p)$。事实上，根据引理 2.8 以及我们先前关于 $f^{-1}\,kr,3/r$ 的导数的结论，

$$c_0 = f^{-1}_{kr,3/r}(1) - f^{-1}_{kr,3/r}(1-\tfrac{p}{2}) \geq \frac{1}{rk} \cdot \frac{p}{2},$$

因此 ${}^{1}c_0 \leq {}^{2}rk\,p$，同理，

$$1 - c_1 = f^{-1}_{kr,3/r}(1-p) = f^{-1}_{kr,3/r}(1-p) - f_{kr,3/r}(0) \geq \frac{1-p}{rk},$$

因此 ${}^{1}c_1 \leq {}_{kr}{}^{1}{}_{-p}$。这正是我们想要的结果。

(iv*) 这与（iii*）的证明完全类似。 □

注 4.6。我们推测，推论 4.4(iv) 对一般超图也成立，但常数可能有所不同。推论 4.5(i*) 在较小的 p 下给出了非常相似的下界，并且只需满足很弱的假设，这或许可以作为该猜想的证据。

注 4.7。定理 4.3(ii) 的证明表明，最好的限制器是正则的，并且具有任意两条边至多相交于一个顶点这一性质；详见 注 5.6 和 注 5.14 。事实上，对于最小度至少为 3 的非正则超图，定理 4.3(ii) 的下界还可以略微改进；详见 注 5.14。

注记 4.8。(i) 定理 4.3 中参数 a、b、u、v、C 的可选取值比定理中所述的更多。这些参数可能取到的值在推论 5.21中有所描述，而该推论是更一般的定理 5.18的特例。我们在定理 4.3 中列为第二种选项的 a、b、u、v、C 取值，旨在最小化 b 这个参数的值（即 r 或 ε^{-1} 的指数），从而用于定理 4.1 和定理 4.2。这反过来会增大推论 1.8中的常数 c，因为 $c = {}^{1}b$。

(ii) 当 H 是正则且一致的，或者即使 H 的最大度和最大一致度都不太大时，也可以降低 $n = |V|$ 在 定理 4.3(ii) 中可以取到的最小值，同时也可以降低误差项 $63200k^3\delta^{-3}n^{-\sigma}$。参见 定理5.13 和 推论 5.15。

（iii）在本节和 第 5 节的所有结果中，除了尽量减小 r（分别是 ε^{-1}）的 定理 4.1 （分别是 定理 4.2）中的指数之外，我们没有尝试优化常数。这些结果中出现的常数很可能还可以改进。

注 4.9。从定理 4.3 推导定理 4.1 时所用的界 $f_{k,r}(x) - x^k \geq \min\{{}^{1}k, k_2^{-1}\} \cdot x(1-x)^2 r$（定理 6.9）在数量级上很可能是最优的，除非 x 趋近于 1；在这种情况下，该界接近最优。事实上，令 $D_{k,r}(x) = f_{k,r}(x) - x^k$，实验表明，极限 $\lim_{r\to\infty} D_{k,r}(x)\,r$，

$\lim_{k\to\infty} \underline{D_{k,r}}(x)$ k 和 $\lim_{k\to 1^-} \underline{D_{k,r}}(x)$ 1/(k−1) 对所有 x $\in(0,1)$ 均存在且为正。此外，D′k,r (0) = ^{1}rk，这意味着当 x 趋近于 0 时，$D_{k,r}(x) \approx \Theta_{k,r}(x)$；而 D′k,r (1) = 0，这意味着当 x 从左侧趋近于 1 时，D′k,r (x) = o(1 − x)。实验还表明，当 x 从左侧趋近于 1 时，对所有 $\varepsilon > 0$，$D_{k,r}(x) = \Omega_{k,r}((1-x)^2)$，且 $D_{k,r}(x) = o((1-x)^{2-\varepsilon})$。

注 4.10. (i) 对于 k = 1，不可能证明类似于定理 4.1 的结果。也就是说，在平均均匀度为 1、稀疏度为 r 的超图 H = (V,E) 中，当 A 遍历 V 的 δ-稠密子集时，|E(A)| | E 的最大值并不总是远离 δ 有界。例如，可以固定某个 r $\in\mathbb{N}$，并考虑超图 H = (V,E)，其中 V ={1,...,n}，超边 {1},...,{n} 各重复 r 次。事实上，对于该超图，任意大小为 ⌊δn⌋ 的 A ⊆V 都满足 |E(A)| |E| $\leq\delta$。

(ii) 定理的一个变体 定理 4.1 对于 $0 < k < 1$ 也成立，尽管这种情况不太有意思，因为 H 必须包含没有顶点的边。这种情况可以通过删除没有顶点的边，归约到 $k \geq 1$ 的情况。细节从略。

5 稀疏限制器下界的证明

在本节中，我们将证明 定理 4.3(ii)。首先，在 第 5.1 节中，我们证明一个证明所需的一般概率结果，该结果本身也可能具有独立价值。然后，在第 5.2 节中，我们证明定理 4.3(ii) 的一个变体，假设最大度和最大均匀度相对于平均度和平均均匀度而言都不太大。随后，我们在第 5.3 节中通过调整常数来去除这些假设。在证明过程中，我们会用到一些技术性的解析结果，其证明推迟到第 6 节。

5.1 一个概率结果

命题 5.1。 设 X 是一个有限非空集合，且 $A_1,\dots,A_t,A'_1,\dots,A'_t$ 是 X 的非空子集，满足 $|A_i| = |A'i|$ 对所有 $i \in [t]$ 均成立。进一步假设 $A'_1,\dots,A'_t$ 两两不交。令**B** 为以以下某种方式随机选取的 X 的一个子集：

(1) **B** 从 X 的所有含有 m 个元素的子集中均匀随机选取（$0 \leq m \leq |X|$）；

(2) X 中的每个 $x \in$ 都以概率 p 被包含在**B** 中，且各元素的包含情况彼此独立（$0 \leq p \leq 1$）。

那么，在情形 *(1)* 和 *(2)* 下，

$$\mathbb{P}[\mathbf{B} \text{ meets } A_1,\dots,A_t] \geq \mathbb{P}\big[\mathbf{B} \text{ meets } A'_1,\dots,A'_t\big].$$

这里，说集合B与A_1,...、A_t相交，是指$B \cap A_i \neq \emptyset$对所有的$i$都成立。通俗地说，该命题表明，集合$A_1$,...、$A_t$之间的重叠只会增大**B** 与它们相交的概率。这很有用，因为当A_1,...、A_t两两不交时，计算 ℙ[**B** 与A_1,...、A_t]相交的概率更容易，尤其是在情形 (2) 中。

我们先证明下面的引理。

引理 *5.2.* 设 X、A_1,...、A_t如命题 *5.1* 中所述。固定 $m \in \{0,1,\dots,|X|\}$，并令 $M(A_1$,...、$A_t)$ 表示由 X 的含有 m 个元素且与 A_1,...、A_t相交的子集 $B \subseteq$ 构成的子集族。设 A'_t是 X 的另一个子集，且$|A'_t| = |A_t|$ 不与 A_1,...、A_{t-1}相交。那么

$$|M(A_1,\dots,A_t)| \geq \big|M(A_1,\dots,A_{t-1},A'_t)\big|.$$

证明。我们通过构造一个单射 $\Psi : M(A_1,\dots, A_{t-1}, A'_t) \to M(A_1,\dots, A_t)$ 来证明该引理。由于 $|A_t| = |A'_t|$，因此我们有 $|A_t - A'_t| = |A'_t - A_t|$。选取一个双射 $\sigma : A'_t - A_t \to A_t - A'_t$，并定义 $\Psi : M(A_1,\dots, A_{t-1}, A'_t) \to M(A_1,\dots, A_t)$，定义如下

$$\Psi(B) = \begin{cases} B & B \cap A_t \neq \emptyset \\ (B - (A'_t - A_t)) \cup \sigma(B \cap (A'_t - A_t)) & B \cap A_t = \emptyset. \end{cases}$$

我们先来验证， $\Psi(B)$ 确实属于 $M(A_1,\dots, A_t)$。如果 B与 A_t相交，这一点显而易见。另一方面，如果$B \cap A_t = \emptyset$，那么 $B \cap (A'_t - A_t) \neq \emptyset$，因为 B与 A'_t相交，因此 $\Psi(B) \cap A_t \supseteq \sigma(B \cap (A'_t - A_t)) \neq \emptyset$。此外，

由于 A'_t 与 $\bigcup_{i=1}^{t-1} A_i$ 不相交，且 B 与 $A_1,\ldots,A_{t-1}$ 相交，因此集合 $B - A'_t$ 与 $A_1,\ldots,A_{t-1}$ 相交，所以 $\Psi(B)$ 也满足这一点。最后，$|\Psi(B)| = |B| = m$，因为 $\Psi(B)$ 是通过从 B 中移除 $|B \cap (A'_t - A_t)|$ 个元素，再添加相同数量的元素得到的。由此可得，当 $B \cap A_t = \emptyset$ 时，$B \in M(A_1,\ldots,A_t)$。

在证明 Ψ 是单射之前，我们先证明，对于每个 $B \in M(A_1,\ldots,A_{t-1},A'_t)$，都有 $\Psi(B)\cap A'_t \neq \emptyset$ 当且仅当 $B \cap A_t \neq \emptyset$。事实上，如果 $B \cap A_t \neq \emptyset$，那么 $\Psi(B) = B$，因此 $\Psi(B)\cap A'_t = B \cap A'_t \neq \emptyset$。另一方面，如果 $B \cap A_t = \emptyset$，那么 $B - (A'_t - A_t) = B - (A'_t \cup A_t)$，因此 $\Psi(B) = (B - (A'_t \cup A_t)) \cup \sigma((B \cap (A'_t - A_t))) \subseteq (B - (A'_t \cup A_t)) \cup (A_t - A'_t) \subseteq B - A'_t$，由此可得 $\Psi(B) \cap A'_t = \emptyset$。

现在我们证明 Ψ 是单射。假设 $B,C \in M(A_1,\ldots,A_{t-1},A'_t)$，且 $\Psi(B) = \Psi(C)$。我们需要证明 $B = C$。如果 $\Psi(B)$ 与 A'_t 相交，那么根据前一段，B 和 C 都与 A_t 相交，因此 $B = \Psi(B) = \Psi(C) = C$。另一方面，如果 $\Psi(B) \cap A'_t = \emptyset$，那么 B 和 C 都不与 A_t 相交。这意味着 $\Psi(B) \cap A_t = \sigma(B \cap (A'_t - A_t))$，所以

$$\begin{aligned}(\Psi(B) - (A_t - A'_t)) \cup \sigma^{-1}(\Psi(B) \cap A_t) &= (B - (A'_t - A_t)) \cup \sigma^{-1}(\sigma(B \cap (A'_t - A_t))) \\ &= (B - (A'_t - A_t)) \cup (B \cap (A'_t - A_t)) \\ &= B.\end{aligned}$$

将 B 替换为 C 时，同样成立，因此可得

$$B = (\Psi(B) - (A_t - A'_t)) \cup \sigma^{-1}(\Psi(B) \cap A_t) = (\Psi(C) - (A_t - A'_t)) \cup \sigma^{-1}(\Psi(C) \cap A_t) = C,$$

如所需。这证明了 Ψ 是单射，并完成了证明。 □

证明 命题 *5.1*。 首先，假设 **B** 按式（1）所述选取。那么，按照 引理 5.2中的记号，只需证明

$$|M(A_1,\ldots,A_t)| \geq |M(A'_1,\ldots,A'_t)|.$$

为此，首先注意到我们可以假设 A'_t 与 $A_1,\ldots,A_{t-1}$ 不相交。事实上，由于 $A'_1, \ldots, A'_t$ 两两不相交，因此 $\sum_{i=1}^{t-1} |A_i| = \sum_{i=1}^{t-1} |A' i| \leq |X| - |A'_t|$，所以存在一个置换 $\sigma: X \to X$，使得 $\sigma(A'_t)$ 与 $\bigcup_{i=1}^{t-1} A_i$ 不相交。将 $A'_1, \ldots, A'_t$ 替换为 $\sigma(A'_1), \ldots, \sigma(A'_t)$ 不会影响 $|M(A'_1, \ldots, A'_t)|$ 的值；替换之后，A'_t 与 $A_1,\ldots,A_{t-1}$ 不相交。

现在 A'_t 与 $A_1,\ldots,A_{t-1}$ 不相交，因此集合 $A_1,\ldots,A_{t-1}、A'_{t-1}$ 都包含在 $X' := X - A'_t$ 中。因此，用 X' 替代 X，重复上一段的论证，我们可以进一步假设 A'_{t-1} 与 $A_1,\ldots,A_{t-2}$ 不相交（条件是 $t \geq 2$）。如此继续，我们可以假设每个 $A' i\ (1 \leq i \leq t)$ 都与 $A_1,\ldots,A_{i-1}$ 不相交。

固定一个 $i \in \{1,\ldots,t\}$。那么 $A' i$ 与 $A_1,\ldots,A_{i-1}$ 以及 $A' i+1,\ldots,A'_t$ 都不相交。因此，引理 5.2 告诉我们

$$\left|M(A_1,\ldots,A_{i-1},A_i,A'_{i+1},\ldots,A'_t)\right| \geq \left|M(A_1,\ldots,A_{i-1},A'_i,A'_{i+1},\ldots,A'_t)\right|.$$

由于这对每个 i 都成立，我们得到

$$|M(A_1,\ldots,A_t)| \geq |M(A_1,\ldots,A_{t-1},A'_t)| \geq |M(A_1,\ldots,A_{t-2},A'_{t-1},A'_t)| \geq \cdots \geq |M(A'_1,\ldots,A'_t)|.$$

这就证明了情形 (1) 下的命题。

接下来，假设 **B** 按 (2) 中的方式选取。在这种情况下，如果我们以 $|\mathbf{B}| = m\ (0 \leq m \leq |X|$ 这一事件为条件，那么 **B** 就在 X 的 m 元子集中均匀分布。因此，我们对情形 (1) 的证明意味着

$$\mathbb{P}[\mathbf{B} \text{ meets } A_1,\ldots,A_t : |\mathbf{B}| = m] \geq \mathbb{P}\left[\mathbf{B} \text{ meets } A'_1,\ldots,A'_t : |\mathbf{B}| = m\right].$$

由于这对所有 $m \in \{0,1,\ldots,|X|\}$ 都成立，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathbf{B} \text{ meets } A_1,\ldots,A_t] &= \sum_{m=0}^{|X|} \mathbb{P}[\mathbf{B} \text{ meets } A_1,\ldots,A_t : |\mathbf{B}| = m]\,\mathbb{P}[|\mathbf{B}| = m] \\ &\geq \sum_{m=0}^{|X|} \mathbb{P}\left[\mathbf{B} \text{ meets } A'_1,\ldots,A'_t : |\mathbf{B}| = m\right]\mathbb{P}[|\mathbf{B}| = m] \\ &= \mathbb{P}[\mathbf{B} \text{ meets } A'_1,\ldots,A'_t],\end{aligned}$$

因此，命题在情形（2）下成立。 □

5.2 P 定理定理 4.3(ii) 最大度均匀性不大时

记号

T本小节中将始终采用以下一般记号：

- $H=(V,E)$ 是一个具有 n 个顶点的超图，
- $r=|E|/|V|$ 是 H 的稀疏度（超边与顶点之比），
- k 是 H 的平均均匀度，
- $d1,...,dm$ 是在H中出现的顶点度，即 $\{\deg(v):v\in V\}=\{d1,...,dm\}$，
- $Vi=\{v\in V:\deg(v)=di\}$ 是度为di的顶点集合，其中 $1\le i\le m$，
- $ui=\frac{|Vi|}{|V|}$是对于所有 $=1,...,m$，度为di的顶点所占的比例，
- d 是H的平均度。

注意，$d=\sum^m i=1\,ui\,di=rk$，其中第二个等式由命题 2.6得出。

为了构造定理 4.3(ii)所保证的集合 A ⊆V，我们将以密度 γ 随机抽取边集 B ⊆E，并令 A =V (B)，即 A 是由 B 中某条边所接触到的顶点组成的集合。我们将证明，对于某个特定的 γ （取决于 $d_1,...,d_m$、$u_1,...,u_m$ 和 δ），存在正概率使得 |A| ≤ δn，并且同时 |E(A)| 至少包含边的 $f_{k,r}(\delta)$比例，其中 $f_{k,r}$ 如式（4.1）所定义。

命题 5.3。 设 $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$、 $\beta\in[0,1)$、 $\gamma\in(0,1)$、 $\eta\in(0,1\,2)$为实数，使得

$$\mu:=(1-\alpha-\beta-\eta)(1-2\eta)-\alpha>0 \qquad and \qquad \gamma|E|\in\mathbb{N}.$$

那么存在常数 $A_{5.3}(k,r),B_{5.3}(k,r,\gamma),N_{5.3}(k,r,\alpha,\gamma)>0$ （仅取决于所标示的参数），使得以下结论成立：沿用上述记号，设超图 $H=(V,E)$ 满足 $d=rk\ge 1$且

$$\deg(v)\le dn^{\alpha}\ for\ all\ v\in V \quad and \quad |e|\le kn^{\beta}\ for\ all\ e\in E. \tag{5.1}$$

令 **B** ⊆E 从 E 的所有 $\gamma|E|$元子集中均匀随机选取。若 $n\ge N_{5.3}(k,r,\alpha,\gamma)$，则

$$\mathbb{P}_{\mathbf{B}}\left[\frac{|V(\mathbf{B})|}{n}\le\sum_{i=1}^{m}u_i(1-(1-\gamma)^{d_i})+A_{5.3}(k,r)n^{-\eta}\right]\ge 1-B_{5.3}(k,r,\gamma)n^{-\mu}.$$

此外，我们可以取

$$\begin{aligned}
A_{5.3}(k,r) &= 2kd=O(k^2r),\\
B_{5.3}(k,r,\gamma) &= \frac{4C_{3.6}d}{e^2\gamma(\ln(1-\gamma))^2}=O(rk\gamma^{-3}),\\
N_{5.3}(k,r,\alpha,\gamma) &= \max\left\{4dk,\frac{2k}{\gamma(1-\gamma)}\right\}^{(1-2\alpha)^{-1}}=\mathrm{poly}_{\alpha}(k,r,\gamma^{-1},(1-\gamma)^{-1}).
\end{aligned}$$

证明。 不妨通过设定 $d_1=0$ 来假设；若不存在度为 0 的顶点，则令 $u_1=0$。在此假设下，V**(B)** 永远不会与 $V_1=\{v\in V:\deg(v)=0\}$ 相交。

我们的假设 $\mu>0$ 意味着 $\alpha<1-\beta$。令 $\tau\in(\alpha,1-\beta)$；我们稍后将说明 τ。按照命题中的定义，选取 $A_{5.3}$、$B_{5.3}$、$N_{5.3}$。此外，我们定义

$$I=\{i\in\{2,\dots,m\}:u_i\ge kn^{-\tau}\} \qquad \text{and} \qquad J=\{i\in\{2,\dots,m\}:u_i<kn^{-\tau}\},$$

并注意到 $|I|$，$|J|\le m-1\le dn^{\alpha}$ 根据 (5.1) 中的第一个假设。

假设 $n\ge N_{5.3}$。对于每个 $i\in I$，令 H_i 表示从 H中删除不属于 V_i的顶点后得到的超图。形式化地说，$H_i=(V_i,E)$，即 H_i以 V_i为其顶点集合，并具有与 H相同的边集，但我们只考虑与 V_i中顶点的边与顶点的关联，因此 $\mathrm{Vert}^{H_i}(e)=\mathrm{Vert}_H(e)\cap V_i$。因此，

H_i是一个 d_i-正则超图，具有 $u_i n$个顶点和 rn条边。根据 (5.1)，其最大均匀度至多为kn^β。这意味着，对偶超图 H^*i（参见 第 2.2 节）是 d_i-一致的，具有 $u_i n$条边和 rn个顶点，且其最大顶点度 D 至多为kn^β。

现在，我们将推论 3.6 应用于 H*i（i ∈I）以及随机子集 B ⊆V（H*i），其密度为 γ。首先注意，要应用该推论，我们需要满足 rn =|V（H*i）|≥max{4d²i，2dγ ⁱ（1−γ）}。由于 $d_i \le dn^\alpha$，只需验证 rn ≥n^{2α} max{4d²，²dγ（1−γ）}，整理后得到 n^{1−2α} ≥max{4dk，²kγ（1−γ）}。根据假设 n ≥N5.3，这一前提条件成立。接下来注意，推论 3.6 中与 H*i 相关的数目 ˜n = ˜n(H*i) 为

$$\tilde{n}(H_i^*) = \frac{u_i n}{D} \ge \frac{kn^{1-\tau}}{kn^\beta} = n^{1-\beta-\tau}.$$

因此，该推论（以 α 替代 $1-2\eta$ 应用）意味着

$$\begin{aligned} p_i &:= \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{v}\sim E(H_i^*)}\left[\mathrm{Vert}_{H_i^*}(\mathbf{v})\cap\mathbf{B}=\emptyset\right] \ge (1-\gamma)^{d_i} - (rn)^{-\eta}\right] \\ &\ge 1 - \frac{4C_{3.6}}{e^2\gamma(\ln(1-\gamma))^2}\cdot\tilde{n}(H_i^*)^{2\eta-1} \\ &\ge 1 - \frac{C_{5.3}}{\gamma(\ln(1-\gamma))^2}\cdot n^{(1-\beta-\tau)(2\eta-1)}. \end{aligned}$$

另一方面，由于 $\mathbb{P}_{\mathbf{v}\sim E(H^*i)}\left[\mathrm{Vert}_{H^*i}(\mathbf{v})\cap\mathbf{B}=\emptyset\right] = \mathbb{P}_{\mathbf{v}\sim V_i}\left[\mathbf{v}\notin V^{H_i}(\mathbf{B})\right]$，我们有

$$\begin{aligned} p_i &= \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{v}\sim V_i}\left[\mathbf{v}\notin V_{H_i}(\mathbf{B})\right] \ge (1-\gamma)^i - (rn)^{-\eta}\right] \\ &= \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{v}\sim V_i}\left[\mathbf{v}\in V_{H_i}(\mathbf{B})\right] \le 1-(1-\gamma)^i + (rn)^{-\eta}\right] \\ &= \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[|V_H(\mathbf{B})\cap V_i| \le u_i n\left(1-(1-\gamma)^i + (rn)^{-\eta}\right)\right]. \end{aligned}$$

因此，由并集界，

$$\begin{aligned} \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[|V_H(\mathbf{B})\cap V_i| \le u_i n\left(1-(1-\gamma)^i + (rn)^{-\eta}\right) \text{ for all } i\in I\right] &\ge 1 - |I|\cdot\tfrac{C_{5.3}}{\gamma(\ln(1-\gamma))^2} n^{(1-\beta-\tau)(2\eta-1)} \\ &\ge 1 - \tfrac{C_{5.3}d}{\gamma(\ln(1-\gamma))^2} n^{\alpha+(1-\beta-\tau)(2\eta-1)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

现在注意，由于 $V(\mathbf{B})\cap V_1=\emptyset$，当 (5.2) 中的事件发生时，我们有

$$\begin{aligned} |V(\mathbf{B})| &\le \sum_{i\in I}\left(u_i n\left(1-(1-\gamma)^i + (rn)^{-\eta}\right)\right) + \sum_{i\in J} u_i n \\ &\le n\sum_{i\in I} u_i(1-(1-\gamma)^i) + \sum_{i=1}^{m}(u_i n)(rn)^{-\eta} + \sum_{i\in J} kn^{1-\tau} \\ &\le n\sum_{i\in I} u_i(1-(1-\gamma)^i) + r^{-\eta}n^{1-\eta} + k|J|n^{1-\tau} \\ &\le n\sum_{i\in I} u_i(1-(1-\gamma)^i) + k^\eta n^{1-\eta} + kdn^{1+\alpha-\tau} \\ &\le n\sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^i) + kdn^{1-\eta} + kdn^{1+\alpha-\tau} \end{aligned}$$

其中，在第四个不等式中，我们用到了 $r \ge {}^1 k_\circ$ –

现在我们选择 τ 使得 $1-\eta = 1+\alpha-\tau$，即，

$$\tau = \alpha + \eta.$$

注意，根据我们的假设 $\tau < 1-\beta$ 有 $\mu > 0$。对于这一选择 τ，我们得到

$$\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[|V(\mathbf{B})| \le n\sum_{i\in I} u_i(1-(1-\gamma)^i) + 2kdn^{1-\eta}\right] \ge 1 - \frac{C_{5.3}d}{\gamma(\ln(1-\gamma))^2} n^{\alpha+(1-\alpha-\beta-\eta)(2\eta-1)},$$

这正是我们想要的。 □

命题 5.4. 设 $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$、 $\beta \in [0,1)$、 $\gamma \in (0,1)$、 $\eta \in (0, 1/2)$ 为满足以下条件的实数

$$\mu := (1-\alpha-\beta-\eta)(1-2\eta) - \alpha > 0.$$

那么存在常数 $A_{5.4}(k,r), B_{5.4}(k,r,\gamma), N_{5.4}(k,r,\alpha,\beta,\gamma,\eta) > 0$ (取决于所示参数)，使得以下结论成立：假设

$$\deg(v) \le dn^{\alpha} \text{ for all } v \in V \quad \text{and} \quad |e| \le kn^{\beta} \text{ for all } e \in E. \tag{5.3}$$

令 $\mathbf{B} \subseteq E$ 通过以概率 γ 随机选取每个 $e \in E$ 并将其纳入 $\mathbf{B}$ （各边之间相互独立）。若 $n \ge N_{5.4}(k,r,\alpha,\beta,\gamma,\eta)$ 且 $d = rk \ge 1$，则

$$\mathbb{P}_{\mathbf{B}}\left[\frac{|V(\mathbf{B})|}{n} \le \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^{d_i}) + A_{5.4}(k,r)n^{-\eta}\right] \ge 1 - B_{5.4}(k,r,\gamma)n^{-\mu}.$$

此外，我们可以取

$$\begin{aligned}
A_{5.4}(k,r) &= A_{5.3}(k,r) + d = 2kd + d = O(k^2 r),\\
B_{5.4}(k,r,\gamma) &= \max_{\lambda \in [\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}]} B_{5.3}(k,r,\lambda) + 2 = \frac{8C_{3.6}d}{e^2\gamma(\ln(1-0.5\gamma))^2} + 2 = O(kr\gamma^{-3}),\\
N_{5.4}(k,r,\alpha,\beta,\gamma,\eta) &= \max_{\lambda \in [\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}]} \left\{ N_{5.3}(k,r,\alpha,\lambda), \left(\frac{2}{\gamma(1-\gamma)}\right)^{\eta^{-1}}, \max\left\{\frac{16}{(1-2\eta)^2}, \mu k\right\}^{2(1-2\eta)^{-1}} \right\}\\
&\le \max\left\{ (4dk)^{(1-2\alpha)^{-1}}, \left(\frac{8k}{\gamma(1-\gamma)}\right)^{(1-2\alpha)^{-1}}, \left(\frac{2}{\gamma(1-\gamma)}\right)^{\eta^{-1}}, \max\left\{\frac{16}{(1-2\eta)^2}, \mu k\right\}^{2(1-2\eta)^{-1}} \right\}.
\end{aligned}$$

证明。 同样地，我们按命题中的方式选择 $A_{5.4}, B_{5.4}, N_{5.4}$。假设 $n \ge N_{5.4}$。特别是，这意味着 $n \ge N_{5.3}(k,\alpha,\lambda,\eta)$ 对每个 $\lambda \in [\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}]$ 都成立。 – – –

固定某个 $\lambda \in [\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}]$ 使得 $\lambda|E|$ 是一个整数。于是，在以事件 $|\mathbf{B}| = \lambda|E|$ 为条件后，集合 $\mathbf{B}$ 在 E 的所有子集上均匀分布，密度为 λ。因此，根据 命题 5.3，

$$\mathbb{P}_{\mathbf{B}}\left[\frac{|V(\mathbf{B})|}{n} \le \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\lambda)^{d_i}) + A_{5.3}(r,k)n^{-\eta} \,\middle|\, |\mathbf{B}| = \lambda|E|\right] \ge 1 - B_{5.3}(r,k,\lambda)n^{-\mu}. \tag{5.4}$$

此外，引理 2.9 意味着对所有 $i \in \{1,\dots,m\}$，

$$|(1-(1-\lambda)^{d_i}) - (1-(1-\gamma)^{d_i})| = |(1-\lambda)^{d_i} - (1-\gamma)^{d_i}| \le d_i|(1-\lambda)-(1-\gamma)| \le d_i|\lambda-\gamma|.$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\lambda)^{d_i}) \le \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^{d_i}) + \sum_{i=1}^{m} u_i d_i|\lambda-\gamma| = \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^{d_i}) + d|\lambda-\gamma|. \tag{5.5}$$

Fix 取某个稍后选定的 $\tau \in (0, 1/2)$，并令 $\varepsilon = n^{-\tau}$。我们将假设 n 足够大，使得 at

$$\varepsilon = n^{-\tau} \le \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} \qquad \text{and} \qquad \exp\left(\frac{n^{1-2\tau}}{k}\right) \ge n^{\mu}. \tag{5.6}$$

这个不等式首先意味着 $\varepsilon \le \min\{\frac{\gamma}{2}, \frac{1-\gamma}{2}\}$，因此 $[\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon] \subseteq [\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}]$。 – – –

根据切尔诺夫界（事实 2.3），我们有

$$\mathbb{P}_{\mathbf{B}}\left[||\mathbf{B}| - \gamma rn| > \varepsilon rn\right] \le 2\exp\left(-rn\cdot\varepsilon^2\right) = 2\exp\left(-rn^{1-2\tau}\right) \le 2\exp\left(-\frac{n^{1-2\tau}}{k}\right) \le 2n^{-\mu}.$$

将此与 (5.4) 和 (5.5) 结合，并注意到 $I := \{\lambda \in \mathbb{N} \cap [\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon] \subseteq [\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}]$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[\frac{|V(\mathbf{B})|}{n} \le \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^{d_i}) + A_{5.3}(r,k)n^{-\eta} + dn^{-\tau}\right] \\
&\ge \sum_{\lambda\in I} \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[\frac{|V(\mathbf{B})|}{n} \le \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^{d_i}) + A_{5.3}(r,k)n^{-\eta} + d\varepsilon \,\middle|\, |\mathbf{B}| = \lambda|E|\right] \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}[|\mathbf{B}| = \lambda|E|] \\
&\ge \sum_{\lambda\in I} \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[\frac{|V(\mathbf{B})|}{n} \le \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\lambda)^{d_i}) + A_{5.3}(r,k)n^{-\eta} \,\middle|\, |\mathbf{B}| = \lambda|E|\right] \cdot \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}[|\mathbf{B}| = \lambda|E|] \\
&\ge \sum_{\lambda\in I} \left(1 - B_{5.3}(r,k,\lambda)n^{-\mu}\right) \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}[|\mathbf{B}| = \lambda|E|] \\
&\ge \sum_{\lambda\in I} \left(1 - (B_{5.4}(r,k,\gamma)-2)n^{-\mu}\right) \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}[|\mathbf{B}| = \lambda|E|] \\
&= \left(1 - (B_{5.4}(r,k,\gamma)-2)n^{-\mu}\right)\left(1 - \mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[||\mathbf{B}| - \gamma r n| > \varepsilon r n)\right]\right) \\
&\ge \left(1 - (B_{5.4}(r,k,\gamma)-2)n^{-\mu}\right)(1-2n^{-\mu}) \\
&\ge 1 - B_{5.4}(r,k,\gamma)n^{-\mu}
\end{aligned}
$$

此时，我们选择 $\tau = \eta$；注意到 $\tau \in (0, 1\ 2)$，因为我们假设 $\eta \in (0, 1\ 2)$。上一段中得到的结果现在可简化为

$$
\mathop{\mathbb{P}}_{\mathbf{B}}\left[\frac{|V(\mathbf{B})|}{n} \le \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^{d_i}) + (A_{5.3}(r,k)+d)n^{-\eta}\right] \ge 1 - B_{5.4}(r,k,\gamma)n^{-\mu}. \tag{5.7}
$$

这就证明了定理，只要（5.6）对 $\tau = \eta$成立。

最后，我们验证当 （5.6）在 $\tau = \eta$ 且 $n \ge N_{5.4}$时成立。（5.6）的第一条由以下事实可得：$N_{5.4} \ge \left(\gamma^{2}(1-\gamma)\right)^{\eta^{-1}}$。第二条等价于 $n^{1-2\eta} - k\mu \ln n \ge 0$。由引理 2.12 以及以下事实，

$$
N_{5.4} \ge \max\left\{\frac{16}{(1-2\eta)^2}, \mu k\right\}^{2(1-2\eta)^{-1}} = \max\left\{\left(\frac{2}{0.5(1-2\eta)}\right)^{\frac{2}{0.5(1-2\eta)}}, (\mu k)^{\frac{2}{1-2\eta}}\right\},
$$

我们有

$$
\frac{n^{1-2\eta}}{k} - \mu \ln n \ge \frac{n^{1-2\eta}}{k} - \mu n^{0.5(1-2\eta)} = \frac{n^{0.5(1-2\eta)}}{k}\left(n^{0.5(1-2\eta)} - k\mu\right) \ge 0,
$$

如所需。 □

接下来，当 E（V（$\mathbf{B}$））中$\mathbf{B}$ 按命题 5.4 中的方式选取时，我们估计边的平均数量。这里我们将用到命题 5.1。

命题 5.5。 使用上述记号，设超图 $H = (V,E)$ 满足

$$
\deg(v) \ge 2 \ \textit{for all}\ v \in V \quad \textit{and} \quad \sum_{v\in \mathrm{Vert}(e)} (\deg(v)-1) < |E| \ \textit{for all}\ e \in E. \tag{5.8}
$$

设 $\gamma \in (0,1)$，并以随机方式抽取 $\mathbf{B} \subseteq E$：以概率 γ （独立地于其他边）将每条 $e \in E$ 纳入$\mathbf{B}$。那么

$$
\mathbb{E}\left[\frac{|E(V(\mathbf{B}))|}{|E|}\right] \ge \gamma + (1-\gamma)\prod_{i=1}^{m}(1-(1-\gamma)^{d_i-1})^{\frac{u_i d_i}{r}}.
$$

证明。 对于每个$e \in E$，定义一个随机变量$\mathbf{X}_e$ 如下

$$
\mathbf{X}_e = \begin{cases} 1 & e \in E(V(\mathbf{B})) \\ 0 & e \notin E(V(\mathbf{B})). \end{cases}
$$

Then

$$
\mathbb{E}\left[\frac{|E(V(\mathbf{B}))|}{|E|}\right] = \frac{1}{|E|}\sum_{e\in E} \mathbb{E}\mathbf{X}_e. \tag{5.9}
$$

对于每个$e \in E$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mathbf{X}_e &= \mathbb{E}[\mathbf{X}_e \mid e \in B]\,\mathbb{P}[e \in \mathbf{B}] + \mathbb{E}[\mathbf{X}_e \mid e \notin \mathbf{B}]\,\mathbb{P}[e \notin \mathbf{B}] \\ &= 1 \cdot \gamma + \mathbb{P}[e \in E(V(\mathbf{B})) \mid e \notin B] \cdot (1-\gamma).\end{aligned}$$

将其代入 (5.9)，得到

$$\mathbb{E}\left[\frac{|E(V(\mathbf{B}))|}{|E|}\right] = \gamma + (1-\gamma)\frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\mathbb{P}[e \in E(V(\mathbf{B})) \mid e \notin \mathbf{B}].$$

注意，由詹森不等式，

$$\ln\left(\frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\mathbb{P}[e \in E(V(\mathbf{B})) \mid e \notin \mathbf{B}]\right) \geq \frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\ln\mathbb{P}[e \in E(V(\mathbf{B})) \mid e \notin \mathbf{B}].$$

因此，为了证明该命题，只需证明

$$\begin{aligned}\frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\ln\mathbb{P}[e \in E(V(\mathbf{B})) \mid e \notin \mathbf{B}] &\geq \ln\left(\prod_{i=1}^{m}(1-(1-\gamma)^{d_i-1})^{\frac{u_i d_i}{r}}\right) \\ &= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m} u_i d_i \ln(1-(1-\gamma)^{d_i-1}).\end{aligned} \tag{5.10}$$

（注意 要使右侧有定义，需要 $d_i > 1$ ，而由 (5.8) 的第一部分可知这一点成立 .）

固定一个边 $\in E$。对于每个顶点 $\in \mathrm{Vert}(e)$，令E_v 表示H 中包含顶点 v 的边集。于是$|E_v| = \deg(v)$。此外，若边 $\notin B$，则边 $\in E(V(B))$ 当且仅当对于每个顶点 $<e$，B都与集合$E_v - \{e\}$相交。这意味着

$$\mathbb{P}[e \in E(V(\mathbf{B})) \mid e \notin \mathbf{B}] = \mathbb{P}[\mathbf{B} \text{ meets } E_v - \{e\} \text{ for all } v < e \mid e \notin \mathbf{B}] =: (\star).$$

对事件 e $\notin$ B 进行条件化，简单来说就是通过以概率 γ 将 E $-${e} 中的每条边加入 B，从而将 B 选为 E $-${e} 的随机子集。此外，由 (5.8) 的第二部分，$\sum$v<e $|$E$_v -$ {e}$| = \sum$v<e(deg(v) $-$1) $\leq |$E$| - 1 = |$E $-$ {e}$|$。因此，我们可以选取 E $-${e} 的两两不交子集 {A$'_v$}$_{v<e}$，使得对所有 v $<$ e，都有 $|$A$'_v| = |$E$_v -$ {e}$| =$ deg(v) $-$ 1。现在，我们可以将命题 5.1 应用于集合 X $=$ E $-${e} 以及子集族 {E$_v -$ {e}}$_{v<e}$和 {A$'_v$}$_{v<e}$。根据该命题，

$$\begin{aligned}(\star) &\geq \mathbb{P}[\mathbf{B} \text{ meets } A'_v \text{ for all } v < e \mid e \notin \mathbf{B}] = \prod_{v<e}\mathbb{P}[\mathbf{B} \cap A'_v = \emptyset] \\ &= \prod_{v<e}(1-(1-\gamma)^{|A'_v|}) = \prod_{v<e}(1-(1-\gamma)^{\deg(v)-1}),\end{aligned} \tag{5.11}$$

其中，第一个等式成立是因为集合 $\{A'_v\}_{v<e}$ 两两不交。因此，

$$\begin{aligned}\frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\ln\mathbb{P}[e \in E(V(\mathbf{B})) \mid e \notin \mathbf{B}] &\geq \frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\ln\left(\prod_{v<e}(1-(1-\gamma)^{\deg(v)-1})\right) \\ &= \frac{1}{rn}\sum_{e\in E}\sum_{v<e}\ln(1-(1-\gamma)^{\deg(v)-1}) \\ &= \frac{1}{rn}\sum_{v\in V}\sum_{e>v}\ln(1-(1-\gamma)^{\deg(v)-1}) \\ &= \frac{1}{rn}\sum_{v\in V}\deg(v)\ln(1-(1-\gamma)^{\deg(v)-1}) \\ &= \frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{m}(u_i n)d_i\ln(1-(1-\gamma)^{d_i-1}) \\ &= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}u_i d_i\ln(1-(1-\gamma)^{d_i-1}).\end{aligned}$$

这就证明了(5.10)，从而证明了该命题。 □

注5.6. 命题 命题 5.5 的证明表明，$\mathbb{E}\left[\frac{|E(V_{(\mathbf{B})})|}{|E|}\right]$ 在 H 中的任意两条超边至多共享一个顶点时，其值最小。事实上，在这种情况下，对每个 $e \in E$，集合 $\{E_v - \{e\}\}_{v<e}$ 两两不交，这意味着（$\star$）的下界（见 (5.11)）实际上是等式。由于 命题 5.5是证明限制器下界的一个步骤，这表明最优的限制器是任意两条超边至多共享一个顶点的那些限制器。

备注 5.7. 当 H 是正则的时，命题 5.5 的结论可简化为

$$\mathbb{E}\left[\frac{|E(V(\mathbf{B}))|}{|E|}\right] \geq \gamma + (1-\gamma)(1-(1-\gamma)^{d-1})^k.$$

遗憾的是，这个简化后的结论（等价于 $\sum^m{}_{i=1} u_i d_i \ln(1-(1-\gamma)^{d_i-1}) \geq d\ln((1-(1-\gamma)^{d-1}))$）对一般的 H 可能不成立，因为函数 $x \mapsto x\ln(1-(1-\gamma)^{x-1})$ 在包含$d_1,...,d_m$的区间内不一定是凹函数。

我们将使用以下引理，将命题 5.4 和命题 5.5 结合起来。

引理 5.8. 设$\mathbf{X}$是一个取值于 $[0,1]$ 的随机变量。令 $a = \mathbb{E}\mathbf{X}$，并设 S 是一个事件，满足 $\mathbb{P}(S) \geq 1-b$，其中 $0 \leq b \leq 1$ 为某个常数。则 $\Pr[(\mathbf{X} \geq a - 2b) \wedge S] > 0$。

证明。 这可以由马尔可夫不等式推出，但直接证明更简短。

若 $b \geq \frac{1}{2}$ 或 $b = 0$，引理显然成立，因此我们可以假设 $0 < b < \frac{1}{2}$。此外，减小 b 只会使 $\Pr[(\mathbf{X} > a - 2b) \wedge S]$, 减小，所以只需证明引理对 $b = 1 - \mathbb{P}(S)$成立。反设 $\Pr[(\mathbf{X} \geq a - 2b) \wedge S] = 0$。那么

$$\begin{aligned} a = \mathbb{E}\mathbf{X} &= \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid S]\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \neg S]\,\mathbb{P}(\neg S) \\ &\leq (a-2b)(1-b) + 1 \cdot b = a - 2b - ab + 2b^2 + b = a - ab + b(2b-1). \end{aligned}$$

由于 $0 < b < \frac{1}{2}$，最后一个表达式严格小于 a，这就产生了矛盾。 □

取定某个 $\delta \in (0,1)$。回想一下，我们的目标是应用命题 5.4，其中参数 γ 的选取使得 V (B) 的密度至多为 δ，也就是说，我们需要 $\delta = \sum_{i=1} u_i(1-(1-\gamma)^{d_i})$（忽略额外的可忽略项）。接着，命题 5.5 给出了 $\mathbb{E}\left[\frac{|E(V(\mathbf{B}))|}{|E|}\right]$ 的一个下界，该下界用 γ 以及超图 H 的其他参数表示。例如，当 H 是正则的时，我们有 $m = 1$ 且 $d_1 = d$，因此可以求解 $\delta = 1-(1-\gamma)^d$ 得到 γ，进而得到 $\gamma = 1-(1-\delta)^{1/d}$。将其代入命题 5.5，得 $\mathbb{E}\left[\frac{|E(V(\mathbf{B}))|}{|E|}\right] \geq \gamma + (1-\gamma)(1-(1-\gamma)^{d-1})^k = f_{k,r}(\delta)$，其中 $f_{k,r}(x)$ 如 (4.1) 中所定义；这实际上足以证明正则情形下的定理 4.3(ii)。为了处理一般超图的情形，我们使用下面的定理。该定理表明，只要 H 的最小顶点度至少为 3，$f_{k,r}(\delta)$ 就是 $\gamma + (1-\gamma)\prod^m{}_{i=1}(1-(1-\gamma)^{d_i-1})^{u_i}$ 的一个下界。这个非常技术性的结果的证明见第 6.1 节。

定理 5.9。 假设给定

- $u_1,...,u_m \in [0,1]$ 使得 $\sum_{i=1} u_i = 1$,
- $k \in [1,\infty)$ 并且
- $\delta \in (0,1)$。

对于每个 $x_1,...,x_m \in (1,\infty)$，令

- $d = \sum_{i=1} x_i u_i$,
- $r = d/k$,
- γ 是 $(0,1)$ 中满足[14]的唯一元素

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^{x_i}), \tag{5.12}$$

[14]存在性和唯一性是将中值定理应用于递增函数 $f(t)$ 的直接结果).

并放入

$$F(x_1,\dots,x_m)=\gamma+(1-\gamma)\prod_{i=1}^{m}(1-(1-\gamma)^{x_i-1})^{\frac{u_i x_i}{r}}.$$

设 $f_{k,r}(x)=1-(1-x)^{\frac{1}{rk}}+(1-x)^{\frac{1}{rk}}(1-(1-x)^{rk-1+rk})^{k}$ 如(4.1)所示。若 $x_1,\dots,x_m\geq 3$，则

$$F(x_1,\dots,x_m)\geq f_{k,r}(\delta)$$

当且仅当 $x_1=\cdots=x_m=d$ 时，等号成立。

注5.10. (i) 通过直接计算可得，$F(d,\dots,d)=f_{k,r}(\delta)$，即使不假设$x_1,\dots,x_m\geq 3$也成立。

(ii) 我们猜想，定理 5.9 在将假设 $x_1,\dots,x_m\geq 3$ 替换为$x_1,\dots,x_n\geq 2$后仍然成立。若此猜想成立，那么对于最小顶点度为 2 的非正则超图，定理 4.3(ii) 也成立。

我们还需要以下两个引理。

引理 5.11. 采用定理 *5.9*中的记号，若 $x_1,\dots,x_m\geq c$，其中某个 $c\geq 1$，则

$$1-(1-\delta)^{\frac{1}{d}}\leq\gamma\leq 1-(1-\delta)^{\frac{1}{c}}.$$

证明。 回想一下，$\delta=\sum_i u_i(1-(1-\gamma)^{x_i})$。由于 $x_i\geq c$对所有 i 均成立，

$$\delta\geq\sum_i u_i(1-(1-\gamma)^{c})=1-(1-\gamma)^{c},$$

整理可得 $\gamma\leq 1-(1-\delta)^{\frac{1}{c}}$。

接下来，函数 $x\mapsto 1-(1-\gamma)^{x}$ 在 $[0,\infty)$ 上是凹函数，因此根据詹森不等式，

$$\delta=\sum_i u_i(1-(1-\gamma)^{x_i})\leq 1-(1-\gamma)^{\sum_i u_i x_i}=1-(1-\gamma)^{d}.$$

整理可得 $\gamma\geq 1-(1-\delta)^{\frac{1}{d}}$。 □

我们将以下引理的证明推迟到 第 6.2 节。

引理 5.12。 设 $k,r>0$满足 $rk\geq 1$且设 $f_{k,r}$如 (4.1)所示。则对每个 $x,x'\in[0,1]$，都有

$$|f_{k,r}(x)-f_{k,r}(x')|\leq k|x-x'|.$$

现在我们可以将前面的结果结合起来，并证明以下版本的定理 4.3(ii)：该结论在超图的最大顶点度和最大均匀度不太大这一假设下成立。H

定理 5.13。 令 $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$、$\beta\in[0,1)$、 $\delta\in(0,1)$、 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$ 为实数，使得

$$\mu:=(1-\alpha-\beta-\eta)(1-2\eta)-\alpha>0.$$

那么存在常数 $A_{5.13}(k,r),B_{5.13}(k,r,\delta),N_{5.13}(k,r,\delta,\alpha,\beta,\eta)>0$ （仅取决于所示参数），使得以下结论成立：采用第 *5.2* 节开头的记号，设超图 H 满足

$$\deg(v)\leq dn^{\alpha}\ \textit{for all}\ v\in V\quad\textit{and}\quad|e|\leq kn^{\beta}\ \textit{for all}\ e\in E \tag{5.13}$$

并且满足以下条件之一：

(1) $\deg(v)\geq 3$ 对所有 $v\in V$ 均成立，或

(2) H 是正则的。

若 $n \geq N_{5.13}(k,r,\delta,\alpha,\beta,\eta)$ 且 $d = rk \geq 1$，则存在一个顶点集合 $A \subseteq V$，其密度至多为 δ，使得其</output t

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq f_{k,r}(\delta) - A_{5.13}(k,r)n^{-\eta} - B_{5.13}(k,r,\delta)n^{-\mu}$$

其中 $f_{k,r}$ 如 (4.1) 中所述。此外，我们可以取

$$\begin{aligned}
&A_{5.13}(k,r) = kA_{5.4}(k,r) = 2dk^2 + dk = O(k^3 r),\\
&B_{5.13}(k,r,\delta) = 2\max_{\frac{\delta}{2d}\leq\gamma\leq\delta} B_{5.4}(k,r,\gamma) \leq \frac{512C_{3.6}d^4}{e^2\delta^3} + 2 = O(k^4 r^4 \delta^{-3}),\\
&N_{5.13}(k,r,\delta,\alpha,\beta,\eta) = \max_{\frac{\delta}{2d}\leq\gamma\leq\delta}\left\{N_{5.4}(k,r,\alpha,\gamma,\beta,\eta), \left(\frac{2A_{5.4}(k,r)}{\delta}\right)^{\eta^{-1}}, k^{2(1-\alpha-\beta)^{-1}}\right\}\\
&\qquad \leq \max\{N_1,N_2,N_3,N_4,N_5\},
\end{aligned}$$

其中：

$$N_1 = \left(\frac{16dk}{\delta(1-\delta)}\right)^{(1-2\alpha)^{-1}} \qquad N_2 = \left(\frac{4d}{\delta(1-\delta)}\right)^{\eta^{-1}} \qquad N_3 = \max\left\{\frac{16}{(1-2\eta)^2}, \mu k\right\}^{2(1-2\eta)^{-1}}$$
$$N_4 = \left(\frac{4dk+2d}{\delta}\right)^{\eta^{-1}} \qquad N_5 = k^{2(1-\alpha-\beta)^{-1}}$$

证明。设 $n \geq N_{5.13}$。令 $\varepsilon = A_{5.4}(k,r)n^{-\eta}$，并令

$$\tilde{\delta} = \delta - \varepsilon.$$

由于 $n \geq \left(\frac{2A_{5.4}(k,r)}{\delta}\right)^{\eta^{-1}}$，我们有 $\varepsilon \leq \frac{\delta}{2}$，因此

$$\tilde{\delta} \geq \frac{1}{2}\delta. \tag{5.14}$$

如前所述，存在唯一的 $\gamma \in (0,1)$，使得

$$\tilde{\delta} = \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^{d_i}).$$

假设 (1) 和 (2) 意味着 $d_i \geq 1$ 对所有 i，并且有 $\sum^m{}_{i=1} u_i d_i = d = rk$。因此，根据 引理 5.11~（取 δ 代替 δ，并令 $(x_1,\ldots,x_m) =$ 为 $(d_1,\ldots,d_m)$），我们有

$$\delta \geq \tilde{\delta} = 1-(1-\tilde{\delta})^{\frac{1}{1}} \geq \gamma \geq 1-(1-\tilde{\delta})^{\frac{1}{d}}.$$

根据 (5.14) 和 引理 2.10，这意味着

$$1-(1-\tilde{\delta})^{\frac{1}{d}} \geq \frac{\tilde{\delta}}{d} \geq \frac{\delta}{2d}.$$

综合起来，这意味着

$$\frac{\delta}{2d} \leq \gamma \leq \delta. \tag{5.15}$$

以随机方式选取 B ⊆ E：将每个 e ∈ E 以概率 γ 加入 B，并令 A =V (B)。由 (5.15) 和 N5.13 的定义可知，n ≥$N_{5.4}$(k,r,α,β,γ,η)。因此，命题 5.4 告诉我们

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\frac{|\mathbf{A}|}{|V|} \leq \delta\right] &= \mathbb{P}\left[\frac{|V(\mathbf{B})|}{n} \leq \tilde{\delta} + \varepsilon\right] \qquad (5.16)\\
&= \mathbb{P}\left[\frac{|V(\mathbf{B})|}{n} \leq \sum_{i=1}^{m} u_i(1-(1-\gamma)^{d_i}) + A_{5.4}(k,r)n^{-\eta}\right]\\
&\geq 1 - B_{5.4}(k,r,\gamma)n^{-\mu}\\
&\geq 1 - \frac{1}{2}B_{5.13}(k,r,\delta)n^{-\mu}.
\end{aligned}$$

我们通过对 H 应用命题 5.5 来继续。为此，我们首先必须检查 $\sum_{v<e}(\deg(v)-1)<|E|$。当 $|e|=0$ 时，这显然成立；否则，根据 (5.13)，有 $\sum_{v<e}(\deg(v)-1)<kn^{\beta}\cdot dn^{\alpha}=r\,k^{2}n^{\alpha+\beta}$，而左侧不可能超过 $|E|=r\,n$，因为 $n\geq N_{5.13}\geq k^{2(1-\alpha-\beta)^{-1}}$。既然命题 5.5 的前提条件均已满足，便可推出

$$\mathbb{E}\left[\frac{|E(\mathbf{A})|}{|E|}\right]=\mathbb{E}\left[\frac{|E(V(\mathbf{B}))|}{|E|}\right]\geq\gamma+(1-\gamma)\prod_{i=1}^{m}(1-(1-\gamma)^{d_i-1})^{\frac{u_i d_i}{r}}=F(d_1,\dots,d_m),$$

其中，$F(d_1,\dots,d_m)$ 如定理 5.9 中所述，只需将 δ 替换为 δ。现在，若 H 是正则的，则 $F(d_1,\dots,d_m)=F(d,\dots,d)=f_{k,r}(\delta)$（事实上，此时 $m=1$），而若对所有 $v\in V$ 都有 $\deg(v)\geq 3$（等价地，$d_1,\dots,d_m\geq 3$），则由定理 5.9 可得 $F(d_1,\dots,d_m)\geq f_{k,r}(\delta)$。因此，

$$\mathbb{E}\left[\frac{|E(\mathbf{A})|}{|E|}\right]\geq f_{k,r}(\tilde{\delta}). \tag{5.17}$$

最后，应用 引理 5.8 以及 $\mathbf{X}=|E(\mathbf{A})|$ 和 $S=\{|\mathbf{A}V|\leq\delta\}$，并利用 (5.17) 和 (5.16)，可得

$$\mathbb{P}\left[\frac{|E(\mathbf{A})|}{|E|}\geq f_{k,r}(\tilde{\delta})-B_{5.13}(k,r,\delta)n^{-\mu}\text{ and }\frac{|\mathbf{A}|}{|V|}\leq\delta\right]>0.$$

因此，存在 $B\subseteq E$ 使得 $A=V(B)$ 在 V 中的密度至多为 δ，并且

$$\frac{|E(A)|}{|E|}\geq f_{k,r}(\tilde{\delta})-B_{5.13}(k,r,\delta)n^{-\mu}.$$

由引理 5.12，$f_{k,r}(\delta)=f_{k,r}(\delta-\varepsilon)\geq f_{k,r}(\delta)-k\varepsilon$，因此

$$\frac{|E(A)|}{|E|}\geq f_{k,r}(\delta)-kA_{5.4}(r,k)n^{-\eta}-B_{5.13}(k,r,\delta)n^{-\mu}.$$

这就证明了定理。 □

注 5.14。对定理 5.13 的证明进行简单修改还可表明，对于每个 $\varepsilon>0$，存在一个 N（取决于 k、r、δ、α、β、η 和 ε），使得当 $n\geq N$ 时，存在密度至多为 δ 的 $A\subseteq V$，满足 $|E(A)|\geq F(d_1,\dots,d_m)-\varepsilon$；其中 F 如定理 5.9 中所述。当 H 不正则时，这改进了定理中所断言的下界 $|E(A)|\geq f_{k,r}(\delta)-o(1)=F(d,\dots,d)-o(1)$。这进一步表明，最佳的限制器应当是正则的。

当 H 是正则且一致时，我们可以在 $\alpha=\beta=0$ 中取 定理 5.13。在这种情况下，该定理可简化为以下推论。

推论 *5.15.* 设 $r>0$, $\delta\in(0,1)$ 且 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$ 为实数，$k\geq 2$ 为整数，并设 $A_{5.13}(k,r)$、$B_{5.13}(k,r,\delta)$ 如定理 *5.13* 中所述。则存在常数 $N(r,k,\delta,\eta)>0$（取决于所示参数），使得对于任意具有 n 个顶点和 rn 条边的正则 k-均匀超图 $H=(V,E)$，都存在一个密度至多为 δ 的 $A\subseteq V$，使得

$$\frac{|E(A)|}{|A|}\geq f_{k,r}(\delta)-A_{5.13}(k,r)n^{-\eta}-B_{5.13}(k,r,\delta)n^{-(1-\eta)(1-2\eta)}.$$

此外，我们可以取

$$N(r,k,\delta,\eta)=\max\left\{\frac{16rk^2}{\delta(1-\delta)},\left(\frac{16}{(1-2\eta)^2}\right)^{2(1-2\eta)^{-1}},\left(\frac{r(4k^2+2k)}{\delta(1-\delta)}\right)^{\eta^{-1}},k^{2(1-2\eta)^{-1}}\right\}.$$

当 k、r、δ 固定且 n 增长时，选择 $\eta=1-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.2928\ldots$ 可使项 $A_{5.13}(k,r)n^{-\eta}+B_{5.13}(r,k,\delta)n^{-(1-\eta)(1-2\eta)}$ 渐近衰减得最快，其结果为 $O(n^{-\eta})$。

5.3 定理 4.3（ii）：一般情形的证明

此时，要证明定理 4.3(ii)，剩下的就是消除假设(5.13) 在定理 5.13中的条件。首先从超图中移除度大于dn^{α} 的所有顶点，然后移除包含超过kn^{β} 个顶点的所有超边，即可做到这一点。然而，这一操作会改变平均均匀度和平均度，也可能使正则（非一致）超图变成非正则图像。为避免这些问题，我们以一种略有不同的方式修改H，具体如下。

下文中，令$H=(V,E)$表示一个平均均匀度为k、平均顶点度为d的超图。H 的关联集为集合

$$I(H) := \{(v,e) \in V \times E : v < e\}.$$

其元素是H的关联。显然，H 由其关联集确定。此外，H 的平均均匀度k 和平均度d 可由$I(H)$恢复，方法如下：

$$k = \frac{|I(H)|}{|E|} \qquad \text{and} \qquad d = \frac{|I(H)|}{|V|}. \tag{5.18}$$

令$D \geq \lceil d \rceil$。考虑以下算法，通过更改H 的关联集来修改它：

- 当存在$v \in V$满足 $\deg(v) > D$时：
  - 选择某个$e \in E$，使得$e > v$。– 选择某个$u \in V$，使得 $\deg(u) < d$。– 在$I(H)$中，将关联(v,e)替换为(u,e)。
- 输出修改后的超图 H。

注意，$I(H)$ 的大小在整个算法过程中保持不变，因此根据（*5.18*），d 和 k也保持不变。还需注意，始终可以选择满足 $\dim u$ u $<d$的 u，因为 $\deg(>v)$ d，且 $d \in E$是平均顶点度。最后，对于每条边 $|e|$，其大小不受该算法影响。

我们将算法的输出 H' 称为 H 的顶点 D-重连，因为它会重新排列H的关联，使最大度不超过D。

引理 5.16。设 H' 是 H 的顶点 D-重连（$D \geq \lceil d \rceil$），并令 $V_0 = \{v \in V : \deg(v) > D\}$。那么对每个 $A \subseteq V$，

$$E_H(A \cup V_0) \supseteq E_{H'}(A).$$

此外，$|V_0| < d\,D\,|V|$，并且对于每个 $v \in V - V_0$，，都有 $\text{度}_{H'}(v) \geq \text{度}_H(v)$。

证明。如果在将 I(H) 修改为 H′ 的过程中，从 I(H) 中移除了一个关联 (v,e)，那么必有 $\deg_H(v) > D$。（事实上，(v,e) 不可能是算法中添加到 I(H) 的关联 (u,e) 之一，因为添加 (u,e) 后，仍有 $\deg(u) \leq \lceil d \rceil \leq D$。）这意味着，对于每个 $e \in E$，都有 $\text{Vert}_H(e) \subseteq \text{Vert}_{H'}(e) \cup V_0$，，因此 $E_H(A \cup V_0) \supseteq E_{H'}(A)$。这也意味着，如果 $\deg_H(v) \leq D$，即 $v \in V - V_0$，那么 $\deg_{H'}(v) \geq \deg_H(v)$。最后，若 $|V_0| < d\,D\,|V|$ 不成立，则 H 的平均度将大于 $D|V_0|$ $V| \geq D \cdot d\,D = d$，这与我们的假设矛盾。

□

接下来，令 $K \geq \lceil k \rceil$，并考虑以下通过修改关联集来改变 H 的算法：

- 当存在满足 $|e| > K$的 $e \in E$ 时：
  - 选择一个满足 $v < e$的 $v \in V$。– 选择一个满足 $|e'| < k$ 的 $e' \in E$。– 在 $I(H)$ 中，将关联 (v,e) 替换为(v,e')。
- 输出修改后的超图 H。

同样，平均均匀度 k 和平均度 d 在整个算法过程中保持不变。此外，对于所有 $v \in V$，$\deg(v)$ 均保持不变，因此如果 H是正则的，输出也将是正则的。

我们称算法 H' 的一个输出为 H 的边 K-重连。H。这等价于说，对偶超图 $(H')^*$ (参见 第 2.2 节) 是 H 的一个顶点 K^*-重连。

引理 5.1 **7.** 设 H' 是 H 的一个边 K-重连（$K \geq \lceil k \rceil$），并令 $E_0 = \{e \in V : |e| > K\}$。那么对每个 $A \subseteq V$，

$$E_H(A) \supseteq E_{H'}(A) - E_0.$$

此外，$|E_0| < k K |E|$。

证明。由于 H'^* 是 H^* 的一个顶点 K-重连，因此 $|E_0| < k K |E|$ 可由引理 5.16 得出。接下来，我们在该引理的证明中已经看到（应用于 H^*），算法过程中被移除的 H 的关联仅具有 (v,e) 的形式，其中 $|e| > K$。因此，如果 $e \in E$ 不属于 E_0，，即 $|e| \leq K$，那么 $\mathrm{Vert}_H(e) = \mathrm{Vert}_{H'}(e)$。这意味着 $E_H(A) \supseteq E_{H'}(A) - E_0$。

□

我们现在可以移除假设(5.13)，该假设来自 定理 5.13。

定理 5.18。 令 $k, r > 0$, $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$，$\beta \in [0,1)$，$\delta \in (0,1)$，$\eta \in (0, 1/2)$ 为实数，使得

$$\mu := (1 - \alpha - \beta - \eta)(1 - 2\eta) - \alpha > 0.$$

于是存在常数 $A_{5.18}(k,r), B_{5.18}(k,r,\delta), N_{5.18}(k,r,\delta,\alpha,\beta,\eta) > 0$（取决于所示参数），使得以下结论成立：设 $H = (V,E)$ 是一个具有 n 个顶点、rn 条边且平均均匀度为 k 的超图。此外，假设

(1) $\deg(v) \geq 3$ 对所有 $v \in V$ 均成立，或者

(2) H 是正则的。

若 $n \geq N_{5.18}(k,r,\delta,\alpha,\beta,\eta)$，则存在一个密度至多为 δ 的顶点集合 $A \subseteq V$，使得

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq f_{k,r}(\delta) - kn^{-\alpha} - n^{-\beta} - A_{5.18}(k,r)n^{-\eta} - B_{5.18}(k,r,\delta)n^{-\mu},$$

其中 $f_{k,r}$ 如 (4.1) 中所示。此外，我们可以取 $A_{5.18}(k,r) = A_{5.13}(k,r) = (2k^3 + k^2)r = O(k^3 r)$ 且

$$B_{5.18}(k,r,\delta) = \max_{\tilde{\delta} \in [\frac{\delta}{2}, \delta]} B_{5.13}(k,r,\tilde{\delta}) = \frac{2^{12} C_{3.6}}{e^2} k^4 r^4 \delta^{-3} \leq 63194 \cdot k^4 r^4 \delta^{-3},$$

$$N_{5.18}(k,r,\delta,\alpha,\beta,\eta) = \max_{\tilde{\delta} \in [\frac{\delta}{2}, \delta]} \{N_{5.13}(k,r,\tilde{\delta},\alpha,\beta,\eta), (2\delta^{-1})^{\alpha^{-1}}, 2^{\beta^{-1}}\} = \mathrm{poly}_{\alpha,\beta,\eta}(k, r, \tfrac{1}{\delta}, \tfrac{1}{1-\delta}).$$

证明。假设 $n \geq N_{5.18}$，并令 $D = dn^{\alpha}$，$K = kn^{\beta}$。我们断言 $D \geq \lceil d \rceil$ 且 $K \geq \lceil k \rceil$。事实上，$D \geq \lceil d \rceil$ 等价于 $n \geq (\lceil d \rceil / d)^{\alpha^{-1}}$，而这成立是因为 $n \geq N_{5.18} \geq 2^{\alpha^{-1}}$ 且 $2 \geq \lceil d \rceil / d$（因为 $d \geq 1$）。$K \geq \lceil k \rceil$ 的证明类似。

设 H' 是 H 的一次边 K-重连，并设 H'' 是 H' 的一次顶点 D-重连。那么，H、H' 和 H'' 都具有平均均匀度 k、平均顶点度 d 以及稀疏度 $r = dk$。此外，对于所有 $v \in V$，都有 $\deg_H(v) = \deg_{H'}(v)$；对于所有 $e \in E$，都有 $|e|_{H'} = |e|_{H''}$。前者意味着，当 H 为正则时，H' 和 H'' 也是正则的；而后者意味着，H'' 的最大均匀度至多为 $K = kn^{\beta}$；根据构造，它的最大顶点度也至多为 $D = dn^{\alpha}$。此外，根据引理 5.16，如果 H 的最小顶点度至少为 3，那么 H'' 也满足同样的条件。因此，定理 5.13 的假设 (5.13) 以及该定理的假设 (1)、(2) 中至少一个对 H'' 成立。定理 5.13 的条件 (1) 和 (2) 还意味着 $d := rk \geq 1$。

设 $\tilde{\delta} = \delta - n^{-\alpha}$。由于 $n \geq (\frac{2}{\delta})^{\alpha^{-1}}$，我们有 $\tilde{\delta} \geq \frac{\delta}{2}$，因此 $n \geq N_{5.18} \geq N_{5.13}(k,r,\tilde{\delta},\alpha,\beta,\eta)$。现在，将定理 5.13 应用于 H''，可得存在一个密度至多为 $\tilde{\delta}$ 的 $\tilde{A} \subseteq V$，使得

$$\frac{|E_{H''}(\tilde{A})|}{|E|} \geq f_{k,r}(\tilde{\delta}) - A_{5.13}(k,r)n^{-\eta} - B_{5.13}(k,r,\tilde{\delta})n^{-\mu}.$$

由引理 5.12 以及 $A_{5.18}$ 和 $B_{5.18}$ 的定义可知，这意味着

$$\frac{|E_{H''}(\tilde{A})|}{|E|} \geq f_{k,r}(\delta) - kn^{-\alpha} - A_{5.18}(k,r)n^{-\eta} - B_{5.18}(k,r,\delta)n^{-\mu}. \tag{5.19}$$

令 $V_0 = \{v \in V : \deg_{H'}(v) > D\}$ 和 $E_0 = \{e \in E : |e|_H > K\}$，并令 $A = \tilde{A} \cup V_0$。由引理 5.16 和引理 5.17可知，V_0 在 V 中的密度至多为 $d D = n^{-\alpha}$，而 E_0 在 E 中的密度至多为 $k K = n^{-\beta}$。因此，

$$|A| \leq |\tilde{A}| + |V_0| \leq \tilde{\delta} n + n^{-\alpha} n = \delta n.$$

另一方面，根据上述引理以及(5.1 9)，

$$\begin{aligned}\frac{|E_H(A)|}{|E|} &\geq \frac{|E_{H'}(A)-E_0|}{|E|} \geq \frac{|E_{H'}(\tilde{A}\cup V_0)|}{|E|} - \frac{|E_0|}{|E|} \geq \frac{|E_{H''}(\tilde{A})|}{|E|} - n^{-\beta} \\ &\geq f_{k,r}(\delta) - kn^{-\alpha} - n^{\beta} - A_{5.18}(k,r)n^{-\eta} - B_{5.18}(k,r,\delta)n^{-\mu}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

注 5.19。 类似地，可以证明 定理 5.18 在以下假设下成立的类似结果： H 的最大顶点度至多为 dn^{α}；或者 H 的最大均匀度至多为 kn^{β}。细节从略。

注 5.20。 在定理 5.18中，若固定r、k、δ 并令n 趋于无穷大，则关于$\frac{|E(A)|}{|A|}$的渐近最优下界在 $\alpha=\beta=\eta=\frac{1}{6}$ 时取得。在这种情况下， $\mu=\frac{1}{6}$，并且（经过一些简化后）定理断言，若$n \geq \frac{12^6 k^{12} 6^{r()^6}}{\delta^6\ 1-\delta}$，则存在密度至多为 δ 的$A \subseteq V$，使得

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq f_{k,r}(\delta) - A_{5.20}(k,r,\delta)n^{-\frac{1}{6}},$$

其中$A_{5.20}(k,r,\delta) = 63194\cdot r^4k^4\delta^{-3}+2rk^3+rk^2+k+1$。不过，如果允许$r$、$k$ 或 δ 随n变化，那么这组参数选择可能并非最优。

我们将由定理 5.18的以下推论推导出定理 4.3(ii)。该推论消除了下界中对r的依赖，但代价是增大$n = |V|$ 可能取到的最小值，其中涉及 $\frac{|E(A)|}{E_0}$

推论 5.21。 设 $\alpha \in [0,\frac{1}{2})$、$\beta \in [0,1)$、$\eta \in (0,1/2)$、$\sigma \in (0,1)$ 为满足以下条件的实数：

$$\mu := (1-\alpha-\beta-\eta)(1-2\eta)-\alpha > 0, \qquad \sigma < \min\{\eta,\mu\} \qquad and \qquad \sigma \leq \min\{\alpha,\beta\}.$$

那么存在常数 a、b、u、v、$C>0$（取决于 α、β、η、σ），使得以下结论成立：设 $H=(V,E)$ 为一个具有 n 个顶点、rn 条边且平均均匀度为 $k>0$的超图。进一步假设定理 *5.18* 中的条件 *(1)*、*(2)* 之一对 H 成立。设 $\delta \in (0,1)$。若 $n \geq Ck^ar^b\ \delta^{-u}(1-\delta)^{-v}$，则存在密度至多为 δ 的 $A \subseteq V$，使得

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq f_{k,r}(\delta) - 63200k^4\delta^{-3}n^{-\sigma}.$$

此外，我们可以取

$$\begin{aligned}a &= \max\{2(1-2\alpha)^{-1}, 2(1-2\eta)^{-1}, 2\eta^{-1}, 2(1-\alpha-\beta)^{-1}\} \\ b &= \max\{(1-2\alpha)^{-1}, (\eta-\sigma)^{-1}, 4(\mu-\sigma)^{-1}\}, \\ u &= \max\{(1-2\alpha)^{-1}, \eta^{-1}, \alpha^{-1}\}, \\ v &= \max\{(1-2\alpha)^{-1}, \eta^{-1}\}, \\ C &= \max\left\{32^{(1-2\alpha)^{-1}}, \left(\frac{4}{1-2\eta}\right)^{4(1-2\eta)^{-1}}, 12^{\eta^{-1}}, 2^{\alpha^{-1}}, 2^{\beta^{-1}}\right\}.\end{aligned}$$

证明。假设 $n \geq N_{5.18}$。根据定理 5.18，存在$A \subseteq V$，其密度至多为 δ，使得

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq f_{k,r}(\delta) - kn^{-\alpha} - n^{-\eta} - (2k^3+k^2)rn^{-\eta} - 63194\cdot k^4r^4\delta^{-3}n^{-\mu}.$$

此外，若满足 $rn^{-\eta} \leq n^{-\sigma}$，即 $n \geq r^{(\eta-\sigma)^{-1}}$，且 $r^4n^{-\mu} \geq n^{-\sigma}$，即 $n \geq r^{4(\mu-\sigma)^{-1}}$，则这意味着

$$\frac{|E(A)|}{|E|} \geq f_{k,r}(\delta) - kn^{-\sigma} - n^{-\sigma} - (2k^3+k^2)n^{-\sigma} - 63194\cdot k^4\delta^{-3}n^{-\sigma} \geq f_{k,r}(\delta) - 63199k^4\delta^{-3}n^{-\sigma}.$$

容易验证，$Ck^ar^b\ \delta^{-u}(1-\delta)^{-v} \geq \max\{N_{5.18}, r^{(\eta-\sigma)^{-1}}, r^{4(\mu-\sigma)^{-1}}\}$，因此得出推论。 □

我们终于证明了定理 4.3(ii)。

定理 4.3(ii) 的证明。设 $\sigma \in (0, 1/6)$。我们在备注 5.20 中已经看到，取 $\alpha = \beta = \eta = \frac{1}{6}$ 可得 $\mu = \frac{1}{6}$。将推论 5.21 应用于这些 α、β、η 和 σ，即可得到 $a = 12$、$b = \frac{24}{1-6\sigma}$、$u = v = 6$ 以及 $C = 2985984 \le 3 \cdot 10^6$，从而证明了对于一般 σ，定理 4.3(ii) 成立。当 $\sigma = \frac{7-\sqrt{33}}{16}$ 时，取 $\alpha = \beta = \sigma$ 和 $\eta = 2\sigma$，即可得到定理中针对该特定 σ 指定的参数 a、b、u、v、C。（注意，这使得 b 比之前小得多，即 $b = 7 + \sqrt{33} \le 12.75$。）

□

注5.22。定理 4.1 和定理 4.2 中参数 b 的 以及 值（分别是 r 和 ε^{-1} 的指数）最终取为 $\min\{b, \sigma^{-1}\}$，其中 b 和 σ 是在推论 5.21中选取的。计算机实验表明，选择 $\sigma = \frac{7-\sqrt{33}}{16}$、$\alpha = \beta = \sigma$ 和 $\eta = 2\sigma$ 可以使 $\min\{b, \sigma^{-1}\}$ 最小，这就是我们在定理 4.3 的证明中考虑这组参数的原因。

6 解析结果的证明

本节中，我们将通过证明相关证明中用到的所有解析性断言，完成第 4 节的结果证明。具体而言，第 6.1 节旨在证明定理 5.9，而在第 6.2 节中，我们将证明函数 f_k、$r(\delta)$ 的性质，见(4.1)，这些性质此前已用到。

6.1 定理 5.9 的证明

回顾定理 5.9中引入的记号：给定 $u_1, \dots, u_m \in [0,1]$，它们满足 $\sum_{i=1}^m u_i = 1$、$k \in [1, \infty)$ 和 $\delta \in (0,1)$。那么，对于每个 $x_1, \dots, x_m \in (1, \infty)$，令 $d = \sum_{i=1}^m x_i u_i$、$r = dk$，并定义 γ 为 $(0,1)$ 中满足下式的唯一元素

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} u_i (1 - (1-\gamma)^{x_i}),$$

并令

$$F(x_1, \dots, x_m) = \gamma + (1-\gamma) \prod_{i=1}^{m} (1 - (1-\gamma)^{x_i - 1})^{\frac{u_i x_i}{r}}.$$

我们的目标是证明，若 $x_1, \dots, x_m \ge 3$，则

$$F(x_1, \dots, x_m) \ge F(d, \dots, d) = f_{k,r})\delta) := 1 - (1-\delta)^{\frac{1}{rk}} + (1-\delta)^{\frac{1}{rk}} (1 - (1-\delta)^{\frac{rk-1}{rk}})^k,$$

且等号成立当且仅当 $x_1 = \dots = x_m = d$。

首先注意到，$F(d, \dots, d)$ 的确等于 $1 - (1-\delta)^{\frac{1}{rk}} + (1-\delta)^{\frac{1}{rk}} (1 - (1-\delta)^{\frac{rk-1}{rk}})^k$。事实上，若 $x_i = d$ 对所有 i 都成立，则 $\delta = \sum_i u_i (1 - (1-\gamma)^d) = 1 - (1-\gamma)^d$，因此 $\gamma = 1 - (1-\delta)^{\frac{1}{d}}$。由此可得

$$\begin{aligned} F(d, \dots, d) &= \gamma + (1-\gamma) \prod_i (1 - (1-\gamma)^{d-1})^{\frac{u_i d}{r}} \\ &= 1 - (1-\delta)^{\frac{1}{d}} + (1-\delta)^{\frac{1}{d}} (1 - (1-\delta)^{\frac{d-1}{d}})^{\sum_i \frac{u_i d}{r}} \\ &= 1 - (1-\delta)^{\frac{1}{rk}} + (1-\delta)^{\frac{1}{rk}} (1 - (1-\delta)^{\frac{rk-1}{rk}})^k. \end{aligned}$$

定理的难点在于证明不等式 $F(x_1, \dots, x_m) \ge F(d, \dots, d)$。

引理 6.1. 沿用定理 5.9中的记号，令

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} u_i x_i \ln(1 - (1-\gamma)^{x_i - 1}).$$

若 $x_1, \dots, x_m \ge 3$，则 $f(x_1, \dots, x_m) \ge \frac{\ln(1-\delta)}{\ln(1-\gamma)} \ln\left(\frac{\delta - \gamma}{1-\gamma}\right)$，且当且仅当 $x_1 = \dots = x_m$ 时等号成立。

考虑 $f(x_1, \dots, x_m)$ 的理由是 $F(x_1, \dots, x_m) = \gamma + (1-\gamma)\exp(\frac{1}{r} f(x_1, \dots, x_m))$。证明。 对每个 i，代入

$$c_i = 1 - (1-\gamma)^{x_i - 1}.$$

这等价于

$$x_i = 1 + \frac{\ln(1-c_i)}{\ln(1-\gamma)}.$$

我们有 $c_i \le 1$，而假设 $x_i \ge 3$ 意味着

$$1-(1-\gamma)^2 \le c_i.$$

注意到

$$\begin{aligned}1-(1-\gamma)^{x_i} &= 1-(1-\gamma)(1-\gamma)^{x_i-1}\\ &= \gamma+(1-\gamma)-(1-\gamma)(1-\gamma)^{x_i-1}\\ &= \gamma+(1-\gamma)(1-(1-\gamma)^{x_i-1}) = \gamma+(1-\gamma)c_i.\end{aligned}$$

因此，

$$\delta = \sum_i u_i(1-(1-\gamma)^{x_i}) = \sum_i u_i(\gamma+(1-\gamma)c_i) = \gamma+(1-\gamma)\sum_i u_i c_i,$$

因此

$$\sum_i u_i c_i = \frac{\delta-\gamma}{1-\gamma}. \tag{6.1}$$

接下来，注意到

$$f(x_1,\dots,x_m) = \sum_i u_i x_i \ln(1-(1-\gamma)^{x_i-1}) = \sum_i u_i\left(1+\frac{\ln(1-c_i)}{\ln(1-\gamma)}\right)\ln c_i =: (\star).$$

由于 $c_1,\dots, c_m \in [1-(1-\gamma)^2,\ 1] =: I$，如果函数 $g(x) = \left(1+\frac{1}{\ln(1-x)\ln(1-\gamma)}\right)\ln x$ 在 I 上严格凸，那么詹森不等式和 (6.1) 将意味着

$$\begin{aligned}(\star) &\ge \left(1+\frac{\ln(1-\frac{\delta-\gamma}{1-\gamma})}{\ln(1-\gamma)}\right)\ln\left(\frac{\delta-\gamma}{1-\gamma}\right)\\ &= \frac{\ln(1-\gamma)+\ln(1-\gamma-(\delta-\gamma))-\ln(1-\gamma)}{\ln(1-\gamma)}\cdot\ln\left(\frac{\delta-\gamma}{1-\gamma}\right)\\ &= \frac{\ln(1-\delta)}{\ln(1-\gamma)}\ln\left(\frac{\delta-\gamma}{1-\gamma}\right),\end{aligned}$$

当且仅当 $c_1 = \cdots = c_m$，等价地，当 $x_1 = \cdots = x_m$ 时，等号成立，引理得证。

因此，只需证明 $g(x) = \left(1+\frac{1}{\ln(1-x)\ln(1-\gamma)}\right)\ln x$ 在 $[1-(1-\gamma)^2, 1]$ 上严格凸。这就是下述 引理 6.2的内容。 □

引理 6.2. 对每个 $\gamma \in (0,1)$，函数 $g(x) = \left(1+\frac{1}{\ln(1-x)\ln(1-\gamma)}\right)\ln x$ 在 $I := [1-(1-\gamma)^2, 1]$ 上严格凸

遗憾的是，$g(x)$ 通常在 $[1-(1-\gamma)^1$中并非凸函数，$1] = [\gamma, 1]$（例如，取 $.1$）；如果情况确实如此，那么 定理 5.9 实际上只需较弱的假设 $x_1,\dots,x_m \in [2,\infty)$。

引理 6.2 的证明。 由于 $\ln(1-\gamma) \le 0$，我们可以将$g(x)$ 替换为

$$h(x) := -\ln(1-\gamma)g(x) = -(\ln(1-x)+\ln(1-\gamma))\ln x.$$

因此，只需证明对于所有 $h''(x) \ge 0\, x \in I' := [1-(1-\gamma)^2, 1$。

通过直接计算，

$$h''(x) = \frac{\ln x}{(1-x)^2} + \frac{2}{x(1-x)} + \frac{\ln(1-x)+\ln(1-\gamma)}{x^2}.$$

两边乘以 $x^2(1-x)^2$，后，我们只需证明

$$x^2\ln x + 2x(1-x) + (1-x)^2\ln(1-x) + (1-x)^2\ln(1-\gamma) \ge 0 \qquad \forall x \in I'.$$

重新整理后，这等价于

$$x^2\ln x + 2x(1-x) + (1-x)^2\ln(1-x) \ge -(1-x)^2\ln(1-\gamma) \qquad \forall x \in I'.$$

因此，只需证明对于每个 $x \in I'$，都有

(1) $x^2\ln x + 2x(1-x) + (1-x)^2\ln(1-x) > 0.5x(1-x)$ 和

(2) $0.5x(1-x) \geq -(1-x)^2\ln(1-\gamma)$。

以下假设 $x \in I' = [1-(1-\gamma)^2, 1)$。

(1) 的证明。 这等价于证明

$$x^2\ln x + 1.5x(1-x) + (1-x)^2\ln(1-x) > 0.$$

应用引理 2.11 两次，可得

$$\begin{aligned} &x^2\ln x + 1.5x(1-x) + (1-x)^2\ln(1-x) \\ &\quad > x^2\cdot\frac{-(1-x)+0.5(1-x)^2}{x} + 1.5x(1-x) + (1-x)^2\cdot\frac{-x+0.5x^2}{1-x} \\ &\quad = x(1-x)[-1+0.5(1-x)] + 1.5x(1-x) + x(1-x)[-1+0.5x] = 0, \end{aligned}$$

这正是我们想要的。

(2) 的证明。 除以 $1-x$后，问题归结为证明

$$0.5x \geq -(1-x)\ln(1-\gamma).$$

解这个不等式以求出x（注意 $\ln(1-\gamma) < 0$），这等价于

$$x \geq -\frac{\ln(1-\gamma)}{0.5-\ln(1-\gamma)}.$$

由于$x \geq 1-(1-\gamma)^2,$，只需证明

$$1-(1-\gamma)^2 \geq -\frac{\ln(1-\gamma)}{0.5-\ln(1-\gamma)},$$

重新整理后，得到

$$\frac{-\gamma+0.5\gamma^2}{(1-\gamma)^2} \leq \ln(1-\gamma).$$

现在，根据引理 2.11 和假设 $\gamma \in (0,1)$,

$$\ln(1-\gamma) \geq \frac{-\gamma+0.5\gamma^2}{1-\gamma} \geq \frac{-\gamma+0.5\gamma^2}{(1-\gamma)^2},$$

因此（2）成立，证明完毕。 □

现在我们可以证明定理 5.9

定理 *5.9* 的证明定理 *5.9*。 根据引理 6.1,

$$\begin{aligned} F(x_1,\ldots,x_m) &= \gamma + (1-\gamma)\exp\left(\frac{1}{r}f(x_1,\ldots,x_m)\right) \\ &\geq \gamma + (1-\gamma)\exp\left(\frac{\ln(1-\delta)}{r\ln(1-\gamma)}\ln\left(\frac{\delta-\gamma}{1-\gamma}\right)\right) \\ &= \gamma + (1-\gamma)(1-\delta)^{\frac{\ln(\delta-\gamma)-\ln(1-\gamma)}{r\ln(1-\gamma)}} \\ &= \gamma + (1-\gamma)(1-\delta)^{\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-\gamma)}{\ln(1-\gamma)}-1\right)} =: (\star), \end{aligned}$$

且只有当 $x_1 = \cdots = x_m$ 时等号成立。令

$$f(x) = x + (1-x)(1-\delta)^{\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right)}$$

and 假设 $f(x)$ 在区间 $I=[1-(1-\delta)^{\frac{1}{d}},1-(1-\delta)^{\frac{1}{3}}]$。根据 引理 5.11， $\gamma\in I$，因此

$$\begin{aligned}(\star)&\geq f(1-(1-\delta)^{\frac{1}{d}})\\&=1-(1-\delta)^{\frac{1}{d}}+(1-\delta)^{\frac{1}{d}}(1-\delta)^{\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-1+(1-\delta)^{1/d})}{\ln((1-\delta)^{1/d})}-1\right)}\\&=1-(1-\delta)^{\frac{1}{d}}+(1-\delta)^{\frac{1}{d}}(1-\delta)^{\frac{d}{r}\log_{1-\delta}((1-\delta)^{1/d}-(1-\delta))-\frac{1}{r}}\\&=1-(1-\delta)^{\frac{1}{d}}+(1-\delta)^{\frac{1}{d}}\left((1-\delta)^{1/d}-(1-\delta)\right)^{\frac{d}{r}}(1-\delta)^{-\frac{1}{r}}\\&=1-(1-\delta)^{\frac{1}{d}}+(1-\delta)^{\frac{1}{d}}(1-\delta)^{\frac{1}{d}\cdot\frac{d}{r}}(1-(1-\delta)^{\frac{d-1}{d}})^{\frac{d}{r}}(1-\delta)^{-\frac{1}{r}}\\&=1-(1-\delta)^{\frac{1}{rk}}+(1-\delta)^{\frac{1}{rk}}(1-(1-\delta)^{\frac{rk-1}{rk}})^{k},\end{aligned}$$

定理得证。

因此，我们只需证明$f(x)$在区间I上递增，这可由下面的引理得出。 □

引理 6.3. 对于每个 $r>0$ *and* $\delta\in(0,1)$，函数 $f(x)=x+(1-x)(1-\delta)^{\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right)}$ 在区间$(0,1-\sqrt{1-\delta}]$上递增。

证明。 只需证明$f'(x)\geq 0$对于$x\in(0,1-\sqrt{1-\delta}]=:I$。假设$x\in I$始终成立。通过常规计算可得

$$f'(x)=1+(1-\delta)^{\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right)}\left(-1+\frac{(1-x)\ln(1-\delta)}{r(\ln(1-x))^2}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{\delta-x}\right)\right).$$

因此，$f'(x)\geq 0$ 当且仅当

$$\begin{aligned}&-1\leq(1-\delta)^{\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right)}\left(-1+\frac{(1-x)\ln(1-\delta)}{r(\ln(1-x))^2}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{\delta-x}\right)\right) &&\iff\\&-(1-\delta)^{-\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right)}\leq-1+\frac{(1-x)\ln(1-\delta)}{r(\ln(1-x))^2}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{\delta-x}\right) &&\iff\\&1-(1-\delta)^{-\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right)}\leq\frac{(1-x)\ln(1-\delta)}{r(\ln(1-x))^2}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{\delta-x}\right).\end{aligned}$$

现在，根据 引理 2.10，我们有

$$1-(1-\delta)^{-\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right)}\leq\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right)\cdot\ln(1-\delta)=\frac{\ln(1-\delta)}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right).$$

因此，只需证明

$$\frac{\ln(1-\delta)}{r}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-1\right)\leq\frac{(1-x)\ln(1-\delta)}{r(\ln(1-x))^2}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{\delta-x}\right).$$

两边同时乘以 $r\ln(1-x)\ln(1-\delta)$ 后，得到

$$\ln(\delta-x)-\ln(1-x)\leq\frac{(1-x)}{\ln(1-x)}\left(\frac{\ln(\delta-x)}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{\delta-x}\right)=\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}-\frac{1-x}{\delta-x},$$

整理后，只需证明

$$-\ln\left(\frac{1-x}{\delta-x}\right)+\frac{1-x}{\delta-x}\leq\frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)}. \tag{6.2}$$

根据初等分析，函数 $t\mapsto\frac{1-t}{\delta-t}$ 在 $[0,\delta)\supseteq I$ 上递增，而函数 $y\mapsto-\ln y+y$ 在 $[1,\infty)$ 上递增。这尤其意味着 $\frac{1-t}{\delta-t}\in[f(0),\infty)=[\delta^{-1},\infty)\subseteq[1,\infty)$，因此函数$g(t)=-\ln\left(\frac{1-t}{\delta-t}\right)+\frac{1-t}{\delta-t}$在 $[0,\delta)$ 上递增，尤其在 $I=(0,1-\sqrt{1-\delta}]$ 上递增。由此可得

$$1=-\ln 1+1\leq g(x)\leq g(1-\sqrt{1-\delta}).$$

注意到 $\frac{1-(1-\sqrt{1-\delta})\delta-(1-\sqrt{1-\delta})}{\sqrt{1-\delta}} = \frac{\sqrt{1-\delta}-(1-\delta)}{\sqrt{1-\delta}} = 1-\sqrt{1-\delta}$，我们得出

$$1 \le g(x) = -\ln\left(\frac{1-x}{\delta-x}\right) + \frac{1-x}{\delta-x} \le \ln(1-\sqrt{1-\delta}) + \frac{1}{1-\sqrt{1-\delta}} =: h(\delta). \tag{6.3}$$

因此，为了证明 (6.2)，只需证明

$$h(\delta) \le \frac{\ln(\delta-x)}{\ln(1-x)},$$

将其重新整理可得

$$(1-x)^{h(\delta)} \ge \delta - x. \tag{6.4}$$

由于 $h(\delta) \ge 1$ (见 (6.3))，我们有 $(1-x)^{h(\delta)} \ge 1-h(\delta)x$，因此若能证明 (6.4)，则有 $1-h(\delta)x \ge \delta - x$。这成立当且仅当

$$x \le \frac{1-\delta}{h(\delta)-1}.$$

由于 $x \in (0, 1-\sqrt{1-\delta}]$，因此我们归结为证明

$$1-\sqrt{1-\delta} \le \frac{1-\delta}{h(\delta)-1} \qquad \forall \delta \in (0,1).$$

由于 $h(\delta)-1 \ge 0$ (见 (6.3))，这等价于

$$\begin{aligned} 1-\delta &\ge (1-\sqrt{1-\delta})(h(\delta)-1) \\ &= (1-\sqrt{1-\delta})\left(\ln(1-\sqrt{1-\delta}) + \frac{1}{1-\sqrt{1-\delta}} - 1\right) \\ &= (1-\sqrt{1-\delta})\ln(1-\sqrt{1-\delta}) + \sqrt{1-\delta}. \end{aligned}$$

重新整理可得

$$(1-\delta) - \sqrt{1-\delta} \ge (1-\sqrt{1-\delta})\ln(1-\sqrt{1-\delta}). \tag{6.5}$$

令 $y = 1-\sqrt{1-\delta}$ 并注意到 $y > 0$。则 (6.5) 等价于

$$y^2 - y = (1-y)^2 - (1-y) \ge y \ln y.$$

两边除以 y，可进一步化简为证明 $y - 1 \ge \ln y$，这由初等分析可知成立。因此，我们已证明 (6.5)，从而完成了该引理的证明。 □

6.2 函数 $f_{k,r}(x)$ 的性质

回顾(4.1)，对于每个 $k > 0$，$r \ge \frac{1}{k}$，我们定义了

$$f_{k,r}(x) = 1 - (1-x)^{\frac{1}{rk}} + (1-x)^{\frac{1}{rk}}(1-(1-x)^{\frac{rk-1}{rk}})^k.$$

现在我们来确立这些函数在定义域 $[0,1]$ 上的一些性质。

命题 6.4。对于每个 $k > 0$ 和 $r \ge \frac{1}{k}$，都有 $\frac{1}{rk} < f_{k,r}(x) \le k$ 对所有 $x \in (0,1)$ 均成立。特别地，$f_{k,r}(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增。

证明。设

$$g(x) = -f_{k,r}(1-x) = -1 + x^{\frac{1}{rk}} - x^{\frac{1}{rk}}(1-x^{1-\frac{1}{rk}})^k.$$

那么 $g(x) = f_{k,r}(1-x)$，因此只需证明对所有 $x \in (0,1)$，$0 < g'(x) \le k$。

假设 $x \in (0,1)$。我们有

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{rk}x^{\frac{1}{rk}-1} - \left(\frac{1}{rk}x^{\frac{1}{rk}-1}(1-x^{1-\frac{1}{rk}})^k + x^{\frac{1}{rk}}k(1-x^{1-\frac{1}{rk}})^{k-1}\left(-\left(1-\frac{1}{rk}\right)x^{-\frac{1}{rk}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{rk}x^{\frac{1}{rk}-1}\left(1-(1-x^{1-\frac{1}{rk}})^k\right) + \left(k-\frac{1}{r}\right)(1-x^{1-\frac{1}{rk}})^{k-1}. \end{aligned}$$

It 显然，$(k-\frac{1}{r})(1-x^{1-\frac{1}{rk}})^{k-1}\in(0,k-\frac{1}{r}]$（这里需要 $rk\geq 1$），因此只需证明

$$h(x):=\frac{1}{rk}x^{\frac{1}{rk}-1}\left(1-(1-x^{1-\frac{1}{rk}})^k\right)\in\left[\frac{1}{rk},\frac{1}{r}\right].$$

事实上，代入 $u=x^{1-\frac{1}{rk}}\in[0,1]$。于是

$$h(x)=\frac{1}{rk}\cdot\frac{1-(1-u)^k}{u}=\frac{1}{rk}\cdot\frac{1-(1-u)^k}{1-(1-u)}=\frac{1}{rk}(1+(1-u)+\cdots+(1-u)^{k-1})\in\left[\frac{1}{rk},\frac{1}{rk}\cdot k\right]=\left[\frac{1}{rk},\frac{1}{r}\right],$$

证明完毕。 □

我们利用命题 6.4 证明引理 5.12。

引理 *5.12* 的证明。这可由引理 2.8 和命题 6.4直接得到。 □

在证明 $f_{k,r}(x)$ 的更多性质之前，我们需要先建立两个技术引理。

引理 6.5。设 $x\in(0,1)$ 且 $k>1$。对每个 $u\in[1-x,\ 1]$, 定义

$$p(u)=-1+\left(1-\frac{1-x}{u}\right)^{k-1}\left(1+(k-1)\frac{1-x}{u}\right).$$

那么 $p(u)\leq p(1)=-1+x^{k-1}(1+(k-1)(1-x))$.

证明。 只需证明 $p(u)$ 在区间 $[1-x,1]$ 上递增。令 $t=1-\frac{1-}{x\,u}$，并注意到$t\in[0,x]$。于是 ——

$$p(u)=-1+t^{k-1}(k-(k-1)t)=-1+kt^{k-1}-(k-1)t^k.$$

将左边记为 $h(t)$，则有

$$h'(t)=k(k-1)t^{k-2}-k(k-1)t^{k-1}\geq 0$$

对于$t\in[0,x]$,，因此 $h(t)$ 在 $[0,x]$ 上递增。由于 $u\mapsto 1-\frac{1-}{x\,u}$在 $[1-x,1]$, 上递增，因此 $p(u)=h(1-\frac{1-}{x\,u})$ 在该区间上也递增。 □

引理 6.6。 设 $x\in[0,1]$ 且 $k>1$。则

$$1-x^{k-1}(1+(k-1)(1-x))\geq(1-x)^2\min\left\{1,\frac{k(k-1)}{2}\right\}.$$

证明。 令

$$f(x)=\frac{1-x^{k-1}(1+(k-1)(1-x))}{(1-x)^2}=\frac{1-kx^{k-1}+(k-1)x^k}{(1-x)^2}.$$

只需证明 $f(x)\geq\min\{1,\frac{k(k-1)}{2}\}$ 对于 $x\in[0,1)$ 成立即可。以下假设 $x\in[0,1)$。

通过直接计算,

$$f'(x)=\frac{x^{k-2}(-k(k-1)+2k(k-2)x-(k-2)(k-1)x^2)+2}{(1-x)^3}.$$

令 $g(x)=x^{k-2}(-k(k-1)+2k(k-2)x-(k-2)(k-1)x^2)+2$，从而 $f'(x)=\frac{g(x)}{(1-x)^3}$。我们断言，当 $k\leq 2$ 时，$g(x)\leq 0$，因此 $f'(x)\leq 0$；而当 $k>2$ 时，$g(x)\geq 0$，因此 $f'(x)\geq 0$。事实上，

$$g'(x)=x^{k-3}(-k(k-1)(k-2)+2k(k-1)(k-2)x-k(k-1)(k-2)x^2)=-k(k-1)(k-2)x^{k-3}(1-x)^2.$$

Since $x\in[0,1)$，这意味着 $g'(x)\geq 0$当 $k\leq 2$ 时，以及 $g'(x)\leq 0$当 $k>2$ 时。因此，当 $k\leq 2$ 时，我们有 e

$$g(x)\leq g(1)=-k(k-1)+2k(k-2)-(k-2)(k-1)+2=0,$$

且当 $k>2$ 时，我们有

$$g(x)\geq g(1)=0.$$

这证明了我们的论断。

回到对$f(x)$的讨论，我们已经证明，如果$k > 2$，那么$f(x)$关于 $[0,1)$递增，因此

$$f(x) \geq f(0) = 1.$$

另一方面，如果$k \leq 2$，那么$f(x)$关于 $[0,1)$递减，因此

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1 - kx^{k-1} + (k-1)x^k}{(1-x)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-(k-1)kx^{k-2} + (k-1)kx^{k-1}}{-2(1-x)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-(k-1)k((k-2)x^{k-3} - (k-1)x^{k-2})}{2} = \frac{k(k-1)}{2}, \end{aligned}$$

其中，在计算极限时我们两次使用了洛必达法则。由于在这两种情况下都有$f(x) \geq \min\{1, \frac{k(k-1)}{2}\}$，证毕。 □

现在我们可以证明$f_{k,r}(x)$的另外两个性质。

命题 6.7. 设 $k > 0$，且 r, r' 为实数，满足 $\frac{1}{k} \leq r < r'$。则对于所有 $x \in (0,1)$，都有 $f_{k,r}(x) < f_{k,r'}(x)$。

证明。 证明中，我们固定x和k，并将r视为变量。代入$u = (1-x)^{\frac{1}{rk}}$，得到

$$f_{k,r}(x) = 1 - (1-\delta)^{\frac{1}{rk}} + (1-x)^{\frac{1}{rk}}(1-(1-x)^{\frac{rk-1}{rk}})^k = 1 - u + u\left(1 - \frac{1-x}{u}\right)^k.$$

我们将左侧记为 g (u)，并将其视为 u 的函数。注意，$u \in [1-x, 1]$。由于函数 $r \mapsto (1-x)^{\frac{1}{rk}}$ 单调递增，只需证明 g (u) 在 $[1-x, 1]$ 上递减。通过直接计算可得，$g'(u)$ 恰好是引理 6.5 中的 p(u)，因此根据该引理，$g'(u) \leq -1 + x^{k-1}(1 + (k-1)(1-x))$。根据引理 6.6，$-1 + x^{k-1}(1 + (k-1)(1-x)) \leq -(1-x)^2 \min\left\{1, \frac{k(k-1)}{2}\right\} < 0$，因此结论成立。 □

注记 6.8。 绘制不同 r, k 下 $f_{r,k}(x)$ 的图像后可以看出，只要 $k < k'$，就有 $f_{r,k}(x) \geq f_{r,k'}(x)$。不过，我们不知道该如何证明这一点。

定理 6.9。 令 $x \in [0,1]$，并令 $k > 1$。则对每个 $r \geq \frac{1}{k}$，都有

$$f_{k,r}(x) \geq x^k + C_{6.9}(k)\frac{x(1-x)^2}{r},$$

其中 $C_{6.9}(k) = \min\{\frac{1}{k}, \frac{k-1}{2}\}$。

证明。 当 $x = 0, 1$ 时，定理显然成立，因此设 $x \in (0,1)$。如同 命题 6.7 的证明中一样，我们代入 $u = (1-x)^{\frac{1}{rk}}$，从而 $u \in [1-x, 1)$。于是

$$1 - (1-x)^{\frac{1}{rk}} + (1-x)^{\frac{1}{rk}}(1-(1-x)^{\frac{rk-1}{rk}})^k - x^k = 1 - u + u\left(1 - \frac{1-x}{u}\right)^k - x^k.$$

我们将右侧记为 $g(u)$，并将其视为 u 的函数。为了证明定理，我们需要证明

$$g(u) \geq C_{6.9}(k)\frac{x(1-x)}{r} \qquad \forall u \in [1-x, 1).$$

以下假设 $u \in [1-x, 1)$。

通过直接计算，$g'(u)$ 就是 $p(u)$ 函数，见 引理 6.5。因此，根据该引理和引理 6.6，

$$g'(u) \leq g'(1) = -1 + x^{k-1}(1 + (k-1)(1-x)) \geq -\min\left\{1, \frac{k(k-1)}{2}\right\}(1-x)^2 = -kC_{6.9}(k)(1-x)^2,$$

或者更确切地说，

$$-g'(u) \geq kC_{6.9}(k)(1-x)^2.$$

现在，注意到 $g(1)=0$。因此，

$$g(u)=(-g(1))-(-g(u))=\int_u^1 -g'(t)\,dt\geq\int_u^1 kC_{6.9}(k)(1-x)^2\,dt$$
$$=(1-u)kC_{6.9}(k)(1-x)^2=(1-(1-x)^{\frac{1}{rk}})kC_{6.9}(k)(1-x)^2=(\star).$$

利用 引理 2.10 和假设 $rk\geq 1$，我们进一步得到

$$(\star)\geq\frac{x}{rk}\cdot kC_{6.9}(k)(1-x)^2=C_{6.9}(k)\frac{x(1-x)^2}{r},$$

定理得证。 □

与散布器的关系

在本附 录中，我们将 [RTS00] 中关于分散器的结果转换为限制器的表述 .

一个具有 N 个顶点和 M 条边的超图 H 称为 (K ,ϵ)-分散器（0 ≤ K ≤ N，0 ≤ ε ≤ 1），如果任意包含 K 个或更多顶点的集合都与多于 $(1-\varepsilon)$M 条边相接触 [RTS00，定义 1.2].[15] 分散器对于随机提取器的构造很重要；例如参见 [Sha04] 和 [Vad12，问题 6.20]，。不难看出，H 是一个 (K ,ϵ)-分散器，当且仅当它是一个 (ϵ,1 − K N)-限制器。换言之，对于具有 N 个顶点的超图，成为一个 (ϵ, p)-限制器等同于成为一个 (⌈N (1 − p)⌉,ϵ)-分散器。然而，研究限制器时，重要的参数是 ϵ、（平均）均匀度 k 和稀疏度 r = M N；而研究分散器时，人们通常希望在尽可能增大 M 的同时，使平均度 D 尽可能小。（后者等价于尽可能减小 lg(^{DN} M)，也就是分散器的熵损失。）大多数文献还要求分散器是正则的。

—

在 [RTS00中，定理 1.5(a)、1.10(a)], 作者确定了参数D、N、M的基本最优界，使得（K，ϵ）-分散器存在。通过用限制器的语言对其进行解释，我们得到以下结果。

定理 A.1 （源自 [RTS00，定理 1.5(a)]）。**如果** $p\in$（0,1），$r>0$，$k>1$ 且 $\epsilon\in$（0，$\frac{1}{2}$）。若 H 是一个（ϵ，p）-限制器，具有 $n\geq\max\{4k$、$\frac{1}{1-p^2}\}$ 个顶点和 $r\,n$ 条边，且平均均匀度为 k，则

$$r\geq\Omega(k^{-1}\epsilon^{-1}\ln((1-p)^{-1})),$$

或者等价地，$\epsilon\geq\Omega$（$k^{-1}r^{-1}\ln$（（$1-p$）$^{-1}$）。

不过请注意，我们必须有 $\epsilon\geq p^k-2^{k\,n}$ 根据定理 1.4，因此 ϵ 不能趋近于 0。

证明。令 m = r n，且 K = ⌈(1 − p)n⌉。如前所述，H 是一个平均度为 d = r k 的 (K ,ϵ)-分散器（命题 2.6）。我们的假设 n ≥ 4k 和 $\epsilon\leq\frac{1}{2}$意味着 d = r k ≤ rn 4 = (1−ϵ)m 2 。因此，我们可以应用 [RTS00，定理 1.5(a)]，得到 r k = d ≥ $\Omega(\epsilon^{-1}\ln(\text{n K}))=\Omega(\epsilon^{-1}\ln((1-\text{p})^{-1}))$（在最后一个等式中，我们用了 n ≥ $\frac{1}{1-\text{p}^2}$）。两边除以 k，即得定理。 □

定理 A.2 (由 [RTS00，定理 1.10(a)]推得)。 取定 $0<c<1$，令 n 为自然数，且令 $p\in(0,1)$ 且 $k>1$ 为实数。则：

(i) 对于每个 $\epsilon\geq e^{-(1-p)k+1}$，存在一个 ($\epsilon$，$p$)-限制器，其具有 n 个顶点、平均均匀度 $\leq k$ 和稀疏度

$$r\leq\frac{\epsilon^{-1}(\ln((1-p)^{-1})+1)+1}{k-(1-p)^{-1}(\ln(\epsilon^{-1})+1)}+\frac{1}{n}.$$

(ii) 对于每个 $\frac{1}{(1-c)k}+\frac{1}{n}<r\leq\frac{1}{(1-c)k}[e^{c(1-p)k-1}\ln((1-p)^{-1})+1)+1]$，存在一个具有 n 个顶点、平均均匀度为 $\leq k$、稀疏度为 $\leq r$ 的 (ϵ,p)-限制器，其中

$$\epsilon\leq\frac{\ln((1-p)^{-1})+1}{(1-c)k(r-\frac{1}{n})-1}.$$

[15]分散器 通常定义为双侧图。从超图的角度来看，只需考虑左侧即可与我们的观点等价 of 双侧 将左侧作为图像的顶点，右侧作为超边。

注意　在第 (i) 部分中，若假设 $\epsilon \geq \exp(-c[p(k+1)+1])$，则可得到更简洁的界

$$r \leq \frac{\epsilon^{-1}(\ln((1-p)^{-1})+1)+1}{(1-c)k} + \frac{1}{n}.$$

应用 (ii) 时，如果可能，最好选择满足 r 约束的最小 $c>0$。我们进一步指出，(ii) 是由 (i) 推导而来的，因此不能用它将 ϵ 降至 $e^{-(1-p)k+1}$ 以下。

证明。令 $m \in \mathbb{N}$ 并设 $K = \lceil (1-p)n \rceil$ 且 $r = mn$。我们回顾一下，根据 [RTS00，定理 1.10(a)]，，对每个 $\epsilon > 0$，都存在一个正则 (K,ϵ)-分散器，它有 n 个顶点、m 条超边，且度为

$$d = \left\lceil \epsilon^{-1}(\ln(n/K)+1) + \frac{m}{K}(\ln(\epsilon^{-1})+1) \right\rceil \leq \epsilon^{-1}(\ln((1-p)^{-1})+1) + \frac{r}{1-p}(\ln(\epsilon^{-1})+1)+1 \tag{A.1}$$

这个分散器同时也是一个 (ϵ,p)-限制器，其平均均匀度为 dr。

现在，为了证明 (i)，我们只需固定 ϵ，并应用上述结论，取能保证平均均匀度 dr 不超过 k 的最小 $m = rn$。为此，只需确保

$$rk \leq \epsilon^{-1}(\ln((1-p)^{-1})+1) + \frac{r}{1-p}(\ln(\epsilon^{-1})+1)+1. \tag{A.2}$$

求解 r，这等价于

$$r \geq \frac{\epsilon^{-1}(\ln((1-p)^{-1})+1)+1}{k-(1-p)^{-1}(\ln(\epsilon^{-1})+1)} =: r_0.$$

由于 m 必须是整数，因此不能取 $m = r_0 n$，而必须取 $m = \lceil r_0 n \rceil$。这使得最终的稀疏度 $r = \lceil r_0 n \rceil / n$ 最多增加 $1/n$，于是 (i) 得证。（我们指出，如果不假设 $\epsilon \geq e^{-(1-p)k+1}$，那么不存在满足 $r>0$ 使得 (A.2) 成立。）

接下来，我们由 (i) 推导出 (ii)。根据我们的假设 $r > 1/(1-c)k + 1/n$，这一定义是有意义的）。我们对 r 所作的上界假设保证了 $\epsilon \leq e^{-c(1-p)k+1}$，因此由 (i) 可知，存在一个 (ϵ, p)-限制器，其定义在 n 个顶点上，稀疏度至多为

$$\frac{\epsilon^{-1}(\ln((1-p)^{-1})+1)+1}{k-(1-p)^{-1}(\ln(\epsilon^{-1})+1)} + \frac{1}{n} \leq \frac{(1-c)k(r-\frac{1}{n})}{k-ck} \leq r,$$

其中，在第一个不等式中，我们使用了 $\epsilon \leq e^{-c(1-p)k+1}$。这正是我们想要的。（我们指出，得到的 ϵ 与最优值相差不远，因为对于 $\epsilon \leq 1/rk-1$，(A.2) 显然不成立。）　　□

备注 A.3. 遗憾的是，我们无法使用 [RTS00，定理 1.10(a)] 来推导稀疏 (ϵ, p)- 限制器 的存在，其平均均匀度为 k 且 $\epsilon \leq e^{-(1-p)k}$。实际上，在这种情况下，定理 A.2 的证明会因以下不等式而失效

$$rk = d \leq \epsilon^{-1}(\ln((1-p)^{-1})+1) + \frac{r}{1-p}(\ln(\epsilon^{-1})+1),$$

若成立，则可推出 (A.1)；当 $\epsilon < e^{-(1-p)k+1}$ 时，它对 r 没有正解。

参考文献

[AB09] Sanjeev Arora 和 Boaz Barak。《计算复杂性：现代方法》。剑桥大学出版社，2009年。[AFWZ95] Noga Alon、Uriel Feige、Avi Wigderson 和 David Zuckerman。去随机化图乘积。计算复杂性，5：60–75，1995年。[AJT19] Vedat Levi Alev、Fernando Granha Jeronimo 和 Madhur Tulsiani。高维扩张子上的约束满足问题近似算法。载于 *FOCS*，2019年。[Alo86] Noga Alon。特征值与扩张子。*Combinatorica*，6(2)：83–96，1986年。

[AP23] Vedat Levi Alev 和 Ori Parzanchevski。顺序扫描与高维扩展。CoRR，abs/2312.02089，2023年。[CMP+22] Gil Cohen、Dor Minzer、Shir Peleg、Aaron Potechin 和 Amnon Ta-Shma。扩张子随机游走：一般情形与局限。载于第49届自动机、语言与程序设计国际会议（ICALP 2022），第43–1页。Schloss Dagstuhl–Leibniz信息学中心，2022年。[CPTS21] Gil Cohen、Noam Peri 和 Amnon Ta-Shma。扩张子随机游走：傅里叶分析方法。载于第53届ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，第1643–1655页，2021年。[DD19] Yotam Dikstein 和 Irit Dinur。分层集合系统上的一致性测试定理。2019年。[DH24] Yotam Dikstein 和 Max Hopkins。高维扩展子上的Chernoff界与反超契约性。载于2024年IEEE第65届年度计算机科学基础研讨会（FOCS），第870–919页。IEEE，2024年。[Gil98] David Gillman。扩展子图上随机游走的切尔诺夫界。SIAM计算学杂志，27(4)：1203–1220，1998年。[GK21] Venkatesan Guruswami 和 Vinayak M Kumar。黏性随机游走的伪二项性。载于第12届理论计算机科学创新会议（ITCS 2021），第48–1页。Schloss Dagstuhl–Leibniz信息学中心，2021年。[GLL22] Tom Gur、Noam Lifshitz 和 Siqi Liu。高维扩张子上的超契约性。载于第54届ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，第176–184页，2022年。[Gol11] Oded Goldreich。《采样器选辑：从计算角度看抽样》。载于《复杂性研究：随机性与计算交互作用杂谈》，与 Lidor Avigad、Mihir Bellare、Zvika Brakerski、Shafi Goldwasser、Shai Halevi、Tali Kaufman、Leonid Levin、Noam Nisan、Dana Ron、Madhu Sudan、Luca Trevisan、Salil Vadhan、Avi Wigderson、David Zuckerman 合作，第302–332页。Springer，2011年。[Gol23] Louis Golowich。扩张子游走的一个新贝里–埃森定理。载于第55届ACM计算理论研讨会论文集，第10–22页，2023年。[GV22] Louis Golowich 和 Salil Vadhan。扩张子随机游走对于对称函数和置换分支程序的伪随机性。载于第37届计算复杂性会议（CCC 2022），第27–1页。Schloss Dagstuhl–Leibniz信息学中心，2022年。[Hea08] Alexander D Healy。在NC中实现随机性高效采样。Computational Complexity，17：3–37，2008年。[HLM+25] Jun-Ting Hsieh、Alexander Lubotzky、Sidhanth Mohanty、Assaf Reiner 和 Rachel Yun Zhang。显式无损顶点扩展子。arXiv预印本，arXiv:2504.15087，2025年。[Imp95] Russell Impagliazzo。针对具有一定难度问题的硬核分布。载于IEEE第36届年度计算机科学基础研讨会论文集，第538–545页。IEEE，1995年。[Kah95] Nabil Kahale。正则图的特征值与扩展性。ACM学报（JACM），42(5)：1091–1106，1995年。[Kah97] Nabil Kahale。马尔可夫链的大偏差界。Combinatorics, Probability and Computing，6(4)：465–474，1997年。[Klo18] Benoît Kloeckner。具有谱隙的马尔可夫链的有效极限定理，2018年。[Klo19] Benoît Kloeckner。具有谱隙的马尔可夫链的有效贝里–埃森界与集中界。应用概率年刊，29(3)：1778–1807，2019年。

[Kün98] Hans Rudolf Künsch。《超几何分布与二项分布的差异》。苏黎世联邦理工学院注，1998年。[Lez01] Pascal Lezaud。《马尔可夫过程的 Chernoff 界与 Berry–Esséen 不等式》。*ESAIM*：概率与统计，5：183–201，2001年。[LPR22] Anand Louis、Rameesh Paul 和 Arka Ray。《基于单纯复形随机游走的超图稀疏割》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2212.13406*，2022年。[LPS86] Alexander Lubotzky、Ralph Phillips 和 Peter Sarnak。《显式扩张子与 Ramanujan 猜想》。载于*STOC*，第240–246页，1986年。[Mor94] Moshe Morgenstern。《每个素数幂 q 都存在正则 Ramanujan 图的显式构造》。组合理论杂志*B*辑，62(1)：44–62，1994年。[Mul18] Wolfgang Mulzer。《Chernoff 界的五种证明及其应用》。*arXiv* 预印本 *arXiv:1801.03365*，2018年。[NTS99] Noam Nisan 和 Amnon Ta-Shma。《提取随机性：综述与新构造》。计算机与系统科学杂志，58(1)：148–173，1999年。[RTS00] Jaikumar Radhakrishnan 和 Amnon Ta-Shma。《分散器、提取器和深度二超集中器的界》。13(1)：2–24，2000年1月。[Sha04] Ronen Shaltiel。《显式构造提取器的最新进展》。理论计算机科学当前趋势：新世纪的挑战，第*1*卷：算法与复杂性；第*2*卷：形式模型与语义，第189–228页，2004年。[TSZ24] Amnon Ta-Shma 和 Ron Zadicario。《集合极不平衡时的扩展图命中性质》。载于近似、随机化与组合优化：算法与技术（*APPROX/RANDOM 2024*），第31–1页。Schloss Dagstuhl–Leibniz信息学中心，2024年。[Vad12] Salil P Vadhan。《伪随机性》。理论计算机科学基础与趋势，7(1–3)：1–336，2012年。[Was13] Larry Wasserman。《统计学全书：统计推断简明课程》。施普林格科学与商业媒体，2013年。